МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Е. А. Морозова, Е. Г. Скляренко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методическое пособие

Москва, 2004 год

Е. А. Морозова, Е. Г. Скляренко.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. Методическое пособие

В книге разобраны около 100 типовых задач различной трудности, охватывающих почти все разделы программы. По всем разделам программы для самостоятельной проработки рекомендованы параграфы из книг: П. С. Александров, «Лекции по аналитической геометрии», А. П. Веселов, Е. В. Троицкий, «Лекции по аналитической геометрии», и задачи из «Сборника задач по аналитической геометрии и линейной алгебре» под ред. Ю. М. Смирнова. Приведено более 20 вопросов для самоконтроля.

Пособие предназначено для студентов математических специальностей университетов.

Предисловие

В основу настоящего издания положены методические принципы, разработанные П. С. Александровым и А. С. Пархоменко. Методические указания написаны по новой программе (М.: 1986). К каждому пункту программы указаны параграфы и номера задач из следующих учебников:

[1] Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968. 911 с.

[2] Веселов А. П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002. 160 с.

[3] Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. Под ред. Ю. М. Смирнова. М.: Изд-во физико-математической литературы, 2000, 336 с.

В тексте ссылки на литературу даются цифрами в квадратных скобках. Прежде чем приступить к самостоятельному решению задач из [3], необходимо проработать текст [1] и [2] и разобрать задачи из [1].

К некоторым пунктам программы сделаны дополнительные замечания, имеющие своей целью обратить внимание студентов на трудности, связанные с разбираемым материалом.

При решении примеров следует учесть, что если это специально не оговорено, то имеется в виду прямоугольная система координат.

1 Векторная алгебра

1.1 Векторы. Операции над векторами

Свободные векторы. Операции над векторами: сложение векторов, умножение вектора на число.

[1; гл. 2, §1, 2; задачи 2, 5]
[2; 1.1]
[3; 32—38, 42, 45—48].

Пример 1. *Для любого конечного набора точек* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *(в пространстве) существует и единственная точка* M*, для которой*

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \mathbf{0}.$$

Решение. Пусть O — любая точка. Предположим, что M существует, тогда $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_i}$. Просуммируем по i, получим $n \cdot \overrightarrow{OM} = \sum_i \overrightarrow{OA_i}$ или $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{n} \sum_i \overrightarrow{OA_i}$. Этим установлена единственность. Проверка показывает, что точка M — искомая: $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}$ и $\sum_i \overrightarrow{MA_i} = \mathbf{0}$. □

Замечание. Этот пример может быть полезен при решении задач 45—48 из [3] и других.

1.2 Базисы и координаты

Линейная зависимость векторов, геометрический смысл линейной зависимости. Проекции векторов. Координаты вектора. Радиус-векторы точек. Аффинная система координат.

[1; гл. 2, §4—7]
[2; 1.2]
[3; 5, 6, 12, 41, 46, 49, 51, 54, 55, 56]

1.3 Деление направленного отрезка в данном отношении

[1; гл. 1, §6, гл. 3, §3; задачи 1, 3, 4]
[2; 1.3]
[3; 7—13, 58]

Пример 2. *В точках $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ помещены массы m_1 и m_2. Найти координаты (x, y, z) центра тяжести этой системы материальных точек (система координат аффинная).*

Решение. Центр тяжести C лежит между точками A и B и делит направленный отрезок AB в отношении $\frac{m_2}{m_1}$. Поэтому для радиусов-векторов $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеем:

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} + \frac{m_2}{m_1} \cdot \overrightarrow{OB}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1\overrightarrow{OA} + m_2\overrightarrow{OB}}{m_1 + m_2},$$

следовательно,

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

аналогично для y и z. □

Пример 3. *Найти точку пересечения медиан треугольника, вершины которого находятся в точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ (система координат аффинная).*

Решение. Пусть S — точка пересечения медиан треугольника ABC. Обозначим через D середину отрезка BC. Координаты точки D будут:

$$x_D = \frac{x_2 + x_3}{2}; \quad y_D = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Точка S делит направленный отрезок $\overrightarrow{AD}$ в отношении $2 : 1$, поэтому координаты точки S будут:

$$x_S = \frac{x_1 + 2x_D}{1 + 2} = \frac{x_1 + 2\frac{x_2 + x_3}{2}}{3} = \frac{x_1 + x_3 + x_3}{3}$$

и аналогично

$$y_S = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

□

Замечание. Методом полной индукции доказывается, что координата x центра тяжести системы из n точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, в которых помещены массы, соответственно равные $m_1, m_2, \ldots m_n$, определяется по формуле

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n},$$

аналогично для y и z.

Пример 4. *Три последовательные вершины трапеции $ABCD$ находятся в точках $A(-3,-2,-1)$, $B(1,2,3)$, $C(9,6,4)$. Найти четвёртую вершину D этой трапеции, зная, что длина основания $|\overrightarrow{AD}|$ равна 15. Найти также точку M пересечения диагоналей трапеции и точку S пересечения её боковых сторон.*

Решение.

$$\overrightarrow{BC}(8,4,1), \quad |\overrightarrow{BC}| = 9, \quad |\overrightarrow{AD}| = 15, \quad \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BC}|} = \tfrac{5}{3}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ параллельны (как основания трапеции) и одинаково направлены (по условию, $\overrightarrow{AB}$ — боковая сторона трапеции), то в силу предыдущего

$$\overrightarrow{AD} = \tfrac{5}{3}\overrightarrow{BC} = \left(\tfrac{40}{3}, \tfrac{20}{3}, \tfrac{5}{3}\right),$$

и поэтому $D = \left(\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Так как треугольник AMD подобен треугольнику CMB, то

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BC}} = \tfrac{5}{3}.$$

По формуле деления отрезка $(\overrightarrow{AC})$ в данном отношении

$$M = \left(\tfrac{9}{2}, 3, \tfrac{17}{8}\right);$$

из подобия треугольников ASD и BSC находим:

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}} = -\tfrac{5}{3}.$$

Снова применяя формулу деления отрезка в данном отношении к отрезку $\overrightarrow{AB}$, находим $S(7,8,9)$. $\square$

1.4 Скалярное произведение

Определение скалярного произведения и его основные свойства. Выражение скалярного произведения двух векторов через координаты этих векторов. Длина векторов. Угол между векторами. Условие перпендикулярности векторов. Направляющие косинусы.

[1; гл. 4, §1 (п. 2), §2, задачи 7—12]
[2; 1.4]
[3; 90, 93—95, 99, 103, 104, 109, 110, 112]

Пример 5. *Найти координаты центра M и радиус r окружности, описанной около треугольника с вершинами $A(-2,-2)$, $B(2,6)$, $C(5,-3)$.*

Решение. Пусть $M(x,y)$ — центр окружности, описанной около треугольника ABC, тогда

$$|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}| = |\overrightarrow{CM}|,$$

или

$$|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2 = |\overrightarrow{CM}|^2,$$

или

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2,$$

или

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2, \\ (x-2)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 8x + 16y - 32 = 0, \\ 6x - 18y + 6 = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x + 2y - 4 = 0, \\ x - 3y + 1 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = 2$, $y = 1$. Центр $M(2, 1)$. Радиус

$$r = |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{(2+2)^2 + (1+2)^2} = 5.$$

□

Пример 6. *Найти вектор* $\mathbf{c}$, *являющийся ортогональной проекцией вектора* $\mathbf{a}(8, 4, 1)$ *на плоскость, перпендикулярную вектору* $\mathbf{b}(2, -2, 1)$.

Решение. Вектор $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ коллинеарен вектору $\mathbf{b}$, поэтому $\mathbf{a} - \mathbf{c} = (2t, -2t, t)$, откуда $\mathbf{c} = (8 - 2t, 4 + 2t, 1 - t)$. Имеем $(\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$, или $2(8 - 2t) - 2(4 + 2t) + 1 - t = 9 - 9t = 0$, откуда $t = 1$. □

Ответ: $\mathbf{c} = (6, 6, 0)$.

Пример 7. *Найти сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора* $\mathbf{a}$ *на стороны равностороннего треугольника* ABC.

Решение. Выберем систему координат: начало в точке A, векторы $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, тогда $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 1$, $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1||\mathbf{e}_2| \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Пусть в этой системе вектор $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$. Вычислим проекцию $\mathbf{a}_{\overrightarrow{AB}}$ вектора $\mathbf{a}$ на $\overrightarrow{AB}$:

$$\mathbf{a}_{\overrightarrow{AB}} = |\mathbf{a}| \cos\angle(\mathbf{e}_1, \mathbf{a}) \cdot \mathbf{e}_1 = |\mathbf{a}| \cdot \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{e}_1 = \left(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2\right)\mathbf{e}_1.$$

Аналогично вычислим проекцию $\mathbf{a}_{\overrightarrow{AC}}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$ и проекцию $\mathbf{a}_{\overrightarrow{CB}}$ на вектор $\overrightarrow{CB} = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\overrightarrow{AC}} &= \left(\tfrac{1}{2}a_1 + a_2\right)\mathbf{e}_2;\\
\mathbf{a}_{\overrightarrow{CB}} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\
&= (a_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + a_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) - a_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) - a_2(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2))(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\
&= \left(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2 - \tfrac{1}{2}a_1 - a_2\right)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\
&= \left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2\right)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2).
\end{aligned}$$

Сложим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{\overrightarrow{AB}} + \mathbf{a}_{\overrightarrow{AC}} + \mathbf{a}_{\overrightarrow{CB}}\\
&\qquad = \left(a_1 + \tfrac{1}{2}a_2\right)\mathbf{e}_1 + \left(\tfrac{1}{2}a_1 + a_2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\tfrac{1}{2}a_1 - \tfrac{1}{2}a_2\right)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)\\
&\qquad = \tfrac{3}{2}(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) = \tfrac{3}{2}\mathbf{a}.
\end{aligned}$$

□

1.5 Площадь, объём и ориентация

Понятие об ориентации плоскости и пространства. Угол от одного вектора до другого на плоскости. Площадь ориентированного параллелограмма, объём ориентированного параллелепипеда.

[1; гл. 4, §3, гл. 7, §1]
[2; 1.5]
[3; 72–79, 100–102, 120, 124, 126]

Пример 8. *Даны три вектора*

$$\overrightarrow{OA} = (8, 4, 1), \quad \overrightarrow{OB} = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{OC} = (4, 0, 3),$$

отложенные от одной точки O. Найти направляющий (единичный) вектор луча, выходящего из точки O и образующего с рёбрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ трёхгранного угла OABC равные острые углы. Установить, лежит ли луч с найденным направляющим вектором внутри или вне трёхгранного угла OABC.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OD} = (x, y, z)$ — единичный вектор, образующий с рёбрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ равные острые углы. Тогда будут равны между собой и косинусы этих углов, то есть

$$\frac{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OD}|} = \frac{(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})}{|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|},$$

или в координатах

$$\tfrac{8}{9}x + \tfrac{4}{9}y + \tfrac{1}{9}z = \tfrac{2}{3}x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}z,$$

так как $|\overrightarrow{OD}| = 1$.

Приравнивая первое и третье выражения, стоящие в этом равенстве, второму, получим после преобразований систему уравнений

$$\begin{cases} x + 5y - z = 0 \\ x + 5y - 2z = 0, \end{cases}$$

откуда находим $z = 0$. Полагая, например, $y = 1$, найдём $x = -5$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что вектор $\overrightarrow{OD} = (-5, 1, 0)$

образует с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равные тупые углы, а вектор $\overrightarrow{OD''} = -\overrightarrow{OD} = (5, -1, 0)$ – равные острые углы.

Так как $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{26}$, то единичным вектором, удовлетворяющим всем условиям задачи, будет вектор

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OD''}}{|\overrightarrow{OD''}|} = \left(\tfrac{5}{\sqrt{26}}, -\tfrac{1}{\sqrt{26}}, 0\right).$$

Говорят, что луч, выходящий из вершины трёхгранного угла, лежит внутри трёхгранного угла, если он лежит по ту же сторону от плоскости каждой грани трёхгранного угла, что и ребро, не принадлежащее этой грани.

Чтобы установить, лежит ли луч с направляющим вектором $\overrightarrow{OD}$ внутри или вне трёхгранного угла $OABC$, сравним с ориентацией векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ориентацию каждой из троек векторов

$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OD},$$
$$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OC},$$
$$\overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}.$$

Детерминант, составленный из координат векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ в этом порядке, будет

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48 < 0.$$

Детерминант, составленный из векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD''}$ (в этом порядке), есть

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Отсюда следует, что лучи с направляющими векторами $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD''}$ лежат по разные стороны от грани AOB, то есть луч, образующий с рёбрами трёхгранного угла $OABC$ равные острые углы, лежит вне этого трёхгранного угла. □

1.6 Векторное произведение двух векторов, смешанное произведение трёх векторов

[1; гл. 9, §4 (п. 1.2)]
[2; 1.5]
[3; 116—127, 133—140, 144]

Пример 9. *Доказать, что для произвольных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *в пространстве имеет место равенство:*

$$[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Решение. Выберем ортонормированную систему координат так, чтобы $\mathbf{b} = (b,0,0)$, $\mathbf{c} = (c_1,c_2,0)$, $\mathbf{a} = (a_1,a_2,a_3)$. Вычислим векторное произведение $[\mathbf{b},\mathbf{c}]$, $[\mathbf{b},\mathbf{c}] = b_1c_2\mathbf{e}_3$, аналогично получим, что $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = a_2b_1c_2\mathbf{e}_1 - a_1b_1c_2\mathbf{e}_2$, прибавим и вычтем $a_1c_1\mathbf{e}_1$, тогда $[\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}]] = (a_1c_1 + a_2c_2)b_1\mathbf{e}_1 - a_1b_1(c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2) = \mathbf{b}(\mathbf{a},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a},\mathbf{b})$. □

Воспользовавшись примером 9, решим примеры 10, 11.

Пример 10. *Для любых трёх векторов доказать равенство*

$$[[\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{a},\mathbf{c}]] = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a}.$$

Решение. Обозначим $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{d}$, тогда из примера 9

$$[\mathbf{d},[\mathbf{a},\mathbf{c}]] = \mathbf{a}(\mathbf{d},\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{d},\mathbf{a}) = \mathbf{a}([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{a},$$

что и требовалось доказать. □

Пример 11. *Доказать тождество:*

$$([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

Решение. Обозначим $[\mathbf{c},\mathbf{d}] = \mathbf{f}$, тогда

$$\begin{aligned} ([\mathbf{a},\mathbf{b}],[\mathbf{c},\mathbf{d}]) &= ([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{f}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{f}]) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},[\mathbf{c},\mathbf{d}]]) \\ &= (\mathbf{a},\mathbf{c}(\mathbf{b},\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b},\mathbf{c})) = (\mathbf{a},\mathbf{c})(\mathbf{b},\mathbf{d}) - (\mathbf{a},\mathbf{d})(\mathbf{b},\mathbf{c}) = \\ &= \begin{vmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{c}) & (\mathbf{a},\mathbf{d}) \\ (\mathbf{b},\mathbf{c}) & (\mathbf{b},\mathbf{d}) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

Пример 12. *Даны плоские углы* $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ *трёхгранного угла* $OABC$.

1) Вычислить косинусы его внутренних двугранных углов A, B, C, *противолежащих граням* BOC, COA, AOB.

2) Даны внутренние двугранные углы A, B, C. *Вычислить косинусы его плоских углов* α, β, γ.

3) Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{|(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)|}.$$

Решение.

1) Обозначим $\mathbf{e}_1 = \frac{\overrightarrow{OA}}{|OA|}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\overrightarrow{OB}}{|OB|}$, $\mathbf{e}_3 = \frac{\overrightarrow{OC}}{|OC|}$, тогда

$$\cos A = -\frac{([\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1])}{|[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]||[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1]|}.$$

Применяя пример 11, получим

$$\cos A = -\frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) \end{vmatrix}}{\sin\gamma\sin\beta} = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Аналогично

$$\cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}; \quad \cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

2) Рассмотрим векторы $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$, $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Тогда

$$\cos\alpha = -\frac{([[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]], [[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]])}{|[[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]]||[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]]|}.$$

Используя пример 10 и определения скалярного и векторного произведений, получим

$$[[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2], [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]] = \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3);$$

$$[[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3]] = -\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3);$$

$$\cos(\pi - \alpha) = \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2}{|\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^2}.$$

С другой стороны, применяя пример 11, получим

$$\cos(\pi-\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} ([\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]) & ([\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]) \\ ([\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3],[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]) & ([\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3],[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]) \end{vmatrix}}{|[[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]]||[[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3],[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3]]|}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \cos B\sin\gamma\sin\alpha & \cos A\sin\gamma\sin\beta \\ \sin^2\alpha & -\cos C\sin\alpha\sin\beta \end{vmatrix}}{\sin B\sin\gamma\sin\alpha\sin C\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha\sin\gamma\sin\beta(-\cos A-\cos B\cos C)}{\sin^2\alpha\sin\gamma\sin\beta\sin B\sin C}.$$

Отсюда

$$\cos\alpha = \frac{\cos A+\cos B\cos C}{\sin B\sin C},$$

аналогично

$$\cos\beta = \frac{\cos B+\cos A\cos C}{\sin A\sin C}, \quad \cos\gamma = \frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}.$$

3) Рассмотрим выражение

$$\frac{|[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]|}{|[[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]]|}.$$

Тогда $|[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]| = |\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_3|\sin\alpha$, $|[[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]]| = |\mathbf{e}_1||(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)|$ по примеру 10. С другой стороны, по определению векторного произведения

$$|[[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]]| = |[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]||[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]|\sin A = \sin\gamma\sin\beta\sin A.$$

Следовательно,

$$\frac{|[\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]|}{|[[\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2],[\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1]]|} = \frac{\sin\alpha}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\beta\sin A}.$$

Откуда получаем

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{|(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)|}.$$

Аналогично

$$\frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C} = \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{|(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)|}.$$

□

Замечание. Рассмотрев двойственный трёхгранный угол $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$, заметим, что его плоские углы дополняют до π соответствующие двугранные углы заданного трёхгранного угла $OABC$. Поэтому ответ пункта 2) получается из ответа пункта 1) одновременной заменой $\cos A \to \cos(\pi-\alpha)$, $\cos\alpha \to \cos(\pi-A)$; $\cos B \to \cos(\pi-\beta)$, $\cos\beta \to \cos(\pi-B)$; $\cos C \to \cos(\pi-\gamma)$, $\cos\gamma \to \cos(\pi-C)$. Это и доказано в пункте 2).

2 Прямые на плоскости

2.1 Различные виды уравнения прямой на плоскости

Общее уравнение прямой; параметрические уравнения; уравнения прямой в отрезках; уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнения прямой проходящей через две точки; уравнения прямой, проходящей через данную точку и параллельной данному вектору; уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярную данному вектору.

[1; гл. 5, §1, 3, 4, задача 14]
[2; 2.1, 2.2]
[3; 202, 203, 204, 207, 208, 211]

2.2 Взаимное расположение прямых

Взаимное расположение двух прямых, пучок прямых, взаимное расположение трёх прямых.

[1; гл. 5, §2, 5, 6, задачи 15—19]
[2; 2.1]
[3; 212—216, 220—222, 225—232]

Пример 13. *Дано уравнение $3x + 4y - 12 = 0$ стороны AB параллелограмма $ABCD$, уравнение $x + 12y - 12 = 0$ диагонали AC и середина $E(-2, 1)$ стороны BC. Найти уравнения трёх сторон.*

Решение. Сторона CD параллельна AB и её уравнение имеет вид $3x + 4y + c = 0$. Результат подстановки координат точки E в уравнение CD должен только знаком отличаться от результата подстановки E в уравнение AB: $3(-2) + 4 + c = -(3(-2) + 4 - 12)$, откуда $c = 16$, то есть имеем уравнение $3x + 4y + 16 = 0$. Сторона BC лежит в пучке прямых CD и AC, поэтому её уравнение есть линейная комбинация с коэффициентами λ и μ уравнений CD и AC: $\lambda(3x + 4y + 16) + \mu(x + 12y - 12) = 0$. Эта прямая проходит через точку $E(-2, 1)$, поэтому $\lambda(3(-2) + 4 \cdot 1 + 16) + \mu(-2 + 12 - 12) = 0$, $14\lambda - 2\mu = 0$, отсюда $\lambda = 1$, $\mu = 7$.

Имеем уравнение BC: $10x + 88y - 68 = 0$, или $5x + 44y - 34 = 0$. Сторона AD параллельна BC поэтому её уравнение имеет вид $5x + 44y + d = 0$. Так как три прямые AB, AC, AD проходят через одну точку, имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -12 \\ 1 & 12 & -12 \\ 5 & 44 & d \end{vmatrix} = 0,$$

откуда находим $d = -48$. Итак, уравнение AD: $5x + 44y - 48 = 0$. □

Замечание. Используя понятие пучка прямых, мы решили задачу, не находя вершин параллелограмма, то есть пересечений прямых. Этот приём полезен при решении аналогичных задач на отыскание уравнений плоскостей в пространстве, проходящих через прямую (пересечение двух плоскостей).

2.3 Линейные неравенства

Две полуплоскости, определяемые данной прямой на плоскости.

[1; гл. 5, §6, задачи 15—19]
[2; 404—406, 408, 409, 412, 450, 453, 454, 458, 461—465, 472, 473]

Пример 14. *Определить положение точки $M(1, 5)$ относительно треугольника ABC с вершинами*

$$A(2, -1), \quad B(3, 1), \quad C(4, 0).$$

Решение. Составляем уравнения прямых AB, BC, CA:

$$2x - y - 5 = 0 \quad (AB);$$
$$x + y - 4 = 0 \quad (BC);$$
$$x - 2y - 4 = 0 \quad (CA).$$

Подставляя координаты точек C, A, B соответственно в уравнения противоположных сторон AB, BC, CA, получим:

$$2 \cdot 4 - 0 - 5 = 3 > 0;$$
$$2 - 1 - 4 = -3 < 0;$$
$$3 - 2 - 4 = -3 < 0.$$

Подставляя координаты точки M в уравнения тех же самых сторон AB, BC и CA, будем иметь

$$2 \cdot 1 - 5 - 5 < 0;$$
$$1 + 5 - 4 > 0;$$
$$1 - 10 - 4 < 0.$$

Значит, точка M лежит по разные стороны с точкой C относительно AB, по разные стороны с точкой A относительно BC и по одну сторону с точкой B относительно CA.

Следовательно, точка M лежит внутри угла, вертикального к внутреннему углу треугольника при вершине B. □

2.4 Метрические задачи

Расстояние от точки до прямой. Угол между двумя прямыми, угол от первой прямой до второй.

[1; гл. 5, §7, 8, 9, задачи 20—23]
[2; 2.2.2.3]
[3; 233–237, 239, 241, 245, 247, 248, 254, 255, 260, 261, 265, 266, 269, 270, 272—274, 275—278]

Пример 15. *Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(-1, 3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$, $x - y + 8 = 0$.*

Решение. Центр $C(x_0, y_0)$ искомой окружности лежит на биссектрисе заданного угла, а это значит, что результат подстановки координат (x_0, y_0) точки C и $(-1, 3)$ — заданной точки в левую часть уравнений прямых — одного знака, то есть $(7(-1) + 1 \cdot 3)(7x_0 + y_0) > 0$ и $(1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + 8)(x_0 - y_0 + 8) > 0$ или $7x_0 + y_0 < 0$ и $x_0 - y_0 + 8 > 0$.

Уравнение биссектрисы как геометрического места точек одинаково удалённых от сторон угла, будет

$$-\frac{7x + y}{\sqrt{50}} = \frac{x - y + 8}{\sqrt{2}}; \quad 3x - y + 10 = 0.$$

Координаты (x_0, y_0) центра C окружности и R — её радиус удовлетворяют системе

$$3x_0 - y_0 + 10 = 0;$$
$$R = \frac{x_0 - y_0 + 8}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x_0 + 1)^2 + (y_0 - 3)^2}.$$

Решая её, получим

$$y_0 = 10 - 3x_0;$$
$$2(x_0 + 1)^2 = (x_0 + 1)^2 + (3x_0 + 7)^2,$$

откуда $C_1(-2, 4)$, $R_1 = \sqrt{2}$; $C_2(-3, 1)$, $R_2 = 2\sqrt{2}$. □

Пример 16. *Основанием равнобедренного треугольника служит прямая*

$$2x + 3y = 0,$$

Его вершина находится в точке $(2, 6)$, *и тангенс угла при основании равен* $\frac{3}{2}$. *Написать уравнения боковых сторон.*

Решение. Обозначим через k_1 угловой коэффициент основания, а через k_2 и k_3 — угловые коэффициенты искомых боковых сторон, тогда $k_1 = -\frac{2}{3}$; k_2 найдём по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_{12} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

которая в нашем случае принимает вид

$$\frac{3}{2} = \frac{k_2 + \frac{3}{2}}{1 - \frac{2}{3} k_2},$$

откуда $k_2 = \frac{5}{12}$.

Так как углы φ_{12} от первой прямой до второй и φ_{31} от третьей прямой до первой либо одновременно оба внутренние, либо оба внешние и рассматриваемый треугольник равнобедренный, то $\varphi_{12} = \varphi_{31}$, поэтому $\operatorname{tg}\varphi_{31} = \frac{3}{2}$. Ищем k_3 из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi_{31} = \frac{k_1 - k_3}{1 - k_1 k_3}.$$

Имеем:

$$\frac{3}{2} = \frac{-\frac{2}{3} - k_3}{1 - \frac{2}{3}k_3}; \quad 9 - 6k_3 + 4 + 6k_3 = 0; \quad 13 = 0 \cdot k_3.$$

Это означает, что искомая прямая параллельна оси Oy. Так как обе боковые стороны проходят через точку $(2, 6)$, то их уравнения соответственно будут

$$y - 6 = \frac{5}{12}(x - 2) \quad \text{и} \quad x = 2.$$

□

Замечание. Чтобы избежать «недоразумения», к которому иногда приводит задача, связанная с нахождением углового коэффициента прямой, можно пользоваться формулами, относящимися к общему уравнению прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Так, в нашем случае, записывая уравнение искомой прямой в виде

$$Ax + By + C = 0,$$

можно использовать формулу

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2}.$$

Пример 17. *Через точку $P(15, 6)$ провести прямую, отсекающую от прямых*

$$\cancel{5x - 2y - 5 = 0}$$
$$2x + 5y - 2 = 0.$$

треугольник, площадь которого равна 29.

Решение. Точка $M_0(1, 0)$ – точка пересечения данных прямых. Их направляющие векторы соответственно $\mathrm{a}_1(2\alpha, 5\alpha)$ и $\mathrm{a}_2(-5\beta, 2\beta)$. Выберем α и β так, чтобы площадь искомого треугольника была равна 29, т. е.

$$\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2\alpha & 5\alpha \\ -5\beta & 2\beta \end{vmatrix} = 58,$$

откуда $|\alpha\beta| = 2$.

Отложим от точки M_0 векторы a_1 и a_2, получим точки $M_1(1 + 2\alpha, 5\alpha)$, $M_2(1 - 5\beta, 2\beta)$. Точки M_1, M_2, P лежат на одной прямой – искомой. Запишем это условие:

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 1 \\ 1 + 2\alpha & 5\alpha & 1 \\ 1 - 5\beta & 2\beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получим

$$1)\ \alpha - \beta + 1 = 0; \quad \alpha\beta = 2,$$
$$2)\ \alpha - \beta - 1 = 0; \quad \alpha\beta = -2.$$

Решением первой системы будут пары $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = -1$ и $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 2$, что даёт точки $M_1^1(-3, -10)$ и $M_1^2(3, 5)$ и прямые

$$M_1^1P\colon\ 8x - 9y - 66 = 0;$$
$$M_1^2P\colon\ x - 12y + 57 = 0.$$

Вторая система действительных решений не имеет. □

3 Прямые и плоскости в пространстве

3.1 Составление уравнений прямых и плоскостей

[1; гл. 5, §4, 10, гл. 10, §1, 2, задача 39, §3, 4]
[2; 3.1, 3.3, 3.4]
[3; 291–297, 300, 303, 305, 308, 313–319]

3.2 Задачи взаимного расположения

Взаимное расположение двух прямых, двух плоскостей, прямой и плоскости.

[1; гл. 10, §2, 3, 4, 6]
[2; 3.1, 3.3]
[3; 322—329, 369]

Замечание. При изучении взаимного расположения прямых и плоскостей рекомендуется самостоятельно разобрать те случаи, когда одной из них является координатная ось. В частности, нужно научиться свободно находить:

1) уравнение прямой или плоскости, проходящей через данную точку параллельно данной координатной оси или плоскости;

2) уравнения прямой, параллельной данной плоскости координат и пересекающей не лежащую в ней координатную ось;

3) уравнение плоскости, проходящей через данную точку и одну из осей координат и т. п.

Обратите внимание на задачи 291—297, 323, 324, 328 из [3].

При решении задач на составление уравнений прямой в пространстве следует определять прямую либо точкой и направляющим вектором, либо двумя проходящими через неё плоскостями.

Пример 18. *Составить уравнение прямой, проходящей через точку* $A(1,1,1)$ *и пересекающей две прямые:*

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3} \quad \textit{и} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}.$$

Решение. Проведём плоскость через точку A и первую прямую:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0, \quad \text{или} \quad x+4y-2z-3=0.$$

Она пересекает вторую прямую в точке $B(5,0,1)$. Так как вектор $\overrightarrow{AB}(4,-1,0)$ не параллелен первой прямой, то искомая прямая проходит через точки A и B:

$$x=1+4t; \quad y=1-t; \quad z=1.$$

□

Пример 19. *Пересекает ли какую-либо координатную ось прямая, проходящая через точки $A(6,-8,-1)$ и $B(-3,4,3)$?*

Решение. Пусть C — точка пересечения прямой AB с осью Ox, тогда $C(x,0,0)$. Если точка C делит отрезок AB в отношении λ, то $x = \frac{6-3\lambda}{1+\lambda}$, $0 = \frac{-8+4\lambda}{1+\lambda}$ и $\lambda = 2$, $0 = \frac{-1+3\lambda}{1+\lambda}$ и $\lambda = \frac{1}{3}$. Следовательно, ось Ox отрезок AB не пересекает. Аналогично, отрезок AB не пересекает ось Oy, а ось Oz пересекает, так как $0 = \frac{6-3\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda = 2$, $0 = \frac{-8+4\lambda}{1+\lambda}$, $\lambda = 2$ и $z = \frac{-1+6}{3} = \frac{5}{3}$. □

Ответ: Отрезок AB пересекает ось OZ в точке $C\left(0,0,\frac{5}{3}\right)$.

3.3 Пучок плоскостей

Пучок плоскостей. Взаимное расположение трёх плоскостей.

[1; гл. 10, §5, задача 57]
[2; 3.2]
[3; 330–332, 338–342]

Пример 20. *Найти ортогональную проекцию прямой*

$$\begin{cases} x-y+2z-3=0 \\ x+y+z+1=0. \end{cases}$$

на плоскость $2x-3y-z+2=0$.

Решение. Найдём плоскость, проходящую через прямую и перпендикулярную данной плоскости. Поскольку она принадлежит пучку плоскостей, проходящих через прямую, её уравнение представимо в виде:

$$\lambda(x-y+2z-3)+\mu(x+y+z+1)=0.$$

Числа λ и μ ищутся из условия перпендикулярности плоскостей:

$$2(\lambda+\mu)-3(-\lambda+\mu)-(2\lambda+\mu)=0;\quad 3\lambda-2\mu=0;\quad \lambda=2;\quad \mu=3;$$

искомая прямая

$$\begin{cases} 2x-3y-z+2=0 \\ 5x+y+7z-3=0. \end{cases}$$

□

3.4 Линейные неравенства

[1; гл. 10, §7]
[2; 3.2]
[3; 343–347]

Пример 21. *Три плоскости* $\pi_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3$ *образуют призму. Доказать, что точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *лежит внутри призмы тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} (A_i x_0 + B_i y_0 + C_i z_0 + D_i) > 0, \tag{1}$$

если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Решение. Плоскости образуют призму при

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{rang} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_1 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 3.$$

Пусть, например, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} \neq 0$. Возьмём любую точку $M(x, y, z)$, например, на ребре $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$. Пусть $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 z - D_1 & B_1 \\ -C_2 z - D_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 z - D_1 \\ A_2 & -C_2 z - D_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Подставим найденные координаты точки $M(x, y, z)$ в уравнение $\pi_3 = 0$. Получим

$$A_3 \begin{vmatrix} -C_1 z - D_1 & B_1 \\ -C_2 z - D_2 & B_2 \end{vmatrix} + B_3 \begin{vmatrix} A_1 & -C_1 z - D_1 \\ A_2 & -C_2 z - D_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} z + D_3$$
$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} z + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Точка M_0 лежит в том же полупространстве, что и точка M, а это значит, что выполнено условие (1).

Выполнение условия (1) означает, что ребро и точка M_0 лежат по одну сторону от соответствующей плоскости, то есть точка M_0 лежит внутри призмы. □

3.5 Метрические задачи в пространстве

Расстояние от точки до плоскости, от точки до прямой, между двумя прямыми в пространстве. Угол между двумя плоскостями. Угол между прямой и плоскостью. Условие перпендикулярности прямых и плоскостей.

[1; гл. 10, §8, 9, 10, задачи 41, 42, 43, гл. 5, §10]
[2; 3.4]
[3; 348—357, 360—365, 370—372, 374, 377, 379, 382, 387—391, 394, 396—399]

Замечание. Полезно помнить, что кроме способов задания плоскости, рассмотренных в предыдущих пунктах, в прямоугольной системе координат плоскость можно задавать (нормальным) вектором (A, B, C): $Ax+By+Cz+D=0$ (если известна точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).

Пример 22. *Найти плоскости, пересекающие сферу* $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z-51=0$ *по окружности радиуса* 8, *и перпендикулярные вектору* $(2,-1,-2)$.

Решение. Нормальное уравнение сферы $(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10^2$. Так как её радиус равен 10, то искомые плоскости отстоят от центра $C(6,-2,3)$ на расстояние 6. Их уравнения имеют вид $2x-y-2z+D=0$. Подсчитывая расстояние от центра сферы до плоскости, получим

$$\frac{|2\cdot 6-1(-2)-2(3)+D|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=6 \quad \text{или} \quad 8+D=\pm 18.$$

Ответ: $2x-y-2z+10=0$; $2x-y-2z-26=0$.

□

4 Замены координат

4.1 Замены аффинных координат

Перенос начала координат. Формулы перехода от одной аффинной системы координат к другой на плоскости и в пространстве. Матрица перехода.

[1; гл. 3, §2, гл. 8, §1, задачи 31, 32]
[2; 4.1, 4.2]
[3; 414, 415, 417, 429, 430, 432, 433]

Замечание. Обычно старые координаты выражаются через новые, причём формулы имеют ту же структуру, что и параметрические уравнения уравнения плоскости, только число параметров три (x', y', z' — координаты точки $M(x,y,z)$ в новой системе координат). Но в тех случаях, когда известны уравнения новых осей (или новых координатных плоскостей в пространстве), удобно сразу записывать выражения новых координат через старые.

Пример 23. *Даны не перпендикулярные пересекающиеся плоскости $\pi_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Доказать, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит в остром двугранном угле, если*

$$(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) \times (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) < 0.$$

Решение. Векторы (A_i, B_i, C_i) направлены в положительное полупространство, если $\pi_1(x_0, y_0, z_0) > 0$ и $\pi_2(x_0, y_0, z_0) > 0$, то угол между векторами (A_i, B_i, C_i), $i = 1, 2$ должен быть тупой, то есть $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0$, тогда дополнительный двугранный угол будет острым. Условие выполнено. Если $\pi_1(x_0, y_0, z_0)$ и $\pi_2(x_0, y_0, z_0)$ разных знаков, то угол между векторами (A_i, B_i, C_i), $i = 1, 2$ равен двугранному углу $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$. Условие выполнено. □

Замечание. Условие

$$(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) \times (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) > 0$$

означает, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит в тупом двугранном угле.

Пример 24. *Через точку $P(-3,-5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми*

$$2x + 3y - 15 = 0; \quad 4x - 5y - 12 = 0$$

в точке P делится пополам (система координат аффинная).

Решение. Введём новую систему координат $O'x'y'$, принимая первую из данных прямых за ось $O'y'$, вторую данную прямую — за ось $O'x'$:

$$x' = \lambda(2x + 3y - 15)$$
$$y' = \mu(4x - 5y - 12).$$

Здесь λ и μ — любые числа. Подберём их таким образом, чтобы для точки P новые координаты были равны: $x' = 1$, $y' = 1$, получим

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{2x+3y-15}{-36} \\ y' &= 4x - 5y - 12. \end{aligned} \tag{1}$$

Искомая прямая отсекает на обеих осях положительные отрезки, равные 2, поэтому её уравнение в новой системе координат будет

$$x' + y' = 2. \tag{2}$$

Подставляя в уравнение (2) вместо x' и y' их выражения из формул (1), получим уравнения искомой прямой в старых координатах

$$\tfrac{2x+3y-15}{-36} + 4x - 5y - 12 = 2$$

или

$$142x - 183y - 489 = 0.$$

□

4.2 Замены прямоугольных координат

Переход от одной прямоугольной системы координат к другой на плоскости и в пространстве. Ортогональные матрицы как матрицы перехода от одной ортогональной системы координат к другой. Геометрический смысл знака определителя ортогональной матрицы.

[1; гл. 8, §3, задачи 32, 34]
[2; 4.2]
[3; 426—428, 438, 439]

4.3 Полярные координаты

Полярные координаты на плоскости и цилиндрические в пространстве. Сферические координаты.

[1; гл. 4, §4 (п. 1.2), §5]
[2; 4.5]
[3; 61, 62, 64, 68, 69, 81, 82, 84, 86, 88]

5 Алгебраические линии и поверхности

5.1 Составление уравнений линий

[1; гл. 4, §4 (п. 3), задачи 13, 64–66]
[3; 150, 152, 163–169, 172–174, 181, 184, 185, 188, 189]

При решении задач на составление уравнений линий и поверхностей (геометрических мест точек) следует всегда учитывать, что получающимся в процессе вычислений уравнениям, кроме решений, отвечающих точкам исследуемой фигуры, в результате неэквивалентных преобразований могут начать удовлетворять и некоторые другие, дополнительные, которые (если они появятся) из окончательного решения надо исключить. Очень часто уравнение удобно получать в параметрическом виде (в частности, используя полярные координаты). Необходимо помнить, что переменные (x, y) или (x, y, z) всегда должны обозначать координаты произвольной точки исследуемого геометрического места.

Пример 25. *Найти геометрическое место точек M, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек A и B равно данному числу $k \neq 1$*

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = k.$$

Решение. Введём на плоскости прямоугольною систему координат, принимая за ось абсцисс прямую AB. Пусть абсциссы точек A и B в выбранной системе координат будут 0 и a, а $M(x, y)$ — точка искомого геометрического места. Имеем

$$|\overrightarrow{MA}| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |\overrightarrow{MB}| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

поэтому

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = |k|. \tag{1}$$

Возведём обе части уравнения (1) в квадрат, получим:

$$\frac{x^2+y^2}{(x-a)^2+y^2} = k^2. \tag{2}$$

Уравнения (1) и (2) равносильны; в самом деле, (2) следует из (1). Обратно, если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то, так как слева и справа в равенстве (2) стоят неотрицательные числа, из равенства (2) следует:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \sqrt{k^2} = |k|.$$

Далее, освобождаясь в уравнении (2) от знаменателя, получим:

$$x^2+y^2 = k^2((x-a)^2+y^2). \tag{3}$$

Уравнения (2) и (3) равносильны; в самом деле, если числа x и y удовлетворяют уравнению (2), то они удовлетворяют и уравнению (3). Обратно, если оба числа x и y удовлетворяют уравнению (3), то $(x-a)^2+y^2 \neq 0$. В самом деле: если бы $(x-a)^2+y^2=0$, то отсюда следовало бы, что $x=a$, $y=0$ и далее, так как числа x и y, по предположению, удовлетворяют равенству (3), то мы имели бы $a=0$, что не имеет места, так как точки A и B различны.

Итак, $(x-a)^2+y^2 \neq 0$ и, значит, из равенства (3) следует равенство (2).

Преобразуя уравнение (3), получаем следующую цепь равносильных друг другу уравнений:

$$x^2+y^2 = k^2x^2 - 2k^2ax + k^2a^2 + k^2y^2;$$

$$(1-k^2)x^2 + (1-k^2)y^2 - 2(-k^2a)x - k^2a^2 = 0;$$

$$x^2+y^2 - 2\frac{-k^2a}{1-k^2}x + \frac{-k^2a^2}{1-k^2} = 0;$$

$$\left(x - \frac{-k^2a}{1-k^2}\right)^2 + y^2 + \frac{-k^2a^2}{1-k^2} - \frac{(-k^2a)^2}{(1-k^2)^2} = 0.$$

Отсюда имеем:

$$\left(x - \frac{-k^2a}{a-k^2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Уравнения (1) и (4) равносильны.

Уравнение (4) есть уравнение окружности с центром в точк

$$C\left(\frac{-k^2a}{1-k^2}, 0\right)$$

и радиусом

$$r = \left|\frac{ka}{1-k^2}\right|.$$

Поэтому геометрическое место точек, определяемое условие дачи, и есть эта окружность.

Центр C окружности лежит на прямой AB (так как орди точки C равна 0) и делит направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ в отн нии $-k^2$.

Пример 26. *Даны две окружности*

$$x^2 + y^2 - 6x - 27 = 0; \quad x^2 + y^2 + 2x - 8 = 0.$$

Найти геометрическое место точек, длины касательных и торых к большой окружности вдвое больше длин касательн меньшей окружности.

Решение. Нормальные уравнения данных окружностей

$$(x-3)^2 + y^2 = 36;$$
$$(x+1)^2 + y^2 = 9.$$

их центры и радиусы

$$C_1(3,0), \quad R_1 = 6,$$
$$C_2(-1,0), \quad R_2 = 3.$$

Пусть $M(x,y)$ — точка искомого геометрического места, $\overrightarrow{M}$ $\overrightarrow{MA_2}$ — касательные из точки M к данным окружностям. Тогд проведения касательной из точки M необходимы условия:

$$|\overrightarrow{MA_1}| = 2|\overrightarrow{MA_2}|,$$
$$(x-3)^2 + y^2 \geqslant 36, \quad (x+1)^2 + y^2 \geqslant 9,$$

но

$$|\overrightarrow{MA_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{MC_1}|^2 - |\overrightarrow{C_1A_1}|^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2 - 36}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 27};$$

точно так же

$$|\overrightarrow{MA_2}| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 8}. \tag{4}$$

Поэтому в силу (3)

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 27} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + 2x - 8},$$
$$(x-3)^2 + y^2 \geqslant 36, \quad (x+1)^2 + y^2 \geqslant 9,$$

откуда

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 6x - 27 = 4(x^2 + y^2 + 2x - 8), \\ &(x-3)^2 + y^2 \geqslant 36, \quad (x+1)^2 + y^2 \geqslant 9, \end{aligned} \tag{5}$$

или

$$\begin{aligned} &4(x^2 + y^2 + 2x - 8) - (x^2 + y^2 - 6x - 27) = 0, \\ &(x-3)^2 + y^2 \geqslant 36, \quad (x+1)^2 + y^2 \geqslant 9. \end{aligned} \tag{6}$$

Упрощая (6), получим

$$\begin{aligned} &\left(x + \tfrac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{8}{3}\right)^2. \\ &(x-3)^2 + y^2 \geqslant 36, \quad (x+1)^2 + y^2 \geqslant 9. \end{aligned} \tag{7}$$

Мы видим, что система (7) определяет дугу окружности с центром $C_3 = \left(-\frac{7}{3}, 0\right)$ и радиусом $R_3 = \frac{8}{3}$, лежащую вне данных окружностей. Из системы (7) видно, что три окружности имеют общую хорду $x = -\frac{19}{3}$.

Ось Ox пересекает окружности (1), (2), (7) соответственно в точках $(-3, 0)$, $(-4, 0)$, $(-5, 0)$. Следовательно, искомое геометрическое место состоит из точек дуги окружности (7), лежащих левее общей хорды трёх окружностей. Итак, искомое геометрическое место определяется условиями:

$$\left(x + \tfrac{7}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{8}{3}\right)^2, \quad x \leqslant -\tfrac{19}{8}.$$

□

Замечание. Если в процессе преобразования первоначальной системы уравнений и неравенств мы получаем на каждом этапе систему, равносильную предыдущей, то все точки, координаты которых удовлетворяют последней из полученных систем, принадлежат геометрическому месту точек, определяемому первоначальной системой. Такой случай имеет место в примере 25.

Пример 27. *Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, $|\overrightarrow{AB}| = c$, а третья вершина C перемещается по окружности радиуса b с центром в точке A. Какую линию описывает точка D пересечения со стороной BC биссектриса угла A?*

Решение. Пусть φ — угол BAC. Считаем что A — начало координат, а точка B имеет координаты $(c, 0)$. Тогда координаты C равны: $x_c = b\cos\varphi$, $y_c = b\sin\varphi$. Поскольку D делит отрезок BC в отношении $\lambda = \frac{c}{b}$, координаты D равны

$$x = \frac{c + \frac{c}{b}\cdot b\cos\varphi}{1+\frac{c}{b}} = \frac{bc(1+\cos\varphi)}{b+c};$$

$$y = \frac{\frac{c}{b}\cdot b\sin\varphi}{1+\frac{c}{b}} = \frac{bc\sin\varphi}{b+c}.$$

Таким образом,

$$x - \frac{bc}{b+c} = \frac{bc}{b+c}\cos\varphi; \quad y = \frac{bc}{b+c}\sin\varphi.$$

Это параметрические уравнения окружности радиуса $\frac{bc}{b+c}$ с центром в точке $\left(\frac{bc}{b+c}, 0\right)$. □

Пример 28. *Вокруг точки O, лежащей на окружности диаметра a, вращается луч, причём прямая, содержащая этот луч, пересекает окружность в переменной точке P. На прямой OP от точки P в направлении луча откладывается отрезок $\overrightarrow{PM} = b$. Составить уравнение линии, описываемой точкой M при вращении луча. Эта линия называется улиткой Паскаля.*

Решение. Введём полярную систему координат, принимая за полюс точку O, а за полярную ось диаметр OA. Обозначим через ρ и φ обобщённые полярные координаты точки M. При этом число ρ считается положительным, когда направление $\overrightarrow{OM}$ совпадает с направлением луча, и отрицательным, когда вектор $\overrightarrow{OM}$ и луч имеют противоположные направления. Под углом φ понимается угол от полярной оси до вращения луча. Обозначим через ρ' и φ обобщённые полярные координаты точки P, соответствующей точке M, причём φ будем брать тем же, что и для точки M (см. [3; с. 273, рис. 10]).

Тогда $\rho' = a\cos\varphi$ при любом φ, а

$$\rho = a\cos\varphi + b. \tag{1}$$

Это и есть искомое уравнение линии в полярных координатах.

Возможны три случая: 1) $b < a$, 2) $b = a$, 3) $b > a$.

В первом и во втором случаях линия проходит через полюс (см. [3; с. 273, рис. 10, рис. 12]), так как из условия $\rho = 0$, находим:

$$\cos\varphi = -\frac{b}{a}; \quad \left|-\frac{b}{a}\right| = \frac{b}{a} \leqslant 1.$$

В третьем случае линия через полюс не проходит, ибо условие $\rho = 0$ не выполняется ни при каких φ (так как $b > a$).

Найдём уравнение улитки Паскаля в прямоугольных координатах, принимая за начало координат полюс O, а за положительное направление оси абсцисс направление полярной оси.

Для всех точек линии, отличных от полюса, будем иметь:

$$\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}; \quad \cos\varphi = \frac{c}{\rho} = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Уравнение (1) принимает вид:

$$\rho = \frac{ax}{\rho} + b.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии (и только этих точек), кроме полюса O (если он принадлежит линии).

Умножая обе части последнего равенства на ρ, получим

$$\rho^2 = ax + b\rho.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек линии (и координата полюса O, даже если он не принадлежит линии).

Последнее уравнение можно переписать так:

$$x^2 + y^2 - ax = b\rho. \tag{2}$$

5.4 Окружность и сфера

[3; 444, 445, 451, 452, 611–618]

6 Эллипс, гипербола и парабола

6.1 Эллипс

Определение и каноническое уравнение эллипса. Фокальное свойство эллипса. Эксцентриситет. Параметрические уравнения эллипса. Эллипс как результат сжатия окружности к одному из её диаметров. Эллипс как проекция окружности. Эллипс как сечение круглого цилиндра.

[1; гл. 6, §2, 3, 4, задачи 24, 25]
[2; 5.1, 5.2, 5.3]
[3; 150, 151, 161–163, 157, 453, 454, 459, 464]

Пример 30. *Даны две окружности*

$$x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0; \quad x^2 + y^2 - 10x - 39 = 0.$$

Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся обеих данных окружностей.

Решение. Нормальные уравнения окружностей

$$(x+1)^2 = y^2 = 4; \quad (x-5)^2 + y^2 = 64.$$

Их центры и радиусы

$$C_1(-1,0), \quad r_1 = 2;$$
$$C_2(5,0), \quad r_2 = 8.$$

Следовательно, первая окружность лежит внутри второй, и они касаются в точке $(-3, 0)$.

Пусть $M(x, y)$ — центр окружности, касающейся обеих данных окружностей; r — её радиус; A_1 и A_2 — точки касания с первой и второй окружностью соответственно. Так как эта окружность лежит вне первой и внутри второй из данных окружностей, то

$$|\overrightarrow{C_1M}| = |\overrightarrow{C_1A_1}| + |\overrightarrow{A_1M}| = 2 + r;$$
$$|\overrightarrow{C_2M}| = |\overrightarrow{C_2A_2}| + |\overrightarrow{A_2M}| = 8 - r.$$

Поэтому

$$|\overrightarrow{C_1M}| + |\overrightarrow{C_2M}| = 10.$$

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть эллипс с фокусами C_1 и C_2, для которого $2a = 10$; $2c = 6$; $b = 4$.

Центр эллипса находится в середине отрезка C_1C_2, то есть в точке $O'(2, 0)$, поэтому уравнение эллипса принимает вид

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Так как данные окружности касаются друг друга в точке $A(-3, 0)$, то, кроме точек эллипса, геометрическому месту принадлежат все точки оси абсцисс: их можно рассматривать как центры окружностей, касающихся обеих данных окружностей в точке A. $\square$

6.2 Гипербола

Определение и каноническое уравнение гиперболы. Асимптоты гиперболы. Фокальное свойство гиперболы, эксцентриситет, уравнение в асимптотах.

[1; гл. 6, §5, 6, гл. 8, §1]
[2; 5.1, 5.2, 5.3]
[3; 164, 201, 467–469, 471–475, 158]

Пример 31. *Написать уравнение гиперболы, асимптотами которой служат прямые*

$$2x + 3y + 5 = 0; \quad x - 2y - 3 = 0,$$

зная, что гипербола проходит через точку $(-1, 1)$ *(система координат аффинная).*

Решение. Введём новую систему координат $O'x'y'$ так, чтобы данные прямые

$$2x + 3y + 5 = 0 \quad \text{и} \quad x - 2y - 3 = 0$$

служили осями $O'x'$ и $O'y'$ этой системы, а данная точка $(-1, 1)$ имела бы в этой системе координаты $(1, 1)$.

Новые координаты x', y' произвольной точки плоскости выражаются через старые координаты x и y следующим образом:

$$x' = \frac{x-2y-3}{-1-2\cdot 1-3}; \quad y' = \frac{2x+3y+5}{2(-1)+3\cdot 1+5},$$

или

$$x' = \frac{x-2y-3}{-6}; \quad y' = \frac{2x+3y+5}{6}.$$

В новой системе координат уравнение искомой гиперболы запишется в виде $x'y' = 1$ (уравнение в асимптотах).

Подставляя найденные x' и y' в уравнение $x'y' = 1$, после преобразований получим

$$2x^2 - 6y^2 - xy - x - 19y + 21 = 0.$$

□

6.3 Парабола. Директориальные свойства кривых

Определение и каноническое уравнение параболы. Фокус и директриса параболы, эллипса и гиперболы.

[1; гл. 6, §2, задача 29, §7, задача 26]
[2; 5.1, 5.2, 5.3]
[3; 159, 160, 165, 166, 482, 483, 485, 488, 489, 490]

Пример 32. *Написать уравнение параболы с параметром $p = 5$, вершина которой находится в точке $O'(4, 2)$, а направление оси параболы (от вершины к фокусу) определяется вектором $\mathbf{u}(-3, 4)$ (система координат прямоугольная).*

Решение. Введём новую прямоугольную систему координат $O'x'y'$ с началом координат в точке O', положительное направление оси $O'x'$ которой определяется вектором $\mathbf{u}$. В новой системе координат уравнение искомой параболы имеет вид

$$y'^2 = 10x'. \tag{1}$$

Уравнение оси параболы

$$\frac{x-4}{-3} = \frac{y-2}{4}, \quad \text{или} \quad 4x + 3y - 22 = 0;$$

уравнение касательной в вершине параболы

$$-3(x-4)+4(y-2)=0, \quad \text{или} \quad -3x+4y+4=0.$$

Напишем формулы, выражающие новые координаты x', y' точки M через её старые координаты x, y. По абсолютной величине координаты x' и y' равны соответственно расстояниям от точки M до касательной в вершине и оси параболы. При этом мы должны ещё принять во внимание, что координата x' точки M должна быть положительна, когда точка M лежит в той же полуплоскости, где и конец вектора $\mathbf{u}$, если его отложить от какой-нибудь точке на этой касательной. Поэтому имеем (см. [1; задача 32]):

$$x'=\frac{-3x+4y+4}{5}; \quad y'=\frac{4x+3y-22}{5}. \tag{2}$$

Подставляя в уравнение (1) вместо x' и y' их выражения из равенств (2), получим уравнение искомой параболы в старых координатах

$$\frac{(4x+3y-22)^2}{25}=10\frac{(-3x+4y+4)}{5},$$

или

$$16x^2+24xy+9y^2-26x-332y+284=0.$$

□

Пример 33. *Найти фокусы и директрисы равносторонней гиперболы* $2xy=a^2$.

Решение. Действительной осью данной гиперболы является биссектриса первого и третьего координатных углов.

Решая уравнение $y=x$ совместно с уравнением гиперболы $2xy=a^2$, найдём вершины гиперболы

$$A_1\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right); \quad A_2\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

Длина действительной полуоси равна a. Эксцентриситет равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$, тогда $c=a\sqrt{2}$.

Так как фокусы лежат на прямой $y=x$ и отстоят от центра гиперболы на расстояние $c=a\sqrt{2}$, то координаты фокусов будут: $F_1(a,a)$; $F_2(-a,-a)$.

Директрисы параллельны прямой $y = -x$ и отстоят от центра гиперболы на расстояние

$$d = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

поэтому $\frac{|0+0+p|}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, откуда $p = \pm a$.

Получили два уравнения

$$x + y + a = 0;$$
$$x + y - a = 0.$$

□

Пример 34. *Фокус линии второго порядка находится в точке* $F(2, 0)$; *директрисой, соответствующей этому фокусу, является прямая* $x = 5$. *Написать уравнение линии, зная, что она проходит через точку* $A(10, 6)$.

Решение. Расстояние от точки A до точки F равно $|AF| = 10$. Расстояние от точки A до данной директрисы $|AB| = 5$.

Так как $e = \frac{|AF|}{|AB|} = 2$, то искомая линия — гипербола.

Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка этой гиперболы, тогда

$$|MF| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2},$$

а расстояние от точки M до директрисы равно $|x - 5|$. Отсюда

$$\frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{|x-5|} = 2,$$

или (после преобразований)

$$3x^2 - 36x - y^2 + 96 = 0.$$

Преобразуем это уравнение

$$3(x^2 - 12x + 36) - 108 - y^2 + 96 = 0,$$

или

$$\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

□

6.4 Уравнения при вершине. Уравнения в полярных координатах

[1; гл. 6, §8, 9, гл. 8, §1 (п. 3), задачи 28, 30]
[2; 5.5, 5.6]
[3; 165, 166, 170, 201, 466]

Пример 35. *Пусть точки M_1 и M_2 — точки пересечения конического сечения с прямой, проходящей через фокус F. Докажите, что* $\frac{1}{M_1F} + \frac{1}{M_2F} = \text{const}$.

Решение. Введём полярную систему координат: полюс в точке F, полярная ось направлена от центра линии к фокусу. Уравнение конического сечения будет $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$.

В этой системе координат точка M_1 имеет координаты $M_1(\rho_1, \varphi)$, а точка $M_2(\rho_2, \varphi+\pi)$, тогда

$$\rho_1 = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}, \quad \rho_2 = \frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi+\pi)} = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Вычислим

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1-\varepsilon\cos\varphi}{p} + \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p} = \frac{2}{p}.$$

□

7 Общая теория линий второго порядка

7.1 Типы линий. Инварианты

Типы линий, определяемых уравнением второй степени с двумя неизвестными. Инварианты многочлена второй степени с двумя неизвестными относительно преобразования прямоугольных координат. определение типа линии второго порядка и нахождение её канонического уравнения при помощи инвариантов. Нахождение канонической системы координат (расположение линии на плоскости).

[1; гл. 16, §1, 2–4, задачи 68–73, 74, гл. 17, §6]
[2; 6.1, 6.2, 6.3]
[3; 491, 492, 494, 495, 501–508, 511, 513]

Замечание. В [1] и в [2] для инвариантов употребляются разные обозначения, а именно, в [1] инварианты обозначаются s, δ, Δ, в то время как в [2] соответственно I_1, I_2, I_3.

Следует обратить внимание на тот частный случай, когда уравнение линии не содержит члена с произведением координат и может быть приведено к каноническому виду лишь подбором подходящего параллельного переноса осей и, быть может ещё, переименованием осей.

Пример 36. *Найти каноническое уравнение и каноническую систему координат в каждом из следующих случаев:*

1) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 23 = 0.$

Решение. Положим

$$\begin{cases} x - 2 = y'; \\ y - 3 = x'. \end{cases}$$

Тогда будем иметь

$$x'^2 - 4y'^2 - 16 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

□

Ответ: Гипербола; действительная полуось равна 4, мнимая полуось равна 2, центр $O'(2,3)$; действительная ось параллельна оси Oy. (Отметим, что преобразование координат — параллельный перенос осей в точку O' и переименование осей).

2) $3x^2 + 12x + 16y - 12 = 0.$

Решение. Заметим, что в этом уравнении можно выделить лишь один квадрат.

Начнём с преобразования

$$3(x^2 + 4x + 4) + 16y - 24 = 0, \quad \text{или} \quad 3(x+2)^2 + 16\left(y - \tfrac{3}{2}\right) = 0.$$

Обозначим

$$\begin{cases} x + 2 = y' \\ -y + \frac{3}{2} = x' \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y' - 2 \\ y = -x' + \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Тогда получим

$$3y'^2 - 16x' = 0, \quad \text{или} \quad y'^2 = \tfrac{16}{3}x'.$$

□

Ответ: Парабола; параметр $p = \frac{8}{3}$, вершина $O' = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$; ось параболы параллельна оси Ox, и её положительное направление определяется вектором $(0, -1)$.

3) $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Ответ: Две параллельные прямые $x = 2$; $x = 5$.

Замечание. К инвариантам не стоит прибегать и в том случае, когда уравнение не содержит квадратов неизвестных.

Пример 37. *Определить вид и расположение линии*

$$xy + ax + by + c = 0 \tag{1}$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$(xy + ax) + (by + ab) - ab + c = 0,$$

или

$$x(y + a) + b(y + a) - ab + c = 0,$$

или, наконец,

$$(x + b)(y + a) = ab - c.$$

Положим

$$x + b = x'; \quad y + a = y'; \quad ab - c = c'.$$

Тогда данное уравнение примет вид:

$$x'y' = c'.$$

□

Ответ: Если $ab - c \neq 0$, то гипербола с центром в точке $O'(-b, -a)$ и асимптотами $x + b = 0$; $y + a = 0$. Прямые

$$x - y + b - a = 0 \quad \text{и} \quad x + y + b + a = 0 \tag{2}$$

— биссектрисы углов между асимптотами — оси симметрии, полуось найдём, решив совместно уравнения (1) и (2) (это зависит от знака $ab - c$).

Если $ab - c = 0$, то пара пересекающихся прямых $x + b = 0$; $y + a = 0$.

Рассмотрим общий случай. Хотя примеры разобраны для конкретных кривых, даваемые при этом указания касаются и других возможных ситуаций.

Пример 38. *Определить тип линии, найти её каноническое уравнение и каноническую систему координат в каждом из следующих случаев:*

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

Решение. Вычислим инварианты:

$$I_1 = 13 > 0; \quad I_2 = 36 > 0; \quad I_3 = -1296 < 0.$$

Так как $I_2 > 0$, I_1 и I_3 имеют противоположные знаки, то линия — эллипс. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Корни $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$. В качестве λ_1 нужно взять меньший по абсолютной величине корень.

Приведённое уравнение

$$4x'^2 + 9y'^2 - \tfrac{1296}{36} = 0.$$

Каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Уравнения для определения центра координат

$$\begin{cases} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0. \end{cases}$$

Центр $O'(2,3)$; координаты единичного вектора $\mathbf{e}'_1$ оси $O'x'$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_1)x + a_{12}y = 0; \\ a_{21}x + (a_{22}-\lambda_1)y = 0; \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{cases} (5-4)x + 2y = 0 \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Отсюда находим координаты вектора $\mathbf{e}'_1\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\mathbf{e}'_2$ находим как вектор, перпендикулярный к $\mathbf{e}'_1$: $\mathbf{e}'_2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. □

2) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19$.

Найти фокусы, вершины, касательные в вершинах, директрисы, асимптоты.

Решение. Вычислим инварианты:

$$I_1 = 5; \quad I_2 = -36 < 0; \quad I_3 = 1296 \neq 0.$$

Так как $I_2 < 0$, а $I_3 \neq 0$, то линия — гипербола.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0;$$

его корни $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. В качестве λ_1 выбрали корень, совпадающий по знаку с I_3.

Приведённое уравнение

$$9x'^2 - 4y'^2 - \tfrac{1296}{36} = 0.$$

Каноническое уравнение

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Уравнения для определения координат центра:

$$\begin{cases} 5x + 6y - 11 = 0; \\ 6x - 6 = 0. \end{cases}$$

Центр $O'(1,1)$. Координаты единичного вектора $\mathbf{e}_1'$ оси $O'x'$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} (5-9)x + 6y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -2x + 3y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{e}_1'\left(\tfrac{3}{\sqrt{13}}, \tfrac{2}{\sqrt{13}}\right); \quad \mathbf{e}_2'\left(-\tfrac{2}{\sqrt{13}}, \tfrac{3}{\sqrt{13}}\right);$$

Таким образом, старые координаты (x, y) выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x' - \frac{2}{\sqrt{13}}y' + 1; \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}x' + \frac{3}{\sqrt{13}}y' + 1, \end{cases} \tag{1}$$

а новые — через старые

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}}; \\ y' = -\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{1}{\sqrt{13}}. \end{cases} \tag{2}$$

В новой системе координат вершины A и фокусы F имеют координаты: $A(\pm 2, 0)$; $F(\pm\sqrt{13}, 0)$. По формулам (1) получим их координаты в старой системе

$$A_1\left(\tfrac{6}{\sqrt{13}} + 1, \tfrac{4}{\sqrt{13}} + 1\right); \quad A_2\left(-\tfrac{6}{\sqrt{13}} + 1, -\tfrac{4}{\sqrt{13}} + 1\right);$$
$$F_1(4, 3); \quad F_2(-2, -1).$$

В новой системе уравнения директрис — $x' = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$, касательных в вершинах — $x' = \pm 2$, асимптот — $x' - \pm\frac{2}{3}y'$. Подставляя из формул (2) вместо новых координат их выражения через старые, получим: уравнения директрис $\frac{3}{\sqrt{13}}x + \frac{2}{\sqrt{13}}y - \frac{5}{\sqrt{13}} = \pm\frac{4}{\sqrt{13}}$, или $3x + 2y - 9 = 0$ и $3x = 2y - 1 = 0$; касательных в вершинах $3x + 2y - 5 \pm 2\sqrt{13} = 0$, асимптот —

$$\left(\tfrac{3}{\sqrt{13}}x + \tfrac{2}{\sqrt{13}}y - \tfrac{5}{\sqrt{13}}\right) = \pm\tfrac{2}{3}\left(-\tfrac{2}{\sqrt{13}}x + \tfrac{3}{\sqrt{13}}y - \tfrac{1}{\sqrt{13}}\right)$$

или $x - 1 = 0$ и $5x + 12y - 17 = 0$. □

3) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$

Решение. Вычислим инварианты: $I_1 = 5$; $I_2 = 0$; $I_3 = -\frac{25}{4}$, поэтому кривая – парабола, $p = \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Каноническое уравнение:

$$y'^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x'.$$

Найдём корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 5\lambda = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 5$. Найдём направляющие векторы канонической системы координат

$$\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad \mathbf{e}_1' = \left(\frac{2}{\pm\sqrt{5}}, \frac{1}{\pm\sqrt{5}}\right)$$

и

$$\begin{cases} -4x - 2y = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases} \qquad \mathbf{e}_2' = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \mp\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

(Знаки у каждой из координат берутся либо только верхние, либо только нижние). Знак у координат вектора $\mathbf{e}_1'$ выберем позже. Формулы перехода от старой системы координат к новой будут:

$$\begin{cases} x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}x' \pm \frac{1}{\sqrt{5}}y'; \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}x' \mp \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{cases} \tag{1}$$

Заданное уравнение в новой системе координат будет иметь вид:

$$5y'^2 + 4\left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}x' \pm \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) - 3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}x' \mp \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) - 7 = 0$$

или

$$5y'^2 \pm \sqrt{5}(x' + 2y') - 7 = 0.$$

Знак нужно выбрать так, чтобы коэффициент при x' был отрицательным, то есть $5y'^2 + 2\sqrt{5}y' - \sqrt{5}x' - 7 = 0$, далее упрощаем:

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \sqrt{5}\left(x' + \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 0 \quad \text{или} \quad y''^2 = \frac{2}{2\sqrt{5}}x'',$$

где обозначили

$$x'' = x' + \tfrac{8}{\sqrt{5}}; \quad y'' = y' - \tfrac{1}{\sqrt{5}}. \tag{2}$$

Выражения для старых координат получим, подставив в (1) значения x', y'

$$x' = x'' - \tfrac{8}{\sqrt{5}}; \quad y' = y'' + \tfrac{1}{\sqrt{5}}.$$

Получим

$$x = \frac{-2x'' + y'' + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}; \quad y = \frac{-x'' - 2y'' + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}.$$

Вершина параболы находится в точке $O'(3, 2)$, вектор $\mathbf{e}'_1\left(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, -\tfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ направлен по оси параболы в положительном направлении, вектор $\mathbf{e}'_2\left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — по касательной. □

Замечание. В случае $I_2 < 0$, $I_3 = 0$ имеем пересекающиеся прямые. В этом случае исходное уравнение разлагается на множители, например, разрешением уравнения относительно одного из переменных, поэтому приводить его к каноническому виду способом, разобранным в примере, не стоит.

4) $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0.$

Решение. $I_1 = 5$; $I_2 = -\frac{9}{4}$; $I_3 = 0$ — пересекающиеся прямые. Разложим на множители, для чего решим данное уравнение относительно x

$$x = \frac{5y - 1 \pm \sqrt{(3y-3)^2}}{2},$$

откуда получаем $x - y - 1 = 0$ и $x - 4y + 2 = 0$. □

5) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$

Решение. Упростим уравнение $(2x-3y)^2 - (2x-3y) - 2 = 0$, разрешим его относительно $2x - 3y$, получим $2x - 3y = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm 3}{2}$ или $2x - 3y - 2 = 0$ и $2x - 3y + 1 = 0$, то есть параллельные прямые. □

Пример 39. *Пользуясь инвариантами I_1, I_2, I_3, выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы общее уравнение линии второго порядка*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 \tag{1}$$

определяло равностороннюю гиперболу. Найти её приведённое уравнение.

Решение. Если уравнение (1) определяет равностороннюю гиперболу, то $I_3 \neq 0$ и $I_1 = 0$, поскольку в приведённом уравнении $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \tau = 0$ имеем $\lambda_1 = -\lambda_2$.

Докажем, что эти условия являются также и достаточными для того, чтобы линия (1) была равносторонней гиперболой.

Прежде всего, из равенства $I_1 = a_{11} + a_{22} = 0$ получаем $a_{22} = -a_{11}$, и поэтому $I_2 = a_{11}(-a_{11}) - a_{12}{}^2 = -(a_{11}{}^2 + a_{12}{}^2) < 0$. Это вместе с $I_3 \neq 0$ показывает, что уравнение (1) определяет гиперболу. Из равенства $I_1 = 0$ следует далее, что эта гипербола равносторонняя.

В самом деле, для приведённого уравнения

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \tag{1}$$

из равенства $I_1 = 0$ следует $\lambda_2 = -\lambda_1$, и приведённое уравнение принимает вид

$$\lambda_1 x'^2 - \lambda_1 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0.$$

то есть является уравнением равносторонней гиперболы.

Чтобы с помощью инвариантов написать её каноническое уравнение, заметим, что в силу $I_1 = 0$ характеристическое уравнение принимает вид

$$\lambda^2 + I_2 = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = \sqrt{-I_2}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{-I_2}.$$

Приведённое уравнение (2) в этом случае принимает вид

$$\sqrt{-I_2}\, x'^2 - \sqrt{-I_2}\, y'^2 + \tfrac{I_3}{I_2} = 0.$$

□

7.2 Пересечение линии второго порядка с прямой

Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические и неасимптотические направления. Классификация линий по числу и действительности асимптотических направлений. Касательные к линиям второго порядка.

[1; гл 17, §2–5, задачи 62, 78]
[2; 6.5, 6.7, 6.13]
[3; 538, 539, 546, 547, 552, 556, 557, 576]

Прежде чем переходить к решению задач на проведение касательных к линиям второго порядка, следует запомнить уравнения касательных к линиям второго порядка, заданных каноническими уравнениями, а также вывести уравнение касательной к гиперболе, заданной уравнением

$$xy = c$$

(и запомнить его).

Пример 40. *Составить уравнение касательных к эллипсу*

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1,$$

проведённых из точки $A(12, 3)$.

Решение. Уравнение касательной к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

где (x_0, y_0) — точка касания. Уравнение касательной к данному эллипсу будет иметь вид

$$\frac{x_0x}{32} + \frac{y_0y}{18} = 1.$$

Так как касательная проходит через точку $A(12,-3)$, то координаты точки A должны удовлетворять этому уравнению; подставляя в последнее уравнение вместо x и y координаты точки A получим:

$$\frac{12x_0}{32} - \frac{3y_0}{18} = 1 \quad \text{или} \quad 9x_0 - 4y_0 = 24. \tag{1}$$

Но точка прикосновения (x_0, y_0) лежит на данном эллипсе, поэтому

$$\frac{x_0^2}{32} + \frac{y_0^2}{18} = 1. \tag{2}$$

Решая систему уравнений (1) и (2), находим два решения:

$$x_0' = 4; \quad y_0' = 3;$$
$$x_0'' = \tfrac{4}{5}; \quad y_0'' = -\tfrac{21}{5}.$$

Искомых касательных две; их уравнения мы получаем, подставляя в уравнение

$$\frac{x_0 x}{32} + \frac{y_0 y}{18} = 1$$

вместо x_0 и y_0 найденные значения

$$\frac{4x}{32} + \frac{3y}{18} = 1 \quad \text{или} \quad 3x + 4y - 24 = 0,$$
$$\frac{\frac{4}{5}x}{32} - \frac{\frac{21}{5}y}{18} = 1 \quad \text{или} \quad 3x - 28y - 120 = 0.$$

□

Пример 41. *Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь. Выразить эту площадь через полуоси a и b гиперболы.*

Доказательство. Примем асимптоты гиперболы за оси аффинных координат, выбирая положительное направление так, чтобы гипербола оказалась лежащей в первой и третьей четвертях, а длины единичных векторов были бы равны единице масштаба. Уравнение гиперболы в этой системе координат будет иметь вид

$$xy = C; \quad C > 0.$$

Пусть $M(x_0, y_0)$ – произвольная точка гиперболы; $A(x_1, 0)$ и $B(0, y_2)$ – точки пересечения касательной к гиперболе в точке M с осями Ox и Oy; ω – угол между положительными направлениями осей координат. Так как точка M лежит на гиперболе, то $x_0 y_0 = C$. Уравнение касательной к гиперболе в этой точке

$$y_0 x + x_0 y = 2C,$$

отрезки, отсекаемые касательной на осях Ox и Oy:

$$|\overrightarrow{OA}| = |x_1| = \frac{2C}{|y_0|} = 2|x_0|;$$
$$|\overrightarrow{OB}| = |y_2| = \frac{2C}{|x_0|} = 2|y_0|.$$

Площадь треугольника AOB

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\omega = \tfrac{1}{2}|x_1||y_2|\sin\omega \\ &= 2|x_0||y_0|\sin\omega = 2C\sin\omega, \end{aligned}$$

откуда видно, что эта площадь не зависит от выбора касательной. Беря, в частности, касательную в вершине гиперболы, получим равнобедренный треугольник с основанием $2b$ и высотой a. Площадь этого треугольника равна ab. Такова же будет площадь всякого треугольника, образованного асимптотами и касательной к гиперболе. □

Пример 42. *Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на всевозможные касательные к ней.*

Решение. Рассмотрим каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$

Уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$y_0 y = px + px_0. \tag{1}$$

Уравнение перпендикуляра из фокуса $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ на касательную

$$y = \frac{y_0}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right), \tag{2}$$

причём

$$y_0^2 = 2px_0. \tag{3}$$

Координаты точки (x, y) геометрического места удовлетворяют обоим уравнениям (1) и (2).

Умножая (2) на $(-y_0)$ и складывая с (1), получим

$$px + \frac{y_0^2}{p}x + px_0 - \frac{y_0^2}{2} = 0 \quad \text{или} \quad p^2x + y_0^2x = 0.$$

Так как $p^2 + y_0^2 \neq 0$, то $x = 0$.

Таким образом, все проекции фокуса параболы на касательные к ней лежат на касательной к параболе в её вершине. При $x = 0$ из уравнения (2) находим $y = \frac{y_0}{2}$, это означает, что всякая точка, лежащая на касательной в вершине параболы, является основанием перпендикуляра, опущенного из фокуса параболы на некоторую касательную к ней. (При $-\infty < y_0 < \infty$ имеем $-\infty < y < \infty$). □

Пример 43. *Составить уравнение линии второго порядка, проходящей через* 5 *точек:* $M_1(1,1)$, $M_2(1,0)$, $M_3(0,1)$, $M_4(3,2)$, $M_5(2,3)$.

Решение. Составив уравнения прямых l_{12}, l_{34}, l_{13}, l_{24} (прямая l_{ij} проходит через точки M_iM_j): l_{12}: $x - 2y - 1 = 0$, l_{34}: $x - 3y + 3 = 0$, l_{13}: $2x - y + 1 = 0$, l_{24}: $x - y - 1 = 0$.

Уравнение искомой линии будем искать в пучке

$$\lambda_1 l_{12} l_{34} + \lambda_2 l_{13} l_{24} = 0,$$

или

$$\lambda_1(x - 2y - 1)(x - 3y + 3) + \lambda_2(2x - y + 1)(x - y - 1) = 0,$$

и из условия, что она проходит через точку $M_5(2,3)$. Получим

$$\lambda_1(-5)(-4) + \lambda_2 \cdot 2(-2) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = 5\lambda_1.$$

□

Ответ:

$$11x^2 + 20xy + 11y^2 - 3x - 3y - 8 = 0.$$

Пример 44. *Составить уравнение линии второго порядка, которая проходит через начало координат и касается прямых $x+y-1=0$ в точке $(1,0)$ и $x-2y+1=0$ в точке $(1,1)$.*

Решение. Искомая линия принадлежит пучку:

$$\lambda_1(x+y-1)(x-2y+1)+\lambda_2(x-1)^2=0$$

и проходит через точку $(0,0)$, откуда $\lambda_1=\lambda_2$.

Ответ:

$$2x^2-xy-2y^2-2x+3y=0.$$

□

7.3 Диаметры линий второго порядка

Диаметры линий второго порядка. Сопряжённые диаметры и направления. Центр линии второго порядка. Главные направления оси симметрий. Вид уравнения линии в специальных системах координат.

[1; гл. 17, §7—9, 11, задачи 68—70, 75, 74, 77]
[2; 6.9, 6.10, 6.11]
[3; 456, 457, 472, 519—521, 524, 527, 529, 530, 537, 541—543, 545, 554]

Пример 45. *Написать уравнение диаметра эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, проходящего через середину хорды, отсекаемой эллипсом на прямой $3x+2y-6=0$.*

Решение. Угловой коэффициент этой прямой $k=-\frac{3}{2}$. Так как искомый диаметр имеет сопряжённое направление, то его угловой коэффициент k' определяется из соотношения

$$a_{11}+a_{12}(k+k')+a_{22}kk'=0. \tag{1}$$

В нашем случае имеем $\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\left(-\frac{3}{2}\right)k'=0$. Откуда $k'=\frac{1}{2}$ и уравнение диаметра $x-2y=0$. □

Пример 46. *Даны две линии второго порядка:*

$$3x^2+6xy-y^2-18x-10y=0;$$

$$9x^2+6xy+y^2-18x-10y=0.$$

Найти их общий диаметр и направление тех хорд каждой из линий, которым сопряжён этот диаметр.

Решение. Легко видеть, что вторая линия — парабола. Все её диаметры параллельны и имеют асимптотическое направление. Находим его: $9x^2 - 6xy + y^2 = 0$, $(3x + y)^2 = 0$, получим вектор $(1, -3)$, находим центр первой кривой: $O'(2, 1)$. Уравнение общего диаметра $3x+y-7 = 0$. Подставляя в первое уравнение $k = -3$; $a_{11} = 3$; $a_{12} = 3$; $a_{22} = -1$, получим

$$3 + 3(-3 + k') - 1(-3)k' = 0,$$

отсюда $k' = 1$.

Уравнение второй линии перепишем в виде $(3x + y - 7)^2 + 24x + 4y - 49 = 0$, где $24x + 4y - 49 = 0$ — уравнение касательной, сопряжённой диаметру, проведённому через точку касания, её угловой коэффициент равен $k' = -6$. □

Пример 47. *Зная угловые коэффициенты асимптот гиперболы $k_1 = 1$; $k_2 = 2$ и угловой коэффициент $k' = 0$ её диаметра, найти угловой коэффициент k' сопряжённого диаметра.*

Решение. Угловые коэффициенты асимптот гиперболы удовлетворяют уравнению $a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0$, то есть с точностью до множителя уравнение (1) принимает вид $k^2 - 3k + 2 = 0$, то есть $a_{11} = 2l$; $a_{12} = -\frac{3}{2}l$; $a_{22} = l$. Найдём для полученной кривой угловой коэффициент k' диаметра, сопряжённого направлению $(1, 0)$:

$$2l - \tfrac{3}{2}l(0 + k') + l \cdot (0) \cdot k' = 0,$$

откуда $k' = \frac{4}{3}$. □

Пример 48. *Написать уравнение эллипса, зная его центр $O'(2, 1)$ и концы сопряжённых диаметров $A(5, 1)$, $B(0, 3)$ (система координат аффинная).*

Решение. Введём новую аффинную систему координат, принимая за начало этой системы центр эллипса O', а OA' — за ось $O'x'$, $O'B$ — за ось $O'y'$. Тогда $a_1 = a_2 = 0$, так как начало координат O' — центр эллипса; $a_{12} = 0$, так как направления OA и OB сопряжены.

В новой системе уравнение будет иметь вид

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a = 0$$

В старой системе координат уравнения осей $O'x'$ и $O'y'$ соответственно будут

$$\begin{aligned} O'x'&:\quad y-1=0; \qquad && x'=x+y-3,\\ O'y'&:\quad x+y-3=0 \qquad && y'=y-1. \end{aligned}$$

В старой системе уравнение будет иметь вид:

$$a_{11}(x+y-3)^2+a_{22}(y-1)^2+a=0.$$

Так как кривая проходит через точку $A(5,1)$ и $B(0,3)$, получаем

$$9a_{11}+a=0, \quad 4a_{22}+a=0,$$

откуда

$$\left(\frac{x+y-3}{3}\right)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1,$$

или после преобразований

$$4x^2+8xy+13y^2-24x-42y+9=0.$$

□

Контрольные вопросы к §7

1. *Составить канонические уравнения линий второго порядка, если:*

1) $I_1=0,\ I_2=-1,\ I_3=1;$
2) $I_1=2,\ I_2=-3,\ I_3=0;$
3) $I_1=2,\ I_2=5,\ I_3=0;$
4) $I_1=13,\ I_2=36,\ I_3=-36.$

2. *Выразить через инварианты I_1, I_2, I_3 условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $F(x,y)=0$ второго порядка задавало:*

1) окружность и выразить через инварианты её радиус;

2) равностороннюю гиперболу и выразить через инварианты её полуось;

3) пару взаимно перпендикулярных прямых.

3. *Пусть $F(x, y) = 0$ — уравнение линии второго порядка и точка $M(x_0, y_0)$ не принадлежит линии. Найти через инварианты необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка M лежала:*

1) внутри полосы, образованной параллельными прямыми;

2) в остром углу между асимптотами гиперболы;

3) внутри фигуры, ограниченной эллипсом.

4. *Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы к гиперболе*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

из точки $M(x_0, y_0)$:

1) можно было провести две касательные;

2) одну касательную;

3) нельзя было провести ни одной касательной.

5. *Привести пример линии второго порядка, имеющей ровно 4 оси симметрии.*

6. *Какой вид будет иметь уравнение эллипса, если за оси координат принять его сопряжённые диаметры, а за единичную точку системы координат одну из точек пересечения касательных, параллельных этим диаметрам?*

7. *Какой вид будет иметь уравнение параболы, если за ось Oy принять диаметр и за ось Ox — касательную, проведённую через точку пересечения диаметра с параболой, а за единичную точку системы координат — любую точку параболы?*

8. *Как выбрана прямоугольная система координат, если уравнения линии второго порядка имеют вид:*

$$1)\ y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2; \quad 2)\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2; \quad 3)\ y^2 = 2px,$$

где p — фокальный параметр, a — полуось.

8 Канонические уравнения поверхностей второго порядка

8.1 Канонические уравнения поверхностей

Эллипсоиды. Гиперболоиды. Параболоиды. Их асимптотические конусы и плоские сечения.

[1; гл. 18, §4, 5, задачи 79—81, 84]
[2; 8.2]
[3; 588, 590—592, 594, 638, 643, 644, 648, 729, 730, 733]

Пример 49. *Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через точку* $(10, 6, 11)$, *зная, что плоскости* xOz *и* yOz *являются его плоскостями симметрии, а плоскость* xOy *пересекает параболоид по двум прямым, причём углы между этими прямыми, в которых проходит ось* Ox, *равны* $\frac{\pi}{3}$.

Решение. Уравнение искомого параболоида может быть записано в виде

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = \pm 2z \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Полагая в этом уравнении $z = 0$, получим

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0, \quad \text{или} \quad y = \pm\sqrt{\frac{p}{q}}\,x.$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{или} \quad p = 3q.$$

Таким образом, уравнение искомого параболоида может быть переписано в виде

$$\frac{x^2}{3q} - \frac{y^2}{q} = \pm 2z.$$

Подставляя сюда координаты данной точки $(10, 6, 11)$, получим

$$\frac{100}{3q} - \frac{36}{q} = \pm 22, \quad \text{или} \quad -\frac{8}{3q} = \pm 22.$$

Мы видим, что число q будет положительным, если в правой части уравнения искомого параболоида возьмём знак минус. Из последнего равенства находим $q = \frac{4}{33}$, следовательно, $p = \frac{4}{11}$, поэтому уравнение параболоида будет

$$\frac{x^2}{\frac{4}{11}} - \frac{y^2}{\frac{4}{33}} = -2z, \quad \text{или} \quad 11x^2 - 33y^2 + 8z = 0.$$

□

Пример 50. *Написать уравнение параболоида вращения с параметром $p = 6$, вершина которого находится в первом октанте, зная, что плоскость xOy пересекает параболоид по окружности с радиусом 3, касающейся обеих осей Ox и Oy.*

Решение. Сечение искомого параболоида плоскостью xOy определяется уравнениями

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9; \quad z = 0. \tag{1}$$

Так как центр окружности $(3,3,0)$ является ортогональной проекцией вершины параболоида на плоскость xOy, то координаты его вершины будут

$$(3,3,z_0), \quad z_0 > 0.$$

Так как направление параболоида (в сторону вогнутости поверхности) совпадает с отрицательным направлением оси Oz, то уравнение искомого параболоида может быть записано в виде

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = -12(z - z_0). \tag{2}$$

Точка $(3,0,0)$ принадлежит параболоиду, так как она принадлежит окружности, по которой параболоид пересекает плоскость xOy. Подставляя координаты точки $(3,0,0)$ в уравнение (2), найдём $z_0 = \frac{3}{4}$.

Подставляя это значение z_0 в уравнение (2), получим уравнение искомого параболоида

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = -12\left(z - \tfrac{3}{4}\right);$$
$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 12z + 9 = 0.$$

□

Пример 51. *Дан однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1$$

и плоскость $x=5$. Найти вид и параметры линии пересечения поверхности плоскостью.

Решение. Подставляя в уравнение гиперболоида вместо x его значение, равное 5, из уравнения плоскости, получим

$$\begin{cases} \frac{25}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1; \\ x=5 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2}-\frac{z^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-1; \\ x=5. \end{cases}$$

Значит, в сечении получается гипербола, действительная полуось которой равна $\frac{4}{3}$, мнимая полуось равна $\frac{8}{3}$, центр находится в точке $(5,0,0)$, действительная ось параллельна оси Oz, мнимая ось параллельна оси Oy. □

Пример 52. *Даны двуполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1$$

и плоскость

$$x+y-z+3=0.$$

Установить, пересекает ли плоскость гиперболоид (по действительной линии) и в утвердительном случае определить вид линии пересечения.

Решение. Система уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=-1 \\ x+y-z+3=0 \end{cases}$$

определяет пересечение гиперболоида и плоскости. Определяем z из уравнения плоскости

$$z=x+y+3$$

и подставляем полученное значение z в уравнение гиперболоида:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{(x+y+3)^2}{4} = -1, \\ x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение полученной системы задаёт гиперболический цилиндр. Плоскость

$$z = x + y + 3$$

пересекает гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{(x+y+3)^2}{4} = -1$$

с образующими, параллельными оси Oz, по гиперболе, так как она не параллельна образующим. □

8.2 Прямолинейные образующие

Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

[1; гл. 18, §6, задача 83]
[2; 8.3]
[3; 700–703, 707, 709]

Пример 53. *Найти направляющие векторы прямолинейных образующих гиперболического параболоида*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

проходящих через точку (x_0, y_0, z_0) *этого параболоида.*

Решение. Пусть l, m, n — координаты искомого направляющего вектора. Тогда параметрические уравнения прямолинейной образующей, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0), будут:

$$x = x_0 + lt; \quad y = y_0 + mt; \quad z = z_0 + nt.$$

Так как каждая точка образующей принадлежит параболоиду, то, подставляя в его уравнение вместо x, y, z их выражения из параметрических уравнений образующей, получим равенство, справедливое при всех значениях t:

$$\frac{(x_0+lt)^2}{p} - \frac{(y_0+mt)^2}{q} - 2(z_0+nt) = 0,$$

или (принимая во внимание, что точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит параболоиду)

$$\left(\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q}\right)t^2 + 2\left(\frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n\right)t = 0.$$

Это равенство справедливо при всех значениях t, что возможно, лишь когда оба коэффициента (при t^2 и при t) равны нулю:

$$\frac{l^2}{p} - \frac{m^2}{q} = 0; \quad \frac{lx_0}{p} - \frac{my_0}{q} - n = 0.$$

Положим $l = \sqrt{p}$, тогда будем иметь

$$m = \pm\sqrt{q}; \quad n = \frac{x_0}{\sqrt{p}} \pm \frac{y_0}{\sqrt{q}}.$$

Таким образом, искомые направляющие векторы будут:

$$\left(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\right); \quad \left(\sqrt{p}, -\sqrt{q}, \left(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\right).$$

□

Пример 54. *На параболоиде*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

найти геометрическое место точек, через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные образующие.

Решение. Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка искомого геометрического места. Тогда

$$\frac{x_0^2}{p} - \frac{y_0^2}{q} = 2z_0. \tag{1}$$

Направляющие векторы проходящих через эту точку прямолинейных образующих будут:

$$\mathbf{u}\Big(\sqrt{p}, \sqrt{q}, \Big(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\Big)\Big)$$

$$\mathbf{v}\Big(\sqrt{p}, -\sqrt{q}, \Big(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\Big)\Big),$$

(см. предыдущий пример).

Для перпендикулярности векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ необходимо, чтобы $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, то есть

$$\sqrt{p}\cdot\sqrt{p} + \sqrt{q}(-\sqrt{q}) + \Big(\frac{x_0}{\sqrt{p}} - \frac{y_0}{\sqrt{q}}\Big)\Big(\frac{x_0}{\sqrt{p}} + \frac{y_0}{\sqrt{q}}\Big) = 0,$$

или, в силу (1),

$$p - q + 2z_0 = 0, \tag{2}$$

откуда

$$z_0 = \frac{q-p}{2}.$$

Таким образом, искомое геометрическое место, определяемое равенствами (1) и (2), есть гипербола, когда $p \neq q$, и пара взаимно перпендикулярных прямых, если $p = q$. □

9 Общая теория поверхностей второго порядка

9.1 Типы поверхностей. Инварианты

Типы поверхностей, определяемых уравнением второй степени с тремя неизвестными. Приведение уравнения к каноническому виду. Инвариантность характеристического многочлена квадратичной формы уравнения поверхности, его коэффициентов и корней, инвариантность определителя многочлена, стоящего в левой части уравнения поверхности, относительно преобразования прямоугольных координат. Нахождение типа приведённого уравнения по инвариантам (для I и II типов) и канонического уравнения поверхности. Нахождение направляющих векторов канонических осей (главных направлений) и начала канонической системы координат (расположения поверхности).

[1; гл. 20, §1, 6, 7, гл. 19, §5, задачи 85, 86]
[2; 8.1]
[3; 667–672, 675, 678, 680, 682, 684, 685]

Замечание. Как и в случае кривых, обозначения основных инвариантов [1] и [3] различаются: s, δ, Δ и K, [1], но I_1, I_2, I_3, I_4 в [3]. Как и в случае кривых, если уравнение поверхности не содержит произведений xy, yz, zx или содержит только один такой член, следует решать задачу без теории инвариантов, с помощью нахождения параллельного переноса и, может быть, ещё поворота вокруг одной из координатных осей.

Рассмотрим несколько примеров этого типа.

Пример 55. *Определить вид и расположение поверхности*

$$2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 5 = 0.$$

Решение.

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 3y^2 - 3(z^2 - 2z + 1) + 3 - 5 = 0;$$
$$2(x+1)^2 - 3y^2 - 3(z-1)^2 = 4;$$
$$\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} - \frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1;$$
$$-\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} + \frac{(z-1)^2}{\frac{4}{3}} = -1.$$

Положим

$$x + 1 = x'; \quad y = y'; \quad z - 1 = z',$$

тогда уравнение поверхности примет вид

$$-\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} + \frac{z'^2}{\frac{4}{3}} = -1.$$

Это уравнение определяет двуполостный гиперболоид вращения (вокруг оси $O'x'$).

Формулы (1) можно переписать в виде

$$x = x' + 1; \quad y = y'; \quad z = z' + 1.$$

Отсюда видно, что уравнение приводится к каноническому виду параллельным переносом осей координат. Начало новой системы $O'x'y'$ находится в точке $(-1, 0, 1)$; эта точка является центром гиперболоида. Ось вращения совпадает с новой осью $O'x'$, то есть прямой, проходящей через точку $(-1, 0, 1)$ параллельно оси Ox. Полуоси гиперболоида

$$a = \sqrt{2}; \quad b = c = \tfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

Этот гиперболоид может быть получен вращением вокруг действительной оси гиперболы:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} = 1; \quad z' = 0,$$

уравнения которой даны относительно новой системы координат. □

Пример 56. *Определить вид и расположение поверхности*

$$2z^2 = 3x - 4y + 8z - 18. \tag{1}$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$2(z-1)^2 = 5\left(\tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y - 2\right)$$

и положим

$$\begin{aligned} x' &= \tfrac{3}{5}x - \tfrac{4}{5}y - 2; \\ y' &= \tfrac{4}{5}x + \tfrac{3}{5}y; \\ z' &= z - 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Матрица этого преобразования

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица является ортогональной, то преобразование (2) можно рассматривать, как переход к новым прямоугольным координатам. Формулы $x = \frac{3x'+4y'+6}{5}$; $y = \frac{-4x'+3y'-8}{5}$; $z = z' + 2$ задают

переход к новому базису, который из старого получается перено
в точку $O'\left(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}, 2\right)$ и поворотом вокруг оси Oz на угол $\varphi = \arccos$

Из уравнения (1) и первого из равенств (2) вытекает, что в но координатах уравнение данной поверхности будет иметь вид

$$z'^2 = \tfrac{5}{2}x'.$$

Следовательно, данная поверхность — параболический цилиндр. правляющей этого цилиндра служит парабола с параметром p лежащая в плоскости $y' = 0$, то есть в плоскости $4x - 3y = 0$.

Плоскость симметрии цилиндра, перпендикулярная к плоскс его направляющей, есть плоскость $z' = 0$, или $z = 2$.

Плоскость, касательная к цилиндру, перпендикулярная к п. кости симметрии, будет $x' = 0$, или

$$3x - 4y - 10 = 0.$$

Для всех точек цилиндра $x' > 0$, то есть цилиндр лежит в том п пространстве от плоскости $3x - 4y - 10 = 0$, для всех точек кото

$$3x - 4y - 10 > 0.$$

Пример 57. *Определить вид и расположение поверхности*

$$z^2 = 2xy.$$

Решение. Для приведения данного уравнения к каноническому ду достаточно повернуть систему координат вокруг оси Oz на та угол α, чтобы в преобразованном уравнении не содержался чл произведением координат. Этот угол определяется из тригоно рического уравнения

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

В рассматриваемом случае $\operatorname{ctg} 2\alpha = 0$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Поэтому формулы поворота будут

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}; \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}; \quad z = z'.$$

Подставляя эти значения x, y, z в уравнение $z^2 = 2xy$, после преобразования получим

$$z'^2 = x'^2 - y'^2,$$

или

$$y'^2 + z'^2 - x'^2 = 0.$$

Это конус вращения с вершиной в начале координат. Угол между осью вращения и образующими равен $\frac{\pi}{4}$. Осью конуса является новая ось Ox', то есть биссектриса угла xOy. □

Пример 58. *Определить вид и расположение поверхности*

$$x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(x + 2y)^2 + 5\left(z + \tfrac{2}{5}\right)^2 - \tfrac{4}{5} = 0$$

и положим

$$\frac{x + 2y}{\sqrt{5}} = x'; \quad \frac{2x - y}{\sqrt{5}} = y'; \quad z + \tfrac{2}{5} = z',$$

тогда будем иметь

$$5x'^2 + 5z'^2 - \tfrac{4}{5} = 0,$$

или

$$x'^2 + z'^2 = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2.$$

Это — круглый цилиндр с радиусом $\frac{2}{5}$, ось которого $O'y'$ в старой системе координат определяется уравнениями:

$$x + 2y = 0$$
$$x + \tfrac{2}{5} = 0.$$

□

Пример 59. *Определить вид и расположение поверхности*

$$4y^2 + 3xy + 2z - 8 = 0.$$

Решение. Представим уравнение в виде

$$-2(z-4) = y(3x+4y). \tag{1}$$

Плоскости симметрии этой поверхности проходят через точку $(0,0,4)$ и являются биссекторными плоскостями двугранного угла $y=0$, $3x+4y=0$, отсюда их уравнения

$$\frac{|y|}{1} = \frac{|3x+4y|}{5} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} &3x - y = 0;\\ &3x+9y=0. \end{aligned}$$

Примем за новые координатные плоскости $y'O'z'$ и $x'O'z'$ эти плоскости и плоскость $z-4=0$ за плоскость $x'O'y'$. Тогда

$$\begin{aligned} &x' = \frac{3x-y}{\sqrt{10}}; & & x = \frac{3x'+y'}{\sqrt{10}};\\ &y' = \frac{x+3y}{\sqrt{10}}; & \text{отсюда} \quad & y = \frac{-x'+3y'}{\sqrt{10}};\\ &z' = z-4; & & z = z'+4. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставив (2) в уравнение (1), получим

$$-2z' = \left(\frac{-x'+3y'}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{5x'+15y'}{\sqrt{10}}\right)$$

или

$$-2z' = \tfrac{1}{2}(-x'^2+9y'^2)$$

или

$$2z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{\frac{2}{9}}$$

— каноническое уравнение гиперболического параболоида. □

Пример 60. *Определить вид поверхности второго порядка*

$$x^2+5y+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0;$$

привести её уравнение к каноническому виду и найти расположение.

Решение.

$$I_1 = 1 + 5 + 1 = 7;$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -36;$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 36^2.$$

Поскольку $I_3 \neq 0$, то поверхность относится к первому типу — центральная.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Его корни будут

$$\lambda_1 = 3; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = -2.$$

Поэтому в канонической системе координат уравнение поверхности будет иметь вид

$$3x'^2 + 6y'^2 - 2z'^2 + \tfrac{36}{-36} = 0$$

или каноническое уравнение будет

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{3}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{6}} - \frac{z'^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Данная поверхность — однополостный гиперболоид с полуосями

$$a = \tfrac{1}{\sqrt{3}}; \quad b = \tfrac{1}{\sqrt{6}}; \quad c = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Определим расположение поверхности, то есть начало и направление осей канонической системы координат. В случае центральной поверхности началом канонической системы координат является её центр O', он определяется из системы уравнений

$$x + y + 3z - 1 = 0;$$
$$x + 5y + z + 3 = 0;$$
$$3x + y + z + 1 = 0.$$

Находим $O'\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Направления осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ канонической системы координат найдём как главные направления, соответствующие корням характеристического уравнения. Для определения направляющего вектора оси $O'x'$ имеем систему уравнений ($\lambda_1 = 3$):

$$\begin{aligned}
&(1-3)\alpha_1 + \beta_1 + 3\gamma_1 = 0;\\
&\alpha_1 + (5-3)\beta_1 + \gamma_1 = 0;\\
&3\alpha_1 + \beta_1 + (1-3)\gamma_1 = 0.
\end{aligned}$$

Её решением будет, например, вектор $(1, 1, 1)$; следовательно, $\mathbf{e}'_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ — единичный направляющий вектор оси $O'x'$.

Точно так же для $\lambda_2 = 6$ найдём $\mathbf{e}'_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Аналогично, для $\lambda_3 = -2$ найдём $\mathbf{e}'_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. □

Замечание. В случае, когда уравнение поверхности относится к I, III типам, можно найти свободный член приведённого уравнения, подставив значение координат центра (или одного из центров) в левую часть данного уравнения. Таким образом, получим приведённое уравнение:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

В случае гиперболоидов в качестве λ_1 и λ_2 всегда берём два корня одинакового знака, причём обычно $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

В случае эллипсоида корни нумеруют

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|.$$

В случае, если два ненулевых корня совпадают, то в качестве λ_3 берём третий из корней, находим отвечающий ему вектор $\mathbf{e}'_3$ главного направления (ось $O'z'$). За вектор $\mathbf{e}'_1$ выбираем любой вектор, перпендикулярный $\mathbf{e}'_3$, то есть $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_3) = 0$; $|\mathbf{e}'_1| = 1$, вектор $\mathbf{e}'_2 = [\mathbf{e}'_3, \mathbf{e}'_1]$ (если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то в уравнении поверхности $a_{12} = a_{23} = a_{13} = 0$).

Пример 61. *Определить форму, размеры и расположение поверхности второго порядка*

$$2x^2 + 5y^2 + 2x^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0.$$

Решение.

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$I_1 = 9;$$

$$I_2 = 18;$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6, \quad \lambda_3 = 0.$$

Система уравнений для определений центра

$$2x - y - 2z + 1 = 0;$$
$$-x + 5y + z - 5 = 0;$$
$$-2x + y + 2z - 1 = 0$$

совместна и имеет бесчисленное множество решений — прямую центров $x = t$; $y = 1$; $z = t$. Таким образом, $\mathbf{e}_3'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Один из центров $O'(0, 1, 0)$; подставляя значения координат точки O' в левую часть уравнения, получим число -6, следовательно, уравнение данной поверхности в канонической системе координат таково:

$$3x'^2 + 6y'^2 - 6 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Каноническое уравнение эллиптического цилиндра с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.

За начало канонической системы координат может быть принят любой из центров, например, $O'(0, 1, 0)$. Направляющие векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ осей $O'x'$, $O'y'$ канонической системы координат находятся как главные направления, соответствующие характеристическим числам 3, 6 (ось $O'z'$ — прямая центров).

Для вектора $\mathbf{e}_1'$ имеем систему

$$-\alpha - \beta - 2\gamma = 0;$$
$$-\alpha + 2\beta + \gamma = 0;$$
$$-2\alpha + \beta - \gamma = 0$$

при условии $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$.

Из неё находим $\mathbf{e}_1'\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Точно так же для $\lambda_2=6$ найдём

$$\begin{aligned}&-4\alpha-\beta-2\gamma=0;\\&-\alpha-\beta+\gamma=0;\\&-2\alpha+\beta-4\gamma=0;\quad \mathbf{e}_2'\left(\tfrac{1}{\sqrt{6}},-\tfrac{2}{\sqrt{6}},-\tfrac{1}{\sqrt{6}}\right).\end{aligned}$$

□

Замечание. В случае поверхностей II, IV типов, то есть поверхностей, не имеющих центра, мы будем находить базис $\mathbf{e}_1'(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$; $\mathbf{e}_2'(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$; $\mathbf{e}_3'(\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)$ векторов, направленных по главным направлениям, в котором квадратичная форма имеет вид $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2$, в этом же базисе

$$\begin{aligned}x&=\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z';\\y&=\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z';\\z&=\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z'\end{aligned}$$

запишем линейную форму $a_{14}x'+a_{24}y+a_{34}z$. Она будет иметь вид $b_{14}x'+b_{24}y'+b_{34}z'$, где $b_{34}\neq0$.

Исходное уравнение запишется в виде

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+b_{14}x'+b_{24}y'+b_{34}z'+a_{44}=0,$$

и дальнейшее его упрощение следует проводить по изученной ранее схеме (см. примеры 56, 57).

Пример 62. *Определить вид поверхности, её каноническое уравнение и расположение в пространстве:*

$$4x^2+4y^2-8z^2-10xy+4yz+4zx-16x-16y+10z-2=0. \quad (1)$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -5 & 2\\ -5 & 4-\lambda & 2\\ 2 & 2 & -8-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Получим $\lambda^3-81\lambda=0$. Имеем $\lambda_1=9$; $\lambda_2=-9$; $\lambda_3=0$. Найдём главные направления для $\lambda_1=9$ — $\mathbf{e}_1'(x_1,y_1,z_1)$ имеем

$$\begin{aligned}&-5x_1-5y_1+2z_1=0;\\&-5x_1-5y_1+2z_1=0;\\&2x_1+2y_1-17z_1=0.\end{aligned}$$

Откуда $\mathbf{e}_1'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ аналогично, для $\lambda_2 = -9$ — $\mathbf{e}_2'\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\lambda_3 = 0$ — $\mathbf{e}_3'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Выразим старые координаты через новые

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{2}{3}z';$$
$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{3\sqrt{2}}y' + \frac{2}{3}z';$$
$$z = 0 \cdot x' - \frac{4}{3\sqrt{2}}y' + \frac{1}{3}z'$$

и подставим в (1). Получим $9x'^2 - 9y'^2 - \frac{24}{\sqrt{2}}y' - 18z - 2 = 0$, или $9x'^2 - 9\left(y' + \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^2 = 18\left(z' - \frac{1}{3}\right)$.

Сделав параллельный перенос

$$x'' = x'; \quad y'' = y' + \frac{4}{3\sqrt{2}}; \quad z'' = z' - \frac{1}{3},$$

получим каноническое уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{1} = 2z''.$$

□

Ответ: $\mathbf{e}_1'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $\mathbf{e}_2'\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}_3'\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $O'(0, 0, 1)$ — вершина, $p = q = 1$.

Пример 63. *Определить вид, каноническое уравнение и расположение поверхности*

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0. \quad (1)$$

Решение. Заметим, что уравнение приводится к виду

$$(2x - y - 2z)^2 - (2x - 2y - 16z - 45) = 0,$$

то есть это параболический цилиндр, образующая которого параллельна прямой

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 0; \\ -28x + 2y + 16z = 0 \end{cases} \quad (2)$$

с направляющим вектором $(1, -2, 2)$.

Для нахождения канонического уравнения составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & -4 \\ -2 & 4-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^3 - 9\lambda^2 = 0.$$

$\lambda_1 = 9$; $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ — его корни.

Найдём вектор $\mathbf{e}_1'(x_1, y_1, z_1)$ — главное направление, отвечающее корню $\lambda_1 = 9$:

$$\begin{aligned} &-5x_1 - 2y_1 - 4z1 = 0; \\ &-2x_1 - 8y_1 - 2z_1 = 0; \\ &-4x_1 + 2y_1 - 5z_1 = 0. \end{aligned}$$

Получим вектор $\mathbf{e}_1'\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, найдём $\mathbf{e}_2'(x_2, y_2, z_2)$ и $\mathbf{e}_3'(x_3, y_3, z_3)$ — главные направления, отвечающие $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$:

$$\begin{aligned} &4x - 2y - 4z = 0; \\ &-2x + y + 2z = 0; \\ &-4x + 2y + 4z = 0. \end{aligned}$$

Выберем $\mathbf{e}_2'(x_2, y_2, z_2)$ произвольно, так, чтобы $|\mathbf{e}_2'| = 1$ и $2x_1 - y_1 - 2x_1 = 0$. Можем взять $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. В качестве вектора $\mathbf{e}_3'$ возьмём $\mathbf{e}_3' = [\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2']$, его координаты (x_3, y_3, z_3) будут $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Формулы перехода от системы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к системе $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ запишутся так:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3}x' + \tfrac{2}{3}y' + \tfrac{1}{3}z'; \\ y &= -\tfrac{1}{3}x' + \tfrac{2}{3}y' - \tfrac{2}{3}z'; \\ z &= -\tfrac{2}{3}x' + \tfrac{1}{3}y' + \tfrac{2}{3}z'. \end{aligned} \tag{3}$$

В новой системе координат квадратичная часть уравнения запишется так: $9x'^2$, а линейная часть $30x' + 12y' + 0 \cdot z'$.

Таким образом, получим $9x'^2 - 30x' - 12y' + 45 = 0$; упрощая, придём к уравнению $9\left(x' - \frac{5}{3}\right)^2 = 12\left(y' - \frac{5}{3}\right)$, или к $x''^2 = \frac{4}{3}y''$ — каноническому уравнению параболического цилиндра с параметром $p = \frac{2}{3}$.

Начало O' канонической системы координат получим, подставив в (3) $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ (третью координату можно выбрать произвольно) $O'(2, 1, -1)$. □

Замечание. Если уравнение поверхности приводится к виду

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + k(\alpha x + \beta y + \gamma z) + a_{44} = 0, \tag{4}$$

то поверхность второго порядка распадается на пару плоскостей, уравнения которых найдём, решив (4) относительно выражения $\alpha x + \beta y + \gamma z$.

9.2 Пересечение поверхности второго порядка с прямой

Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Асимптотические и неасимптотические направления. Конус асимптотических направлений поверхности второго порядка. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью. Касательные прямые и касательная плоскость к поверхности второго порядка. Прямолинейные образующие.

[1; гл. 19, §2—4, задача 87]
[2; 8.3]
[3; 687, 689, 690, 692, 697, 701, 703, 705—707, 709, 715, 719, 721, 723—727]

Иногда инварианты полезны при составлении уравнения поверхности.

Пример 64. *Составить уравнение конуса второго порядка, пересекающего плоскость Oyz по окружности*

$$y^2 + z^2 - 2ry = 0; \quad x = 0,$$

а плоскость Oxz по параболе

$$z^2 - 2px = 0; \quad y = 0,$$

Решение. Напишем общее уравнение поверхности второго порядка

$$\begin{gathered} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz \\ + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Линия пересечения с плоскостью Oyz получится

$$x = 0; \quad a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

по условию — окружность

$$x = 0; \quad y^2 + z^2 - 2ry = 0.$$

Из сравнения коэффициентов (с точностью до множителя) получаем

$$a_{22} = a_{33}; \quad a_{23} = 0; \quad a_3 = a = 0. \tag{2}$$

Можно считать, что $a_{22} = 1$, разделив в случае необходимости левую часть уравнения (1) на a_{22}, тогда

$$a_{22} = a_{33} = 1; \quad a_2 = -r. \tag{3}$$

Линия пересечения с плоскостью Oxz получится

$$y = 0; \quad a_{11}x^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_1x + 2a_3z + a = 0,$$

по условию она парабола

$$y = 0; \quad z^2 - 2px = 0.$$

Сравнивая коэффициенты и используя (2) и (3), получим

$$a_{11} = 0; \quad a_{33} = a_{22} = 1; \quad a_{13} = a_{23} = 0;$$
$$a_3 = a = 0; \quad a_2 = -r; \quad a_1 = -p,$$

таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$y^2 + z^2 + 2a_{12}xy - 2px - 2ry = 0.$$

Теперь учтём, что мы ищем уравнение конуса, то есть $I_4 = 0$. Проводя вычисление, найдём $a_{12} = \frac{p}{2r}$. □

Ответ: Искомое уравнение $ry^2 + rz^2 + pxy - 2prx - 2r^2y = 0$.

Замечание. При решении задач, связанных с прямолинейными образующими поверхности, рекомендуется использовать параметрические уравнения прямых и учитывать, что после подстановок их в уравнения поверхности коэффициенты возникающего квадратичного трёхчлена от параметра t должны обращаться в нуль.

Пример 65. *Доказать, что направляющие векторы прямолинейных образующих поверхности второго порядка, проходящих через точку M_0, являются асимптотическими, а будучи отложенными от точки M_0 — принадлежат касательной плоскости.*

Решение. Пусть (X, Y, Z) — такой вектор, и (x_0, y_0, z_0) — координаты точки M_0. Подставим параметрические координаты точек прямолинейной образующей $x = x_0 + Xt$; $y = y_0 + Yt$; $z = z_0 + Zt$ в уравнение поверхности, получим квадратный трёхчлен $At^2 + 2Bt + C$, в котором

$$\begin{aligned} A &= a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}XY + 2a_{23}YZ + 2a_{13}XZ; \\ B &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)X \\ &\quad + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)Y + (a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33}z_0)Z, \end{aligned}$$

а $C = F(x_0, y_0, z_0) = 0$, так как точка M_0 лежит на поверхности.

Точки (x, y, z) при всех t лежат на поверхности, поэтому $A = B = 0$. Обращение в нуль A означает, что вектор (X, Y, Z) асимптотический, а обращение в нуль B — что этот вектор лежит в касательной плоскости (поскольку $x - x_0 = Xt$, $y - y_0 = Yt$, $z - z_0 = Zt$). □

Замечание. В случае, если необходимо найти координаты (X, Y, Z) вектора прямолинейной образующей, следует решить (с точностью до множителя) систему

$$\begin{aligned} A &= A(X, Y, Z) = 0; \\ B &= B(X, Y, Z) = 0. \end{aligned}$$

Пример 66. *Даны эллипсоид*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

и прямая

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0}.$$

Написать уравнения плоскостей, проходящих через данную прямую и касающихся данного эллипсоида.

Решение. Как и для кривых на плоскости, задачи на нахождение касательных решаются через отыскание точки касания.

Пусть (x_0, y_0, z_0) — точка касания данного эллипсоида и искомой плоскости. Уравнение касательной плоскости к эллипсоиду в этой точке

$$\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{12} + \frac{z_0 z}{4} = 1.$$

данная прямая проходит через точку $(2, 3, 2)$ и имеет направляющий вектор $(2, -1, 0)$. Точка $(2, 3, 2)$ должна лежать в искомой касательной плоскости, поэтому

$$\frac{2x_0}{16} + \frac{3y_0}{12} + \frac{2z_0}{4} = 1.$$

Вектор $(2, -1, 0)$ компланарен искомой плоскости, что даёт

$$\frac{2x_0}{16} - \frac{y_0}{12} = 0.$$

Кроме того, точка (x_0, y_0, z_0) принадлежит эллипсоиду, то есть

$$\frac{{x_0}^2}{16} + \frac{{y_0}^2}{12} + \frac{{z_0}^2}{4} = 1.$$

Выражая y_0 и z_0 из первых двух уравнений через x_0 и подставляя в третье, найдём для точки касания два решения: $(0, 0, 2)$ и $(2, 3, 0)$.

Итак, искомые касательные плоскости выражаются уравнениями $z = 2$ и $x + 2y - 8 = 0$. □

9.3 Диаметральная плоскость

Центр симметрии поверхности второго порядка. Диаметральные плоскости. касательная плоскость. Сопряжённые направления. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью.

[1; гл. 19, §5, гл. 20, §1, 2, 3, 4, задача 88]
[2; 8.3]
[3; 730, 733, 734, 736, 741, 742, 746, 751, 756, 758]

Пример 67. *Даны однополостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{5} = 1$$

и точка $(6, 6, 5)$. Найти все хорды гиперболоида, проходящие через данную точку и делящиеся в ней пополам.

Решение. Пусть (α, β, γ) — направляющий вектор одной из этих хорд, а (x, y, z) — произвольная точка; тогда

$$\frac{x-6}{\alpha} = \frac{y-6}{\beta} = \frac{z-5}{\gamma}.$$

Если в точке (x_0, y_0, z_0) хорда с направляющим вектором (α, β, γ) делится пополам, то имеет место соотношение

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_1)\alpha + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_2)\beta$$
$$+ (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_3)\gamma = 0.$$

В нашем случае это даёт

$$3\alpha + 2\beta - \gamma = 0. \tag{1}$$

Подставляя в уравнение (1) вместо α, β, γ пропорциональные им числа $x - 6$; $y - 6$; $z - 5$, получим

$$3(x - 6) + 2(y - 6) - (z - 5) = 0,$$

или окончательно

$$3x + 2y - z - 25 = 0.$$

□

Пример 68. *Найти полуоси и оси симметрии эллипса, полученного в пересечении эллипсоида* $x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$ *плоскостью* $x + y + z = 0$.

Решение. Выберем в плоскости ортонормированный репер: $O(0, 0, 0)$, $\mathbf{e}'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\mathbf{e}'_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; в этом репере уравнение эллипса запишется

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v;$$
$$y = 0 - \frac{2}{\sqrt{6}}v;$$
$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v;$$
$$x^2 + y^2 + 4z^2 = 1.$$

Исключая x, y, z, получим уравнение линии на плоскости

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v\right)^2 + \frac{4}{6}v^2 + 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{6}}v\right)^2 - 1 = 0,$$

или $\frac{5}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2 - 3\frac{uv}{\sqrt{3}} - 1 = 0$, которое можно упростить.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, его корни: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 3$, соответствующие им главные направления $\mathbf{e}''_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\mathbf{e}''_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

В системе $\mathbf{e}_1''$, $\mathbf{e}_2''$ (в пространстве: $\mathbf{e}_1''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$; $\mathbf{e}_2''\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$) каноническое уравнение эллипса

$$u''^2 + \frac{v''^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

□

Пример 69. *Найти фокусы сечения конуса*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 0 \tag{1}$$

плоскостью

$$x + 2y + 2z = 24. \tag{2}$$

Решение. Заметим, что (1) — конус вращения с осью $(1, 1, 1)$, так как при замене $x \to y \to z \to x$ уравнение не изменяется. Искомые фокусы (x_0, y_0, z_0) являются точками касания сфер, вписанных в конус (1), касающихся плоскости (2) (см. [3; 157]).

Пусть центр сферы (a, a, a), вычислим её радиус R: $R = a\sqrt{3}\sin\varphi$, где φ — угол между образующей $x = t$, $y = t$, $z = t$ и осью $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$, т. е. $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $R = a$.

Уравнение сферы

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 = R^2.$$

Касательная плоскость к сфере в точке (x_0, y_0, z_0)

$$(x-a)(x_0-a) + (y-a)(y_0-a) + (z-a)(z_0-a) = a^2$$

совпадает с плоскостью (2), следовательно:

$$\frac{x_0 - a}{1} = \frac{y_0 - a}{2} = \frac{z_0 - a}{2} = \frac{2a^2 - a(x_0 + y_0 + z_0)}{-24} = t. \tag{4}$$

Из (4) получаем

$$x_0 - a = t; \quad y_0 - a = 2t; \quad z_0 - a = 2t; \tag{5}$$

и из (5) получаем

$$x_0 + y_0 + z_0 = 3a + 5t,$$

а из последнего равенства (4)

$$-a^2 - 5at = -24t,$$

из (5) и (2) получаем

$$5a + 9t = 24,$$

так как (x_0, y_0, z_0) лежит в (2), из двух последних равенств получаем, что $a^2 = 9t^2$ и $a = \pm 3t$ и $t_1 = 1$, $t_2 = -4$. Соответственно $a_1 = 3$, $a_2 = 12$.

□

Ответ: $x_0^{(1)} = 4$, $y_0^{(1)} = 5$, $z_0^{(1)} = 5$; $x_0^{(2)} = 8$, $y_0^{(2)} = 4$, $z_0^{(2)} = 4$.

Контрольные вопросы к §9

9. *С помощью инвариантов выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $F(x, y, z) = 0$ второго порядка задавало:*

1) конус действительный или мнимый;

2) поверхность, у которой через каждую точку проходит ровно две различных прямолинейных образующих;

3) поверхность, у которой через каждую точку проходит более двух различных прямолинейных образующих;

4) поверхность, у которой через каждую точку проходит ровно две совпавших прямолинейных образующих;

5) поверхность, у которой через каждую точку проходит одна действительная прямолинейная образующая.

10. *С помощью инвариантов выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $F(x, y, z) = 0$ второго порядка задавало поверхность:*

а) имеющую один единственный центр симметрии;

б) имеющую прямую центров;

в) имеющую плоскость центров;

г) не имеющую центра.

11. *С помощью инвариантов выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы уравнение $F(x, y, z) = 0$ второго порядка задавало поверхность:*

а) сферу;

б) параболоид вращения;

в) круговой цилиндр.

12. *Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет однополостный гиперболоид. Какие поверхности определяет уравнение $F(x,y,z)+\alpha=0$, где α — параметр?*

10 Аффинные и изометрические преобразования

10.1 Аффинные преобразования плоскости

[1; гл. 11, §1–5, задачи 46, 48, гл. 17, §12]
[2; 7.1]
[3; 762–770, 772–776, 778, 779, 783]

Пример 70. *При аффинном преобразовании точка $O(0,0)$ переходит в симметричную относительно прямой $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, а точки $E_1(2,0)$ и $E_2(0,3)$ меняются местами. Найти формулы этого преобразования.*

Решение. Уравнение прямой имеет вид $3x+2y-6=0$. Образ O' точки O лежит на прямой $x=3t$, $y=2t$, причём результат подстановки его координат в уравнение прямой равен плюс шесть, $9t+4t-6=6$, $t=\frac{12}{13}$. Точка O' имеет координаты $\left(\frac{36}{13},\frac{24}{13}\right)$. Вектор $\mathbf{e}_1=\frac{1}{2}\overrightarrow{OE_1}$ переходит в вектор $\mathbf{e}_1'=\frac{1}{2}\overrightarrow{O'E_2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{36}{13},3-\frac{24}{13}\right)=\left(-\frac{18}{13},\frac{15}{26}\right)$. Аналогично $\mathbf{e}_2$ переходит в $\mathbf{e}_2'=\frac{1}{3}\overrightarrow{O'E_1}=\left(-\frac{10}{39},-\frac{8}{13}\right)$.

Формулы аффинного преобразования:

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{18}{13} & -\frac{10}{39}\\ \frac{15}{26} & -\frac{8}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{36}{13}\\ \frac{24}{13}\end{pmatrix}.$$

□

Пример 71. *Относительно прямоугольной системы координат дано аффинное преобразование*

$$\begin{aligned}x'&=7x+y;\\ y'&=-5x+5y.\end{aligned}\tag{1}$$

Найти два перпендикулярных вектора, образы которых также перпендикулярны.

Решение. В окружность $x'^2 + y'^2 = 1$ переходит эллипс, уравнение которого получается подстановкой вместо x', y' их выражений из (1)

$$74x^2 - 36xy + 26y^2 = 1. \tag{2}$$

Искомые векторы — главные направления (2). Найдём их. Характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 100\lambda + 1600 = 0$, его корни: $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = 80$. Главные направления: $(1; 3)$ и $(3; -1)$. □

10.2 Аффинные преобразования пространства

[1; гл. 11, §1–5, задачи 47, 49, гл. 17, §12]
[2; 7.1]
[3; 785, 787, 789, 790]

Пример 72. *Найти аффинное преобразование, переводящее плоскости*

$$x + y + z - 1 = 0; \quad 2y - z + 2 = 0; \quad x - y + 2z - 1 = 0$$

соответственно в плоскости

$$x - y + 1 = 0; \quad y + z - 1 = 0; \quad x + 2y - 2z = 0$$

и точку $(0, 0, 0)$ *в точку* $(1, 1, 1)$. *Какая плоскость перейдёт в плоскость*

$$x + y + z - 1 = 0?$$

Решение. Образ (x', y', z') точки (x, y, z), лежащей, например, в плоскости $x + y + z - 1 = 0$, лежит в плоскости $x' - y' + 1 = 0$, поэтому

$$x + y + z - 1 = \alpha(x' - y' + 1), \tag{1.1}$$

(сравните с примером 24) аналогично,

$$\begin{aligned} &2y - z + 2 = \beta(y' + z' - 1); \\ &x - y + z - 1 = \gamma(x' + 2y' - 2z'). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Так как образом точки $(0, 0, 0)$ является точка $(1, 1, 1)$, то получаем

$$-1 = \alpha; \quad 2 = \beta; \quad -1 = \gamma$$

и

$$
\begin{aligned}
&x + y + z - 1 = -x' + y' - 1\\
&2y - z + 2 = 2y' + 2z' - 2 \qquad (2)\\
&x - y + z - 1 = -x' - 2y' + 2z'.
\end{aligned}
$$

Разрешив систему (2) относительно x', y', z', получим ответ. □

Ответ:

$$
\begin{aligned}
&x' = -x - \tfrac{1}{5}y - \tfrac{6}{5}z + 1;\\
&y' = \tfrac{4}{5}y - \tfrac{1}{5}z + 1;\\
&z' = \tfrac{1}{5}y - \tfrac{3}{10}z + 1.
\end{aligned}
$$

В плоскость $x' + y' + z' - 1 = 0$ перейдёт плоскость $10x - 8y + 17z - 20 = 0$.

Пример 73. *Показать, что для аффинного преобразования, имеющего единственную неподвижную точку, всякая инвариантная плоскость проходит через эту точку.*

Решение. Пусть O — неподвижная точка. Предположим, что есть инвариантная плоскость, не проходящая через точку O. выберем репер с началом в точке O, с векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, параллельными инвариантной плоскости, и с вектором $\mathbf{e}_3 = \overrightarrow{OA}$, где A — некоторая точка инвариантной плоскости. Формулы аффинного преобразования имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z;\\
&y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z;\\
&z' = z
\end{aligned}
$$

(ибо вектор $\mathbf{e}_3$ перейдёт в $\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 + a_{13}\mathbf{e}_1 + a_{23}\mathbf{e}_2$).

Плоскость $z = 0$ инвариантна, $O(0, 0)$ — единственная в ней неподвижная точка, единственное решение системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&x = a_{11}x + a_{12}y;\\
&y = a_{21}x + a_{22}y,
\end{aligned}
$$

поэтому её определитель

$$
\begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - 1 \end{vmatrix}
$$

отличен от нуля. Следовательно, при любых z система уравнений

$$(a_{11}-1)x + a_{12}y = -a_{13}z;$$
$$a_{21}x + (a_{22}-1)y = -a_{23}z$$

имеет решения, вопреки тому, что $O(0,0,0)$ — единственная неподвижная точка. □

Пример 74. *Показать, что если аффинное преобразование обладает единственной неподвижной точкой, то любая инвариантная прямая проходит через эту точку.*

Решение. Пусть O — неподвижная точка. Предположим, что имеется инвариантная прямая, не проходящая через эту точку. Выберем за $\mathbf{e}_1$ параллельный ей вектор, а $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OA}$, где A — точка на инвариантной прямой. Имеем: $\mathbf{e}_1' = \lambda\mathbf{e}_1$; $\mathbf{e}_2' = \mu\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, поэтому формулы аффинного преобразования в инвариантной плоскости таковы:

$$x' = \lambda x + \mu y;$$
$$y' = y.$$

Неподвижными точками этого преобразования будут прямая $y = \frac{1-\lambda}{\mu}x$ при $\mu \neq 0$ и ось Oy при $\mu = 0$, что противоречит единственности неподвижной точки. Следовательно, инвариантная прямая проходит через неподвижную точку. □

Пример 75. *Найти произведение симметрии относительно плоскости $2x - y - 5z + 120 = 0$ и последующего сжатия в два раза к этой плоскости.*

Решение. Заметим, что все точки плоскости остаются неподвижными. Пусть точка $M'(x', y', z')$ — образ точки $M(x, y, z)$ при этом преобразовании. Тогда

$$x' = x + 2t, \quad y' = y - t, \quad z' = z - 5t. \tag{1}$$

Удвоенный результат подстановки (x', y', z') в уравнение плоскости противоположен по знаку результату подстановки (x, y, z):

$$4x + 8t - 2y + 2t - 10z + 50t + 240 = -2x + y + 5z - 120.$$

Отсюда $t = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{20}y + \frac{1}{4}z - 6$. Подставляем t в (1), получаем ответ:

$$x' = \tfrac{4}{5}x + \tfrac{1}{10}y + \tfrac{1}{2}z - 12;$$
$$y' = \tfrac{1}{10}x + \tfrac{19}{20}y - \tfrac{1}{4}z + 6;$$
$$z' = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{4}z + 30.$$

□

Пример 76. *Найти произведение симметрии относительно прямой*

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 - t, \quad z = 5t$$

и последующего сжатия в два раза к этой прямой.

Решение. Точка $M(x, y, z)$ переходит в $M'(x', y', z')$ такую, что $\overrightarrow{MM'}$ перпендикулярен вектору **a**, где **a**$(2, -1, 5)$ — направляющий вектор прямой, а вектор $\frac{\overrightarrow{M_0M} + 2\overrightarrow{M_0M'}}{1+2}$ параллелен вектору **a** ($M_0(1, 2, 0)$ — начальная точка прямой). Использовано, что точка пересечения с прямой отрезка $\overrightarrow{MM'}$ делит его в отношении $\lambda = 2$.

Первое условие даёт

$$2(x' - x) - (y' - y) + 5(z' - z) = 0.$$

Координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} + 2\overrightarrow{M_0M'}$ суть

$$(x - 1 + 2(x' - 1), y - 2 + 2(y' - 2), z + 2z')$$
$$= (x + 2x' - 3, y + 2y' - 6, z + 2z').$$

Они пропорциональны $(2, -1, 5)$:

$$\frac{x + 2x' - 3}{2} = -y - 2y' + 6$$
$$\frac{z + 2z'}{5} = -y - 2y' + 6.$$

Для определения (x', y', z') (через (x, y, z)) имеем три уравнения:

$$2x' - y' + 5z' = 2x - y + 5z$$
$$2x' + 4y' = -x - 2y + 15$$
$$10y' + 2z' = -5y - z + 30.$$

Решение системы даёт

$$x' = -0{,}3x - 0{,}1y + 0{,}5z + 1{,}5$$
$$y' = -0{,}1x - 0{,}45y - 0{,}25z + 3$$
$$z' = 0{,}5x - 0{,}25y + 0{,}75z.$$

□

10.3 Аффинные преобразования линий и поверхностей второго порядка

[1; гл. 15, §3, гл. 16, §5, 6, гл. 20, §8]
[2; 7.3]
[3; 793, 795–798, 806–808, 810, 812]

Пример 77. *Найти общий вид собственных преобразований плоскости, при которых ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ перемещаются по себе. Проследить, как преобразуются все гиперболы вида $x^2 - y^2 = \pm a^2$.*

Решение. Свойство точки быть центром кривой второго порядка является аффинным. Так как гипербола преобразуется в себя, то её центр O остаётся на месте (образом O' точки O является $O' = O$).

Пусть $\mathbf{e}'_1 = (X, Y)$ — образ $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. Так как $x^2 - y^2 = 1$, то $X \geqslant 1$. Уравнение $X = \operatorname{ch}\sigma$ имеет два противоположных по знаку решения для σ (совпадающих с $\sigma = 0$ лишь при $X = 1$). Полагая $X = \operatorname{ch}\sigma$, находим $Y = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2\sigma - 1} = \operatorname{sh}\sigma$, $Y \geqslant 0$ при $\sigma \geqslant 0$ и $Y \leqslant 0$ при $\sigma \leqslant 0$. Таким образом, $\mathbf{e}'_1 = (\operatorname{ch}\sigma, \operatorname{sh}\sigma)$ — произвольный вектор, лежащий на правой ветви гиперболы.

Вектор $\mathbf{e}_2$ определяет направление, сопряжённое направлению $\mathbf{e}_1$ относительно гиперболы. Свойство сопряжённости направлений аффинно, поэтому образ $\mathbf{e}'_2$ вектора $\mathbf{e}_2$ сопряжён направлению $\mathbf{e}'_1$. Сопряжённые векторы (α, β) и (α', β') удовлетворяют условию $\alpha\alpha' - \beta\beta' = 0$, поэтому $\mathbf{e}'_2$ коллинеарен вектору $(\operatorname{sh}\sigma, \operatorname{ch}\sigma)$, $\mathbf{e}'_2 = \lambda \cdot (\operatorname{sh}\sigma, \operatorname{ch}\sigma)$. Множитель λ положителен, так как преобразование собственно. Свойство прямой быть асимптотой аффинно, поэтому образ асимптоты $x = y$ — сама эта прямая. Вектор $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ лежит на асимптоте, поэтому и его образ $\mathbf{e}'_1 + \mathbf{e}'_2$ тоже. Это возможно только при $\lambda = 1$, поэтому $\mathbf{e}'_2 = (\operatorname{sh}\sigma, \operatorname{ch}\sigma)$. Формулы преобразования:

$$x' = x\operatorname{ch}\sigma + y\operatorname{sh}\sigma$$
$$y' = x\operatorname{sh}\sigma + y\operatorname{ch}\sigma.$$

Легко проверить, что для точек (x, y) на гиперболе $x'^2 - y'^2 = 1$.

При преобразовании гипербола $x^2 - y^2 = -1$ перемещается по себе симметрично с $x^2 - y^2 = 1$ относительно общей асимптоты $x = y$. Аналогично перемещаются по себе все гиперболы вида $x^2 - y^2 = \pm a^2$. □

Комментарий. Рассматриваемые преобразования называются псевдовращениями плоскости. Очевидна аналогия с вращениями окружности $x^2 + y^2 = 1$ (и всех концентричных). Как и в случае поворота на угол φ, где φ можно считать удвоенной ориентированной площадью сектора единичной окружности от вектора $\mathbf{e}_1$ до $\mathbf{e}_1' = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, параметр σ в формулах псевдовращения — удвоенная ориентированная площадь сектора, ограниченного векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_1' = (\operatorname{ch}\sigma, \operatorname{sh}\sigma)$ и гиперболой $x^2 - y^2 = 1$. В этом можно убедиться, оценивая площадь $\int_0^x \sqrt{1 + y^2}\, dy$ под графиком функции $x = \sqrt{1 + y^2}$.

Пример 78. *Написать уравнение гиперболы, принимая за оси координат её сопряжённые диаметры, а за базисные векторы — половины сторон параллелограмма, стороны которого параллельны взятым диаметрам, причём две из них касаются гиперболы, а диагонали параллелограмма служат асимптотами гиперболы.*

Решение. Совершим аффинное преобразование, переводящее указанную систему координат в стандартную прямоугольную Oxy. Свойства прямых быть касательными, асимптотами, иметь сопряжённые направления — аффинные свойства. Поэтому образом гиперболы окажется равнобочная гипербола $x^2 - y^2 = 1$. Это же уравнение будет искомым для гиперболы, фигурирующей в задаче. □

Пример 79. *Показать, что диаметрами эллипса, проходящими через середины сторон вписанного в него параллелограмма, эллипс делится на четыре равновеликих сектора.*

Решение. Совершим аффинное преобразование, переводящее эллипс в окружность $x^2 + y^2 = 1$. Так как указанные диаметры взаимно сопряжены, их образами окажутся два перпендикулярных диаметра окружности. Остаётся воспользоваться тем, что при аффинных преобразованиях равные площади переходят в равные. □

10.4 Изометрические преобразования плоскости и пространства

[1; гл. 11, §6—8, задачи 44, 45, 97—101]
[2; 7.2]
[3; 819, 821, 822, 824, 825, 832—834]

Пример 80. *Найти формулы преобразования поворота ориентированной плоскости на угол* φ *вокруг точки* $M_0(x_0, y_0)$.

Решение. Пусть x_0, y_0 — координаты точки M_0 в системе Oxy; x, y — координаты произвольной точки M плоскости; x', y' — координаты образа M' точки M при повороте плоскости на угол φ вокруг точки M_0. Тогда $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0)$, $\overrightarrow{M_0M'}(x' - x_0, y' - y_0)$. Поворачивая вектор $\overrightarrow{M_0M}$ на угол φ, получим вектор $\overrightarrow{MM'} = (x' - x_0, y' - y_0)$.

$$\begin{aligned} x' - x_0 &= (x - x_0)\cos\varphi - (y - y_0)\sin\varphi; \\ y' - y_0 &= (x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\varphi - y\sin\varphi + x_0(1 - \cos\varphi) + y_0\sin\varphi; \\ y' &= x\sin\varphi + y\cos\varphi - x_0\sin\varphi + y_0(1 - \cos\varphi). \end{aligned}$$

Это и есть формулы поворота плоскости на угол φ вокруг точки $M_0(x_0, y_0)$. □

Пример 81. *Найти формулы поворота пространства на угол* φ *вокруг прямой, проходящей через точку* $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ *с направляющим вектором* $\mathbf{e}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Решение. Выберем в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{e}$, вектор $\mathbf{a}$, $|\mathbf{a}| = 1$, тогда $\mathbf{a}$, $[\mathbf{e}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{e}$ — ортонормированный репер и вектор

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2[\mathbf{e}, \mathbf{a}] + \lambda_3\mathbf{e}, \tag{1}$$

$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0$ — образ вектора при повороте на угол φ будет

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0 &= \lambda_1(\cos\varphi \cdot \mathbf{a} + \sin\varphi[\mathbf{e}, \mathbf{a}]) \\ &\quad + \lambda_2(-\sin\varphi \cdot \mathbf{a} + \cos\varphi[\mathbf{e}, \mathbf{a}]) + \lambda_3\mathbf{e} \\ &= \cos\varphi(\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2[\mathbf{e}, \mathbf{a}]) + \sin\varphi(\lambda_1[\mathbf{e}, \mathbf{a}] - \lambda_2\mathbf{a}) + \lambda_3\mathbf{e}. \end{aligned} \tag{2}$$

Умножая (1) векторно на вектор $\mathbf{e}$, получим

$$[\mathbf{e}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \lambda_1 [\mathbf{e}, \mathbf{a}] - \lambda_2 \mathbf{a}. \tag{3}$$

Из (1) следует, что

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \lambda_3 \mathbf{e} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 [\mathbf{e}, \mathbf{a}]. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2) и учитывая (3), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' - \mathbf{r}_0 &= \cos\varphi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - \lambda_3 \mathbf{e}) + \sin\varphi[\mathbf{e}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0] + \lambda_3 \mathbf{e} \\ &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)\lambda_3 \mathbf{e} + \sin\varphi[\mathbf{e}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0]. \end{aligned}$$

Осталось вычислить λ_3, для чего (1) умножим на вектор $\mathbf{e}$ скалярно и получим $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{e}) = \lambda_3$.

Окончательно имеем

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0 = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cos\varphi + (1 - \cos\varphi)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{e})\mathbf{e} + \sin\varphi[\mathbf{e}, \mathbf{r} - \mathbf{r}_0]. \tag{5}$$

Расписывая (5) в координатах, получаем формулы искомого преобразования. □

11 Проективная геометрия

11.1 Проективная прямая и плоскость

[1; гл. 21, §1—7, задачи 90—93]
[2; 9.1—9.5]
[3; 835, 836, 838, 839, 841, 842, 844, 855—865, 879—892]

Пример 82. *На сторонах A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 базисного треугольника $A_1A_2A_3$ взяты точки $M_1(0:x_2:x_3)$; $M_2(x_1:0:x_3)$; $M_3(x_1:x_2:0)$.*

Доказать, что прямые A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3 пересекаются в точке $M(x_1:x_2:x_3)$.

Решение. Поскольку прямая A_1M_1 проходит через базисную точку $A_1(1:0:0)$, в её уравнении коэффициент при x_1 равен нулю, то есть оно имеет вид $u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Так как уравнению удовлетворяет точка M, то прямая проходит через точку M. Аналогично рассуждаем для двух других прямых. □

Пример 83. *Относительно проективной системы координат $A_1A_2A_3E$ дана точка $M(x_1 : x_2 : x_3)$.*

Найти точки пересечения прямых A_1M, A_2M, A_3M со сторонами треугольника $A_1A_2A_3$.

Решение. Уравнение A_1M имеет вид $u_2x_2 + u_3x_3 = 0$, а уравнение $A_2A_3 - x_1 = 0$, поэтому точкой пересечения является $(0 : x_2 : x_3)$. Аналогично находятся остальные точки. □

Пример 84. *Написать уравнение несобственной прямой относительно проективной системы координат, базисными точками которой являются вершины треугольника A_1, A_2, A_3, а единичной точкой — точка E пересечения медиан.*

Решение. Представим нашу плоскость как пополненную плоскость $z = 1$ в трёхмерном евклидовом пространстве. Пусть её однородные координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ пропорциональны обычным координатам $(x : y : 1)$, а несобственная прямая определяется как $x_3 = 0$. Имеем соотношение $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3})$. Координаты вектора $\overrightarrow{OA_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ имеют вид $(a_{1i}, a_{2i}, 1)$. Пользуясь изоморфизмом пополненной плоскости $z = 1$ и связки прямых в $\mathbb{R}^3$, переход от однородных координат к проективным относительно базисной четвёрки точек A_1, A_2, A_3, E можно представить как переход от базиса $Ol_1l_2l_3$ к базису $\overrightarrow{OA_1}$; $\overrightarrow{OA_2}$; $\overrightarrow{OA_3}$ (с точностью до пропорциональности), поэтому формулы перехода имеют вид

$$\begin{aligned}
\lambda x_1 &= a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3';\\
\lambda x_2 &= a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3';\\
\lambda x_3 &= x_1' + x_2' + x_3';
\end{aligned}$$

Следовательно, несобственная прямая определяется уравнением

$$x_1' + x_2' + x_3' = 0.$$

□

Пример 85. *Относительно аффинной системы координат даны координаты вершин базисного треугольника $A_1'A_2'A_3'$ и координаты единичной точки E' проективной системы координат:*

$$A_1'(4, 1); \quad A_2'(4, 4); \quad A_3'(0, 4); \quad E'(2, 1).$$

1) Найти выражения однородных координат $(x_1 : x_2 : x_3)$ *произвольной точки проективной плоскости через её проективные координаты* $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ *в системе* $A'_1A'_2A'_3E'$.

2) Найти выражения аффинных координат x, y *произвольной собственной точки проективной плоскости через её проективные координаты* $(x'_1 : x'_2 : x'_3)$ *в системе* $A'_1A'_2A'_3E'$.

3) Найти уравнение оси абсцисс, оси ординат аффинной системы координат и уравнение несобственной прямой в системе $A'_1A'_2A'_3E'$.

Решение.

1) Поступаем таким же образом, как в предыдущем примере. Однородные координаты данных нам точек будут таковы:

$$A'_1(4:1:1); \quad A'_2(4:4:1); \quad A'_3(0:4:1); \quad E'(2:1:1).$$

Искомое преобразование координат имеет вид

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= 4\lambda_1 x'_1 + 4\lambda_2 x'_2; \\ \lambda x_2 &= \lambda_1 x'_1 + 4\lambda_2 x'_2 + 4\lambda_3 x'_3; \\ \lambda x_3 &= \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Числа λ_i должны быть таковы, чтобы $\overrightarrow{OE'} = \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA_2} + \lambda_3\overrightarrow{OA_3}$, то есть

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 2; \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 1; \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Из системы (2) находим

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = -\tfrac{1}{2}; \quad \lambda_3 = \tfrac{1}{2}.$$

Подставляя эти значения λ_1, λ_2, λ_3 в систему (1), получим

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= 4x'_1 - 2x'_2; \\ \lambda x_2 &= x'_1 - 2x'_2 + 2x'_3; \\ \lambda x_3 &= x'_1 - \tfrac{1}{2}x'_2 + \tfrac{1}{2}x'_3, \end{aligned} \tag{3}$$

где λ может принимать любые отличные от нуля значения.

2) Если $M(x_1:x_2:x_3)$ — собственная точка проективной плоскости, то $x_3 \neq 0$ и

$$x = \frac{x_1}{x_3}; \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Поэтому, деля первое и второе из равенств (3) на третье равенство системы (3), получим

$$x = \frac{8x_1' - 4x_2'}{2x_1' - x_2' + x_3'};$$
$$y = \frac{2x_1' - 4x_2' + 4x_3'}{2x_1' - x_2' + x_3'}.$$

3) В однородных координатах уравнения оси ординат, оси абсцисс и несобственной прямой соответственно будут

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0.$$

Поэтому уравнения этих прямых в системе координат $A_1'A_2'A_3'E'$ будут иметь вид

$$2x_1' - x_2' = 0;$$
$$x_1' - 2x_2' + 2x_3' = 0;$$
$$2x_1' - x_2' + x_3' = 0.$$

□

Пример 86. *Относительно проективной системы координат даны уравнения сторон*

$$A_2'A_3': \quad u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 = 0;$$
$$A_3'A_1': \quad u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 = 0;$$
$$A_1'A_2': \quad u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 = 0$$

базисного треугольника $A_1'A_2'A_3'$ и координаты единичной точки $E'(\varepsilon_1:\varepsilon_2:\varepsilon_3)$. Выразить координаты $(x_1':x_2':x_3')$ произвольной точки M в системе $A_1'A_2'A_3'E'$ через координаты $(x_1:x_2:x_3)$ этой точки в системе $A_1A_2A_3E$.

Решение. Решим задачу, не находя вершин A'_1, A'_2, A'_3 нового базисного треугольника, заметив прежде всего, что если

$$\lambda x'_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3;$$
$$\lambda x'_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3;$$
$$\lambda x'_3 = c_{31}x_1 + c_{32}x_2 + c_{33}x_3$$

суть искомые формулы, то уравнение $A'_2A'_3$ должно быть пропорционально $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0$, аналогично для $A'_3A'_1$ и $A'_1A'_2$. Множители пропорциональности подбираем из расчёта, чтобы новые координаты точки E были пропорциональны тройке $(1:1:1)$. Окончательно имеем

$$\lambda x'_1 = \frac{u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3}{u_{11}\varepsilon_1 + u_{12}\varepsilon_2 + u_{13}\varepsilon_3}.$$

Точно так же найдём, что

$$\lambda x'_2 = \frac{u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3}{u_{21}\varepsilon_1 + u_{22}\varepsilon_2 + u_{23}\varepsilon_3};$$
$$\lambda x'_3 = \frac{u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3}{u_{31}\varepsilon_1 + u_{32}\varepsilon_2 + u_{33}\varepsilon_3}.$$

□

Пример 87. *Найти проективное преобразование проективно-аффинной плоскости, переводящее начало аффинной системы координат в точку* $(-7, 4)$, *несобственную точку оси* Ox *в точку* $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$, *несобственную точку оси* Oy *в точку* $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$, *точку* $(1, 1)$ *в несобственную точку прямой*

$$x + y = 0.$$

Решение. В системе однородных координат задача может быть сформулирована так: найти проективное преобразование, переводящее базисные точки

$$A_1(1:0:0); \quad A_2(0:1:0); \quad A_3(0:0:1)$$

и единичную точку $E(1:1:1)$ проективной (однородной) системы координат соответственно в точки

$$A'_1(2, 3, 8); \quad A'_2(-3, 5, 9); \quad A'_3(-7, 4, 1); \quad E'(1, -1, 0).$$

Сперва найдём (сравните с предыдущими примерами) λ_1, λ_2, λ_3 такие, чтобы $\overrightarrow{OE'} = \lambda_1\overrightarrow{OA'_1} + \lambda_2\overrightarrow{OA'_2} + \lambda_3\overrightarrow{OA'_3}$. Решая соответствующие уравнения, получим $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}$; $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$. После этого, пользуясь изоморфизмом пополненной плоскости со связкой прямых в $\mathbb{R}^3$, запишем (с точностью до пропорциональности) искомое преобразование как аффинное преобразование, переводящее стандартный базис в базис $\lambda_1\overrightarrow{OA'_1}$, $\lambda_2\overrightarrow{OA'_2}$, $\lambda_3\overrightarrow{OA'_3}$. Окончательно получим

$$\lambda x'_1 = -x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{7}{2}x_3;$$
$$\lambda x'_2 = -\tfrac{3}{2}x_1 + \tfrac{5}{2}x_2 - 2x_3;$$
$$\lambda x'_3 = -4x_1 + \tfrac{9}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3.$$

□

Пример 88. *Найти все проективные преобразования, переводящие стандартную тройку* $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ *в точки* $E_1(0:1:1)$, $E_2(1:0:1)$, $E_3(1:1:0)$.

Решение. Пользуясь аргументацией из предыдущего примера, заключаем, что искомые формулы совпадают (с точностью до пропорциональности) с формулами аффинных преобразований, переводящих стандартный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в векторы $\lambda_1\overrightarrow{OE_1}$, $\lambda_2\overrightarrow{OE_2}$, $\lambda_3\overrightarrow{OE_3}$ (где λ_1, λ_2, λ_3 — любые отличные от нуля действительные числа), то есть

$$\lambda x'_1 = \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3;$$
$$\lambda x'_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_3 x_3;$$
$$\lambda x'_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2.$$

□

Пример 89. *Найти проективные преобразования пополненной плоскости, оставляющие неподвижными точки несобственной прямой. Как преобразуются при этом все собственные точки?*

Решение. Подставляя в общие формулы проективного преобразования несобственную точку $(x_1 : x_2 : 0)$, мы должны в качестве результата получить её же, то есть $(\mu x_1 : \mu x_2 : 0)$, $\mu \neq 0$. Это возможно лишь в случае, когда формулы преобразования имеют вид

$$\lambda x'_1 = \mu x_1 + a_{13}x_3;$$
$$\lambda x'_2 = \mu x_2 + a_{23}x_3;$$
$$\lambda x'_3 = a_{33}x_3, \quad a_{33} \neq 0.$$

Все три равенства можно поделить на a_{33}, так что можно считать, что $a_{33} = 1$. Переходя к аффинным координатам, в случае собственных точек ($x_3 \neq 0$) получим

$$x' = \mu x + a_{13};$$
$$y' = \mu y + a_{23}.$$

При $\mu = 1$ это параллельный перенос, при $\mu \neq 1$ преобразование имеет неподвижную точку $\left(\frac{a_{13}}{1-\mu}, \frac{a_{23}}{1-\mu}\right)$, и поэтому является гомотетией с коэффициентом μ. □

Пример 90. *На плёнке, полученной в результате фотографирования местности разведывательным самолётом, в квадрате, образованном изображениями известных объектов A_1, A_2, A_3, A, обнаружено изображение N неизвестного ранее объекта. Оно расположено на отрезке, соединяющем A_1 с серединой отрезка A_3A, таким образом, что угол A_1NA оказался прямым. Найти место расположения объекта N на карте, зная координаты объектов $A_1(1, 1)$, $A_2(2, -1)$, $A_3(0, 0)$ и $A(-1, 1)$.*

Решение. Введём на плёнке систему координат, в которой $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 0)$, $A_3(2, 2)$, $A(0, 2)$, прямая AN имеет уравнение $y = 2x$, точка N лежит на окружности $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ и координаты точки N суть $N = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$. На соответствующей пополненной плоскости эти объекты имеют следующие однородные координаты: $A_1(0:0:1)$, $A_2(-2:0:-1)$, $A_3(2:2:1)$, $A(0:2:1)$ (здесь $A = A_1 + A_2 + A_3$), $N(4:8:5)$. Проективные координаты N относительно базисной четвёрки точек A_1, A_2, A_3, A равны $(3:2:4)$. Такие же координаты на карте должен иметь объект N относительно базисной четвёрки на карте. Однородные координаты точек на карте суть $A_1(1:1:1)$, $A_2(2:-1:1)$, $A_3(0:0:1)$ и $A(-1:1:1)$. Изменим их пропорционально, добиваясь, чтобы $A_1 + A_2 + A_3 = A$. Получим $A_1 = \frac{1}{3}(1:1:1) = \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}\right)$, $A_2 = \left(-\frac{4}{3} : \frac{2}{3} : -\frac{2}{3}\right)$, $A_3 = \left(0 : 0 : \frac{4}{3}\right)$. Имеющая проективные координаты $(3:2:4)$ в базисной четвёрке A_1, A_2, A_3, A точка N имеет на карте однородные координаты $3A_1 + 2A_2 + 4A_3 = \left(-\frac{5}{3} : \frac{7}{3} : 5\right) = \left(-\frac{1}{3} : \frac{7}{15} : 1\right)$. Обычные координаты объекта N на плоскости суть $\left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{15}\right)$. □

Пример 91. *При фотографировании местности разведывательным самолётом на одном из снимков изображения известных объектов A, B, C, D образуют трапецию с основаниями $DC = 2AB$ и с боковой стороной AD, перпендикулярной основанию AB и равной ему по длине. Обнаружено изображение взлётно-посадочной* *полосы, выходящей их пункта B в направлении середины отрезка AD. Найти положение взлётно-посадочной полосы на карте, на которой координаты объектов известны как $A(0,-1)$, $B(3,0)$, $C(1,1)$ и $D(-2,1)$.*

Решение. Введём на снимке прямоугольные координаты, в которых координаты изображений объектов суть $A(-1,0)$, $B(0,0)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$. Взлётно-посадочная полоса лежит на прямой $y = -\frac{1}{2}x$, или $x+2y=0$. В соответствующих однородных координатах пополненной плоскости имеем $A(-1:0:1)$, $B(0:0:1)$, $C(1:1:1)$, $D(-1:1:1)$, прямая $x_1+2x_2=0$. Точки A, B, C, D можно считать базисной четвёркой: при $A(-2:0:2)$, $B(0:0:-2)$, $C(1:1:1)$ имеем $A+B+C=D$. Формулы перехода от однородных координат к отвечающим базисной четвёрке проективным имеют вид:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение прямой в проективных координатах примет вид $x_1 + 2x_2 = -2x'_1 + x'_3 + 2x'_3 = -2x'_1 + 3x'_3 = 0$.

Однородные координаты точек на карте суть $A(0:-1:1)$, $B(3:0:1)$, $C(1:1:1)$, $D(-2:1:1)$. При представлении $A(0:-3:3)$, $B(-18:0:-6)$, $C(8:8:8)$, $D(-10:5:5)$ имеем $A+B+C=D$. Таким образом, переход от однородных координат $x_1:x_2:x_3$ к отвечающим базисной четвёрке A, B, C, D проективным координатам $x'_1:x'_2:x'_3$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -18 & 8 \\ -3 & 0 & 8 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18x'_2 + 8x'_3 \\ -3x'_1 + 8x'_3 \\ 3x'_1 - 6x'_2 + 8x'_3 \end{pmatrix}.$$

При фотографировании местности с самолёта происходит проективное преобразование плоскости на плоскость, поэтому в проективных координатах на карте, отвечающих базисной четвёрке A, B, C, D уравнение изучаемой прямой останется тем же, что и на снимке: $-2x'_1 + 3x'_3 = 0$. Подбираем коэффициенты α, β, γ таким образом, чтобы при указанном выше преобразовании координат из выражения $\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ получилось выражение, пропорциональное $-2x'_1 + 3x'_3$ (подбор сводится к решению системы из трёх уравнений с тремя неизвестными). Получаем $\alpha = 7$, $\beta = 59$, $\gamma = -21$,

$$7x_1 + 59x_2 - 21x_3 = -240x'_1 + 360x'_3 = 0.$$

Искомая прямая: $7x + 59y - 21 = 0$. □

11.2 Линии второго порядка на проективной плоскости

[1; гл. 22, §1, 2, 3 (до теоремы Паскаля), §8, задачи 95, 96, гл. 17, §2]
[2; 9.6, 9.7]
[3; 893–897, 903]

Пример 92.

1) Написать уравнение нераспадающейся линии второго порядка, касающейся сторон базисного треугольника $A_1A_2A_3$ в его вершинах A_1 и A_2 и проходящей через единичную точку E.

2) К какому аффинному классу будет относиться эта линия, если A_1 и A_2 — несобственные точки проективно-аффинной плоскости?

3) К какому аффинному классу будет относиться эта линия, если A_1 и A_3 — несобственные точки?

Решение. 1) Поскольку $A_1(1:0:0)$ лежит на кривой, в общем уравнении

$$a_{11}{x_1}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}{x_2}^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}{x_3}^2 = 0$$

имеем $a_{11} = 0$.

Аналогично, $a_{22} = 0$ и уравнение имеет вид

$$a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Заметим, что поскольку сторона A_1A_2 имеет две общие точки с кривой, то кривая касается сторон A_1A_3 и A_2A_3. Сторона A_2A_3 имеет уравнение $x_1 = 0$. Найдём её пересечение с кривой, то есть подставим $x_1 = 0$ в уравнение, получим $(a_{33}x_3 + 2a_{23}x_2)x_3 = 0$. Так как кривая касается прямой A_2A_3 в точке A_2, она не проходит через точку A_3, поэтому $a_{33} \neq 0$. Если $a_{23} \neq 0$, то, кроме $A_2(0:1:0)$, кривая будет иметь с прямой A_2A_3 ещё одну точку пересечения, а именно $(0:-a_{33}:2a_{23})$. Итак, $a_{23} = 0$. Аналогично, $a_{13} = 0$. Поскольку кривая проходит через точку $E(1:1:1)$, то уравнение имеет вид $x_1x_2 - {x_3}^2 = 0$.

2) Так как в случае однородных координат для собственных точек проективно-аффинной плоскости $x_3 \neq 0$, то, деля полученное

уравнение на ${x_3}^2$ и полагая

$$\frac{x_1}{x_3} = x; \quad \frac{x_2}{x_3} = y,$$

получим уравнение гиперболы

$$xy = 1,$$

для которой прямые A_1A_3 и A_2A_3 являются асимптотами.

3) В этой ситуации несобственная прямая есть $x_2 = 0$. Деля на ${x_2}^2$ полученное уравнение и полагая $x = \frac{x_3}{x_2}$, $y = \frac{x_1}{x_2}$, для собственных точек получим уравнение параболы

$$x^2 - y = 0.$$

□

Пример 93. *При проективном преобразовании пополненной плоскости асимптота $x = y$ гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ переходит в несобственную прямую. Какая кривая второго порядка окажется образом гиперболы? Что можно сказать об образе второй асимптоты?*

Решение. В однородных координатах пересечение прямой $x_1 - x_2 = 0$ с кривой ${x_1}^2 - {x_2}^2 = {x_3}^2$ — кратная точка $(1:1:0)$, то есть, точка касания на пополненной плоскости. При проективном преобразовании гипербола перейдёт в овальную кривую, касательная прямая $x_1 - x_2 = 0$ — в касательную $x_3 = 0$ к этой овальной кривой. Эта овальная кривая не может быть эллипсом (не имеющим общих точек с несобственной прямой) или гиперболой (имеющей две различные точки пересечения с прямой $x_3 = 0$). Следовательно, образом гиперболы (на собственной части плоскости) окажется парабола.

Вторая асимптота перейдёт в касательную к параболе, направляющий вектор которой отвечает несобственной точке, являющейся образом центра гиперболы. □

Пример 94. *При проективном преобразовании пополненной плоскости образом внутренней точки параболы оказалась несобственная точка. Какая кривая (на собственной части плоскости) окажется образом параболы?*

Решение. Прообразом несобственной прямой окажется прямая, проходящая через внутреннюю точку параболы. Такая прямая либо имеет две точки пересечения с параболой, либо параллельна её оси. Во втором случае она имеет кроме обычной точки пересечения с параболой ещё и несобственную общую с ней точку на пополненной плоскости. Таким образом, образом параболы окажется кривая, имеющая две точки пересечения с несобственной прямой, то есть гипербола. □

Пример 95. *Показать, что группа проективных преобразований пополненной плоскости, перемещающих по себе окружность $x^2 + y^2 = 1$, совпадает с группой центрально аффинных преобразований трёхмерного пространства, сохраняющих квадратичную форму $x^2+y^2-z^2$ (это означает равенство $x'^2+y'^2-z'^2 = x^2+y^2-z^2$ для каждой точки (x, y, z) и её образа (x', y', z') в стандартных ортонормированных координатах).*

Решение. Всякое проективное преобразование проективной плоскости в её однородных координатах имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \lambda \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где A — некоторая невырожденная матрица, λ — произвольный числовой множитель ($\lambda \neq 0$). Указанному в условии аффинному преобразованию отвечает проективное преобразование, переводящее окружность в себя: для точек на окружности ${x_1}^2+{x_2}^2-{x_3}^2 = 0$, поэтому и ${x_1'}^2 + {x_2'}^2 - {x_3'}^2 = 0$.

Наоборот, пусть преобразование переводит окружность в окружность. Можно считать, что точка $(x_1 : x_2 : x_3)$ лежит на конусе $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. То же самое справедливо для $(x_1' : x_2' : x_3')$. Выразим координаты x_i через $x_1' : x_2' : x_3'$ (например, при $\lambda = 1$) и подставим выражения в уравнение $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, получим уравнение второго порядка относительно x_1', x_2', x_3', так как все уравнения второго порядка для конуса пропорциональны, получим уравнение вида $d({x_1'}^2 + {x_2'}^2 - {x_3'}^2) = 0$. Это означает, что после постановки из квадратичной формы $x^2 + y^2 - z^2$ получена форма $d(x'^2 + y'^2 - z'^2)$. Множитель d обязан быть положительным: иначе при аффинном преобразовании $(x, y, z) \to (x', y', z')$ однополостные гиперболоиды перейдут в двуполостные, и наоборот, что невозможно. Это означает, что множитель λ к матрице A выше может быть выбран таким образом, чтобы было $d = 1$ (при изменении λ множитель d меняется пропорционально λ^2). Этим найдено аффинное преобразование, сохраняющее форму $x^2 + y^2 - z^2$. □

Пример 96. *Показать, что для точки* $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$ *овальной кривой*

$$a_{11}{x_1}^2 + a_{22}{x_2}^2 + a_{33}{x_3}^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

касательная прямая в этой точке определяется уравнением

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)x_1 + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)x_2 + (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)x_3 = 0.$$

Решение. Пусть A — матрица из коэффициентов a_{ij}. Так как A — невырожденная матрица, коэффициенты в уравнении одновременно не обращаются в нуль, так что уравнение определяет прямую линию. Указанное уравнение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_1^0 & x_2^0 & x_3^0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

а в силу симметрии A — также в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = 0.$$

При $x_i = x_i^0$, $i = 1, 2, 3$, уравнение превращается в уравнение рассматриваемой кривой для точки $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$, поскольку точка лежит на кривой.

Остаётся показать, что $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$ — единственная точка, общая для кривой и обсуждаемой прямой.

Пусть $(y_1^0 : y_2^0 : y_3^0)$ — некоторая другая такая точка. Так как она лежит на рассматриваемой прямой, то

$$\begin{pmatrix} y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix} = 0.$$

Рассмотрим новую прямую

$$\begin{pmatrix} y_1^0 & y_2^0 & y_3^0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Она проходит через точку $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$. Так как точка $(y_1^0 : y_2^0 : y_3^0)$ лежит на кривой, то

$$(y_1^0 \quad y_2^0 \quad y_3^0)\, A \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = 0,$$

то есть эта точка лежит на новой прямой. Таким образом, обе точки лежат как на первой прямой, так и на новой. Следовательно, обе прямые совпадают, поэтому коэффициенты в их уравнениях пропорциональны:

$$(x_1^0 \quad x_2^0 \quad x_3^0)\, A = \lambda\, (y_1^0 \quad y_2^0 \quad y_3^0)\, A.$$

Отсюда

$$A \begin{pmatrix} x_1^0 - \lambda y_1^0 \\ x_2^0 - \lambda y_2^0 \\ x_3^0 - \lambda y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица A невырождена, то $x_i^0 - \lambda_i y_i^0$, $i = 1, 2, 3$. Таким образом, точка $(y_1^0 : y_2^0 : y_3^0)$ совпадает с $(x_1^0 : x_2^0 : x_3^0)$. □

Ответы к контрольным вопросам

§7

1. 1) $x^2 - y^2 = 1$. 2) $3x^2 - y^2 = 0$. 3) не существует линии второго порядка с действительными коэффициентами. 4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2. 1) $I_1 I_3 < 0$, $I_2 > 0$, $I_1{}^2 = 4I_2$; $R^2 = -\frac{8I_3}{I_1{}^3}$. 2) $I_1 = 0$, $I_3 \neq 0$; $a^2 = -\frac{I_3}{I_2\sqrt{-I_2}}$. 3) $I_1 = 0$, $I_3 = 0$.

3. 1) $I_1 F(x_0 y_0) < 0$; $I_3 = I_2 = 0$, $I_2^* \neq 0$. 2) $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$; $I_1\big(F(x_0 y_0) - \frac{I_3}{I_2}\big) < 0$. 3) $I_1 I_3 < 0$, $I_2 > 0$; $I_1 F(x_0 y_0) < 0$.

4. 1) $0 \neq \frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} < 1$. 2) при выполнении одного из условий: 2′) $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} = 0$, $x_0 y_0 \neq 0$; 2″) $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} = 1$. 3) при выполнении одного из условий: 3′) $\frac{x_0{}^2}{a^2} - \frac{y_0{}^2}{b^2} > 1$; 3″) $x_0 = y_0 = 0$.

5. Две взаимно перпендикулярные прямые.

6. $x^2 + y^2 = 1$.

7. $y^2 = x$.

8. Ось Ox — ось симметрии, ось Oy — касательная в вершине. 1) эллипс. 2) гипербола. 3) парабола.

§9

9. 1) $I_4 = 0$, $I_3 \neq 0$. 2) $I_4 > 0$, не выполнено хотя бы одно из условий: $I_1 I_3 > 0$, $I_2 > 0$. 3) $I_4 = 0$, $I_3 = 0$ и либо $I_2 < 0$, $I_2^* = 0$, либо $I_2 = 0$, $I_2^* = 0$, $I_1^* < 0$. 4) $I_4 = 0$, $I_3 = 0$ и либо $I_2 > 0$, $I_1 I_2^* < 0$, либо $I_2 < 0$, $I_2^* \neq 0$, либо $I_2 = 0$, $I_2^* \neq 0$. 5) $I_4 = 0$, $I_3 = 0$, $I_2 > 0$, $I_2^* = 0$.

10. а) $I_3 \neq 0$. б) $I_2 \neq 0$, $I_3 = I_4 = 0$. в) либо $I_4 = I_3 = I_2 = I_2^* = 0$, $I_1^* < 0$, либо $I_4 = I_3 = I_2 = I_2^* = I_1^* = 0$, $I_1 \neq 0$. г) либо $I_3 = 0$, $I_4 \neq 0$, либо $I_4 = I_3 = I_2 = 0$, $I_2^* \neq 0$.

11. а) ${I_1}^2 = 3I_2$, ${I_1}^3 = 27I_3$. б) $I_4 < 0$, ${I_1}^2 = 4I_2$. в) $I_4 = I_3 = 0$, ${I_1}^2 = 4I_2$, $I_1 I_2^* < 0$.

12. При $\alpha < \frac{I_4}{I_3}$ — однополостные гиперболоиды, гомотетичные данному. При $\alpha = \frac{I_4}{I_3}$ — асимптотический конус данного гиперболоида. При $\alpha > \frac{I_4}{I_3}$ — двуполостные гиперболоиды с тем же асимптотическим конусом.

Содержание