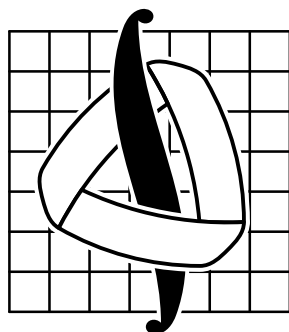


МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
Механико-математический факультет



# Курс лекций по уравнениям в частных производных

Лектор — Т. А. Шапошникова

3 курс, 5–6 семестр, поток математиков

Москва, 2005 г.

# Оглавление

<b>1. Лекция 1</b>	<b>4</b>
1.1. Введение . . . . .	4
1.2. Линейные уравнения в частных производных второго порядка . . . . .	4
1.3. Задача Коши. Характеристики . . . . .	5
<b>2. Лекция 2</b>	<b>7</b>
2.1. Задача Коши с данными на характеристике . . . . .	7
2.2. Задача о слабом разрыве решения вдоль некоторой кривой $y = \varphi(x)$ . . . . .	7
2.3. Нехарактеристическая задача Коши для линейного уравнения в частных производных второго порядка . . . . .	8
<b>3. Лекция 3</b>	<b>8</b>
3.1. Теорема Ковалевской . . . . .	8
3.2. Классификация линейных УРЧП 2-го порядка. О приведении их к каноническому виду . . . . .	8
<b>4. Лекция 4</b>	<b>9</b>
4.1. Задача Коши для волнового уравнения. . . . .	10
<b>5. Лекция 5</b>	<b>11</b>
5.1. Энергетическое неравенство. Единственность решения . . . . .	13
<b>6. Лекция 6</b>	<b>13</b>
6.1. Единственность классического решения задачи Коши . . . . .	14
6.1.1. Энергетическое неравенство . . . . .	14
6.2. Решение задачи Коши для случая $n = 2$ . . . . .	16
<b>7. Лекция 7</b>	<b>16</b>
7.1. Формула Пуассона . . . . .	16
7.2. Область зависимости решений от начальных данных . . . . .	16
7.3. Обобщенные решения волнового уравнения . . . . .	17
<b>8. Лекция 8</b>	<b>18</b>
8.1. Обобщенные производные. Пространства Соболева . . . . .	18
<b>9. Лекция 9</b>	<b>19</b>
9.1. Пространство Соболева . . . . .	19
<b>10. Лекция 10</b>	<b>21</b>
10.1. Строго липшицева область . . . . .	21
10.2. Неравенство Пуанкаре . . . . .	22
10.3. Теорема Реллиха . . . . .	23
<b>11. Лекция 11</b>	<b>23</b>
11.1. Неравенство Фридрихса . . . . .	23
11.2. След функции . . . . .	24
11.3. Метод Фурье (метод разделения переменных) . . . . .	25
<b>12. Лекция 12</b>	<b>25</b>
12.1. Обобщенное решение первой начально-краевой задачи . . . . .	25
12.2. Единственность решения смешанной задачи (1)-(3) . . . . .	26
12.3. Задача Дирихле . . . . .	26
<b>13. Лекция 13.</b>	<b>27</b>
13.1. Базис в пространстве $H_1^0(\Omega)$ . . . . .	27
13.2. Обобщенное решение первой начально-краевой задачи . . . . .	28
<b>14. Лекция 14</b>	<b>30</b>
14.1. Теорема о существовании обобщенного решения задачи (1) . . . . .	31

<b>15. Лекция 15</b>	<b>31</b>
15.1. Гармонические функции, их свойства . . . . .	31
15.2. Формулы Грина . . . . .	31
<b>16. Лекция 16</b>	<b>35</b>
16.1. Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума . . . . .	35
16.2. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач . . . . .	35
16.2.1. Задача Дирихле . . . . .	35
16.2.2. Задача Неймана . . . . .	35
16.3. Оценки производных гармонической функции . . . . .	35
16.4. Аналитичность гармонических функций . . . . .	36
<b>17. Лекция 17.</b>	<b>37</b>
17.1. Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. . . . .	37
<b>18. Лекция 18</b>	<b>38</b>
18.1. Интеграл Пуассона . . . . .	38
18.2. Неравенство Харнака . . . . .	39
18.3. Обратная теорема о среднем . . . . .	40
18.4. Теорема об устранимой особенности . . . . .	40
<b>19. Лекция 19</b>	<b>40</b>
19.1. Теория потенциала . . . . .	41
<b>20. Лекция 20</b>	<b>43</b>
20.1. Объёмный потенциал . . . . .	43
20.2. Потенциал двойного слоя . . . . .	44
<b>21. Лекция 21</b>	<b>46</b>
21.1. Теорема о скачке потенциала двойного слоя . . . . .	48
<b>22. Лекция 22</b>	<b>49</b>
22.1. Потенциал простого слоя . . . . .	49
<b>23. Лекция 23.</b>	<b>50</b>
23.1. Постановка краевых задач . . . . .	51
<b>24. Лекция 24</b>	<b>52</b>
24.1. Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала . . . . .	52
24.1.1. Теоремы Фредгольма . . . . .	52
24.2. Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала . . . . .	53
<b>25. Лекция 25</b>	<b>55</b>
25.1. Вариационный метод решения задачи Дирихле . . . . .	57
<b>26. Лекция 26</b>	<b>57</b>
26.1. Метод Рунге . . . . .	57
26.2. Уравнение теплопроводности . . . . .	58
<b>27. Лекция 27</b>	<b>60</b>
27.1. Принципы максимума . . . . .	60
27.2. Начально-краевые задачи . . . . .	62
27.3. Теоремы единственности . . . . .	62

# 1. Лекция 1

## 1.1. Введение

Необходимость в изучении дифференциальных уравнений с частными производными возникла в связи с тем, что математическое описание многих физических явлений приводит к определению решений уравнений с частными производными.

Рассмотрим некоторые примеры:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

Такие уравнения описывают многие колебательные процессы.

$$u_t = k^2 \Delta u + f(x, t)$$

Это уравнение называется *уравнением теплопроводности* и задаёт распределение температуры в однородном теле.

$$\Delta u = f(x)$$

Уравнение такого вида называется *уравнением Пуассона* и описывает стационарное распределение температуры при наличии тепловых источников внутри тела с плотностью  $f(x)$ .

Дадим несколько определений:

**Определение.** Дифференциальными называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если неизвестными являются функции нескольких переменных (не менее двух), то уравнения называются *уравнениями в частных производных*.

В дальнейшем мы будем рассматривать только одно уравнение в частных производных с одной неизвестной функцией.

## 1.2. Линейные уравнения в частных производных второго порядка

Рассмотрим уравнение

$$F\left(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}(x)\right) = 0, \quad (1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Скажем, что это уравнение в частных производных порядка  $m$ , если  $m$  является максимальным порядком производных в этом уравнении.

**Определение.** Уравнение (1) называется *линейным*, если  $F$ , как функция переменных

$$u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}$$

является линейной функцией.

Будем рассматривать линейные уравнения в частных производных второго порядка. Такие уравнения имеют вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_j(x) u_{x_j} + a(x) u = f(x), \quad (2)$$

где  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $a_{ij}(x)$ ,  $a_j(x)$ ,  $a(x)$ ,  $b(x)$  достаточно гладкие функции, заданные в  $\Omega$ .

Обозначим  $A(x) := (a_{ij}(x))$ .

**Утверждение 1.1.** Матрицу  $A$  можно считать симметрической.

□ Действительно, в силу гладкости функции  $u$  смешанные производные второго порядка совпадают, поэтому соответствующие элементы матрицы  $A$  можно «перераспределить», введя  $a'_{ij} = \frac{a_{ij}(x) + a_{ji}(x)}{2}$ , тогда  $a_{ij}(x) = a'_{ij}(x) + a''_{ij}(x)$ , где  $a''_{ij} = \frac{a_{ij}(x) - a_{ji}(x)}{2}$  и  $a''_{ij} = -a''_{ji}$ . После такого преобразования мы получим то же самое уравнение, но с симметрической матрицей  $A'(x)$ . ■

Сразу отметим то обстоятельство, что существуют уравнения вида (2) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, которые в любой окрестности точки  $x_0$  не имеют ни одного решения. Такие уравнения называются *локально неразрешимыми*.

Примером такого уравнения может служить

$$(x_2^2 - x_3^2) u_{x_1 x_2} + (1 + x_1^2)(u_{x_2 x_2} - u_{x_3 x_3}) - x_1 x_2 u_{x_1 x_3} - (x_1 x_2 u)_{x_1 x_2} + x_1 x_3 u_{x_1 x_3} = f(x) - (x_1 x_3 u)_{x_1 x_3}. \quad (3)$$

Л. Хермандер доказал, что такое уравнение не имеет ни одного решения при некоторой  $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  для любой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

### 1.3. Задача Коши. Характеристики

В случае одного пространственного переменного уравнение (2) выглядит так:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x). \quad (4)$$

Вспомним, что задачей Коши в этом случае являлась задача о нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего в точках  $x_0, x_1$ , где  $[l_1, l_2] \subset \mathbb{R}$ , а  $x_n \in (l_1, l_2)$ , начальным условиям

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_1) = y_1, \end{cases} \quad y_0, y_1 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Заметим, что в этом случае всегда существует решение задачи Коши.

Перейдем к постановке аналогичной задачи для уравнения в частных производных (2). Возьмем некоторую достаточно гладкую  $(n-1)$ -мерную поверхность  $S \subset \Omega$ , заданную уравнением

$$F(x) = 0, \quad F \in C^2(\Omega), \quad (6)$$

и пусть  $|\nabla F| \neq 0$  при всех  $x \in S$ . Пусть на  $S$  задано векторное поле  $l(x) = (l_1(x), \dots, l_n(x))$ , причём  $|l(x)| \neq 0$ , не касающееся поверхности  $S$ , то есть

$$\frac{\partial F}{\partial l}(x) = \frac{(l(x), \nabla F(x))}{|l(x)|} \neq 0 \quad \forall x \in S. \quad (7)$$

Тогда задачей Коши будет нахождение решения уравнения (2) с начальными условиями

$$u|_S = u_0(x), \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial l}(x)|_S = u_1(x), \quad (9)$$

где  $u_0(x)$  и  $u_1(x)$  — функции, заданные на  $S$ .

Пусть  $x_0 \in S$ ,  $U(x_0)$  — шар радиусом  $\rho$  с центром в  $x_0$ , причём  $\overline{U(x_0)} \subset \Omega$ . Обозначим  $S_0 = S \cap U(x_0)$  и будем решать задачу Коши в окрестности точки  $x_0$  с условиями

$$\begin{aligned} u(x) &\in C^2(Q(x_0)), \\ u(x)|_{S_0} &= u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial l}(x)|_{S_0} &= u_1(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку  $|\nabla F(x_0)| \neq 0$ , то для определенности будем считать, что  $F_{x_n}(x_0) \neq 0$ . Рассмотрим следующее преобразование  $y = \mathcal{F}(x)$ :

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 - x_{0_1} \equiv F_1(x) \\ &\dots \\ y_{n-1} &= x_{n-1} - x_{0_{n-1}} \equiv F_{n-1}(x) \\ y_n &= F(x) \equiv F_n(x) \end{cases} \quad (11)$$

При этом  $J(x) \neq 0$ , где  $J(x)$  имеет следующий вид

$$J(x) := \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ F_{x_1} & F_{x_2} & \dots & F_{x_{n-1}} & F_{x_n} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Легко заметить, что  $J(x) = F_{x_n}(x)$ , поэтому  $J(x) \neq 0$  в окрестности  $x_0$ . Таким образом, наше преобразование  $y = \mathcal{F}(x)$  взаимно-однозначно отображает  $U(x_0) \subset \mathbb{R}_x^n$  на  $V(0) \subset \mathbb{R}_y^n$ , то есть часть  $U(x_0)$ , принадлежащая

исходной поверхности, перейдет в окрестность точки 0 на гиперплоскости  $y_n = 0$ . Обозначим  $\Sigma = V(0) \cap \{y_n = 0\}$ , где  $\Sigma := \Phi(S)$ , а  $v(y) := u(x(y))$ , и выразим частные производные получившейся функции:

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n v_{y_k} y_{k x_i} = \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_i}, u_{x_i x_j} = \sum_{k,p=1}^n v_{y_k} v_{y_p} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_p}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k^2}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (13)$$

Тогда уравнение (2) запишется в следующем виде:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \left( \sum_{k,p=1}^n v_{y_k} v_{y_p} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \frac{\partial F_p}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k^2}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} + a(x(y))v = \tilde{f}(y), \quad (14)$$

или, что то же самое,

$$\sum_{k,p=1}^n b_{kp}(y) v_{y_k} v_{y_p} + \sum_{k=1}^n n b_k(y) v_{y_k} + b(y)v = \tilde{f}(y), \quad (15)$$

где

$$b_{kp}(y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) \frac{\partial F_k}{\partial x_j} \frac{\partial F_p}{\partial x_i}. \quad (16)$$

Заметим, что

$$b_{nn} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x(y)) F_{x_i} F_{x_j} = (A(x(y)) \nabla F, \nabla F), \text{ где } \nabla F \equiv \text{grad } F. \quad (17)$$

Посмотрим теперь, какой вид примут начальные условия (10). **Первое** условие превратится в

$$u(x) \Big|_{S_0} = u(x(y)) \Big|_{\Sigma} = v_0(y'), \quad y' = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (18)$$

а **второе** условие перейдёт в

$$\frac{du}{dl}(x) \Big|_{S_0} = \frac{1}{|l|} (\nabla_x u, l) = \frac{1}{|l|} \sum_{j=1}^n u_{x_j} l_j(x) = \frac{1}{|l|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n v_{y_k} y_{k x_j} l_j(x) = \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k}{\partial l}. \quad (19)$$

Здесь мы пользуемся тем, что

$$\frac{1}{|l|} \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_k}{\partial x_j} l_j(x) = \frac{\partial F_k}{\partial l}. \quad (20)$$

Пусть

$$\lambda(y) = \left( \frac{\partial F_1}{\partial l}, \dots, \frac{\partial F_n}{\partial l} \right). \quad (21)$$

Тогда  $(\nabla_y v, \lambda(y)) = \sum_{k=1}^n v_{y_k} \frac{\partial F_k}{\partial l}$ .

$$(\nabla_y v, \lambda(y)) \Big|_{\Sigma} = v_1(y')$$

$$v_{y_k}(y') \Big|_{\Sigma} \text{ для } k = 1, \dots, n-1 \text{ мы находим из условия } v \Big|_{\Sigma} = v_0(y')$$

$$v_{y_n} \frac{dF_n}{dl} = v_1(y') - \sum_{j=1}^{n-1} v_{y_j} \frac{\partial F_j}{\partial l}$$

На  $\frac{\partial F_n}{\partial l}$  можно поделить, так как  $l$  не касается  $S$ , то есть  $\frac{\partial F_n}{\partial l}(x_0) \neq 0$ . Итак, мы нашли все первые производные из начальных условий.

Значения  $v_{y_k y_p}(y') \Big|_{\Sigma}$  для  $k, p = 1, \dots, n-1$  мы находим из первого условия.  $v_{y_k y_n}(y') \Big|_{\Sigma}$  для  $k = 1, \dots, n-1$  мы находим из выражения для  $v_{y_n}$ .

$$b_{nn} v_{y_n y_n} \Big|_{\Sigma} = \tilde{f} \Big|_{\Sigma} - \sum_{k,p=1; p+k < 2n}^n b_{kp}(y) v_{0_{y_k}} v_{0_{y_p}} \Big|_{\Sigma} - \sum_{k=1}^n b_k(y) v_{0_{y_k}} \Big|_{\Sigma} - b(y)v. \quad (22)$$

Если  $b_{nn} \neq 0$  на  $\Sigma$ , то мы находим  $v_{y_n y_n}$ . Если же  $b_{nn} = 0$ , то получаем условие на начальные данные задачи, и она может быть неразрешима.

**Определение.** Поверхность  $S : F(x) = 0, \nabla F(x) \neq 0 \forall x \in S$  называется *характеристикой* (*характеристической поверхностью*) уравнения (2), если  $(A(x(y)) \nabla F, \nabla F) = 0$  для  $\forall x \in S$  (или нормаль  $\nu(x)$  в каждой точке удовлетворяет равенству  $(A(x)\nu(x), \nu(x)) = 0$ ). Точки данной поверхности называются *характеристическими*.

## 2. Лекция 2

Если в точка  $x^0 \in S$  является характеристической, а данные задачи удовлетворяют соответствующим соотношениям, то решений задачи Коши может быть бесконечно много.

Рассмотрим несколько примеров:

### 2.1. Задача Коши с данными на характеристике

#### Пример 1.

Рассмотрим уравнение в некотором круге  $U$  с центром в начале координат ( $n=2$ )

$$u_{x_1 x_1} - u_{x_2 x_2} = f(x_1, x_2)$$

Характеристиками этого уравнения будут прямые  $x_1 - x_2 = C_1$ ,  $x_1 + x_2 = C_2$  (это показывается по определению). Рассмотрим задачу Коши на поверхности  $x_1 = x_2$  т.е

$$u \Big|_{x_1 = x_2} = \varphi(x_1) \quad u_{x_1} \Big|_{x_1 = x_2} = \psi(x_1)$$

Такое уравнение с помощью замены переменных приводится к уравнению  $u_{x_2 x_2} = 0$  у которого  $x_2 = 0$  будет характеристикой. Легко проверить, что для существования гладкого в  $U$  решения этого уравнения, удовлетворяющего условиям

$$u \Big|_{x_2 = 0} = \varphi(x_1) \quad u_{x_2} \Big|_{x_2 = 0} = \psi(x_1)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\frac{d\psi(x_1)}{dx_1} \equiv f(x_1, 0)$ . Причем, если это условие выполнено, то решение предоставляется в виде

$$u(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} d\xi_1 \int_0^{x_2} f(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 + \varphi(x_1) + g(x_2)$$

где  $g$  — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям  $g(0) = 0$ ,  $\frac{dg(0)}{dx_2} = \psi(0)$ . То есть решений бесконечно много.

### 2.2. Задача о слабом разрыве решения вдоль некоторой кривой $y = \varphi(x)$

#### Пример 2.

Пусть на плоскости есть область которая разделена на две части  $\Omega_1$ , и  $\Omega_2$  кривой  $l : y = \varphi(x)$ . Рассмотрим уравнение

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + g(x, y)u = f(x, y)$$

Причем  $u \in C^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}_1) \cap C^2(\overline{\Omega}_2)$  То есть на кривой  $l$  рвутся вторые производные. Докажем, что  $l$  — характеристика.

Пусть

$$u(x, y) = \begin{cases} u^1(x, y) & x, y \in \Omega^1 \\ u^2(x, y) & x, y \in \Omega^2 \end{cases}$$

Обозначим  $[u] \Big|_l \equiv u^1(x, \varphi(x)) - u^2(x, \varphi(x)) = 0$

$$\frac{d[u]}{dx} = u_x^1(x, \varphi(x)) + u_y^1(x, \varphi(x))\varphi'(x) - u_x^2(x, \varphi(x)) - u_y^2(x, \varphi(x))\varphi'(x) = [u_x] + [u_y]\varphi' = 0$$

$$\frac{d[u_x]}{dx} = [u_{xx}] + [u_{xy}]\varphi' = 0$$

$$\frac{d[u_y]}{dx} = [u_{xy}] + [u_{yy}]\varphi' = 0$$

Пусть  $\lambda = [u_{yy}] \neq 0$ , тогда  $[u_{xy}] = -\lambda\varphi'$ ,  $[u_{xx}] = \lambda\varphi'^2$  Имеем

$$a[u_{xx}] + 2b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0$$

т.е

$$a\lambda\varphi'^2 - 2\lambda b\varphi' + c\lambda = 0$$

После сокращения на  $\lambda$ , несложно будет увидеть, что это, по определению, и есть уравнение характеристики.

## 2.3. Нехарактеристическая задача Коши для линейного уравнения в частных производных второго порядка

Теперь пусть поверхность  $S$  не содержит характеристических точек. Напомним, что у нас задана  $n$ -мерная область  $Q$  и  $(n-1)$ -мерная поверхность  $S$ :  $F(x) = 0$ , причем поверхность делит  $Q$  на две непересекающиеся области. И в  $Q$  задано уравнение (1.2) т.е. коэффициенты и свободный член. А на поверхности  $S$  задано нигде не касающееся поверхности векторное поле  $l(x)$ ,  $|l(x)| > 0$  на  $S$ , и две функции  $u_0(x)$ ,  $u_1(x)$ . Пусть поверхность не имеет характеристических точек уравнения

$$(A(x)\nabla F(x), \nabla F(x)) \neq 0, \quad x \in S.$$

Требуется найти функцию  $u(x)$ , принадлежащую  $C^2(Q)$ , удовлетворяющую в  $Q$  уравнению (1.2) и на  $S$  начальным условиям (1.3), (1.4). Будем называть эту задачу *нехарактеристической задачей Коши*. А заданные условия - данными задачи.

Предположим, что данные задачи бесконечно дифференцируемые на соответствующих множествах. Предположим также, что существует бесконечно дифференцируемое в  $Q$  решение  $u(x)$  задачи (1.2), (1.3), (1.4).

Тогда на поверхности  $S$  через данные задачи однозначно определяются все производные любого порядка функции  $u(x)$ .

*Примечание. Доказательство этого факта подробно описано в книге Михайлова Дифференциальные уравнения в частных производных на стр. 15-17.*

## 3. Лекция 3

### 3.1. Теорема Ковалевской

#### Теорема.

1. Если данные задачи Коши (1.2) аналитичны, т.е. коэффициенты уравнения и правая его часть аналитичны в  $\Omega$ , а  $l, u_0, u_1$  аналитичны на  $S$ , где  $S$  — характеристика, то  $\exists \Omega' \subset \Omega, S \subset \Omega'$ , где существует аналитическое решение задачи Коши для уравнения (1.2).

2. В любой подокрестности  $\Omega'' \supset S$  не существует решения, отличного от найденного в пункте 1.

#### Пример Ковалевской.

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \geq 0, \quad u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}, \quad t = \text{const} - \text{характеристика}$$

Аналитического решения нет ни в какой окрестности 0.

Докажем от противного. Пусть  $u(x, t) = \sum_{i,j=0}^{\infty} h_{ij} x^i t^j$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots$$

Имеем  $h_{i0} = 0$  при нечетных  $i$ ,  $h_{i0} = (-1)^{i/2}$  при четных  $i$ .

$$\sum_{i,j} j h_{ij} x^i t^{j-1} = \sum_{i,j} i(i-1) h_{ij} x^{i-2} t^j$$

Отсюда  $h_{m,p+1}(p+1) = h_{m+2,p}(m+2)(m+1)$ . Получаем  $h_{2n+1,j} = 0 \quad \forall n \geq 0, j \geq 0$ , а также

$$h_{2m,p} = h_{2(m+1),p-1} \frac{(2m+1)(2m+2)}{p} = \dots = h_{2(m+p),0} \frac{\prod_{k=2m+1}^{2m+2p} k}{p!} = (-1)^{m+p} \frac{(2m+2p)!}{(2m)!p!}$$

Итак,  $u(x, t) = \sum_{m,p=0}^{\infty} (-1)^{m+p} \frac{(2m+2p)!}{(2m)!p!} x^{2m} t^p$ . При  $x = 0$  ряд имеет вид  $\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} t^p$ . Легко показать, что радиус

сходимости  $R = \lim_{p \rightarrow \infty} \left| \frac{a_p}{a_{p+1}} \right| = 0$

### 3.2. Классификация линейных УРЧП 2-го порядка. О приведении их к каноническому виду

Пусть

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} = \Phi(x, u, \nabla u), \quad a_{ij} \equiv a_{ji}$$



Рассмотрим форму  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$  и замену  $\xi = T\eta$ , тогда  $\xi_i = \sum_{k=1}^n t_{ik}\eta_k$ ,  $\xi_j = \sum_{p=1}^n t_{jp}\eta_p$  и наша форма примет вид

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \sum_{k=1}^n t_{ik}\eta_k \sum_{p=1}^n t_{jp}\eta_p = \sum_{k,p=1}^n \left( \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) t_{ik}t_{jp} \right) \eta_k\eta_p$$

Обозначим  $b_{kp} = \sum_{i,j=1}^n t_{ik}a_{ij}t_{jp}$ . Пусть  $y = T_t x$ ,  $T_t = (\tilde{t}_{kp})$ , т.е.  $y_p = \sum_{k=1}^n \tilde{t}_{pk}x_k$ . Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{p=1}^n v_{y_p} \tilde{t}_{pi}, \quad u_{x_i x_j} = \sum_{k,p=1}^n v_{y_{pk}} \tilde{t}_{pi} \tilde{t}_{kj}$$

и уравнение примет вид

$$\sum_{k,p=1}^n b_{kp}(x) v_{y_{pk}} = \tilde{\Phi}(x, v, \nabla v)$$

Приводим форму  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$  к квадратичному виду  $\eta_1^2 + \dots + \eta_{n_+}^2 - \eta_{n_++1}^2 - \dots - \eta_{n_++n_-}^2$ , где  $n_+$  - число собственных значений, больших 0,  $n_-$  - число собственных значений, меньших 0,  $n_0$  - число собственных значений, равных 0. Тогда наше уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$v_{y_1 y_1} + \dots + v_{y_{n_+} y_{n_+}} - v_{y_{n_++1} y_{n_++1}} - \dots - v_{y_{n_++n_-} y_{n_++n_-}} = \tilde{\Phi}(x, v, \nabla v)$$

Возможны следующие случаи, в соответствии с которыми мы и классифицируем уравнения:

- 1)  $n_+ = n$  или  $n_- = n$  - *эллиптический тип*.  $\nabla u = 0$
- 2)  $n_+ = n - 1, n_- = 1$  или  $n_- = n - 1, n_+ = 1$  - *гиперболический тип*.  $u_{x_n x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}$
- 3)  $n_0 \neq 0$  - *параболический тип*.  $u_{x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}$
- 4)  $n_+ \geq 2, n_- \geq 2, n_0 = 0$  - *ультрагиперболический тип*

## 4. Лекция 4

### Корректно поставленные задачи

Чтобы полностью описать тот или иной физический процесс, необходимо, кроме самого уравнения, описывающего этот процесс, задать начальное состояние этого процесса (*начальные условия*) и режим на границе той области, в которой происходит процесс (*граничные условия*).

Различают три основных типа краевых задач для дифференциальных уравнений:

1. Задача Коши для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются начальные условия, область  $G$ , где происходит процесс, совпадает со всем пространством  $\mathbb{R}^n$ , соответственно граничные условия отсутствуют.
2. Краевая задача для уравнений эллиптического типа: задаются граничные условия на границе, начальные условия отсутствуют.
3. Смешанная задача для уравнений гиперболического и параболического типов: задаются и начальные, и граничные условия,  $G \neq \mathbb{R}^n$ .

Рассмотрим вопрос *корректности* постановки краевой (в широком смысле) задачи. Обозначим через  $\beta_1$  класс функций, среди которых мы ищем решение, а через  $\beta_2$  - класс данных задачи. Пусть  $\beta_1$  и  $\beta_2$  - банаховы пространства. На линейное дифференциальное уравнение можно смотреть как на линейный оператор  $\mathcal{A} : \beta_1 \rightarrow \beta_2$ , который ставит в соответствие решению набор начальных и краевых данных.

Чтобы решить дифференциальное уравнение, нам нужно узнать, какому решению соответствуют наши начальные данные, то есть найти обратный оператор.

Поскольку уравнения математической физики описывают реальные физические процессы, то математические постановки этих задач должны удовлетворять некоторым естественным условиям.

Итак, краевая задача называется поставленной корректно в паре банаховых пространств  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , если:

1.  $\forall \Phi \in \beta_2 \quad \exists u \in \beta_1 : \mathcal{A}u = \Phi$ .
2. Такой элемент  $u$  единственный.
3. И зависит от данных задачи непрерывно.

Рассмотрим несколько примеров:

1. Задача Дирихле уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad u|_{\partial\Omega} = f$$

Здесь  $\beta_1 = C(\overline{\Omega})$ ,  $\beta_2 = C(\partial\Omega)$ ,  $\mathcal{A} : u(x) \rightarrow f(x)$

Существование и единственность доказывались в курсе комплексного анализа, а непрерывная зависимость от  $u$  (относительно равномерной нормы) следует из принципа максимума для гармонических функций:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |f|$$

Вывод: краевая задача поставлена корректно.

2. Пример Адамара: Рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} u_{yy} = -u_{xx}, \\ u|_{y=0} = \frac{\cos nx}{n}, \\ u_y|_{y=0} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Будем искать решение в области

$$\Omega = \{(x, y) \mid |y| < \delta\}, \delta > 0. \quad (2)$$

в классах непрерывных ограниченных функций. Решением будет функция  $u(x, y) = \frac{\cos ny \cos nx}{n}$ . Покажем, что условие 3 для такой задачи не выполняется. В самом деле,

$$\|u\|_{\beta_1} = \sup_{\Omega} |u(x, y)| = \frac{\cos n\delta}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

$$\|u(x, 0)\|_{\beta_2} = \sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\cos nx}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty$$

Что и доказывает отсутствие непрерывности. Вывод: задача Коши поставлена некорректно.

#### 4.1. Задача Коши для волнового уравнения.

Задачей Коши для волнового уравнения называется задача:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, n \leq 3 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

Функция  $u(x, t)$  называется *классическим решением* задачи Коши, если она удовлетворяет приведенной системе и принадлежит классу  $\mathbf{C}^2(t > 0) \cap \mathbf{C}^1(t \geq 0)$ . Здесь под множеством  $\{t > 0\}$  понимается  $\{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ , и аналогично мы понимаем множество  $\{t \geq 0\}$ .

Покажем, что решением задачи Коши для однородного волнового уравнения в пространстве трех измерений является функция Кирхгофа:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} u_0(\xi) dS_\xi \right)$$

Для этого введем функцию

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau) dS_\xi$$

С её помощью функция Кирхгофа запишется следующим образом (аргумент  $\tau$  нам не пригождается):

$$u(x, t) = u_{u_0}(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} u_{u_1}(x, t)$$

Изучим свойства функции  $u_g(x, t, \tau)$ . Итак,

**Лемма 4.1.** Пусть функция  $g(x, \tau)$  имеет при  $\tau \geq 0$  непрерывные производные по  $x_1, x_2, x_3$  до порядка  $k$  включительно.

Тогда  $u_g(x, t, \tau)$  при  $\tau, t \geq 0$  имеет непрерывные производные по  $x_1, x_2, x_3, t$  до порядка  $k$  включительно, и если  $k \geq 2$ , то  $u_g(x, t, \tau)$  удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = \Delta u_g, & \tau \geq 0, t \geq 0 \\ u_g|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial u_g}{\partial t}|_{t=0} = g(x, \tau) \end{cases}$$

Кроме того,  $\Delta u_g|_{t=0} = 0$ .

## 5. Лекция 5

*Доказательство леммы.*

Прежде всего в интеграле

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} g(\xi, \tau) dS_\xi$$

Сделаем замену переменной  $\frac{\xi-x}{t} = \eta$ ,  $dS_\xi = t^2 dS_\eta$ . Получим

$$u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(t\eta + x, \tau) dS_\eta \quad (5.1)$$

Из формулы (5.1) вытекает первое утверждение леммы. Кроме того,  $u_g|_{t=0} = 0$ , поскольку при  $k \geq 2$

$$\Delta u_g(x, t, \tau) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \Delta g(t\eta + x, \tau) dS_\eta \quad (5.2)$$

то  $\Delta u_g|_{t=0} = 0$ .

Дифференцируя (5.1) по  $t$  получим

$$\frac{du_g}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(t\eta + x, \tau) dS_\eta + \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} (\nabla g(t\eta + x, \tau), \eta) dS_\eta \quad (5.3)$$

откуда

$$u_{gt}|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dg_u}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_{|\eta|=1} g(x, \tau) dS_\eta = g(x, \tau).$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \nabla g(t\eta + x, \tau), \eta dS_\eta &= \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \frac{dg(t\eta + x, \tau)}{dn_\eta} dS_\eta = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=1} \left( \frac{dg(\xi, \tau)}{dn} dS_\xi = \right. \\ &= \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|<1} \Delta g(\xi, \tau) d\xi = \frac{I(x, t, \tau)}{4\pi t} \end{aligned}$$

где  $I(x, t, \tau) = \int_{|x-\xi|<1} \Delta g(\xi, \tau) d\xi$  то (5.3) можно представить в виде

$$\frac{du_g}{dt} = \frac{1}{t} u_g + \frac{I}{4\pi t},$$

откуда

$$\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dt^2} &= -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{du_g}{dt} + \frac{1}{4\pi t} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{4\pi t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \left( \frac{u_g}{t} + \frac{I}{4\pi t} \right) + \frac{1}{4\pi t} \frac{dI}{dt} - \frac{1}{4\pi t^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi t} \frac{dI}{dt} = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} \Delta g(\xi, \tau) dS_\xi = \frac{t}{4\pi} \int_{|\eta|=1} \Delta g(x + t\eta, \tau) dS_\eta\end{aligned}\quad (5.4)$$

Из (5.4) и (5.2) следует, что  $u_{g\Delta} = \Delta u_g$ . Лемма доказана.

Далее, в силу линейности, мы можем задачу Коши разбить в сумму трех:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (c)$$

Итак,

1)  $u_{u_1}(x, t)$  решение (а), в предположении  $u_1 \in C^2$ ;

2) Пусть  $u_0 \in C^3$ ,  $\omega(x, t) = \frac{d}{dt} u_{u_0}(x, t)$ ,  $\omega(x, t) \in C^2$ ;

Покажем, что  $\omega(x, t)$  — решение (b).

$$\omega(x, t)|_{t=0} = u_0(x)$$

$$\omega_t(x, 0) = (u_{u_0})_{tt}|_{t=0} = (\Delta u_{u_0})|_{t=0} = 0$$

$$((u_{u_0})_t)_{tt} = ((u_{u_0})_t)_t = (\Delta u_{u_0})_t = \Delta \left( \frac{d}{dt} u_{u_0} \right) \Rightarrow ((u_{u_0})_t)_{tt} = \Delta((u_{u_0})_t)$$

т.е  $\omega(x, t)$  действительно решение (b).

3)

$$u_f(x, t, \tau) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} f(\xi, \tau) dS_\xi$$

$f(x, t)$  вместе со своими производными по  $x_1, x_2, x_3$  включительно непрерывна при  $t \geq 0$ . Тогда

$$h(x, t) = \int_0^t u_f(x, t - \tau, \tau) d\tau \quad - \text{ решение (c)}$$

Покажем это

$$h|_{t=0} = 0$$

$$h_t = u_f(x, 0, t) + \int_0^t (u_f)_t(x, t - \tau, \tau) d\tau$$

$h_t|_{t=0} = u_f(x, 0, 0)$ , но  $u_f(x, 0, \tau) = 0$  тогда

$$h_t = \int_0^t (u_f)_t(x, t - \tau, \tau) d\tau \Rightarrow h_t|_{t=0} = 0$$

$$h_{tt} = \left( \frac{d}{dt} u_f(x, t - \tau, \tau) \right) |_{t=\tau} + \int_0^t \frac{d^2}{dt^2} (u_f)(x, t - \tau, \tau) d\tau =$$

$$= \frac{d}{dt} u_f(x, 0, t) + \int_0^t \Delta u_f(x, t - \tau, \tau) d\tau = f(x, t) + \Delta h$$

Таким образом получаем, что решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

при следующих предположениях:  $u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ; функция  $f(x, t)$  непрерывна при  $t \geq 0$  вместе со всеми своими производными по  $x_1, x_2, x_3$  до второго порядка задается формулой Кирхгофа

$$u(x, t) = u_{u_1}(x, t) + \frac{d}{dt} u_{u_0}(x, t) + \int_0^t u_f(x, t - \tau, \tau) d\tau$$

или

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} u_0(\xi) dS_\xi \right) + \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|x-\xi|=t-\tau} f(\xi, \tau) dS_\xi d\tau$$

Исследуем единственность. Для этого достаточно показать, что

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u \\ u|_{t=0}, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \quad (d)$$

### 5.1. Энергетическое неравенство. Единственность решения

$|x - x_0| = T - t$ ,  $0 < t < T$  - характеристики.

$\Gamma_{t_1, t_2} = \{(x, t) | |x - x_0| = T - t, t_1 \leq t \leq t_2\}$ ,  $0 < t_1 \leq t_2 < T$

$\Omega_\tau = \{(x, t) | |x - x_0| \leq T - \tau, t = \tau\}$

Энергия системы определяется так:

$$E(t) = \int_{\Omega_t} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx \quad \text{с точностью до некоторого множителя.}$$

К слову первое слагаемое в этой сумме имеет физический смысл кинетической энергии колебаний, а второе - потенциальный.

Энергетическое неравенство:

$$E(t_1) \leq E(t_2), \quad \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Сразу отметим, что в частности  $E(t) \leq E(0)$ , Соткуда следует единственность решения системы (d), т.к  $E(0) = 0 \Rightarrow E(t) = 0$

Идея доказательства:

$$\begin{aligned} u_{tt} = \Delta u &\Rightarrow u_t u_{tt} = u_t \Delta u \\ dK_{t_1, t_2} &= \Gamma_{t_1, t_2} \cup \Omega_{t_1} \cup \Omega_{t_2} \\ \int \int \int_{K_{t_1, t_2}} u_t u_{tt} &= \int \int \int_{K_{t_1, t_2}} u_t \Delta u, \quad u_t u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_t)^2 \end{aligned}$$

Теперь надо воспользоваться формулой Гаусса- Остроградского и свести равенство интегралов к виду

$$\frac{1}{2} \int_{dK_{t_1, t_2}} \frac{d}{dt} (u_t)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{dK_{t_1, t_2}} u_t \Delta u dx dt$$

Далее нужно аккуратно расписать данные интегралы и все получится.

## 6. Лекция 6

Зная формулу Кирхгофа решения классической задачи Коши для уравнения  $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$ , мы можем легко получить решение более общего уравнения  $u_{tt} - a^2 \Delta u = f(x, t)$ , сделав замену  $\tau = at$ . В этих обозначениях задача Коши примет вид:

$$\begin{cases} v_{tt} = \Delta v + \tilde{f}(x, t) \\ v|_{\tau=0} = u_0(x) \\ u_\tau|_{\tau=0} = \frac{1}{a} u_1(x) \end{cases}$$

Здесь  $\tilde{f}(x, \tau) = \frac{1}{a^2} f(x, \frac{\tau}{a})$ , а  $v(x, \tau) = u(x, \frac{\tau}{a})$ . Подставляя в формулу Кирхгофа, получаем:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) dS_\xi \right) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi|<at} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi$$

Эта формула тоже называется формулой Кирхгофа.

В дальнейшем всюду будем полагать  $a = 1$ , поскольку переходить к случаю  $a \neq 1$  мы уже умеем, а вычисления упростятся.

## 6.1. Единственность классического решения задачи Коши

Исследование единственности начнем с вывода утверждения, имеющего, впрочем, и самостоятельную ценность.

### 6.1.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Итак, пусть  $u(x, t) \in C^2(t > 0) \cap C^1(t \geq 0)$  - Классическое решение задачи Коши для однородного волнового уравнения. Рассмотрим конус (называемый характеристическим)

$$K_{x_0, T} = \left\{ (x, t) \mid |x - x_0| < T - t, 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Обозначим через  $\Omega_\tau$  поперечное сечение нашего конуса плоскостью  $T = \tau$ :

$$\Omega_\tau = K_{x_0, T} \cap \{T = \tau\}$$

А через  $\Gamma_{t_1 t_2}$  обозначим часть конической поверхности между двумя сечениями (соответственно плоскостями  $\{T = t_1\}$  и  $\{T = t_2\}$ ):

$$\Gamma_{t_1 t_2} = \left\{ (x, t) \mid |x - x_0| = T - t, t_1 \leq t \leq t_2 \right\}$$

Выражение

$$E(t) = \int_{\Omega_t} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx$$

называется функционалом энергии.

**Теорема 6.1 (Энергетическое неравенство).** Для любых  $t_1, t_2$ , таких что  $0 \leq t_1 \leq t_2 < T$ , выполняется неравенство  $E(t_2) \leq E(t_1)$ .

**Доказательство:** Найдем вектор единичной внешней нормали к поверхности  $\Gamma_{t_1 t_2}$ : поскольку поверхность задается уравнением  $F(x, t) = |x - x_0| - T + t = 0$ , то компонентами нормали (пока не единичной) будут частные производные:  $F_t = 1$ ,  $F_{x_j} = \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|}$ .

Получается, что  $|\nabla F|^2 = 2$ , и таким образом находим единичную внешнюю нормаль  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, \nu_t)$ :

$$\nu_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|}, \quad j = 1, \dots, n, \quad \nu_t = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Умножим уравнение  $u_{tt} - \Delta u = 0$  на  $u_t$  и проинтегрируем по области

$$K_{t_1 t_2} = \left\{ (x, t) \mid |x - x_0| < T - t, t_1 \leq t \leq t_2 \right\}$$

Имеем:

$$0 = \int_{K_{t_1 t_2}} (u_{tt} - \Delta u) u_t dt dx$$

А теперь воспользуемся соотношениями:

$$u_{tt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_t)^2$$

$$u_{x_k x_k} u_t = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_t u_{x_k}) - u_{t x_k} u_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_t u_{x_k}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u_{x_k})^2$$

И формулой Стокса (сведя таким образом интегрирование по области к интегрированию по границе). Замечив, что на верхней крышке области внешняя нормаль имеет вид  $(0, \dots, 0, 1)$ , а на нижней, соответственно,  $(0, \dots, 0, -1)$ , получаем

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{K_{t_1 t_2}} u_t^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{K_{t_1 t_2}} \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 dx dt + \sum_{k=1}^n \int_{K_{t_1 t_2}} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_t u_{x_k}) dx dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} u_t^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} u_t^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{t_1 t_2}} u_t^2 \nu_t dS + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_2}} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_1}} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{t_1 t_2}} |\nabla u|^2 \nu_t dS \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \int_{\partial K_{t_1 t_2}} u_t u_{x_k} \nu_j dS
\end{aligned}$$

Заметим, что в последнем слагаемом интегралы по  $\Omega_{t_1}$  и  $\Omega_{t_2}$  равны нулю, так как обращается в ноль соответствующая компонента вектора нормали. Таким образом, собирая подобные члены, получаем

$$0 = \frac{1}{2} E(t_2) - \frac{1}{2} E(t_1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\Gamma_{t_1 t_2}} (u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2u_t(\nabla u, \tilde{\nu})) dS$$

Здесь за  $\tilde{\nu}$  мы обозначили вектор  $\sqrt{2}(\nu_1, \dots, \nu_n)$ , длина которого (см. начало лекции) равна 1. Поэтому для скалярного произведения справедлива оценка

$$(\nabla u, \tilde{\nu}) \leq |\nabla u| |\tilde{\nu}| = |\nabla u|$$

Теперь мы можем оценить подынтегральное выражение:

$$(u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2u_t(\nabla u, \tilde{\nu})) \geq (u_t^2 + |\nabla u|^2 - 2|u_t| |\nabla u|) = (|u_t| - |\nabla u|)^2 \geq 0$$

Следовательно, неотрицателен и сам интеграл и верно неравенство

$$E(t_2) \leq E(t_1)$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 6.2.** Если начальные функции двух задач Коши для одного и того же уравнения совпадают в шаре  $|x - x_0| < t_0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , то решения этих задач Коши совпадают в характеристическом конусе с вершиной в  $(x_0, t_0)$  и на его границе.

**Доказательство:** Пусть  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  - решения задач Коши. Рассмотрим  $w(x, t) = u(x, t) - v(x, t)$ . Из условия (и линейности операции дифференцирования) сразу следует, что  $w$  является решением однородного волнового уравнения  $w_{tt} = \Delta w$ , и кроме того,  $w|_{t=0} = w_t|_{t=0} = 0$  в шаре  $|x - x_0| \leq t_0$ .

Воспользуемся энергетическим неравенством в характеристическом конусе с вершиной в  $(x_0, t_0)$ . Понятно, что

$$E(0) = \int_{|x-x_0| \leq t_0} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dx = 0$$

А из энергетического неравенства следует, что  $E(t) \leq E(0) = 0$  при  $t < t_0$ . Однако функционал энергии неотрицателен, отсюда  $E(t) \equiv 0$ , поэтому равна нулю (так как неотрицательна) и подынтегральная функция, а значит, и  $w(x, t) = 0$  в характеристическом конусе (и по непрерывности - на границе). Но  $w(x, t)$  есть разность решений задач Коши, следовательно решения в  $\overline{K}_{x_0, t_0}$  совпадают. А это мы и хотели доказать.

**Теорема 6.3 (Единственности классического решения).** Если задача Коши для волнового уравнения имеет классическое решение, то это решение единственно.

**Доказательство:** Предположим противное. Пусть есть два различных решения, тогда существует точка, в которой эти решения различны. Возьмем произвольный характеристический конус, содержащий нашу точку. По предыдущей теореме решения внутри конуса должны совпадать. Противоречие.

Объединим все вышесказанное

**Теорема 6.4 (Существования и единственности).** Пусть  $u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$ ,  $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $D_x^\alpha f \in C(t \geq 0)$ ,  $|\alpha| \leq 2$ . Тогда задача Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \\ u_t|_{t=0} = u_1(x) \end{cases}$$

имеет единственное классическое решение, и это решение задается формулой Кирхгофа:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_1(\xi) dS_\xi + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|x-\xi|=at} u_0(\xi) dS_\xi \right) + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|x-\xi|<at} \frac{f(\xi, t - \frac{|x-\xi|}{a})}{|x-\xi|} d\xi$$

## 6.2. Решение задачи Коши для случая $n = 2$

Двумерная задача Коши хорошо вкладывается в трехмерную постановку. Рассмотрим трехмерную задачу Коши, и положим, что ни данные задачи, ни решение не зависят от  $x_3$ . Тем самым задачу мы произвели редукцию к двумерному случаю - этот прием называется *методом спуска*. Так что мы можем воспользоваться формулой Кирхгофа, сделав в ней, впрочем, некоторые упрощения.

Сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $(x_1, x_2, x_3)$  проецируется в круг того же радиуса с центром в  $(x_1, x_2)$ . Элемент площади на сфере  $dS$  и элемент площади на круге  $d\xi$  связаны соотношением  $d\xi = dS \cos \gamma$ , здесь  $\gamma$  - угол между плоскостью, касательной к сфере, и плоскостью  $(x_1, x_2)$ . Из геометрических соображений найдем

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{R^2 - |x - \xi|^2}}{R}$$

Учтем, что  $R = t$  и что в каждую точку круга проецируются 2 точки сферы - с верхней и с нижней половинки. Поэтому

$$\frac{1}{4\pi t} \int_{|x-\xi|=t} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi = \frac{2t}{4\pi t} \int_{|x-\xi|\leq t} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - |x - \xi|^2}}$$

И преобразуя аналогично всю формулу Кирхгофа, получаем *формулу Пуассона*:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x-\xi|\leq t} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - |x - \xi|^2}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|x-\xi|\leq t} \frac{u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{t^2 - |x - \xi|^2}} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{|x-\xi|\leq \tau} f(\xi_1, \xi_2, \tau) d\xi_1 d\xi_2 d\tau$$

## 7. Лекция 7

### 7.1. Формула Пуассона

Пусть  $n = 2$ ,  $u_1(\xi_1, \xi_2) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $u_0(\xi_1, \xi_2) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{D}_k^\alpha f(x, t) \in C(t \geq 0)$ ,  $|\alpha| \leq 2$

Тогда задача Коши с соответствующими условиями имеет единственное классическое решение, и это решение задается формулой Пуассона.

Единственность доказана. Заметим, что правая часть формулы Пуассона совпадает с правой частью формулы Кирхгофа, при условии, что функции  $u_0, u_1, f$  не зависят от третьего аргумента, мы получим решение волновой задачи и в  $\mathbb{R}^3$ .

$$u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + u_{x_3 x_3} + f(x_1, x_2, t) = u_{tt}, \quad u|_{t=0} = u_0(x_1, x_2), u_t|_{t=0} = u_1(x_1, x_2)$$

$u_{x_3 x_3} = 0$ . Ч.т.д.

*Задача 1.* Использована ли полностью гладкость начальных условий в теореме о существовании и единственности?

*Задача 2.* Получить формулу Даламбера методом спуска.

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+t) + u_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

### 7.2. Область зависимости решений от начальных данных

Решение в точке  $(x, t)$  зависит от значений  $u_0, u_1$  в области  $|x - \xi| \leq t$ , а также от значений  $f$  на конической поверхности  $\Gamma_{0,t}$  характеристического конуса.

Рассмотрим случай  $n = 3$

Пусть  $f \equiv 0$ ,  $\text{supp } u_0 \subset \overline{\Omega}$ ,  $\text{supp } u_1 \subset \overline{\Omega}$ . Фиксируем  $x_0$ . Обозначим

$$\rho_0 = \min_{\xi \in \overline{\Omega}} |x_0 - \xi|, \quad \rho_1 = \max_{\xi \in \overline{\Omega}} |x_0 - \xi|$$

В момент времени  $\rho = 0$  в точку  $x_0$  приходит волна (возмущение). При  $\rho_0 \leq t \leq \rho_1$  возмущение все еще идет, при  $t = \rho_1$  волна проходит через  $x_0$ , при  $t > \rho_1$  имеем состояние покоя. Т.е. в момент  $\rho_0$  через  $x_0$  прошел передний фронт волны, в момент  $\rho_1$  - задний фронт волны. Фиксируем теперь  $t = t_0$ .  $\Omega$  - шар  $(0, R_0)$ . Передним фронтом



будет сфера  $(0, R_0 + t)$ , задним фронтом при  $t > R_0$ - сфера  $(0, t - R_0)$ .

Рассмотрим случай  $n = 2$ .

Областью зависимости от  $u_0, u_1$  будет круг  $|x - \xi| < t$ , от  $f$  - весь характеристический конус  $K_{x,t}$ . При  $t < \rho_0$  имеем  $u = 0$ , при  $t < \rho_0$   $x_0$  находится в состоянии возмущения.

### 7.3. Обобщенные решения волнового уравнения

**Определение 1.** Функция  $u(x, t) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$  называется обобщенным решением волнового уравнения  $u_{tt} - \Delta u = 0$ , если существует последовательность классических решений  $u_k(x, t)$  данного волнового уравнения,  $\forall \Omega \subset (\mathbb{R}^{n+1}) \quad \|u_k - u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$ .

**Определение 2.** Функция  $u(x, t) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$  называется обобщенным решением волнового уравнения  $u_{tt} - \nabla u = 0$ , если  $\forall \varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  имеет место интегральное равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(x, t)(\varphi_{tt}(x, t) - \Delta \varphi(x, t)) dx dt = 0$$

Эти определения эквивалентны. Докажем  $(1) \Rightarrow (2)$ . Пусть  $u$  - классическое решение уравнения  $u_{tt} - \Delta u = 0$ .

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(x, t)(u_{tt} - \Delta u) dx dt = 0$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \int_{\partial \Omega} u v \nu_j dS, \quad u, v \in C^1(\overline{\Omega})$$

Но  $\varphi$  равна 0 вместе со всеми производными вне  $\text{supp } \varphi$ , который конечен. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi(x, t)(u_{tt} - \Delta u) dx dt = - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi_t u_t dx dt + \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\nabla \varphi, \nabla u) dx dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \varphi_{tt} u dx dt - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u \Delta \varphi dx dt = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\varphi_{tt} - \Delta \varphi) u dx dt \end{aligned}$$

Докажем  $(2) \Rightarrow (1)$ . Рассмотрим функцию  $\omega(t) \in C^\infty, \omega(t) \geq 0, \omega(t) = 0$  при  $t \geq 1, \omega(t) = \omega(-t), \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|) dx = 1$ .

В качестве примера можно взять функцию  $\omega(t), t \in \mathbb{R}$ , равную  $Ce^{\frac{1}{1-t^2}}$  при  $|t| < 1$ , и равную 0 в остальных случаях. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ , тогда

$$\omega_h(x) = h^{-n} \omega\left(\frac{|x|}{h}\right) - \text{ядро усреднения}$$

Очевидно,  $\omega_h(t) \in C^\infty, \omega_h(t) \geq 0, \omega_h(t) = 0$  при  $t \geq 1, \omega_h(t) = \omega_h(-t), \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(|x|) dx = 1$ . Пусть  $u(x) \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$ . Тогда

$$u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) u(y) dy - \text{усреднение } u \text{ с радиусом } h$$

Получаем  $u_h(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  и  $u_h^{(n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h^{(n)}(x - y) u(y) dy$  равномерно сходится.

**Лемма.** Пусть  $u(x) \in L_2(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$  - ограниченная область,  $u \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ . Тогда

1.  $\|u_h\|_{L_2} \leq \|u\|_{L_2}$ .
2.  $\|u_h - u\|_{L_2} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} |u_h(x)|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{\omega_h(x - y)} \sqrt{\omega_h(x - y)} u(y) dy \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) dy \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) u^2(y) dy = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) u^2(y) dy \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{\Omega} u_h^2(x) dx \leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x - y) u^2(y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \omega_h(x - y) u^2(y) dx dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} u^2(y) dy$$

## 8. Лекция 8

для  $u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - ограниченное множество

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u_h(x))^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} \omega_h(x-y) u^2(y) dx dy = \int_{|z|<h} \omega_h(z) \int_{\Omega} u^2(x+z) dx dz \leq \\ &\int_{|z|<h} \omega_h(z) dz \int_{\Omega_h} u^2(x) dx = \int_{\Omega_h} u^2(x) dx \end{aligned}$$

2.  $u \in L_2(\Omega)$ .  $\forall \epsilon > 0 \exists v \in C_0^\infty(\Omega) \|u - v\|_{L_2(\Omega)} < \epsilon$

Тогда

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\|_{L_2(\Omega)} &= \|(u - v)_h\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L_2(\Omega)} < \epsilon \\ \|u_h - v\|_{L_2(\Omega)} &\leq \|u_h - v_h\|_{L_2(\Omega)} + \|v_h - v\|_{L_2(\Omega)} + \|v - u\|_{L_2(\Omega)} \leq 2\epsilon + \|v_h - v\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

Достаточно доказать для  $C_0^\infty(\bar{\Omega})$

$$|v_h(x) - v(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y)(v(y) - v(x)) dy \right| \leq \max_{x-y < h} |v(y) - v(x)|$$

$$\|v_h - v\|_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (v_h - v)^2 dx \leq \left( \max_{x-y < h} |v(y) - v(x)| \right) \text{mes}(\Omega) \rightarrow 0, h \rightarrow 0$$

- в силу равномерной непрерывности функции.

Осталось все рассуждения собрать вместе и 2 будет доказано,

итак для  $L_{2,loc}$ :

$\Omega, \Omega_1, \bar{\Omega} \subset \Omega_1, v \in C_0^\infty(\Omega_1), \|u - v\| < \epsilon, \Omega_h \in \Omega_1$  для  $h \ll 1$ ,

$\|u_h - v_h\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u - v\|_{L_2(\Omega)} < \epsilon$ .

Теперь из 2 докажем 1:

$u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(x, t)(\varphi_{tt} - \Delta \varphi) dx dt = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$$

$$u_h(x, t) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \omega_h(x - y, t - \tau) u(y, \tau) dy d\tau - \text{классическое решение.}$$

$$\diamond_{x,t} u_h(x, t) = \int_{\mathbb{R}_{y,\tau}^{n+1}} \diamond_{x,t} (\omega_h(x - y, t - \tau)) u(y, \tau) dy d\tau = \int_{\mathbb{R}_{y,\tau}^{n+1}} \diamond_{y,\tau} (\omega_h(x - y, t - \tau)) u(y, \tau) dy d\tau = 0$$

Отсюда как-то все следует, учитывая что  $\diamond_{y,\tau} (\omega_h(x - y, t - \tau)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

Задача.

$u_{tt} = u_{xx}, f, g \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^1) \Rightarrow f(x+t) + g(x-t)$ - обобщенное решение волнового уравнения

### 8.1. Обобщенные производные. Пространства Соболева

Пусть

$$u \in L_{2,loc}(\Omega), \Omega \text{ ограничено.}$$

Тогда  $\omega_\alpha(x) \in L_{2,loc}(\Omega)$  - обобщенная производная вида  $D^\alpha$  от  $u$  в смысле Соболева, если выполнено равенство

$$\int_{\Omega} \omega_\alpha(x) g(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u(x) D^\alpha g dx \quad \forall g \in C_0^\infty(\Omega)$$

Рассмотрим некоторые примеры:

1. Пример функции, у которой существуют производные почти всюду, но не существует производной в смысле Соболева.

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], u = I_{\{y > 1/2\}}$$

У этой функции производная почти всюду равна 0, но не существует производной в смысле Соболева, что непосредственно вытекает из

$$0 = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} \varphi(x, y) dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 u \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = - \int_0^1 \int_{1/2}^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = - \int_0^1 \varphi(x, 1/2) dx$$

-противоречие.

2. Пример, когда из существования производной порядка 2 в смысле Соболева не следует существование производной первого порядка в смысле Соболева. Пусть

$$u(x, y) = f(x) + g(y), \text{ где } f, g \text{ не имеют обобщенной производной первого порядка.}$$

Несложно показать (просто по определению), что у функции  $u$  существует обобщенная производная второго порядка, но не существует обобщенной производной первого порядка в смысле Соболева.

## 9. Лекция 9

**Задача:** Пусть  $u(x, t)$  - обобщенное решение волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}$$

Пусть  $\gamma : t = f(x)$  -гладкая кривая, а области, лежащие по разные стороны кривой, обозначим  $\Omega^1$  и  $\Omega^2$ . Известно, что  $u \in C^2(\Omega^1) \cap C^2(\Omega^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$  и что  $[u_t]^2 + [u_x]^2 \neq 0$ , где за  $[v]$  мы обозначаем скачок функции  $v$  на  $\gamma$ .

Доказать, что  $\gamma$  — характеристика.

**Теорема 9.1.** Не может быть двух различных производных вида  $D^\alpha u$  у функции  $u \in L_{2loc}(\Omega)$

**Доказательство:** Предположим противное - пусть существуют 2 обобщенные производные  $w_\alpha^1$  и  $w_\alpha^2$ . Это означает, что

$$\int_{\Omega} (w_\alpha^1 - w_\alpha^2) f(x) dx = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega)$$

Рассмотрим область  $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ , в ней, очевидно,

$$\int_{\tilde{\Omega}} (w_\alpha^1 - w_\alpha^2) f(x) dx = 0 \quad \forall f \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$$

Но  $w_\alpha^1 - w_\alpha^2 \in L_2(\tilde{\Omega})$ , а в  $L_2(\tilde{\Omega})$  множество  $C_0^\infty(\tilde{\Omega})$  всюду плотно (по норме  $L_2$ ), поэтому существует последовательность  $f_k(x) \in C_0^\infty(\tilde{\Omega})$ , сходящаяся к  $(w_\alpha^1 - w_\alpha^2)$ :

$$\|(w_\alpha^1 - w_\alpha^2) - f_k(x)\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

Вернемся к интегральному тождеству:

$$\int_{\tilde{\Omega}} (w_\alpha^1 - w_\alpha^2) f_k(x) dx = 0$$

И перейдем к пределу при  $k \rightarrow \infty$ :

$$\int_{\tilde{\Omega}} (w_\alpha^1 - w_\alpha^2)^2 dx = 0$$

А значит,  $w_\alpha^1 - w_\alpha^2 = 0$ , что и требовалось.

### 9.1. Пространство Соболева

Пусть  $\Omega$  - некоторая область в  $\mathbb{R}^n$ .

Обозначим

$$H_{1loc}(\Omega) = \left\{ u \in L_{2loc}(\Omega) \mid \forall j = 1, \dots, n \quad \exists u_{x_j} \in L_{2loc}(\Omega) \right\}$$

$$H_1(\Omega) = \left\{ u \in L_2(\Omega) \mid \forall j = 1, \dots, n \quad \exists u_{x_j} \in L_2(\Omega) \right\}$$

Где производная понимается обобщенная в смысле Соболева.

В пространстве  $H_1(\Omega)$  можно ввести скалярное произведение:

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} (uv + \nabla u \nabla v) dx$$

Которое порождает норму

$$\|u\|_1^2 = \int_{\Omega} (u^2 + |\nabla u|^2) dx$$

Докажем, что относительно введенной нормы пространство  $H_1(\Omega)$  полно.

**Теорема 2.**

$H_1(\Omega)$  - полное (т.е. и гильбертово)

*Доказательство теоремы.*

$$\{u_k(x)\}, u_k \in (\Omega), \|u_k - u_m\|_1 \rightarrow 0, k, m \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \|u_k - u_m\|_1 &= \int_{\Omega} (|u_k - u_m|^2) dx + \int_{\Omega} |\nabla(u_k - u_m)| dx \rightarrow 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} (|u_k - u_m|^2) dx \rightarrow 0 \Rightarrow \|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Т.к. пространство  $L_2(\Omega)$  полное, то

$$\exists u \in L_2(\Omega) : \|u - u_k\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Далее

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right| dx \rightarrow 0 \Rightarrow \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right\} \text{ фундаментальная в } L_2(\Omega)$$

Тогда

$$\exists \omega_j(x) \in L_2(\Omega) : \left\| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \omega_j \right\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Тем самым осталось доказать, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \omega_j(x) \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \\ \int_{\Omega} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \varphi(x) dx &= - \int_{\Omega} u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rightarrow (k \rightarrow \infty) \int_{\Omega} \omega_j(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

*Пример.*

$$\Omega = \{|x| < 1\}, x \in (R)^n, u(x) = |x|^\varepsilon \in H_1(\Omega)(?)$$

Посмотрим, когда  $u \in L_2(\Omega)$

$$\int_{|x|<1} |x|^{2\varepsilon} dx = C \int_0^1 r^{2\varepsilon} r^{n-1} dr = C \int_0^1 r^{2\varepsilon+n-1} < \infty \text{ если } 2\varepsilon + n > 0$$

т.е

$$\varepsilon > -\frac{n}{2} \Rightarrow u \in L_2(\Omega)$$

$$x \neq 0, : \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} |x|^\varepsilon = \varepsilon |x|^{\varepsilon-1} \frac{x_j}{x}$$

Отсюда  $|\nabla u| \in L_2(\Omega)$  если

$$\varepsilon^2 \int_{|x|<1} |x|^{2\varepsilon-2} dx < \infty \Rightarrow 2\varepsilon - 2 + n > 0 \Rightarrow \varepsilon > 1 - \frac{n}{2}$$

Убедимся, что  $\omega_j$  обобщенная производная, т.е

$$\varepsilon \int_{|x|<1} |x|^{\varepsilon-1} \frac{x_j}{|x|} \varphi(x) dx \varepsilon \int_{|x|<1} |x|^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx$$

Вырезаем шарик  $O(0, \delta)$ .  $\Omega_\delta = \{\delta < |x| < 1\}$ ,  $S_\delta = \{|x| = \delta\}$

$$\int_{\Omega_\delta} |x|^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\varepsilon \int_{\Omega_\delta} |x|^{\varepsilon-1} \frac{x_j}{|x|} \varphi(x) dx + \int_{S_\delta} |x|^\varepsilon \varphi \nu_j dS$$

Пусть  $I = \int_{S_\delta} |x|^\varepsilon \varphi \nu_j dS$ , покажем, что  $I \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$

Действительно, т.к  $\varepsilon n - 1 > 0$  то

$$|I| = \delta^\varepsilon \left| \int_{S_\delta} \varphi \nu_j dS \right| \leq (|\nu_j| \leq 1) \leq \max_{|x| \leq 1} |\varphi| \delta^\varepsilon |S_\delta| = K(\varphi, n) \delta^{\varepsilon+n-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0.$$

$u \in L_2(\Omega)$ .  $u_h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_h(x-y) u(y) dy$ . Пусть существует обобщенная производная вида  $\mathcal{D}^\alpha u \in L_2(\Omega)$ , тогда:

$$1. \mathcal{D}^\alpha u_h(x) = (\mathcal{D}^\alpha u)_h(x) \quad \forall x \in \Omega \quad \forall h \leq H(x).$$

$$2. \forall \Omega' \subset \subset \Omega \quad \|(\mathcal{D}^\alpha u)_h - \mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega')} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Доказательство

$$1. u_h \in C^\infty(\Omega).$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\alpha u_h(x) &= \int_{\Omega} \mathcal{D}_x^\alpha \omega_h(x-y) u(y) dy = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \mathcal{D}_y^\alpha \omega_h(x-y) u(y) dy = \\ &= \int_{\Omega} \omega_h(x-y) \mathcal{D}_x^\alpha u(y) dy = (\mathcal{D}^\alpha u)_h(x) \end{aligned}$$

$$2. \|(\mathcal{D}^\alpha u)_h - \mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0 - \text{ уже доказано (на } \Omega' \text{ имеем } \mathcal{D}^\alpha u_h(x) = (\mathcal{D}^\alpha u)_h(x)).$$

Примечание. Выше мы рассматривали  $h: h < \rho(x, \partial\Omega)$ .

Ч.т.д.

Следствие.  $u \in H_1(\Omega)$ .

$u_h(x) \rightarrow u(x)$  при  $h \rightarrow 0$  по норме  $H_1(\Omega')$ , и это  $\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ . Рассмотрим  $H_1(\Pi_a)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ ,  $a_j > 0$ ,  $\Pi_a = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| < a_j\}$ .

Пространство  $C^\infty(\overline{\Pi}_a)$  всюду плотно в  $H_1(\Pi_a)$ .

Доказательство.

Пусть  $u \in H_1(\Pi_a)$ ,  $\mathcal{D}^\alpha u$ ,  $0 < |\alpha| < 1$ .

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\alpha(x) \in C(\Pi_a) : \|(\mathcal{D}^\alpha u)_h - \varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$

$F_\sigma(x) = u\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ ,  $\sigma > 1$ .  $F_\sigma(x) \in H_1(\Pi_{\sigma a})$ .  $\overline{\Pi}_a \subset \Pi_{\sigma a}$   $H_1(\Pi_a) \subset H_1(\Pi_{\sigma a})$ . Нужно доказать  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma_0 > 1 : \|\mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0} - \varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$

Если это доказано, то  $(\mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0})_h = \mathcal{D}^\alpha (F_{\sigma_0})_h \rightarrow \mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0}$  в  $L_2(\Pi_a)$ .

Заметим, что  $F_{\sigma_0} \in H_1(\Pi_{a\sigma_0})$ ,  $\Pi_a \subset \Pi_{\sigma_0 a}$ ,  $(F_{\sigma_0})_h \in C^\infty(\overline{\Pi}_a)$ .

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0})_h - \mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Pi_a)} \leq \\ &\leq \|(\mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0})_h - \mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0}\|_{L_2(\Pi_a)} + \|\mathcal{D}^\alpha F_{\sigma_0} - \varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)} + \|\mathcal{D}^\alpha u - \varphi_\alpha\|_{L_2(\Pi_a)}, \end{aligned}$$

откуда мы в итоге и получим требуемое утверждение.

## 10. Лекция 10

### 10.1. Строго липшицева область

$\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ .  $C_{L,R} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 < R^2, -2LR < x_n < 2LR\}$

Определение.  $\Omega$  - строго липшицева, если  $\forall x_0 \in \partial\Omega \quad \exists C = (c_{kl})$  - ортогональная :  $y_k = c_{kl}(x_l - x_{0l}) \Rightarrow \partial\Omega \cap C_{L,R}(y)$  задается уравнением  $y_n = \varphi(y')$ ,  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$  и  $\varphi$  - липшицева с постоянной Липшица  $L$ .

Например, если  $\partial\Omega \in C^1$ , то  $\Omega$  строго липшицева. Выпуклый многогранник также строго липшицев.

Пусть  $\Omega$  строго липшицева. Тогда  $C^\infty(\overline{\Omega})$  всюду плотно в  $H_1(\Omega)$ . Доказываем в частном случае  $\Omega = \Pi_a$  (см.

предыдущую лекцию).  
Выберем  $\sigma_0$ .

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} &\leq \|\mathcal{D}^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right)\|_{L_2(\Pi_{\sigma^a})} + \|\varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} \\ \sigma \rightarrow 1+0, \quad \varphi_\alpha \in C(\overline{\Pi}_\alpha) &\Rightarrow \|\varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} \rightarrow 0\end{aligned}$$

Значит,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma_1 > 1 : \forall \sigma : 1 < \sigma < \sigma_1 \quad \|\varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} < \varepsilon$ .  
Но  $\mathcal{D}^\alpha F_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}} \mathcal{D}^\alpha u\left(\frac{x}{\sigma}\right)$ . Тогда

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^\alpha F_\sigma(x) - \varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right)\|_{L_2(\Pi_{\sigma^a})} &= \left\| \frac{1}{\sigma^{|\alpha|}} \mathcal{D}^\alpha u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right\|_{L_2(\Pi_{\sigma^a})} \leq \\ &\leq \|\mathcal{D}^\alpha u\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \varphi_\alpha\left(\frac{x}{\sigma}\right)\|_{L_2(\Pi_{\sigma^a})} + \left(1 - \frac{1}{\sigma^\alpha}\right) \|\mathcal{D}^\alpha u\left(\frac{x}{\sigma}\right)\|_{L_2(\Pi_{\sigma^a})} \leq \\ &\leq \sigma^{n/2} \|\mathcal{D}^\alpha u(x) - \varphi_\alpha(x)\|_{L_2(\Pi_a)} + \left(1 - \frac{1}{\sigma^\alpha}\right) \sigma^{n/2} \|\mathcal{D}^\alpha u\|_{L_2(\Pi_a)}\end{aligned}$$

, что стремится к 0 при  $\sigma \rightarrow 1+0$ . Множители вида  $\sigma^{n/2}$  возникают за счет замены переменных  $\frac{x}{\sigma} = y$  в выражении для нормы.

Ч.т.д.

*Упражнение.* Доказать, что если  $\Omega = Q_R^0$ , то  $C^\infty(\overline{\Omega})$  всюду плотно в  $H_1(\Omega)$ .

$\overline{\Pi}_l = \{x : 0 < x_j < l_j, j = 1, \dots, n\}$ .

## 10.2. Неравенство Пуанкаре

$$u \in H_1(\Pi_l) \Rightarrow \int_{\Pi_l} u^2 dx \leq \frac{1}{|\Pi_l|} \left( \int_{\Pi_l} u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \sum_{j=1}^n l_j^2 \int_{\Pi_l} u_{x_j}^2 dx$$

Доказательство. Сделаем замену  $y_j = \frac{x_j}{l_j}$ , тогда  $dx = |\Pi_l| dy$  и  $u_{x_j} = \frac{1}{l_j} u_{y_j}$ . Получаем, что достаточно доказать следующее неравенство:

$$\int_{\Pi_1} u^2 dy \leq \left( \int_{\Pi_1} u dy \right)^2 + \frac{n}{2} \int_{\Pi_1} |\nabla_y u|^2 dy$$

В частности, если  $\int_{\Pi_1} u dy = 0$ , то  $\|u\|_{L_2(\Pi_1)} \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \|\nabla u\|_{L_2(\Pi_1)}$ . Докажем теперь наше неравенство.

$C^\infty(\overline{\Pi}_1)$  всюду плотно в  $H_1(\Pi_1)$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned}P_0 &= (y_1^0, \dots, y_n^0), \quad P_1 = (y_1, \dots, y_n) \quad P_0 \in \Pi_1, P_1 \in \Pi_1 \\ A_1 &= (y_1, y_2^0, \dots, y_n^0), \quad A_2 = (y_1, y_2, y_3^0, \dots, y_n^0), \quad \dots, \quad A_n = (y_1, \dots, y_n) = P_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u(y_1, \dots, y_n) - u(y_1^0, \dots, y_n^0) &= \int_{y_1^0}^{y_1} u_{x_1}(x_1, y_2^0, \dots, y_n^0) dx_1 + \int_{y_2^0}^{y_2} u_{x_2}(y_1, x_2, \dots, y_n^0) dx_2 + \dots + \\ &+ \int_{y_n^0}^{y_n} u_{x_n}(y_1, y_2, \dots, x_n) dx_n\end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n a_k^2$ , тогда

$$\begin{aligned}(u(P_1) - u(P_0))^2 &\leq n \left( \left( \int_{y_1^0}^{y_1} u_{x_1}(x_1, y_2^0, \dots, y_n^0) dx_1 \right)^2 + \dots + \left( \int_{y_n^0}^{y_n} u_{x_n}(y_1, y_2, \dots, x_n) dx_n \right)^2 \right) \leq \\ &\leq n \left( \int_0^1 u_{x_1}^2 dx_1 + \dots + \int_0^1 u_{x_n}^2 dx_n \right)\end{aligned}$$

Интегрируя обе части неравенства по  $P_0$  и  $P_1$ , получим

$$2 \int_{\Pi_1} u^2(y) dy - 2 \left( \int_{\Pi_1} u(y) dy \right)^2 \leq n \int_{\Pi_1} |\nabla_y u|^2 dy$$

Ч.т.д.

$\Omega$  - ограниченная область.  $H_1^0(\Omega)$  - замыкание  $C_0^\infty(\Omega)$  по норме  $H_1(\Omega)$ .

$H_1^0(\Omega) \subset H_1(\Omega)$ ,  $H_1^0(\Omega)$  - гильбертово.  $\Omega'$  - ограниченная область,  $\Omega \subset \Omega'$ ,  $u \in H_1(\Omega)$ , тогда  $\tilde{u}(x)$  равна  $u(x)$  при  $x \in \Omega$ , и равна 0 при  $x \in \Omega' \setminus \Omega$ .  $\tilde{u} \in H_1^0(\Omega)$ .

### 10.3. Теорема Реллиха

Ограниченное множество в  $H_1^0(\Omega)$  компактно в  $L_2(\Omega)$ .

$u_m \in H_1^0(\Omega)$ ,  $\|u_m\|_{H_1^0(\Omega)} \leq C = \text{const} \Rightarrow$  существует сходящаяся подпоследовательность в норме  $L_2(\Omega)$ .

Доказательство.

Можно считать, что  $\Omega \subset \Pi_l$  (с точностью до сдвига). Тогда продолжаем  $u$  тождественным 0 на  $\Pi_l \setminus \overline{\Omega}$ . Разобьем  $\Pi_l$  на  $N^n$  элементарных параллелепипедов  $\omega_i$ .  $u \in H_1(\omega_i)$ , тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i} u^2 dx &\leq \frac{1}{|\omega_i|} \left( \int_{\omega_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \sum_{j=1}^n l_j^2 \int_{\omega_i} u_{x_j}^2 dx \\ \int_{\Pi_l} u^2 dx &\leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\omega_i|} \left( \int_{\omega_i} u dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \sum_{j=1}^n l_j^2 \int_{\Pi_l} u_{x_j}^2 dx \\ \int_{\Pi_l} (u_m - u_s)^2 dx &\leq \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|\omega_i|} \left( \int_{\omega_i} (u_m - u_s) dx \right)^2 + \frac{n}{2N^2} \sum_{j=1}^n l_j^2 \int_{\Pi_l} (u_m - u_s)_{x_j}^2 dx \end{aligned}$$

$\|u_m\|_{L_2(\Pi_l)} \leq C$ . Существует подпоследовательность  $u_m$ , слабо сходящаяся к  $u$  в  $L_2(\Pi_l)$ . Т.е.  $\forall v \in L_2(\Pi_l)$  имеем  $\int_{\Pi_l} (u_m - u_s) v dx \rightarrow 0$  при  $m, s \rightarrow \infty$ . Возьмем  $v = \chi \omega_j$ , получим  $\int_{\omega_j} (u_m - u_s) dx \rightarrow 0$  при  $m, s \rightarrow \infty$ .

$\|u_m\|_{L_2(\Pi_l)} \leq C$ . Выбираем  $N_0$  такое, чтобы второе слагаемое в нашем неравенстве было меньше  $\varepsilon$ . Выбираем  $m, s$  такие, чтобы выполнялось  $\int_{\Pi_l} (u_m - u_s) v dx < \sqrt{\frac{\varepsilon}{N_0}} |\omega_j|$ . Тогда  $\int_{\Pi_l} (u_m - u_s)^2 v dx < 2\varepsilon \Rightarrow \{u_m\}$  фундаментальна в  $L_2(\Pi_l)$ , откуда и получаем требуемую сходимость.

Ч.т.д.

## 11. Лекция 11

### Задача

Пусть  $\Omega_\delta$  - область «вида цоколя».

$$\Omega_\delta \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\delta < x_n < f(x'), x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D\}, \delta > 0, f \in C(\overline{D}), f(x') \geq 0.$$

Тогда

$$\left\{ \exists \text{ обобщенной производной вида } \frac{\partial u}{\partial x_n} \in L_2(\Omega_\delta) \right\} = \overline{C^\infty(\overline{\Omega_\delta})}$$

### 11.1. Неравенство Фридрихса

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ огр. } \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \quad (11.1)$$

Доказательство.

Можно считать, что

$\overline{\Omega} \subset \Pi_l := \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_j \leq l_j\}, l_1 \leq l_j, j = \overline{2, n}$  Тогда (11.1) достаточно доказать  $\forall u \in C_0^\infty$ .

Итак,

$$\begin{aligned} u &\in C_0^\infty, x' = (x_2, \dots, x_n) \\ u(x_1, x') - u(0, x') &= \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} u(y_1, x') dy_1 \\ \int_{\Pi_l} u^2(x) dx &= \int_{\Pi_l} \left( \int_0^{x_1} \frac{\partial}{\partial y_1} u(y_1, x') dy_1 \right)^2 dx \end{aligned}$$

По неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_l} u^2(x) dx &\leq \int_{\Pi_l} x_1 \int_0^{l_1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx_1 dx = \int_0^{l_1} x_1 \int_{\Pi_l} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right|^2 dx dx_1 = \frac{l_1^2}{2} \int_{\Pi_l} |u_{x_1}|^2 dx = \frac{l_1^2}{2} \int_{\Omega} |u_{x_1}|^2 dx \\ C(\Omega) &= \frac{l_1^2}{2} \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

На  $H_0^1$  можно ввести норму

$$\|u\|_{H_1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

Она будет эквивалентна норме  $H_1(\Omega)$ .

$H_1^0(\Omega) \neq H_1(\Omega)$  т.к.  $u \equiv 1$  не удовлетворяет неравенству Фридрихса.

Формула интегрирования по частям для  $u \in H_0^1(\Omega)$ ,  $v \in H_1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u_{x_j} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_j} dx$$

Доказательство очень простое, достаточно вспомнить, что

$$\exists u_m \in C_0^\infty(\Omega) : \|u - u_m\|_{H_1} \rightarrow 0$$

и перейти к пределу в равенстве

$$\int_{\Omega} u_{mx_j} v dx = - \int_{\Omega} u_m v_{x_j} dx$$

## 11.2. След функции

К понятию следа функции мы придем не сразу. Пусть  $u \in H_1(\Omega)$ , где  $\Omega$ , ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ , причем

$$\partial\Omega \in C^1, \quad \partial\Omega = \bigcup_{j=1}^N S_j$$

$S_1 : x_n = \varphi(x')$ ,  $x' = (x, \dots, x_{n-1})$ ,  $\varphi(x') \in C^1(D)$  Пусть теперь

$$S_1 \subset \{x_n = 0\}$$

$$\exists \delta > 0 : Q_\delta = \{x | 0 < x_n < \delta, x' \in S_1\} \subset \Omega$$

$Q_\delta$  - область «вида цоколя»,  $C^\infty(\overline{Q})_\delta$  всюду плотно в  $H_1(Q_\delta)$  и  $u \in C^\infty(\overline{Q}_\delta)$ .

$$u(x', x_n) - u(x', 0) = \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}(x', y_n) dy_n$$

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}(x', y_n) dy_n$$

$$u^2(x', 0) \leq 2u^2(x', x_n) + 2\left(\int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}(x', y_n) dy_n\right)^2$$

Интегрируем это выражение по  $Q_\delta$ :

$$\begin{aligned} \delta \int_{S_1} u^2(x', 0) dx' &\leq 2 \int_{Q_\delta} u^2(x', x_n) dx + 2 \int_{Q_\delta} \left( \int_0^{x_n} \frac{\partial u}{\partial y_n}(x', y_n) dy_n \right)^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_{Q_\delta} u^2(x', x_n) dx + \delta^2 \int_{Q_\delta} |u_{x_n}|^2 dx \end{aligned}$$

Т.е. получаем, что

$$\int_{S_1} u^2(x', 0) dx' \leq \frac{2}{\delta} \int_{Q_\delta} u^2(x', x_n) dx + \delta \int_{Q_\delta} |u_{x_n}|^2 dx$$

Если  $S$  не плоская, то распрямляем диффеоморфизмом.

$$\int_{S_1} u^2 dS \leq C_1 \left( \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)$$



Так как  $u \in H_1(\Omega)$ , то  $u \in H_1(Q_\delta)$ ,  $\exists u_m \rightarrow u$ , пусть  $u = u_m - u_k$ .

Подставляя в предыдущее выражение, получим

$$\int_{S_1} (u_m - u_k)^2 dS \leq \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} (u_m - u_k)^2 dx + \delta \int_{\Omega} |\nabla(u_m - u_k)|^2 dx \rightarrow 0, \quad m, k \rightarrow \infty.$$

$\Rightarrow \{u_m\}$  фундаментальна в  $L_2(S_1)$ , т.е.  $\exists u|_{S_1} = \lim_{\|\cdot\|_{L_2(S_1)}} u_m$

Определение  $u|_{S_1}$  называется следом.

Оператор следа  $T : H_1(\Omega) \rightarrow L_2(\partial\Omega)(L_2(S_1))$ ,  $Tu = u|_{S_1}$ .

Покажем, что такое определение корректно. Пусть

$$\{u_m\}, \{u'_k\} \rightarrow u \text{ по норме } H_1 \quad u|_{S_1}, u'|_{S_1} \in L_2(S_1)$$

$$\|u|_{S_1} - u'|_{S_1}\|_{L_2(S_1)} \leq \|u|_{S_1} - u_m|_{S_1}\| + \|u_m|_{S_1} - u'_k|_{S_1}\| + \|u'|_{S_1} - u'_k|_{S_1}\|$$

$$\int_{S_1} (u|_{S_1} - u_m)^2 dx' \leq \frac{2}{\delta} \int_{\Omega} (u - u_m)^2 dx + \delta \int_{\Omega} |\nabla(u - u_m)|^2 dx$$

$$\|u|_{S_1} - u_m|_{S_1}\|_{L_2(S_1)} \leq C(\delta) \|u - u_m\|_{H_1(Q_\delta)}$$

$$\|u|_{S_1} - u'_m|_{S_1}\|_{L_2(S_1)} \leq C(\delta) (\|u - u_m\|_{H_1(Q_\delta)} \|u_m - u'_k\|_{H_1(Q_\delta)} \|u'_k - u\|_{H_1(Q_\delta)}) \rightarrow 0, \quad k, m \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \|u|_{S_1} - u'|_{S_1}\|_{L_2(S_1)} = 0$$

Что и требовалось.

*Задача.*  $u \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow Tu = u|_{\partial\Omega}$

*Упражнение.*  $u \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow u_h$  сходится равномерно к  $u(x)$  на  $\Omega' \subset \subset \Omega$  при  $h \rightarrow 0$

*Следствие.*  $u \in H_1^0(\Omega) \Rightarrow Tu|_{\partial\Omega} = 0$

Доказательство следствия.

$$u_m \in C_0^\infty(\Omega) \|u - u_m\|_{H_1(\Omega)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty$$

$$\|u|_{\partial\Omega} - u_m|_{\partial\Omega}\| \leq C \|u - u_m\|_{H_1(\Omega)} \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$$

### 11.3. Метод Фурье (метод разделения переменных)

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ограничено,  $\partial\Omega \in C^1$

$Q_T = \{(x, t) | x \in \Omega, 0 < t < T\}$

$\Gamma_T = \partial\Omega \times [0, T]$

$$u_{tt} = \Delta u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T \tag{1}$$

$$(3) u|_{\Gamma_T} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{2}$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x, t)u = \beta(x, t)u, \quad \nu \text{ единичная нормаль к } \Gamma_T$$

$\alpha \equiv 0$  - вторая нормаль.

$\alpha \neq 0$  - третья нормаль.

## 12. Лекция 12

### 12.1. Обобщенное решение первой начально-краевой задачи

$\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$

Пусть  $u(x, t)$  - решение задачи (1)-(3),  $v(x, t) \in C^1(\overline{Q}_T)$ ,  $v|_{t=T} = v|_{\Gamma_T} = 0$ .

$$\int_0^T \int_{\Omega} (u_{tt} - \Delta u) v dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} f(x, t) v(x, t) dx dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v) dx dt + \int_{\partial Q_T} u_t v \nu_t ds - \sum_{j=1}^n \int_{\partial Q_T} u_{x_j} v \nu_{x_j} ds = \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt$$

$$\nu = (\nu_{x_1}, \dots, \nu_{x_n}, \nu_t)$$

На верхнем основании  $\nu = (0, \dots, 0, 1)$ , на нижнем основании  $\nu = (0, \dots, 0, -1)$

$$\begin{aligned}\int_{\partial Q_T} u_t v \nu_t ds &= - \int_{\Omega_0} u_t(x, 0) v(x, 0) dx = - \int_{\Omega} \psi(x) v(x, 0) dx \\ \int_{\partial Q_T} u_{x_j} v \nu_{x_j} ds &= 0 \\ \int_0^T \int_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v) v dx dt &= \int_{\Omega} \psi(x) v(x, 0) dx + \int_{Q_T} f(x, t) v(x, t) dx dt\end{aligned}\quad (4)$$

Определение. Функция  $u(x, t) \in H_1(Q_T)$  называется обобщенным решением первой начально-краевой задачи (1)-(3), если  $u(x, t) = 0$  на  $\Gamma_T$ ,  $u(x, 0) = u_0(x)$  в смысле следа функции и  $\forall v \in H_1(Q_T) : v|_{\Gamma_T} = 0, v|_{t=T, x \in \Omega}$  выполнено интегральное тождество (4).

## 12.2. Единственность решения смешанной задачи (1)-(3)

Если задача (1)-(3) имеет обобщенное решение, то оно единственно.

Доказательство.

Пусть  $u_1(x, t), u_2(x, t)$  - два решения.  $u(x, t) := u_1(x, t) - u_2(x, t)$ .

$$\int_0^T \int_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v) v dx dt = 0.$$

Возьмем  $v(x, t)$ , определенную следующим образом:

$$\begin{cases} \int_t^\tau u(x, s) ds, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

Тогда  $v_t(x, t)$  будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} -u(x, t), & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

а  $v_{x_j}(x, t)$  - так:

$$\begin{cases} \int_t^\tau u_{x_j}(x, s) ds, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \tau \leq t \leq T \end{cases}$$

Имеем

$$\int_0^T \int_{\Omega} u_t u dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \int_t^\tau \nabla u(x, s) ds dx dt = 0$$

Обозначим  $\eta(x, t) = \int_t^\tau \nabla u(x, s) ds$  и воспользуемся тем, что  $\nabla u = -\eta_t$  и  $u_t u = \frac{1}{2}(u^2)_t$ , тогда

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} u^2(x, \tau) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\eta)^2(x, 0) dx = 0,$$

откуда получаем, что  $u(x, \tau) = 0$  п.в.

Ч.т.д.

*Следствие.* Если задача (1)-(3) имеет классическое решение, то оно единственно.

## 12.3. Задача Дирихле

$\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\partial\Omega} = 0$  - спектральная задача Дирихле для оператора Лапласа.

Определение. Функция  $u$ , не являющаяся тождественно равной 0 в  $\Omega$ , называется собственной функцией задачи Дирихле для оператора Лапласа, если  $\exists \lambda : \forall v \in H_1^0(\Omega)$  выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\lambda \int_{\Omega} u v dx$$

Если  $u(x, t)$  - собственная функция, отвечающая собственному значению  $\lambda$ , то  $Cu(x, t)$  тоже будет собственной функцией с тем же собственным значением. Поэтому мы можем считать, что  $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$ .

$$(u, v)_{H_1^0(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

**Теорема.** Существует линейный ограниченный оператор  $A: L_2(\Omega) \rightarrow H_1^0(\Omega)$  :

$$1) \forall u \in L_2(\Omega) \forall v \in H_1^0(\Omega) \quad (u, v)_{L_2(\Omega)} = (Au, v)_{H_1^0(\Omega)}$$

$$2) \exists A^{-1}$$

$$3) A|_{H_1^0(\Omega)} - \text{самосопряженный, положительный и вполне непрерывный (компактный).}$$

(напомним, что  $A: H \rightarrow H$  вполне непрерывен, если любое ограниченное множество он переводит в компактное).

Доказательство.

Фиксируем  $u \in L_2(\Omega)$ .  $l_u: H_1^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $l_u(v) = (u, v)_{H_1^0(\Omega)}$ .

Оператор  $l_u$  непрерывен. В самом деле,  $|l_u(v)| \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} C \|v\|_{H_1^0(\Omega)}$ , т.е.  $\|l_u\| \leq C \|u\|_{L_2(\Omega)}$

По теореме Рисса  $\exists! V \in H_1^0(\Omega) : \forall v \in H_1^0(\Omega) l_u(v) = (V, v)_{H_1^0(\Omega)}$ . Положим  $Au := v$ . Оператор  $A$  линеен и ограничен:

$$\|Au\|_{H_1^0(\Omega)}^2 = (Au, Au)_{H_1^0(\Omega)} = (u, Au)_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} \|Au\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{L_2(\Omega)} C \|Au\|_{H_1^0(\Omega)}$$

Значит,  $\|A\| \leq C$ .

Покажем  $\text{Ker } A = \{0\}$ . Действительно,  $Au = 0 \Rightarrow \forall v \in H_1^0(\Omega) \quad (u, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \Rightarrow u \perp H_1^0(\Omega)$ .

$C_0^\infty(\Omega)$  всюду плотно в  $L_2(\Omega) \Rightarrow H_1^0(\Omega)$  всюду плотно в  $L_2(\Omega) \Rightarrow u = 0$ .

Из того, что  $\forall u \in H_1^0(\Omega) \quad (Au, u)_{H_1^0(\Omega)} \geq 0$  и  $(Au, u)_{H_1^0(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow u = 0$  следует положительность оператора  $A$ .

Покажем самосопряженность.  $u, v \in H_1^0(\Omega)$ :

$$(Au, v)_{H_1^0(\Omega)} = (u, v)_{L_2(\Omega)} = (v, u)_{L_2(\Omega)} = (Av, u)_{H_1^0(\Omega)} = (u, Av)_{H_1^0(\Omega)}$$

Покажем компактность.  $\{u_k\}$ ,  $u_k \in H_1^0(\Omega)$ ,  $\|u_k\|_{H_1^0(\Omega)} \leq M$ .

По теореме Реллиха существует подпоследовательность  $\{u_{i_k}\} : \|u_{i_m} - u_{i_n}\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$  при  $m, n \rightarrow \infty$ . Тогда  $\{Au_{i_k}\}$  фундаментальна в  $H_1^0(\Omega)$ , т.к.

$$\|Au_{i_m} - Au_{i_n}\|_{H_1^0(\Omega)} = \|A(u_{i_m} - u_{i_n})\|_{H_1^0(\Omega)} \leq C \|u_{i_m} - u_{i_n}\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \text{ при } m, n \rightarrow \infty.$$

Ч.т.д.

Если  $u$  - собственная функция с собственным значением  $\lambda$ , то

$$(u, v)_{H_1^0(\Omega)} = -\lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = -\lambda(Au, v)_{H_1^0(\Omega)}$$

,т.е.  $u = -\lambda Au$ .

## 13. Лекция 13.

### 13.1. Базис в пространстве $H_1^0(\Omega)$

Итак, пусть  $u$  - собственная функция задачи Дирихле, отвечающая собственному значению  $\lambda$ . Тогда имеем

$$(u, v)_{H_1^0(\Omega)} = -\lambda(u, v)_{L_2(\Omega)} = -\lambda(Au, v)_{H_1^0(\Omega)} \quad \forall u \in H_1^0(\Omega)$$

И, значит,  $u = -\lambda Au$ , то есть при  $\lambda \neq 0$   $u$  - собственная функция оператора  $A$ , отвечающая собственному значению  $-\frac{1}{\lambda}$ .

Обозначим  $\mu = -\lambda$ , тогда

$$u = \mu Au, \quad A: H_1^0(\Omega) \rightarrow H_1^0(\Omega)$$

Тогда  $\mu$  называется характеристическим числом оператора  $A$ . Вспоминая свойства оператора  $A$ , получаем, что множество характеристических чисел - счетно (из компактности) с предельной точкой  $\infty$ , причем характеристические числа - вещественны (из самосопряженности) и положительны (из положительности оператора). Кроме того, собственные функции образуют ортогональный базис в  $H_1^0(\Omega)$ .

Переводя эти утверждения на язык  $\lambda$ , получаем, что задача (1) имеет счетное множество собственных значений конечной кратности, вещественных, отрицательных и имеющих предельную точку в  $-\infty$ . Собственные функции  $v_1(x), v_2(x), \dots$  образуют ортогональный базис в  $H_1^0(\Omega)$ .

Мы нормировали собственные функции условием  $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$ , поэтому

$$(v_k, v_k)_{H_1^0(\Omega)} = \|v_k\|_{H_1^0(\Omega)} = -\lambda_k \|v_k\|_{L_2(\Omega)} = -\lambda_k$$

Поэтому функции

$$\frac{v_1(x)}{\sqrt{-\lambda_1}}, \frac{v_2(x)}{\sqrt{-\lambda_2}}, \dots$$

образуют ортонормированный базис в  $H_1^0(\Omega)$ . Заметим, что функции  $v_1, v_2, \dots$  образуют ортонормированный базис в  $L_2(\Omega)$ . Следовательно, любую функцию  $g \in H_1^0(\Omega)$  можно представить в виде ряда:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k \frac{v_k(x)}{\sqrt{-\lambda_k}}$$

И в виде ряда

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k v_k$$

Где  $g_k = (g, v_k)_{L_2(\Omega)}$  и  $g_k = \tilde{g}_k \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}$

В силу равенства Парсеваля,

$$\|g(x)\|_{H_1^0(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\tilde{g}_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| g_k^2$$

Следовательно,  $\forall g \in H_1^0(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| g_k^2 < \infty$ .

### 13.2. Обобщенное решение первой начально-краевой задачи

Вернемся к нашей задаче (3):

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t), & (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \\ u|_{\Gamma_T = \partial Q_T} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

**Определение:** функция  $u \in H_1^0(Q_T)$ ,  $u|_{\Gamma_T} = 0$ ,  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  называется обобщенным решением задачи (3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{Q_T} (-u_t h_t + \nabla u \nabla h) dx dt = \int_{Q_T} f(x, t) h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi(x) h(x, 0) dx \quad \forall h \in H_1(Q_T) : h|_{\Gamma_T} = 0, h|_{t=T} = 0$$

Далее предполагаем,  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi \in H_1^0(\Omega)$ ,  $\psi \in L_2(\Omega)$ . Так как  $f(x, t) \in L_2(Q_T)$ , то  $f(x, t) \in L_2(\Omega)$  для почти всех  $t \in [0, T]$ . Разложим ее в ряд Фурье:

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k(x), \quad f_k(t) = (f(x, t), v_k(x))$$

Напишем неравенство

$$f_k^2(t) = \left( \int_{\Omega} f(x, t) v_k(x) dx \right)^2 \leq \int_{\Omega} f^2(x, t) dx \|v_k\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f^2(x, t) dx$$

И проинтегрируем его по отрезку  $[0, T]$ :

$$\int_0^T f_k^2(t) dt \leq \|f\|_{L_2(Q_T)}^2$$

Отсюда, в частности,  $f_k(t) \in L_2[0, T]$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу: Разложим функции  $\varphi$  и  $\psi$  в ряд Фурье

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k(x), \quad \varphi_k(t) = (\varphi, v_k)_{L_2(\Omega)}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k(x), \quad \psi_k(t) = (\psi, v_k)_{L_2(\Omega)}$$

И будем решать задачу

$$\begin{cases} u_{k_{tt}} - \Delta u_k = f_k(t)v_k(x), & (x, t) \in Q_T \\ u_k|_{\Gamma_T} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi_k v_k(x) \\ u_{k_t}|_{t=0} = \psi_k v_k(x) \end{cases}$$

Обобщенное решение этой задачи ищем в виде  $u_k(x, t) = V_k(t)v_k(x)$ . В этом случае,  $V_k(t)$  - решение задачи Коши

$$\begin{cases} V_k'' - \lambda_k V_k = f_k(t) \\ V_k(0) = \varphi_k \\ V_k'(0) = \psi_k \end{cases}$$

То есть

$$V_k(t) = C_1^k \cos \sqrt{-\lambda_k} t + C_2^k \sin \sqrt{-\lambda_k} t + \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{-\lambda_k}(t - \tau) d\tau$$

Покажем, что  $u_k(x, t)$  действительно обобщенное решение. Краевые условия очевидным образом выполняются, поэтому осталось проверить интегральное тождество:

$$\int_{Q_T} (-u_{k_t} h_t + \nabla u_k \nabla h) dx dt = \int_{Q_T} f_k(t)v_k(x)h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi_k v_k(x)h(x, 0) dx$$

Подставим вместо  $u_k$  наше предполагаемое решение:

$$\int_{Q_T} (-V_k'(t)v_k(x)h_t + V_k(t)\nabla v_k(x)\nabla h) dx dt = \int_{Q_T} f_k(t)v_k(x)h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi_k v_k(x)h(x, 0) dx$$

Интегрируя, находим:

$$\int_{Q_T} -V_k'(t)v_k(x)h_t dx dt = \int_{Q_T} V_k(t)v_k(x)h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi_k v_k(x)h(x, 0) dx$$

Вспомним, что  $v_k$  - собственная функция, то есть  $\int_{\Omega} \nabla v_k \nabla g dx = -\lambda_k \int_{\Omega} v_k g dx, \forall g \in H_1^0(\Omega)$ , следовательно

$$\int_0^T V_k(t) \left( \int_{\Omega} \nabla v_k \nabla h dx \right) dt = -\lambda_k \int_{Q_T} V_k(t)v_k(x)h(x, t) dx dt$$

И подставляя эти результаты, преобразуем левую часть к виду

$$\int_{Q_T} (V_k'' - \lambda_k V_k)v_k(x)h(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \psi_k v_k(x)h(x, 0) dx$$

Что, как легко видеть, равно правой части. Итак,  $u_k(x, t) = V_k(t)v_k(x)$  - обобщенное решение.

В силу линейности нашей задачи, функция  $S_N(x, t) = \sum_{k=1}^N V_k(t)v_k(x)$  является решением задачи:

$$\begin{cases} S_{N_{tt}} - \Delta S_N = \sum_{k=1}^N f_k(t)v_k(x), & (x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T) \\ S_N|_{\Gamma_T} = 0 \\ S_N|_{t=0} = \sum_{k=1}^N \varphi_k v_k(x) \\ S_{N_t}|_{t=0} = \sum_{k=1}^N \psi_k v_k(x) \end{cases}$$

Покажем, что последовательность  $S_N$  сходится по норме, для этого достаточно доказать фундаментальность. Имеем:

$$\|S_N - S_M\|_{H_1^0(\Omega)} = \left\| \sum_{k=N+1}^M V_k(t) v_k(x) \right\|_{H_1^0(\Omega)}^2 = \sum_{k=N+1}^M V_k(t) V_k^2(t) \|v_k\|_{H_1^0(\Omega)}^2 = \sum_{k=N+1}^M V_k(t) V_k^2(t) |\lambda_k|$$

Оценим  $V_k^2(t)$  (используя тождество  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ):

$$V_k^2(t) \leq 3f_k^2 + \frac{3\psi_k^2}{|\lambda_k|} + \frac{3T}{|\lambda_k|} \int_0^T f_k^2(t) dt$$

Отсюда

$$\sum_{k=N+1}^M V_k(t) V_k^2(t) |\lambda_k| \leq C_0 \left( \sum_{k=N+1}^M f_k^2 |\lambda_k| + \sum_{k=N+1}^M \psi_k^2 + \sum_{k=N+1}^M \int_0^T f_k^2(t) dt \right)$$

Каждое из слагаемых при

$$M > N \rightarrow \infty$$

стремится к нулю ввиду сходимости соответствующего ряда (что было доказано чуть выше), поэтому и сумма стремится к нулю и в силу приведенной оценки последовательность  $S_N$  фундаментальна по норме. А из полноты пространства  $H_1^0(\Omega)$  следует сходимость.

## 14. Лекция 14

$S_N \rightarrow S$  при  $N \rightarrow \infty$ .

$$\int_{Q_T} (-S_{Nt} h_t + \Delta S_N \Delta h) dx dt = \int_{Q_T} \sum_{k=1}^N f_k(t) v_k(x) dx dt + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^N \psi_k v_k(x) h(x, 0) dx$$

Переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем выполнение интегрального тождества для  $S$ .

$$\left\| \sum_{k=M+1}^N v'_k(t) v_k(x) \right\|_{L_2(\Omega_T)}^2 = \sum_{k=M+1}^N \|v'_k(t)\|^2$$

$$v'_k(t) = -\sqrt{-\lambda_k} \varphi_k \sin \sqrt{-\lambda_k} t + \psi_k \cos \sqrt{-\lambda_k} t + \int_0^t f_k(\tau) \cos \sqrt{-\lambda_k}(t - \tau) d\tau$$

$$|v'_k(t)|^2 \leq C_1(T) (\varphi_k^2 |\lambda_k|) + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(t) dt$$

$$\|S_{Nt}(x, t) - S_{Mt}(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq C_1(T) \left( \sum_{k=M+1}^N \varphi_k^2 |\lambda_k| + \sum_{k=M+1}^N \psi_k^2 + \sum_{k=M+1}^N \int_0^T f_k^2(t) dt \right) \rightarrow 0$$

при  $M, N \rightarrow \infty$ .

$$\int_0^T \|S_N - S_M\|_{H_1(\Omega_t)} dt \leq TC_0(T) \left( \sum_{k=M+1}^N \varphi_k^2 |\lambda_k| + \sum_{k=M+1}^N \psi_k^2 + \sum_{k=M+1}^N \int_0^T f_k^2(t) dt \right) \rightarrow 0$$

при  $M, N \rightarrow \infty$ . Аналогичное равенство имеется для  $\{S_{Nt}\}$

Итак,  $\{S_N\}$  фундаментальна в  $H_1^0(\Omega)$ , значит,  $\{S_N\}$  сходится;  $S_N \rightarrow S, N \rightarrow \infty \Rightarrow S$  - решение нашей задачи (1). Ч.т.д.

$$\|S_N(x, t)\|_{H_1^0(\Omega_t)}^2 = \sum_{k=1}^N v_k^2(t) |\lambda_k| \leq C_2(T) \left( \sum_{k=1}^N \varphi_k^2 |\lambda_k| + \sum_{k=1}^N \psi_k^2 + \sum_{k=1}^N \int_0^T f_k^2(t) dt \right)$$

$$\|S_{Nt}(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq C_3(T) \left( \sum_{k=1}^N \varphi_k^2 |\lambda_k| + \sum_{k=1}^N \psi_k^2 + \sum_{k=1}^N \int_0^T f_k^2(t) dt \right)$$

$$\|S_N(x, t)\|_{H_1^0(Q_t)}^2 \leq C_4(T) (\|\varphi\|_{H_1^0(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2(Q_T)}^2)$$

В последнем неравенстве можно перейти к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и получить аналогичное неравенство для  $\|S(x, t)\|_{H_1^0(Q_t)}^2$ .

Таким образом, доказана теорема, которую мы и сформулируем в следующем разделе.

## 14.1. Теорема о существовании обобщенного решения задачи (1)

### Теорема.

Пусть  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi \in H_1^0(\Omega)$ ,  $\psi \in L_2(\Omega)$ . Тогда задача (1) имеет обобщенное решение  $u(x, t)$  и это решение представимо в виде сходящегося в  $H_1(Q_T)$  ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(x) v_k(t)$$

, где  $V_k(t)$  - решение задачи Коши,  $v_k(x)$  - собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в области  $\Omega$ . Кроме того, для  $u(x, t)$  имеет место оценка

$$\|u\|_{H_1^0(Q_T)}^2 \leq C(T)(\|\varphi\|_{H_1^0(\Omega)}^2 + \|\psi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L_2(Q_T)}^2)$$

*Упражнение.* Рассмотрим уравнение  $u_{tt} - u_{xx} = 0, x \in [0, l], t > 0$

$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x).$

Доказать, что если  $\varphi \in C^3[0, l], \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$ , а также

$\psi \in C^2[0, l], \psi'(0) = \psi'(l) = 0$ , то  $u(x, t)$  является классическим решением данной задачи.

## 15. Лекция 15

### 15.1. Гармонические функции, их свойства

Пусть  $u \in C^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset (R)^n$  - область.

*Определение.* Функция  $u$  называется гармонической в  $\Omega$ , если  $\forall x \in \Omega \Delta u = 0$

Примеры гармонических функций:

1.  $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$  - гармоническая в  $\mathbb{R}^n$

2.  $n = 3$ :  $u = \frac{1}{r}, r = |x - x_0|$  - гармоническая при  $x \neq x_0$

3.  $n = 2$ :  $\ln r, r^{\pm m} \cos m\varphi, r^{\pm m} \sin m\varphi$  - гармонические.

Пусть теперь  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ ,  $\Omega$  ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega \in C^1$  тогда вспомним, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uv_{x_j x_j} dx &= \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \nu_j dS \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} A dx &= \int_{\partial\Omega} (A, \nu) dS : A = (0, \dots, u \frac{\partial v}{\partial x_j}, \dots, 0) \end{aligned}$$

### 15.2. Формулы Грина

*Первая формула Грина*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta v dx &= - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS \\ \int_{\Omega} v \Delta u dx &= - \int_{\Omega} (\nabla u, \nabla v) dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \end{aligned}$$

$\nu$  - единичная внешняя нормаль к границе.

*Вторая формула Грина*

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} (u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu}) dS$$

Рассмотрим гармонические функции, зависящие только от расстояния до точки, т.е гармонические функции вида:

$v(|x - x_0|), x \neq x_0, \Delta v = 0$ , тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(|x - x_0|) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (15.1)$$

Оператор Лапласа для таких функций:

$$\Delta v(r) = v'' + \frac{n-1}{2}v' = 0$$

$$v(|x - x_0|) = C_1|x - x_0|^{2-n} + C_2, \quad n \geq 3$$

$$v(|x - x_0|) = C_1 \ln |x - x_0| + C_2, \quad n = 2$$

где  $v \in L_{1,loc}$  Рассмотрим левую часть (15.1), она равна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n / \overline{T}_\varepsilon^{x_0}} (C_1|x - x_0|^{2-n} + C_2) \Delta \varphi dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n / \overline{T}_\varepsilon^{x_0}} (v(|x - x_0|) \Delta \varphi - \varphi \Delta v(|x - x_0|)) dx =$$

Тут применим 2-ю формулу Грина.

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^{x_0}} [(C_1|x - x_0|^{2-n} + C_2) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu} C_1|x - x_0|^{2-n}] dS \quad (15.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (C_1 \varepsilon^{2-n} + C_2) \int_{S_\varepsilon^{x_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS = 0$$

Т.к

$$| \int_{S_\varepsilon^{x_0}} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS | \leq \max_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi| \omega_n \varepsilon^{n-1}$$

где  $\omega_n$  площадь поверхности единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

Далее заметим, что

$$C_1 \frac{\partial}{\partial \nu} r^{2-n} = -C_1 \frac{\partial}{\partial r} r^{2-n} = -(2-n) C_1 r^{1-n}$$

Продолжаем цепочку (15.2)

$$= -C_1(n-2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^{x_0}} \varphi(x) dS = -C_1(n-2) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(x_\varepsilon) \omega_n \varepsilon^{n-1} \varepsilon^{1-n} = -C_1(n-2) \omega_n \varphi(x_0)$$

Тогда из (15.1) имеем:

$$C_1 = \frac{-1}{\omega_n(n-2)}, \quad n \geq 3$$

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}, \quad n = 2$$

*Фундаментальное решение оператора Лапласа.*

$$E(x, x_0) = \begin{cases} -\frac{|x-x_0|^{2-n}}{\omega_n(n-2)}, & n \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x - x_0|, & n = 2 \end{cases}$$

Основное характерное свойство фундаментального решения - это формула (15.1) т.е

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x, x_0) \Delta \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

На языке обобщенных функций это выглядит так

$$(\Delta E(x, x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) = (\delta(x - x_0), \varphi)$$

т.е

$$\Delta E(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \text{дельта функция}$$

Покажем, что  $\forall$  функции из  $C^2(\Omega)$ ,  $\partial \Omega \in C^2$   $\Omega$  ограниченная область верно некоторое свойство.

Пусть  $\Omega_\varepsilon = \Omega / \overline{T}_\varepsilon^{x_0}$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u \Delta E(x, x_0) - E(x, x_0) \Delta u) dx = - \int_{\Omega_\varepsilon} E(x, x_0) \Delta u dx =$$



Применяем вторую формулу Грина

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} - E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}) dS = \int_{\Omega} (u \frac{\partial E}{\partial \nu} - E \frac{\partial u}{\partial \nu}) dS + \int_{S_\varepsilon^{x_0}} (u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} - E \frac{\partial u}{\partial \nu}) dS$$

Перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$- \int_{\Omega} E \Delta u dx = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial \Omega} E \frac{\partial u}{\partial \nu} dS - u(x_0)$$

т.к

$$\int_{S_\varepsilon^{x_0}} E \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

$$\int_{S_\varepsilon^{x_0}} u(x) \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS \rightarrow -u(x_0)$$

$$\left( \frac{\partial E}{\partial \nu} \Big|_{S_\varepsilon^{x_0}} = - \frac{\partial E}{\partial r} \Big|_{r=\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial r} \frac{-r^{2-n}}{\omega_n(n-2)} \Big|_{r=\varepsilon} = - \frac{\varepsilon^{1-n}}{\omega_n} \right)$$

Таким образом, получаем, что

$$\forall x \in \Omega \quad u(x_0) = \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx + \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial \Omega} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

Где

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx &- \text{объемный потенциал.} \\ \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS &- \text{потенциал двойного слоя.} \\ \int_{\partial \Omega} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS &- \text{потенциал простого слоя.} \end{aligned}$$

Если  $\Delta u = 0$ ,  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $x_0 \in \Omega$ , то

$$u(x_0) = \int_{\partial \Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial \Omega} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

**Лемма (о потоке через границу гармонической функции)**

Пусть  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ ,  $\Omega$  ограниченная область,  $\partial \Omega \in C^1$ . Тогда

$$\int_{\partial \Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0$$

Для доказательства надо использовать вторую формулу Грина для  $v \equiv 1$

**Теорема 1 (О среднем по сфере).**

Пусть  $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$ , предположим, что  $\Delta u = 0$  в  $T_R^{x_0}$  тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{|S_R^{x_0}|} \int_{S_R^{x_0}} u(x) dS$$

*Доказательство*

Для  $T_\rho^{x_0}$  можно записать

$$u(x_0) = \int_{S_\rho^{x_0}} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{S_\rho^{x_0}} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{S_\rho^{x_0}} u(x) dS$$

Осталось перейти к пределу и получить то, что нужно. Второе слагаемое обнулилось по предыдущей лемме.

**Теорема 2 (О среднем по шару)**

Пусть  $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$ , предположим, что  $\Delta u = 0$  в  $T_R^{x_0}$  тогда

$$u(x_0) = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS$$

*Доказательство*

Из теоремы 1 следует, что

$$\omega_n \rho^{n-1} u(x_0) = \int_{S_R^{x_0}} u(x) dS$$

Осталось проинтегрировать это равенство по  $\rho$  от 0 до  $R$ .

$$\frac{\omega_n}{n} R^n u(x_0) = \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS$$

**Теорема 3 (Строгий принцип максимума).**

Пусть  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , предположим, что  $\Delta u = 0$  в  $\Omega$ .  $\Omega$  ограниченная область с гладкой границей. Положим

$$\max_{\overline{\Omega}} u(x) = M, \quad (\min_{\overline{\Omega}} u(x) = m)$$

Тогда, если  $u(x_0) = M(m)$ , где  $x_0 \in \Omega$

$$\Rightarrow u(x) \equiv \text{const}(m, M) \text{ в } \Omega$$

*Доказательство*

$T_R^{x_0}, \overline{T_R^{x_0}} \in \Omega$

Предположим, что в  $T_R^{x_0}$ ,  $u(x) \equiv M$ ,  $u(x_0) = M$ . Предположим противное, т.е.  $\exists x' \in T_R^{x_0}$ ,  $u(x') < M$ , следовательно в силу непрерывности

$\exists \varepsilon, \delta > 0 : u(x) < M - \varepsilon$  в шаре  $T_\delta^{x'}$  Тогда по предыдущей теореме имеем

$$\begin{aligned} u(x_0) = M &= \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \int_{T_R^{x_0}} u(x) dS = \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \left\{ \int_{T_R^{x_0}/T_\delta^{x'}} u(x) dS + \int_{\overline{T_\delta^{x'}}} u(x) dS \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{|T_R^{x_0}|} \left\{ M(|T_R^{x_0}| - |T_\delta^{x'}|) + |T_\delta^{x'}|(M - \varepsilon) \right\} = M - \frac{\varepsilon |T_R^{x_0}|}{|T_\delta^{x'}|} < M \end{aligned}$$

Противоречие.

Пусть теперь  $u(x_1) < m$ , соединим эти две точки области кривой (в силу односвязности) покрываем эту кривую шарами. Для каждого шара проводим такие же рассуждения, тогда и  $u(x_1) = M$ . Тем самым теорема доказана.

**Теорема 4 (О бесконечной дифференцируемости).**

Пусть  $\Omega$  область в  $\mathbb{R}^n$ .  $u(x)$  гармоническая в  $\Omega$  тогда  $u \in C^\infty(\Omega)$

*Доказательство*

$$\begin{aligned} u_h(x) &= \int_{\mathbb{R}_y^n} \omega_h(|x-y|) u(y) dy = \int_{|x-y|<h} \omega_h(|x-y|) u(y) dy = \int_0^h \omega_h(\rho) \int_{S_\rho^x} u(y) dS d\rho = \\ &= u(x) \int_{|x|<h} \omega_h(|x|) dx = u(x) \end{aligned}$$

-в силу свойства ядра усреднения и теоремы о среднем.

А в силу свойства ядра усреднения

$$u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u(x) \in C^\infty(\Omega)$$

**Теорема 5 (О знаке нормальной производной гармонической функции в точке минимума (максимума)).** Пусть  $u \in C^2(T_R^{x_0}) \cap C(\overline{T_R^{x_0}})$ , предположим, что  $\Delta u = 0$  в  $T_R^{x_0}$   $u \neq \text{const}$  в  $T_R^{x_0}$

Также предположим, что в точке  $x' \in S_R^{x_0}$ ,  $\min_{\overline{T_R^{x_0}}} u(x) = u(x')$ . Тогда, если существует нормальная производная

$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x')$ ,  $\nu$  — внешняя единичная нормаль к границе в точке  $x'$ , то

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x') < 0.$$

## 16. Лекция 16

### 16.1. Лемма о знаке нормальной производной гармонической функции в точке максимума

Пусть  $u(x) \neq \text{const}$  - гармоническая в  $\Omega$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$  - точка максимума  $u(x)$ ,  $\exists B_\rho^{x'} \subset \Omega : S_\rho^{x'} \cap \partial\Omega = \{x_0\}$ ,  $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{u(x_0) - u(x_0 - s\nu)}{s}$ . Тогда  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ .

Доказательство.

Можно считать, что  $u(x_0) = 0, u(x) < 0$  в  $\Omega$ . Вспомним следствие принципа максимума: если  $\Delta u = \Delta v = 0$  в  $\Omega$ ,  $u(x) \leq v(x)$  на  $\partial\Omega$ , то  $u(x) \leq v(x)$  в  $\Omega$ .

Рассмотрим  $w(x) = -(|x - x'|^{2-n} - \rho^{2-n})$ . При  $n \geq 3$   $w(x)$  будет гармонической в  $\mathbb{R}^n \setminus \{x'\}$ . Рассмотрим шаровой слой  $K = B_\rho^{x'} \setminus \overline{B}_{\rho/2}^{x'}$  и функции  $u(x), \varepsilon w(x)$  на  $K$ .

Внешняя граница:  $|x - x'| = \rho$ , и на ней  $w(x) = 0, u(x) \leq 0$ .

Внутренняя граница:  $|x - x'| = \rho/2$ , и на ней  $u(x) < -c < 0, w(x) = -((\frac{\rho}{2})^{2-n} - \rho^{2-n}) = -\frac{2^{n-2}-1}{\rho^{n-2}}$ .

$\exists \varepsilon > 0 : \varepsilon w(x) \geq u(x)$  на  $\partial K$ ,  $\varepsilon = c \frac{\rho^{n-2}}{2^{n-2}-1}$ . Значит,  $\varepsilon w(x) \geq u(x)$  в  $K$ .

$\varepsilon w(x_0) - \varepsilon w(x_0 - s\nu) \leq u(x_0) - u(x_0 - s\nu) \Rightarrow 0 < \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) \leq \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$

Ч.т.д.

Примечание. В случае  $n = 2$  достаточно рассмотреть функцию  $w(x) = \ln|x - x_0| - \ln\rho$ .

### 16.2. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа и единственность решения этих задач

#### 16.2.1. Задача Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi & \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Решение задачи Дирихле единственно. Если мы рассмотрим  $w(x)$  — разность двух решений, то имеем  $\Delta w = 0, w|_{\partial\Omega} = 0$ , тогда по принципу максимума/минимума  $w \equiv 0$ .

#### 16.2.2. Задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в ограниченной области } \Omega, \quad u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = \psi & \psi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Условие разрешимости:  $\int_{\partial\Omega} \psi ds = 0$ .

Решение задачи Неймана определено с точностью до константы. Если мы рассмотрим  $w(x)$  - разность двух решений, то имеем  $\Delta w = 0, \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = 0$ , тогда по лемме о нормальной производной  $w = \text{const}$ .

### 16.3. Оценки производных гармонической функции

$$u(x_0) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u(x) dx$$

$u(x)$  - гармоническая  $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_k}$  - гармоническая.

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x-x_0| \leq R} u \cos(\nu, x) ds$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{\sigma_n R^{n-1}}{\omega_n R^n} \max_{|x-x_0|=R} |u|,$$

где  $\sigma_n$  - площадь единичной сферы,  $\omega_n$  - объем единичного шара в  $\mathbb{R}^n$ .

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{R} \max_{|x-x_0|=R} |u|$$

Пусть  $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_0$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  и  $\text{dist}(\partial\Omega_1, \partial\Omega_0) \geq d > 0$ . Пусть  $u$  - гармоническая в  $\Omega_0$ ,  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ . Тогда

$$\forall x \in \Omega_1 \quad \left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) \right| \leq \frac{n}{d} \max_{\overline{\Omega}_0} |u|$$

Аналогично (методом математической индукции) доказывается неравенство

$$|\mathcal{D}^\alpha u(x)| \leq \left( \frac{nm}{\sigma} \right)^m \max_{\overline{\Omega}_0} |u|,$$

где  $x \in \Omega_0$ ,  $\text{dist}(x, \partial\Omega_0) = \sigma > 0$ . Действительно, пусть оценка доказана для всех  $\alpha : |\alpha| \leq k-1$ . Возьмем два шара  $B_{\sigma'}^x$  и  $B_{\sigma'/k}^x$ , где  $\sigma'$  - любое положительное число, меньшее  $\sigma$ . По предположению индукции для любой точки  $\xi$  из шара  $B_{\sigma'/k}^x$  и любого  $\beta$ ,  $|\beta| = k-1$ , имеет место неравенство

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)| \leq \left( \frac{n(k-1)}{\sigma' - \sigma'/k} \right)^{k-1} \max_{\overline{\Omega}_0} |u| = \left( \frac{nk}{\sigma'} \right)^{k-1} \max_{\overline{\Omega}_0} |u|$$

Таким образом, для любого  $\beta$ ,  $|\beta| = k-1$ , гармоническая функция  $|\mathcal{D}^\beta u(\xi)|$  ограничена в шаре  $B_{\sigma'/k}^x$  постоянной  $\left( \frac{nk}{\sigma'} \right)^{k-1} \max_{\overline{\Omega}_0} |u|$ . Тогда для первых производных этой функции по уже доказанному имеем

$$|\mathcal{D}^\beta u(\xi)_{\xi_l}| \leq \left( \frac{nk}{\sigma'} \right)^k \max_{\overline{\Omega}_0} |u|$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $\sigma' \rightarrow \sigma - 0$ , получаем требуемое неравенство. Ч.т.д.

## 16.4. Аналитичность гармонических функций

**Теорема.** Гармоническая в области  $\Omega$  функция  $u(x)$  является аналитической в  $\Omega$ .

$$u(x) = \sum_{|\alpha| < m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(x_0)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

где  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$ ,  $(x - x_0)^\alpha = (x_1 - x_{01})^{\alpha_1} \dots (x_n - x_{0n})^{\alpha_n}$ .

Обозначим

$$\gamma_m(x_0, x, \tilde{x}) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\mathcal{D}^\alpha u(\tilde{x})}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$$

Пусть  $|x - x_0| < \varepsilon$ ,  $x, \tilde{x} \in B_\rho^{x_0}$ ,  $u$  - гармоническая в  $B_{2\rho}^{x_0}$ . Тогда

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \varepsilon^m \left( \frac{nm}{\rho} \right)^m \max_{B_{2\rho}^{x_0}} |u| \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!}$$

Но

$$\sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} = \frac{1}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} = \frac{n^m}{m!}$$

Получаем

$$|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})| \leq \left( \frac{\varepsilon n^2 m}{\rho} \right)^m \frac{1}{m!} \max_{B_{2\rho}^{x_0}} |u|$$

Согласно формуле Стирлинга,  $m! \sim \sqrt{2\pi m} \left( \frac{m}{e} \right)^m$ , тогда  $|\gamma_m(x_0, x, \tilde{x})|$  оценивается сверху величиной, эквивалентной

$$\frac{c}{\sqrt{m}} \left( \frac{\varepsilon n^2}{\rho} \right)^m \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty, \varepsilon \ll 1$$

## 17. Лекция 17.

### 17.1. Функция Грина. Задача Дирихле для уравнения Лапласа.

**Теорема 17.1 (Лиувилль).** Пусть  $u(x)$  - гармоническая в  $\mathbb{R}^n$ , неотрицательная функция. Тогда  $u = \text{const}$ .

**Доказательство:** Зафиксируем точку  $x_0$  и шар  $Q_R^{x_0}$  радиуса  $R$  с центром в нашей точке. Поскольку производная гармонической функции – также функция гармоническая, по теореме о среднем имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{Q_R^{x_0}} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx = \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \int_{S_R^{x_0}} u(x) \nu_j(x) dS$$

Мы использовали формулу Стокса, чтобы перейти к интегрированию по границе шара. А теперь используем еще одну теорему о среднем, на этот раз из курса математического анализа:

$$= \frac{1}{|Q_R^{x_0}|} \nu_j(\tilde{x}) \int_{S_R^{x_0}} u(x) dS = \frac{|S_R^{x_0}|}{|Q_R^{x_0}|} \nu_j(\tilde{x}) |u(x_0)|$$

Здесь  $|S_R^{x_0}| = w_n R^{n-1}$ , а  $|Q_R^{x_0}| = \frac{w_n}{n} R^n$ . Таким образом,

$$|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| \leq \frac{n}{R} |u(x_0)| \rightarrow 0 \quad R \rightarrow \infty$$

Ничего не мешает нам выбрать радиус шара сколь угодно большим, а значит,  $|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)| = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$ . Следовательно,  $u = \text{const}$ , что и требовалось.

**Задача:** Пусть  $u(x)$  - гармоническая в  $\mathbb{R}^n$  и  $u(x) \geq -C(1 + |x|^m)$ , где  $C, m > 0$  и  $u(x)$ . Показать, что в этом случае  $u(x)$  есть полином степени не выше  $[m]$ .

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x) & x \in \partial\Omega, \varphi \in C(\partial\Omega) \end{cases}$$

Под классическим решением понимается решение из класса  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .

Для такого решения ранее была получена формула

$$u(x_0) = \int_{\Omega} E(|x - x_0|) \Delta u(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E(|x - x_0|)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(|x - x_0|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS$$

Пусть существует функция  $g(x, x_0)$  со следующими свойствами:

$g(x, x_0) \in C_x^2(\overline{\Omega})$ ,  $\Delta_x g(x, x_0) = 0 \quad \forall x_0 \in \Omega$  и при этом  $g(x, x_0)|_{x \in \partial\Omega} = -E(|x - x_0|)|_{x \in \partial\Omega}$ ,  $\forall x_0 \in \Omega$

Запишем вторую формулу Грина для  $u(x), g(x, x_0)$ :

$$\int_{\Omega} (u \Delta g - g \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial g}{\partial \nu} - g \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

Поскольку функции  $u$  и  $g$  – гармонические в области, то левая часть формулы обращается в ноль. Теперь прибавим к левой и правой частям уже упоминавшееся соотношение:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial E(|x - x_0|)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(|x - x_0|) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) dS$$

И поскольку  $g(x, x_0) + E(|x - x_0|) = 0$  на  $\partial\Omega$ , получаем:

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial (E(|x - x_0|) + g(x, x_0))}{\partial \nu} dS$$

**Определение:** Функцией Грина называется функция  $G(x, x_0) = E(|x - x_0|) + g(x, x_0)$ , где функция  $g(x, x_0)$  введена ранее. Точка  $x_0$  называется полюсом.

Итак, если  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  – решение задачи Дирихле, то:

$$u(x_0) = u(x_0) = \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} dS$$

**Лемма 17.2.**  $\forall x_1, x_0 \in \Omega \quad G(x_1, x_0) = G(x_0, x_1)$

**Доказательство:** Исходя из определения функции Грина,  $\Delta_x G(x, x_0) = 0$  при  $x \neq x_0$ . Вырежем вокруг точек  $x$  и  $x_0$  шарики маленького радиуса  $\varepsilon$ , и то что осталось обозначим за  $\Omega_\varepsilon$ :

$$\Omega_\varepsilon = \Omega(\overline{Q_\varepsilon^{x_0}} \cup \overline{Q_\varepsilon^{x_1}})$$

Введем функции  $u(x) = G(x, x_0)$ , и  $v(x) = G(x, x_1)$ . В области  $\Omega_\varepsilon$  они гармонические, поэтому по второй формуле Грина:

$$0 = \int_{\Omega_\varepsilon} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS$$

Так как функция  $g$  определялась условием

$$g(x, x_0) \Big|_{x \in \partial\Omega} = -E(|x - x_0|) \Big|_{x \in \partial\Omega}, \quad \forall x_0 \in \Omega,$$

то  $G(x, x_0)|_{\partial\Omega} = 0$  и  $u(x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = 0$ . Поэтому

$$0 = \int_{S_\varepsilon^{x_0}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS + \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS$$

Перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial E(|x - x_1|)}{\partial \nu} = -\frac{\partial E}{\partial r}(r) = -\frac{1}{w_n r^{n-1}}$$

Получаем, что

$$\int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) \frac{\partial G(x, x_1)}{\partial \nu} dS = -\frac{1}{w_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon^{x_1}} G(x, x_0) dS \rightarrow -G(x_1, x_0)$$

Аналогично переходя к пределу в другом слагаемом, имеем

$$0 = -G(x_1, x_0) + G(x_0, x_1)$$

что и требовалось доказать.

## 18. Лекция 18

### 18.1. Интеграл Пуассона

$u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\partial\Omega \in C^1$ .

Будем решать следующую задачу (1):

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) & \text{в } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x_0) = \int_{\Omega} f(x) G(x, x_0) dx + \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \frac{\partial G}{\partial \nu_x}(x, x_0) ds$$

$G(x, x_0)$  - функция Грина,  $G$  не более чем единственна.

$\Omega = Q_R^0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $G(x, x_0) = E(|x - x_0|) - E\left(\frac{\rho}{R}|x - x_*|\right)$

Если

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega, & u \in C^2(\overline{Q_R^0}) \\ u|_{S_R^0} = \varphi(x) \end{cases}$$

,то  $u(x_0) = \int_{S_R^0} \varphi(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu_x} ds_x$ .

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} \Big|_{x \in S_R^0, x_0 \in Q_R^0} = E'(r) \frac{\partial |x - x_0|}{\partial \nu} - \frac{\rho}{R} E'\left(\frac{\rho}{R} r_1\right) \frac{\partial |x - x_*|}{\partial \nu},$$

где  $r = |x - x_0|$ ,  $r_1 = |x - x_*|$ .

$\frac{\partial |x - x_0|}{\partial \nu} = \sum_{j=1}^n \frac{x_j - x_{0j}}{|x - x_0|} = \cos \gamma$ , где  $\gamma$  - угол между  $\nu$  и  $x - x_0$ . Аналогично  $\frac{\partial |x - x_*|}{\partial \nu} = \cos \beta$ .

По теореме косинусов  $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{2Rr}$ .

Аналогично

$$\cos \beta = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1} = \frac{R^2 + \frac{R^2 r^2}{\rho^2} - \frac{r^4}{\rho^2}}{2R \frac{rR}{\rho}} = \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 + r^2 - R^2}{2r}$$

Т.к.  $E(r) = -\frac{r^{2-n}}{\omega_n(n-2)}$ , то  $E'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}$ .

Тогда

$$\frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu} \Big|_{x \in S_R^0, x_0 \in Q_R^0} = E'(r)(\cos \gamma - \frac{\rho}{R} \cos \beta) = E'(r) \frac{R^2 - \rho^2}{Rr} = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{|x - x_0|^n}$$

Следовательно,

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x)}{|x - x_0|^n} ds_x \quad - \text{интеграл Пуассона}$$

$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \alpha$ , тогда

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x) ds_x}{(R^2 + |x_0|^2 - 2R|x_0| \cos \alpha)^{n/2}}$$

Пусть  $\varphi \in C(S_R^0)$ . Тогда функция  $u(x)$ , задаваемая интегралом Пуассона, есть решение задачи (1). Необходимо проверить 2 условия:

1)  $u(x_0) = \int_{\partial \Omega} \varphi(x) \frac{\partial G(x, x_0)}{\partial \nu_x} ds_x$  - гармоническая по  $x_0$ ,  $x_0 \in Q_R^0$ .

2)  $\forall \hat{x} \in S_R^0 \quad \exists \lim_{x_0 \rightarrow \hat{x}} u(x_0) = \varphi(\hat{x})$

Докажем это.

1) При  $x \neq x_0$   $\Delta_x G(x, x_0) = 0 \Rightarrow \Delta_{x_0} G(x_0, x) = 0 \Rightarrow \Delta_{x_0} G(x, x_0) = 0$  в силу симметричности  $G$ .

$x_0 \in \Omega \subset \subset Q_R^0 \Rightarrow \Delta_{x_0} u(x_0) = \int_{\partial \Omega} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Delta_{x_0} G(x, x_0) ds_x = 0$

2) В силу решения задачи Дирихле задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in Q_R^0 \\ u|_{S_R^0} = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение  $u \equiv 1$ , тогда

$$1 = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{ds_x}{r^n}$$

$$\varphi(\hat{x}) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(\hat{x})}{r^n} ds_x$$

$$\begin{aligned} |u(x_0) - \varphi(\hat{x})| &= \left| \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{\varphi(x) - \varphi(\hat{x})}{r^n} ds_x \right| \leq \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x = \\ &= \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\sigma_{\delta(\varepsilon)}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x + \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0 \setminus \sigma_{\delta(\varepsilon)}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(\hat{x})|}{r^n} ds_x \end{aligned}$$

Первое слагаемое обозначим за  $I_1$ , второе за  $I_2$ .

Здесь мы пользовались тем, что  $\forall \varepsilon \quad \exists \delta > 0 : \quad x \in \sigma_\delta = Q_\delta^{\hat{x}} \cap S_R^0 \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(\hat{x})| < \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{ds_x}{r^n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Что можно сказать об  $I_2$ ? При  $x \in S_R^0 \setminus \sigma_\varepsilon$  имеем  $|x - x_0| \geq a > 0$ , как только  $|x_0 - x| < \delta_1$ . Тогда

$$I_2 \leq 2 \max_{S_R^0} |\varphi(x)| a^{-n} \frac{\omega_n R^{n-1}}{\omega_n R} (R^2 - |x_0|^2) = c_1 (R^2 - |x_0|^2)$$

С другой стороны,  $\exists \tilde{\delta} > 0 : |x_0 - \hat{x}| < \tilde{\delta} \Rightarrow R^2 - |x_0|^2 < \frac{\varepsilon}{c_1}$ . Тогда  $I_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ , а это и требовалось.

## 18.2. Неравенство Харнака

**Теорема 18.1 (Неравенство Харнака).** Пусть  $u(x)$  — гармоническая в  $Q_R^0$  функция, непрерывная вплоть до границы;  $u(x) \geq 0$ . Тогда  $\forall x \in Q_R^0$

$$\frac{R^{n-2}(R - \rho)}{(R + \rho)^{n-1}} \leq u(x_0) \leq \frac{R^{n-2}(R + \rho)}{(R - \rho)^{n-1}},$$

где  $\rho = |x_0|$ .

□

$$u(x_0) = \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \int_{S_R^0} \frac{u(x)}{r^n} ds_x; \quad R - \rho \leq r \leq R + \rho$$

$$\frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{(R + \rho)^n} \int_{S_R^0} u(x) ds_x \leq u(x_0) \leq \frac{R^2 - |x_0|^2}{\omega_n R} \frac{1}{(R - \rho)^n} \int_{S_R^0} u(x) ds_x$$

Но  $\int_{S_R^0} u(x) ds_x = u(0) \omega_n R^{n-1}$ , откуда и получаем нужное нам утверждение. ■

### 18.3. Обратная теорема о среднем

Пусть  $u \in C(\Omega)$  и для любого шара  $\overline{Q_r^{x_0}} \subset \Omega$  для  $u$  справедлива теорема о среднем по сфере. Тогда  $u(x)$  - гармоническая в  $\Omega$  функция.

Доказательство.

Задача

$$\begin{cases} \Delta v = 0, x \in Q_R^{x_0}, \overline{Q_r^{x_0}} \subset \Omega \\ v|_{S_R^{x_0}} = u|_{S_R^{x_0}} \end{cases}$$

имеет единственное решение, которое задается интегралом Пуассона.

Тогда имеем  $v(x) \equiv u(x)$  в  $Q_R^{x_0}$ , что следует из равенства  $u(x)$  и  $v(x)$  на  $\partial Q_R^{x_0}$ , выполнения теоремы о среднем и принципа максимума.

### 18.4. Теорема об устранимой особенности

Пусть  $u(x)$  - гармоническая в  $\Omega \setminus \{x_0\}$  функция,  $m(\rho) = \sup_{\Omega \setminus Q_\rho^{x_0}} |u(x)|$ .

Пусть  $m(\rho) \leq a(\rho)E(\rho)$ , где  $a(\rho) \rightarrow 0$  при  $\rho \rightarrow 0$ .

Тогда  $u(x)$  можно доопределить в  $x_0$  таким образом, что полученная функция будет гармонична в  $\Omega$ .

## 19. Лекция 19

*Доказательство теоремы об устранимой особенности*

Рассмотрим  $Q_{\rho_1}^{x_0} : \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}} \in \Omega$

Найдем:

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in Q_{\rho_1}^{x_0} \\ v(x) = u(x), x \in Q_{\rho_1}^{x_0} \end{cases}$$

Наша цель показать, что  $u(x) = v(x)$  в шаре всюду, кроме его центра  $x_0$ . Рассмотрим  $\omega(x) = v(x) - u(x), x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$ .  $\Delta \omega = 0, x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \overline{Q_{\rho_1}^{x_0}}$   $\omega = 0$  на  $S_{\rho_1}^{x_0}$

$$\max_{\frac{Q_{\rho_1}^{x_0}}{Q_{\rho_1}^{x_0}}} |v(x)| \leq \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| = M$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ ,  $Q_{\rho_1}^{x_0} / \{x_0\}$ ,  $|\omega(x)| \leq \varepsilon E(|x - x_0|)$

$$\max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |\omega(x)| \leq \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |u(x)| + \max_{S_{\rho_1}^{x_0}} |v(x)| \leq \quad (19.1)$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho \leq \rho_0 : M \leq \frac{\varepsilon}{2} |E(\rho)|$

С другой стороны по условию теоремы

$$\max_{S_{\rho_0}^{x_0}} |u(x)| \leq a(\rho) |E(\rho)| \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\rho}_0 : \forall \rho \leq \tilde{\rho}_0, a(\rho) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{S_{\rho_0}^{x_0}} |u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} |E(\rho)|$$

Тогда (19.1) можно продолжить

$$\leq \varepsilon |E(\rho)|, \quad \forall \rho \leq \hat{\rho}$$

По принципу максимума:

$$|\omega(x)| \leq \varepsilon |E(|x - x_0|)|, \quad \forall x \in Q_{\rho_1}^{x_0} / \{x_0\}$$

Следовательно, полагая  $u(x_0) := v(x_0)$ , получаем гармоническую функцию во всем шаре



## 19.1. Теория потенциала

$$u(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \partial\Omega \in C^1$$

Вспомним, что

$$u(x_0) = \int_{\Omega} E(x, x_0) \Delta u dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial E(x, x_0)}{\partial \nu} dS - \int_{\partial\Omega} E(x, x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$$

- представляется в виде трех потенциалов.

Введем для каждого из потенциалов обозначения:

$$P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi, \quad n \geq 3 \text{ - объёмный потенциал.}$$

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \text{ - потенциал простого слоя.}$$

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \text{ - потенциал двойного слоя.}$$

Здесь  $E|x - \xi| = c_n \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$ .

### Теорема 2

Пусть  $\mu(x), \sigma(x) \in L_1(\Gamma)$ . Тогда  $P_1(x), P_2(x)$  - гармонические функции в  $R^n/\Gamma$

*Доказательство*

Можно дифференцировать 2 раза  $P_1, P_2$  под знаком интеграла.

$$\forall x \in \Omega_1; \quad \Omega, \quad \partial\Omega = \Gamma, \quad \Omega_0 = R^n/\overline{\Omega} \cap \Omega_1 \subset \subset \Omega$$

Возьмем  $\Omega_1, \rho(\Omega_1, \Gamma) \geq \alpha > 0$ . В  $P_1(x)$  можно дифференцировать под знаком интеграла. То же самое и для  $\Omega_0$

$$\Delta_x P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \Delta_x \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Теперь посмотрим на потенциал двойного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= -(n-2) \frac{1}{|x - \xi|^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial |x - \xi|}{\partial \xi_k} \nu_{\xi}^k = -(n-2) \frac{1}{|x - \xi|^{n-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k - x_k}{|x - \xi|} \nu_{\xi}^k = \\ &= -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{r^{n-1}} \end{aligned}$$

Тогда

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_{\xi}^k dS_{\xi}$$

Теперь по тем же соображениям можно дифференцировать и потенциал двойного слоя.

Посмотрим, как ведут себя  $P_1, P_2$  на бесконечности. Если  $\xi \in \Gamma, |x| \gg 1, \Rightarrow |x - \xi| \geq |x| - |\xi| \geq \frac{|x|}{2}$  Тогда для  $P_1$ :

$$|P_1(x)| \leq \frac{2^{n-2}}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} |\mu(\xi)| dS_{\xi} = \frac{M_0}{|x|^{n-2}}$$

Следовательно для  $n \geq 3, P_1(x) \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ .

По тем же соображениям

$$\begin{aligned} |P_2(x)| &\leq \frac{M_1}{|x|^{n-2}} \\ |P_0(x)| &\leq \frac{M_2}{|x|^{n-2}} \end{aligned}$$

**Теорема 19.1 (3).** Пусть  $\rho(x) \in C(\overline{\Omega})$ . Тогда  $P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  и  $P_0(x)$  гармоническая функция при  $x \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega}$ .

$$\square \quad x \in \Omega \subset \subset \mathbb{R}^n / \overline{\Omega} \Rightarrow \Delta_x P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \Delta_x \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = 0$$

$x \in \overline{\Omega}$ ,  $Q_\varepsilon^x$  - шар.

$$\begin{aligned} P_0(x) &\leq \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\varepsilon^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi + \int_{\overline{\Omega}/Q_\varepsilon^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi \\ \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\varepsilon^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi &\leq \max_{\overline{\Omega}} |\rho(x)| \int_{Q_\varepsilon^x} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi \\ &\int_{\overline{\Omega}/Q_\varepsilon^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi \leq M_{1,\varepsilon} \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega} \Rightarrow |P_0(x)| \leq M$   
 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} |P_0(x_0 + h) - P_0(x_0)| &\leq \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} d\xi + \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi + \\ &+ \int_{\overline{\Omega}/Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \left| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \right| d\xi \\ &\int_{\overline{\Omega}/Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi \text{ гладкая поверхность.} \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists h_0 > 0, \forall |h| < h_0$

$$\int_{\overline{\Omega}/Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \left| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} - \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} \right| d\xi \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} d\xi &\leq \max_{\overline{\Omega}} |\rho(x)| \int_{Q_\delta^{x_0}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = C_1 \int_0^\delta r dr = C_2 \delta^2 < \frac{\varepsilon}{3} \text{ при } \delta \ll 1 \\ \left| \int_{\overline{\Omega} \cap Q_\delta^x} |\rho(\xi)| \frac{1}{|x_0 + h - \xi|^{n-2}} d\xi \right| &(|h| < \delta/2) (|x_0 + h - \xi| \leq |x_0 - \xi| + |h| < 3\delta/2) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \max_{\overline{\Omega}} |\rho(x)| C_2 \int_0^{3\delta/2} r dr = C_3 \delta^2 \leq \varepsilon/3 \text{ при } \delta \ll 1$$

Окончательно получаем, что при малых  $h$

$$|P_0(x_0 + h) - P_0(x_0)| < \varepsilon \rightarrow P_0 \in C(\mathbb{R}^n)$$

■

**Задача 19.1.**

$$\frac{\partial P_0}{\partial x_k} \in C(\mathbb{R}^n)$$

$$\Delta P_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}$$

$$\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n \rho(x), \quad x \in \Omega', \quad \omega_n = |S_1^0|$$

$$(n=2: \Delta P_0 = -2\pi \rho(x))$$

**Теорема 19.2 (4).** Пусть  $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ . Тогда  $P_0(x) \in C^2(\Omega)$ , при  $x \in \Omega$

$$\Delta P_0(x) = \begin{cases} -(n-2)\omega_n \rho(x), & n \geq 3 \\ -2\pi \rho(x), & n = 2 \end{cases}$$

□  $n \geq 3$ , вычислим

$$\frac{\partial P_0(x)}{\partial x_k} = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi = - \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} d\xi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$$

И получим то, что требуется доказать в условии. ■

## 20. Лекция 20

Объёмный потенциал:  $P_0(x) = \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$

Потенциал простого слоя:  $P_1(x) = \int_{\Omega} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$

Потенциал двойного слоя:  $P_2(x) = \int_{\Omega} \sigma(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$

$\Delta P_i(x) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n/\Gamma$ ,  $i = 1, 2$ ;

### 20.1. Объёмный потенциал

$$\Delta P_0(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n/\overline{\Omega}, \quad P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad \rho \in C(\overline{\Omega})$$

$$\text{Уравнение Пуассона} \begin{cases} \Delta P_0 = -(n-2)\omega_n \rho(x), & x \in \Omega, \quad n \geq 3; \\ \Delta P_0 = -2\pi \rho(x), & x \in \Omega, \quad n = 2 \end{cases} \quad (20.1)$$

**Теорема 20.1 (1).** Пусть  $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ . Тогда  $P_0 \in C^2(\Omega)$ ,  $P_0$  удовлетворяет уравнению (20.1)

□

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial x_k} &= \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = - \int_{\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon)} \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi \right) = \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega)} \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_\xi^k dS_\xi \\ & \quad \left| \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_\xi^k dS_\xi \right| \leq M \varepsilon^{2-n} \varepsilon^{n-1} = M \varepsilon \\ & \Rightarrow - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \varepsilon^{2-n} \nu_\xi^k dS_\xi = 0 \end{aligned}$$

Т.е. получаем что  $\frac{\partial P_0}{\partial x_k} \in C^1(\Omega)$ , поскольку первое слагаемое есть объёмный потенциал с плотностью  $\frac{\partial \rho}{\partial \xi_k} \in C(\Omega)$ , а второе — потенциал простого слоя с  $\rho(\xi) \nu_\xi^k \in L_1(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_0}{\partial x_k^2}(x) &= - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS - \xi = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon} \frac{\partial \rho(\xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon} \rho(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \int_{\partial(\Omega/\overline{\Omega}_\varepsilon)} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi \right\} - \\ & \quad - \int_{\partial\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi \end{aligned}$$

Записываем эти равенства для всех  $k = 1, \dots, n$  и складываем

$$\Delta P_0(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega/\overline{Q}_\varepsilon^x} \rho(\xi) \Delta_\xi \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi - \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi -$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi - \sum_{k=1}^n \int_{\partial\Omega} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \nu_\xi^k dS_\xi -$$

В  $\Omega/\overline{Q}_\varepsilon^x$ ,  $\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$  гармоническая, тогда первое слагаемое равно 0.

Второе и четвертое слагаемое отличаются знаком, т.к.  $\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$

$$\int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi = - \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^{n-2}} dS_\xi =$$

$$= (n-2)\varepsilon^{1-n} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) dS_\xi = (n-2)\omega_n \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{S_\varepsilon^x} \rho(\xi) dS_\xi \rightarrow (n-2)\omega_n \rho(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Получаем (20.1).

Теорема доказана. ■

**Задача 20.1.** Самостоятельно провести доказательство для  $n = 2$ . ( $P_0(x) = \int_\Omega \rho(\xi) \ln |x - \xi| d\xi$ )

Подведем итоги.

Свойства  $P_0(x) = \int_\Omega \rho(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$

Пусть  $\rho \in C(\bar{\Omega})$ , тогда

а)  $P_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$

б)  $|P_0(x)| \leq \frac{C}{|x|^{n-2}}, |x| \rightarrow \infty$

в)  $\Delta P_0(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n/\bar{\Omega}$

Пусть  $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$ , тогда

г)  $\Delta P_0(x) = -(n-2)\omega_n \rho(x), x \in \Omega$

*Замечание.* Используя эти свойства, можно вычислить  $P_0$  не через  $\int_\Omega$ , а как решение г) со свойствами а)-в)

## 20.2. Потенциал двойного слоя

**Определение.** Замкнутая поверхность  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  называется поверхностью Ляпунова, если: а)  $\forall x \in \Gamma \exists$  нормаль  $\nu_x$  к  $\Gamma$  в точке  $x$ . ( $\nu_x$  - внешняя)

б)  $\exists a > 0, \alpha > 0 \forall x, \xi \in \Gamma, \nu_x, \nu_\xi$  - нормали;  $\theta$  - угол между ними  $\Rightarrow \theta \leq a|x - \xi|^\alpha$

Отметим некоторые очевидные свойства:

1.  $\Gamma \in C^2 \Rightarrow \Gamma$  - поверхность Ляпунова.

2.  $\Gamma$  - поверхность Ляпунова  $\Rightarrow \Gamma \in C^2$

*Упражнение.*

Доказать, что из условия б) следует условие Гёльдера для нормали:  $|\nu_x - \nu_\xi| \leq a|x - \xi|^\alpha$ .

**Теорема 2.**

Пусть  $\Gamma$  - поверхность Ляпунова. Тогда  $\exists d > 0: \forall x \in \Gamma$  любая прямая, параллельная  $\nu_x$ , пересекает  $\Gamma$  внутри  $Q_d^x$  не более чем в одной точке.

*Доказательство.*

Берем  $d$  таким, чтобы  $ad^\alpha < 1$ , предположим противное, т.е. пусть в точке  $\xi_1$  прямая  $l$  вышла из  $\Omega$ , а в  $\xi_2$  - вошла. Проведем касательную плоскость  $\Pi$  в  $\xi_2$ . Прямая  $l$  и внешняя нормаль  $\nu_{\xi_2}$  будут лежать по разные стороны от  $\Pi$ ,  $\nu_{\xi_2} \perp \Pi$

$$(\widehat{l, \nu_{\xi_2}}) \Rightarrow (\widehat{\nu_x, \nu_{\xi_2}}) \geq \pi/2; |x - \xi_2| \leq d, \text{ т.к. } \xi_2 \in Q_d^x$$

Тогда  $\pi/2 \leq ad^\alpha$ . Противоречие.

$\Gamma' = \Gamma \cap Q_d^x$  однозначно проектируется на касательную плоскость в  $x \Rightarrow \Gamma'$  можно рассматривать в некоторой системе координат, как график функции.

Фиксируем  $x \in \Gamma$ .  $S_d^x$  называется сферой Ляпунова.

$\Gamma': \xi_n = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ ,  $f$  задана на проекции  $\Gamma'$  на касательную плоскость.

При этом  $f(0, \dots, 0) = 0$ ;  $\nu_x = (0, \dots, 0, 1)$

Теперь будет некоторая муторная работа, целью которой будет следующее:

$\forall x, \xi \in \Gamma \mid \cos(r, \nu_\xi) \mid \leq cr^\alpha$ ,  $\alpha$  из определения поверхности Ляпунова.

$$(P_2(x) = -(n-2) \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{|x - \xi|^{n-1}} dS_\xi) \quad (1)$$

$$\nu_x = \left( -\frac{f_{\xi_1}(0)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{f_{\xi_2}(0)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, \dots, -\frac{f_{\xi_{n-1}}(0)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}} \right)$$

Здесь и далее  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Сравнивая это выражение с выражением раньше, получаем  $f_{\xi_j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, n-1$

*Упражнение.*

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^n \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k)$$

Выделим в этой сумме последнее слагаемое.

$$\cos(r, \xi_n) \cos(\nu_\xi, \xi_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) \quad (*)$$

Хочется оценить  $|\xi_n| = |f|$  и  $|\cos(\nu_\xi, \xi_k)|$ ,  $k = 1, \dots, n-1$

$$\nu_\xi = \left( -\frac{f_{\xi_1}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{f_{\xi_2}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, \dots, -\frac{f_{\xi_{n-1}}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}} \right)$$

$$\cos(\nu_\xi, \xi_k) = -\frac{f_{\xi_k}(\xi)}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}, \quad k = 1, \dots, n-1;$$

$$\cos \theta = \cos(\nu_\xi, \nu_x) = \cos(\nu_\xi, \xi_n) = -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}}$$

$\theta$  из определения поверхности Ляпунова.  $\cos \theta \geq 1 - \frac{\theta^2}{2}$  (из математического анализа),  $\theta \leq ar^\alpha \leq ad^\alpha < 1 \Rightarrow \cos \theta \geq 1/2$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2}} &\geq 1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2} \\ \sqrt{1 + |\nabla_{\xi'} f|^2} &\leq \frac{1}{1 - \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2}} = 1 + \frac{a^2 r^{2\alpha}}{2 - a^2 r^{2\alpha}} \geq (a^2 r^{2\alpha} < 1)1 + a^2 r^{2\alpha} \\ |\nabla_{\xi'} f|^2 &\leq 2a^2 r^{2\alpha} + a^4 r^{4\alpha} \leq 3a^2 r^{2\alpha} \end{aligned}$$

Окончательно получаем, что

$$|\nabla_{\xi'} f| \leq \sqrt{3}ar^\alpha$$

$$|f_{\xi_k}(\xi)| \leq |\nabla_{\xi'} f| \leq \sqrt{3}ar^\alpha, \quad k = 1, \dots, n-1$$

В (\*) последние слагаемые оцениваются

$$|\cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq \sqrt{3}ar^\alpha$$

$$r^2 = \xi_n^2 + \rho^2, \quad \rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \frac{\xi_k}{\rho} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_k} \right| \leq \sqrt{3}anr^\alpha \leq \sqrt{3}and^\alpha = C_1$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow |f(\xi)| \leq \int_0^\rho \left| \frac{\partial f}{\partial \rho'} \right| d\rho' \leq C_1 \rho \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leq C_1 \rho$$

Отсюда

$$\rho^2 < r^2 \leq C_1 \rho^2 + \rho^2 = C_2 \rho^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial \rho} \right| \leq C_3 \rho^\alpha$$

$$|\xi_n| = |f(\xi)| \leq C_4 \rho^{\alpha+1} \Rightarrow |\xi_n| = |f(\xi)| \leq C_4 r^{\alpha+1}$$

Из (\*):

$$|\cos r, \nu_\xi| \leq \frac{|\xi_n|}{2} + C_0 r^\alpha \leq \bar{C} r^\alpha$$

что и требовалось.

## 21. Лекция 21

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  - замкнутая поверхность Ляпунова,  $\sigma(\xi) \equiv 1$ . Тогда  $\forall x \in \mathbb{R}^n, n \geq 3$

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r^{n-2}} \right| ds_\xi = (n-2) \int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq M < \infty$$

Доказательство.

1. Пусть  $\rho(x, \Gamma) \geq \frac{d}{2}$ . Тогда  $r = |x - \xi| \geq \frac{d}{2}$ , откуда

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \frac{2^{n-1}}{d^{n-1}} |\Gamma| \leq \infty$$

2. Пусть  $\rho(x, \Gamma) < \frac{d}{2}$ .

2а. Пусть  $x \in \Gamma$ , тогда

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$$

, где  $\Gamma' = \Gamma \cap Q_d^x$ ,  $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$ .

$$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \frac{1}{d^{n-1}} |\Gamma|$$

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq \int_{\Gamma'} \frac{cr^\alpha}{r^{n-1}} ds_\xi \leq c_2 \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho^\alpha}{\rho^{n-1}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} = c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n} \rho^{n-2} d\rho =$$

$$= c_3 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha-1} d\rho \leq c_4 < \infty$$

К последним неравенствам мы переходили, заменяя интегрирование по  $\Gamma'$  интегрированием по проекции  $\Gamma'$  на касательную плоскость,  $\cos(r, \nu_\xi) ds_\xi = d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}$ ;  $\rho^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2$ ;  $\rho^2 \leq r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$ ;  $|\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1}$

2б.  $x$  не принадлежит  $\Gamma$ ,  $|x - x_0| < \frac{d}{2}$ .

В  $\{\xi_i\}$   $x$  имеет координаты  $(0, \dots, 0, \pm\delta)$ ,  $\delta > 0$ .

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^n \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) \quad \text{- это упражнение из предыдущей лекции}$$

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) + \cos(r, \xi_n) \cos(\nu_\xi, \xi_n)$$

$$|\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq Cr_0^\alpha, \quad r_0 = |x_0 - \xi|, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2$$

$$|\cos(r, \xi_n)| \leq \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

$$\cos(r, \nu_\xi) \leq Cr_0^\alpha + \frac{|\xi_n \pm \delta|}{r}$$

Теперь разбиваем наш интеграл на 2 других интеграла:

$$\int_{\Gamma} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi = \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$$

$\int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$  оценивается так же, как в пункте 2а. Оценим  $\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi$ .

$$r^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \xi_k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k^2 + (\xi_n \pm \delta)^2 = \rho^2 + (\xi_n \pm \delta)^2$$

$$\pm \xi_n \delta \geq -\frac{\delta^2}{2} - 2\xi^2 \quad r^2 \geq \rho^2 - \xi_n^2 + \frac{\delta^2}{2}, \text{ и еще } |\xi_n| \leq c_1 \rho^{\alpha+1} \leq c_1 d^\alpha \rho$$

Уменьшим, если надо,  $d$ , чтобы  $c_1 d^\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда  $|\xi_n| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ . Итак,  $r^2 \geq \frac{\rho^2 + \delta^2}{2}$ .

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}} ds_\xi \leq C_0 \left( \int_{\Gamma'} \frac{r_0^\alpha}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} ds_\xi + \int_{\Gamma'} \frac{\rho^{\alpha+1}}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} ds_\xi + \delta \int_{\Gamma'} \frac{ds_\xi}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

Первый интеграл обозначим  $I_1$ , второй  $I_2$ , третий  $I_3$ .  $r_0^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \leq \tilde{c}\rho^2$ .

$$I_1 \leq K_1 \int_D \frac{\rho^\alpha}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n-1}{2}}} d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \leq K_2 \int_0^{d_1} \rho^{\alpha+1-n} \rho^{n-2} d\rho < \infty$$

Аналогично оценивается  $I_2$ .

$$I_3 \leq K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2} d\rho}{(\rho^2 + \delta^2)^{\frac{n}{2}}} = K\delta \int_0^{d_1} \frac{\rho^{n-2} d\rho}{\rho^n (1 + \frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K \int_0^{d_1} \frac{-d\frac{\delta}{\rho}}{(1 + \frac{\delta^2}{\rho^2})^{\frac{n}{2}}} = K \int_{\delta/d_1}^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} \leq \infty$$

Ч.т.д.

$\Sigma$  — часть поверхности, на которой задано положительное направление нормали,  $x$  не принадлежит  $\Sigma$ . Предполагаем  $\xi \in \Sigma$   $\cos(\vec{x}\xi, \nu_\xi) \geq 0$ . Соединим теперь  $x$  с каждой точкой  $\Sigma$ . Полученную коническую границу обозначим  $K$ .  $\partial K = K \cup \Sigma$ .  $Q_R^x \cap \Sigma = \emptyset$ .  $K$  высечет на  $S_R^x$  некоторую поверхность, обозначим ее  $\sigma_R \subset S_R^x$ .

$$\omega_x(\Sigma) = \frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}} = |\sigma_1|$$

В случае  $\cos(\vec{x}\xi, \nu_\xi) < 0$  считаем  $\omega_x(\Sigma) = -\frac{|\sigma_R|}{R^{n-1}}$ .

В общем случае мы разбиваем  $\Sigma$  на соответствующие части.

**Теорема 2.**

$$\omega_x(\Sigma) = -\frac{1}{n-2} \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \quad (n \geq 3)$$

(т.е.  $\omega_x$  — потенциал двойного слоя)

Доказательство.

$$\Omega_\varepsilon = \tilde{K} \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}; \quad K_\varepsilon = K \setminus \overline{Q_\varepsilon^x}.$$

В  $\Omega_\varepsilon$   $\frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$  — гармоническая, тогда запишем  $\Delta_\xi \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = 0$  в  $\Omega_\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta_\xi \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi = \text{int}_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = \\ &= \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi \\ &\quad \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}|_{\xi \in \sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}|_{\xi \in \sigma_\varepsilon} = (n-2)\varepsilon^{1-n} \\ &\quad \int_{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = (n-2)\varepsilon^{1-n} |\sigma_\varepsilon| = (n-2)\omega_x(\Sigma) \\ &\quad \int_{K_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi = -(n-2) \int_{K_\varepsilon} \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{r^{n-1}} ds_\xi = 0, \quad \text{т.к. } \cos(r, \nu_\xi) = 0 \end{aligned}$$

Итак,

$$0 = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_\xi + (n-2)\omega_x(\Sigma)$$

Ч.т.д.

Следствие.  $\Gamma$  - замкнутая поверхность Ляпунова, ограничивающая область  $\Omega$ .

Тогда  $\int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi}$  может принимать следующие значения:

$$\begin{cases} -\omega_n(n-2), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \\ -\frac{\omega_n(n-2)}{2}, & x \in \Gamma \end{cases}$$

, где  $n \geq 3$ ,  $\omega_n = |S_1|$ .

Доказательство.

1)

$$x \in \Omega \Rightarrow \omega_x(\Gamma) = \omega_n \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} = -\omega_n(n-2)$$

2)

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \Rightarrow \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} - \text{гармоническая по } \xi \in \Omega$$

3)

$x \in \Gamma$ .  $\pi_x$  - касательная плоскость к  $\Gamma$  в точке  $x$ . Рассмотрим  $Q_{\varepsilon}^x, \varepsilon \ll d$ .  $\Gamma_{\varepsilon} = \Gamma \cap Q_{\varepsilon}^x$ .  $\widetilde{S}_{\varepsilon}^x = S_{\varepsilon}^x \cap \Omega$ .  $\widehat{S}_{\varepsilon}^x$  - полусфера.  $\widehat{S}_{\varepsilon}^x = \widetilde{S}_{\varepsilon}^x + B_{\varepsilon}$ .  $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \overline{Q_{\varepsilon}^x}$ .  $\frac{1}{|x-\xi|^{n-2}}$  гармоническая по  $\xi$  в  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} &= - \int_{\widetilde{S}_{\varepsilon}^x} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} = \\ &= - \int_{\widehat{S}_{\varepsilon}^x} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} + \int_{B_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} \\ \int_{B_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} &= -(n-2) \int_{B_{\varepsilon}} \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{r^{n-1}} ds_{\xi} \\ \int_{B_{\varepsilon}} \frac{|\cos(r, \nu_{\xi})|}{r^{n-1}} ds_{\xi} &\leq K_0 \varepsilon^{\alpha+1-n} |B_{\varepsilon}| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

и

$$- \int_{\widehat{S}_{\varepsilon}^x} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x-\xi|^{n-2}} ds_{\xi} \rightarrow -\frac{\omega_n(n-2)}{2} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0$$

Ч.т.д.

### 21.1. Теорема о скачке потенциала двойного слоя

$$x_0 \in \Gamma \quad P_2^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} P_2(x), \quad P_2^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega} P_2(x), \quad \overline{P_2(x_0)} - \text{прямое значение.}$$

Пусть  $\Gamma$  - замкнутая поверхность Ляпунова,  $x_0 \in \Gamma$ ,  $\sigma(x) \in C(\Gamma)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} P_2^+(x_0) &= -\frac{\omega_n(n-2)}{2} \sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)} \\ P_2^-(x_0) &= \frac{\omega_n(n-2)}{2} \sigma(x_0) + \overline{P_2(x_0)} \end{aligned}$$



## 22. Лекция 22

Пусть  $\Gamma$  – замкнутая поверхность Ляпунова, тогда для потенциала двойного слоя с  $\sigma(x) \equiv 1$  мы получили результат

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega} \\ -\frac{(n-2)w_n}{2}, & x \in \Gamma \\ -(n-2)w_n, & x \in \Omega \end{cases}$$

**Теорема 22.1.** Пусть  $\Gamma$  – замкнутая поверхность Ляпунова,  $\sigma(x) \in C(\Gamma)$ , тогда  $\forall x_0 \in \Gamma$ :

$$P_2^+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \Omega} P_2(x) = -\frac{(n-2)w_n}{2}\sigma(x_0) + \bar{P}_2(x_0)$$

$$P_2^-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0, x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}} P_2(x) = \frac{(n-2)w_n}{2}\sigma(x_0) + \bar{P}_2(x_0)$$

Где  $\bar{P}_2(x_0)$  – прямое значение в точке  $x_0$ .

**Доказательство:**

$$P_2(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma} (\sigma(\xi) - \sigma(x_0)) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \sigma(x_0) \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

Первое слагаемое назовем  $W_0(x)$ , а второе  $W(x)$ . Если мы докажем непрерывность  $W_0(x)$  в точке  $x_0$ , то тем самым мы докажем теорему. В самом деле, если  $W_0^+(x_0) = W_0^-(x_0) = \bar{W}_0(x_0)$ , то  $P_2(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$ , тогда  $P_2^+(x_0) = \bar{W}_0(x_0) - \sigma(x_0)(n-2)w_n = \bar{P}_2(x_0) - \sigma(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$  и аналогично для  $P_2^-(x_0)$ .

Докажем непрерывность. Выбросим из  $\Gamma$  маленькую шаровую окрестность  $\Gamma'$ , тогда  $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ .

$$|W_0(x) - W_0(x_0)| = |W_0'(x) + W_0''(x) - W_0'(x_0) - W_0''(x_0)| \leq |W_0'(x)| + |W_0'(x_0)| + |W_0''(x) - W_0''(x_0)|$$

Здесь  $W_0'(x)$  – интеграл по  $\Gamma'$ , а  $W_0''(x)$  – интеграл по  $\Gamma''$ .

$W_0'(x)$  в точке  $x_0$  дифференцируема, поэтому  $|W_0'(x) - W_0'(x_0)| \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ .

Функция  $\sigma(x)$  непрерывна, поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_0 \quad \forall \eta < \eta_0 \quad \forall \xi \in \Gamma : |\xi - x_0| < \eta \quad |\sigma(\xi) - \sigma(x_0)| < \varepsilon$  А значит можно оценить

$$|W_0(x)| \leq \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS \leq \varepsilon \cdot Const$$

И уменьшая  $\varepsilon$ , можно и первые слагаемые сделать сколь угодно малыми. Непрерывность доказана.

### 22.1. Потенциал простого слоя

Напоминаем: Это

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

Где  $\mu(x) \in C(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  – замкнутая поверхность Ляпунова.

**Теорема 22.2.** Потенциал простого слоя непрерывен в  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство:** Непрерывность может нарушаться только при переходе через  $\Gamma$ . Вначале проверим, что потенциал определен в точках поверхности. Заметим, что  $\forall x_0 \in \Gamma$ :

$$|P_1(x_0)| \leq \max_{\Gamma} |\mu(x)| \int_{\Gamma} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = M \left( \int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \int_{\Gamma''} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} \right)$$

Где  $M = \max_{\Gamma} |\mu(x)|$ ,  $\Gamma'$  – пересечение  $\Gamma$  с маленьким шариком с центром в  $x_0$ , а  $\Gamma''$  – оставшаяся часть  $\Gamma$ . Второй интеграл конечен, а конечность первого проверяется переходом к системе координат  $r^2 = \rho^2 + \xi_n^2$ :

$$\int_{\Gamma'} \frac{1}{|x_0 - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = \int_{\Gamma'} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-2}} = \int_{D(x_0)} \frac{d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}}{\rho^{n-2} \cos(\nu_{\xi}, \xi_n)} \leq C \int_0^d \rho^{2-n} \rho^{n-2} d\rho = Cd$$

Непрерывность доказывается аналогично предыдущей теореме:

$$|P_1(x) - P_1(y)| \leq |P_1'(x)| + |P_1'(y)| + |P_1''(x) - P_1''(y)|$$

Где, как обычно,  $P'_1(x)$  и  $P''_1(x)$  – соответственно интегралы по  $\Gamma' = \Gamma \cap Q_\eta^x$ ,  $\eta \ll 1$  и по  $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$ . Последнее слагаемое стремится к нулю ввиду дифференцируемости  $P''$ , а первые в силу оценки

$$|P'_1(x)| \leq M \int_{\Gamma'} \frac{dS_\xi}{|x - \xi|^{n-2}} \leq M\eta$$

и выбора достаточно маленького  $\eta$

Покажем, что  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  определена (конечна) нормальная производная

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi$$

Достаточно проверить существование для  $x \in \Gamma$ . Аналогично выкладкам для потенциала двойного слоя,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = -\frac{|\cos(r, \nu_\xi)|}{r^{n-1}},$$

поэтому

$$\left| \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi \right| \leq M \left( \int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi + \int_{\Gamma''} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi \right)$$

Второй интеграл конечен, а первый, в силу сделанной ранее оценки,

$$\int_{\Gamma'} \frac{|\cos(r, \nu_x)|}{r^{n-1}} dS_\xi \leq C_1 \int_{D(x)} \frac{r^\alpha}{r^{n-1}} d\xi_1 \dots d\xi_n \leq C_2 \int_0^d \rho^{\alpha-n+1} \rho^{n-2} d\rho = C_3 d^\alpha$$

следовательно, нормальная производная определена  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

## 23. Лекция 23.

**Теорема 23.1 (О скачке нормальной производной потенциала простого слоя).** Пусть  $\Gamma$  – замкнутая поверхность Ляпунова,  $\mu(x) \in C(\Gamma)$ , тогда  $\forall x_0 \in \Gamma$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)^+(x_0) &= \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right) = \frac{(n-2)w_n}{2} \mu(x_0) + \overline{\left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)} \\ \left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)^-(x_0) &= \lim_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right) = -\frac{(n-2)w_n}{2} \mu(x_0) + \overline{\left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)} \end{aligned}$$

Где  $\overline{\left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)}$  – прямое значение в точке  $x_0$ .

**Доказательство:**

$$\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}(x) = \int_{\Gamma} \left[ \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right] dS_\xi - \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_\xi = W_0(x) + W(x)$$

Достаточно доказать непрерывность  $W_0(x)$ . В самом деле, пусть  $W_0^+(x) = W_0^-(x) = \overline{W_0(x)}$ . Функция  $W(x)$  уже была фактически вычислена в предыдущей теореме, поэтому

$$\overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) = \overline{W_0(x_0)} - \overline{P_2(x_0)}$$

$$\left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)^+(x_0) = \overline{W_0(x_0)} + \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2} - \overline{P_2(x_0)} = \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) + \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$$

Аналогично,

$$\left( \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} \right)^-(x_0) = \overline{W_0(x_0)} - \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2} - \overline{P_2(x_0)} = \overline{\frac{\partial P_1}{\partial \nu_x}}(x_0) - \mu(x_0) \frac{(n-2)w_n}{2}$$

Докажем непрерывность  $W_0(x)$ . Опять рассмотрим разбиение  $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ , где  $\Gamma' = \Gamma \cap Q_\eta^x$ ,  $\eta \ll d$ ,  $d$  – радиус Ляпунова нашей поверхности. Интеграл распадется в сумму двух, причем интеграл по  $\Gamma''$  непрерывен в точке  $x_0$  и, значит, стремится к нулю при  $x \rightarrow x_0$ . Оценим интеграл по  $\Gamma'$ .

Поскольку

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= (n-1) \frac{\cos(r, \nu_x)}{|x - \xi|^{n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} &= (n-1) \frac{\cos(r, \nu_\xi)}{|x - \xi|^{n-1}}\end{aligned}$$

То справедливо равенство :

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right| = \frac{(n-2)}{r^{n-1}} |\cos(r, \nu_x) - \cos(r, \nu_\xi)|$$

Введем локальную систему координат  $\xi_1, \dots, \xi_n$  с центром в  $x_0$ . Тогда

$$\cos(r, \nu_x) = \cos(r, \xi_n)$$

$$\cos(r, \nu_\xi) = \sum_{k=1}^{n-1} \cos(r, \xi_k) \cos(\nu_\xi, \xi_k) + \cos(r, \xi_n) \cos(\nu_\xi, \xi_n)$$

Поэтому

$$\frac{(n-2)}{r^{n-1}} |\cos(r, \nu_x) - \cos(r, \nu_\xi)| \leq \frac{(n-2)}{r^{n-1}} \left( \sum_{k=1}^{n-1} |\cos(\nu_\xi, \xi_k)| + |1 - \cos(\nu_\xi, \xi_n)| \right)$$

Из неравенства  $|1 - \cos \theta| \leq \frac{\theta^2}{2}$  и свойства поверхности Ляпунова  $|\cos(\nu_\xi, \xi_k)| \leq cr_0^\alpha$ :

$$\left| \int_{\Gamma'_\eta} \mu(\xi) \left[ \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \right] dS_\xi \right| \leq M_1 \int_{\Gamma'_\eta} \frac{r_0^\alpha}{r^{n-1}} dS_\xi$$

Поскольку  $r_0^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2 = \rho^2 + \xi_n^2 \leq C_1 \rho^2$  (Так как  $|\xi_n| \leq C \rho^{\alpha+1}$ ), то

$$M_1 \int_{\Gamma'_\eta} \frac{r_0^\alpha}{r^{n-1}} dS_\xi \leq M_2 \int_{\Gamma'_\eta} \rho^{\alpha-n+1} dS_\xi = M_3 \int_0^\eta \rho^{\alpha-n+1} \rho^{n-2} d\rho = M_4 \eta^\alpha$$

Так что выбрав подходящее  $\eta$ , можно сделать сколь угодно малым и этот интеграл. Это доказывает непрерывность, а значит и всю теорему.

### 23.1. Постановка краевых задач

**$D_i$  (внутренняя задача Дирихле):**

Пусть  $\Omega$  - ограниченная область,  $\partial\Omega = \Gamma$  - поверхность Ляпунова.

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega \quad u|_{\Gamma} = f(x) \quad f \in C(\Gamma)$$

Решение ищем в классе функций  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

**$D_e$  (внешняя задача Дирихле):**

$$\Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \quad u|_{\Gamma} = f(x) \quad f \in C(\Gamma) \quad u \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty$$

Решение также ищем в классе  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Пусть  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ,  $x_0 \in \Gamma = \partial\Omega$

**Определение:** правильная нормальная производная функции  $u$  на поверхности  $\Gamma$  – равномерный по  $x_0$  предел (если таковой существует и непрерывен)

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0, x \in \nu_x} \frac{\partial u}{\partial \nu_x}$$

**Определение:**  $\Gamma$  – регулярная поверхность, если:

1.  $\forall x_0 \in \Gamma \quad \nu_{x_0}$
2. В локальной системе координат  $\xi_1, \dots, \xi_n$  с началом координат  $x_0$ , такой что  $\xi_n$  направлено по  $\nu_x$ , может быть записано  $\xi_n = f(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$  в некоторой окрестности  $x_0$ .
3.  $f \in C^2(D)$ , где  $D$  – проекция окрестности  $x_0$  на касательную плоскость.

## 24. Лекция 24

### 24.1. Решение внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана в виде потенциала

$\Omega$  - ограниченная область,  $\partial\Omega = \Gamma$  - регулярная поверхность.

Будем искать решение внутренней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя с неизвестной плотностью.

$$u(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

$$\sigma(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = -\frac{2}{\omega_n(n-2)} \varphi(x) \quad (*)$$

Будем искать решение внешней задачи Неймана в виде потенциала простого слоя.

$$u(x) = \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = -\frac{2}{\omega_n(n-2)} \psi(x) \quad (**)$$

В обоих случаях интегральное уравнение имеет вид  $\sigma(x) - \lambda T\sigma = f(x)$ .

Пусть  $X$  - банахово пространство,  $T : X \rightarrow X$  - вполне непрерывен (компактен).

$T^* : X^* \rightarrow X^*$ .  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

$$u - \lambda T u = f, \quad f \in X, u \in X \quad (1)$$

$$v - \bar{\lambda} T^* v = g, \quad g \in X^*, v \in X^* \quad (2)$$

$$u - \lambda T u = 0, \quad u \in X \quad (3)$$

$$v - \bar{\lambda} T^* v = 0, \quad v \in X^* \quad (4)$$

*Определение.*  $\lambda$  - характеристическое число  $T$ , если существует нетривиальное решение (3); это решение будем называть *собственным элементом*  $T$ . Размерность пространства решений (3), отвечающих данному характеристическому числу  $\lambda$ , назовем *рангом*  $\lambda$ .

#### 24.1.1. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА

**Теорема 1.** Пусть  $T$  - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве  $X$ . Тогда любое характеристическое число  $T$  имеет конечный ранг.

**Теорема 2.** Пусть  $T$  - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве  $X$ . Тогда если  $\lambda$  - характеристическое число  $T$ , то  $\bar{\lambda}$  - характеристическое число  $T^*$  того же ранга.

**Теорема 3.** Пусть  $T$  - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве  $X$ . Тогда множество характеристических чисел  $T$  либо конечно, либо счетно, причем если оно счетно, то имеет единственную предельную точку на бесконечности.

**Теорема 4.** Пусть  $T$  - вполне непрерывный оператор в банаховом пространстве  $X$ . Тогда (1) разрешимо  $\Leftrightarrow f \perp v$ , где  $v$  - произвольное решение (4).

**Теорема 5 (альтернатива Фредгольма)** Пусть  $T$  - вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда либо (3) имеет только тривиальное решение, и тогда (1) имеет единственное решение  $\forall f \in H$ , либо (3) имеет нетривиальное решение, и тогда (1) или не имеет решений, или имеет бесконечно много решений (это зависит от  $f$ ).

Рассмотрим оператор  $T : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma)$ .

$$Tu = \int_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

Тот факт, что  $Tu \in L_2(\Gamma)$ , будет доказан позднее. Тогда

$$T^*v = \int_{\Gamma} v(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi}$$

Обозначим

$$K(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} \quad K_1(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}}$$

Легко заметить, что  $K_1(\xi, x) = K(x, \xi)$ .

покажем, что из разрешимости соответствующих интегральных уравнений следует разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Рассмотрим сопряженное однородное уравнение

$$\mu(x) - \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = 0$$

и докажем, что у него есть только тривиальное решение.

Пусть  $\mu_0(x) \in L_2(\Gamma)$  - решение нашего уравнения (то, что  $\mu_0 \in C(\Gamma)$ , мы докажем позже). Можно построить потенциал простого слоя с плотностью  $\mu_0(x)$ :

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} d\xi$$

По свойствам потенциала простого слоя:

$$\Delta P_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$$

$$P_1(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty$$

Поскольку  $\mu_0$  - решение нашего уравнения, то  $\lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\partial P_1}{\partial \nu_x} = 0$ , т.е.  $P_1$  - решение внешней задачи Неймана. В

силу единственности решения такой задачи получаем  $P_1 \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ . По свойствам потенциала простого слоя  $P_1 \in C(\mathbb{R}^n)$ , откуда  $P_1 \equiv 0$  на  $\Gamma$ .

Внутри области  $\Omega$  имеем  $\Delta P_1(x) = 0$ ,  $x \in \Omega$ ,  $P_1(x) = 0$ ,  $x \in \Gamma$ . В силу единственности решения внутренней задачи Дирихле получаем  $P_1 \equiv 0$  на  $\Omega$ .

Итак,  $P_1 \equiv 0$  в  $\mathbb{R}^n$ . По теореме о скачке нормальной производной потенциала простого слоя  $\mu_0(x) \equiv 0$  на  $\Gamma$ , что и требовалось доказать.

По теореме 5 уравнение (\*\*) имеет единственное решение  $\forall \psi \in L_2(\Gamma)$ , а, значит, и для  $\forall \psi \in C(\Gamma)$ , т.е. внешняя задача Неймана разрешима. Но тогда  $\lambda = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$  не является характеристическим числом  $T^*$ , следовательно,  $\bar{\lambda} = \frac{2}{\omega_n(n-2)}$  не является характеристическим числом  $T$ . Отсюда получаем, что внутренняя задача Дирихле разрешима  $\forall \varphi \in L_2(\Gamma)$ , а, значит, и для  $\forall \varphi \in C(\Gamma)$ , что и требовалось.

Теперь можно окончательно сформулировать доказанные теоремы.

**Теорема.** Внутренняя задача Дирихле ( $\mathcal{D}_i$ ) имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции  $\varphi$ , и это решение представимо в виде потенциала двойного слоя.

**Теорема.** Внешняя задача Неймана ( $\mathcal{N}_e$ ) имеет единственное классическое решение для любой непрерывной граничной функции  $\psi$ , и это решение представимо в виде потенциала простого слоя.

## 24.2. Решение внешней задачи Дирихле и внутренней задачи Неймана в виде потенциала

Будем искать решение наших задач в таком же виде, что и в предыдущем разделе, где

$$\sigma(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \varphi(x) \quad (*)$$

$$\mu(x) + \frac{2}{\omega_n(n-2)} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} ds_{\xi} = \frac{2}{\omega_n(n-2)} \psi(x) \quad (**)$$

Однородное уравнение  $D_l$ :

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение  $\sigma(x) \equiv 1$ :

$$\int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = -\frac{(n-2)\omega_n}{2}, \quad x \in \Gamma$$

Ранг  $\lambda = -\frac{2}{(n-2)\omega_n} \geq 1 \Rightarrow$  у сопряженного однородного уравнения

$$\mu(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \mu(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Есть нетривиальное решение  $\mu(x)$ .

Покажем, что любое нетривиальное решение линейно выражается через это тогда и только тогда, когда  $rank \lambda = 1$

Пусть  $\mu_1(x)$  - другое нетривиальное решение. Построим два потенциала простого слоя:

$$P_1^0(x) = \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} P_1^1(x) = \int_{\Gamma} \mu_1(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

$$\begin{cases} \Delta P_1^0(x) = 0, & x \in \Omega \\ \lim_{x \rightarrow x_0 \in \Gamma} \frac{\partial P_1^0}{\partial \nu_x} = 0 \end{cases}$$

Т.е  $P_1^0$  есть решение  $N_i \Rightarrow P_1^0 \equiv c_0 = \text{const}, x \in \Omega$

То же самое относится к  $P_1^1 \Rightarrow P_1^1 \equiv c_1 = \text{const}, x \in \Omega$

Возьмем плотность  $\tilde{\mu} = c_1 \mu_0(x) - c_0 \mu_1(x)$  и рассмотрим потенциал простого слоя

$$P_1(x) = \int_{\Gamma} \tilde{\mu}(\xi) \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = c_1 c_0 - c_0 c_1 = 0, x \in \Omega$$

$P_1 \equiv 1, x \in \Omega \Rightarrow P_1 \equiv 0, x \in \Gamma; \Delta P_1 = 0, x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}, P_1 \rightarrow 0, |x| \rightarrow \infty$

В силу единственности решения  $D_l, P_1 \equiv 0, x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \tilde{\mu}, x \in \Gamma \Rightarrow \mu_0, \mu_1$  линейно независимы.

Согласно теореме Фредгольма (\*\*) разрешимо  $\Leftrightarrow \psi$  ортогональна константе:

$$(\psi, 1)_{L_2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \psi dS = 0 - \text{условие разрешимости необходимое и достаточное}$$

### Теорема 3

Внутренняя задача Неймана ( $N_i$ ) имеет (классическое) решение для тех и только для тех непрерывных ограниченных функций  $\psi(x)$ , для которых  $\int_{\Gamma} \psi(x) dS = 0$ . Если есть решение, то оно единственное, с точностью до прибавления постоянной.

$D_l$ : согласно теореме Фредгольма (\*) разрешимо  $\Leftrightarrow$

$$(\varphi, \mu_0)_{L_2(\Gamma)}, \mu_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \mu_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Решение  $D_l \exists \forall \varphi \in C(\Gamma)$ , но в общем случае его нельзя найти в виде потенциала двойного слоя.

Для  $(\varphi, \mu_0)$  все хорошо.

В общем случае ищем решение в виде (считаем, что  $0 \in \Omega$ )

$$u(x) = \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) dS_{\xi}$$

Тогда на границе

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) dS_{\xi} &= (\text{теорема о скачке}) = \\ &= \frac{(n-2)\omega_n}{2} \sigma(x) + \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}, x \in \Gamma \\ \sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) dS_{\xi} &= \frac{2}{(n-2)\omega_n} \varphi(x), x \in \Gamma \end{aligned}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение:

$$\sigma(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) dS_{\xi} = 0$$

Докажем, что  $\sigma \equiv 0$ .

Пусть существует решение  $\sigma_0 \in L_2(\Gamma) (\Rightarrow C(\Gamma) - \text{докажем дальше})$ :

$$u_0(x) = \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi}$$

$\Delta u_0 = 0$  вне  $\overline{\Omega}$ ;  $u_0(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ;  $u_0|_{\Gamma} = 0$ .

В силу единственности решения  $D_l : u_0 \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n / \overline{\Omega}$  имеем

$$\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} + \frac{1}{|x|^{n-2}} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi} = 0$$

Умножим обе части уравнения на  $|x|^{n-2}$ , устремим  $x \rightarrow \infty$  и воспользуемся тем, что  $|P_2(x)| \leq \frac{c}{|x|^{n-1}}$  получаем, что

$$\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) dS_{\xi} = 0$$

Вспомогая уравнение для  $\sigma_0$  получаем (т.к.  $\int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{1}{|x|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$ )

$$\sigma_0(x) + \frac{2}{(n-2)\omega_n} \int_{\Gamma} \sigma_0(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi} = 0$$

Как мы уже доказали, в таком случае  $\sigma_0(\xi) \equiv c = \text{const}$ . Подставляя, получаем  $\int_{\Gamma} c dS_{\xi} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \sigma_0 \equiv 0$ , что и требовалось.

Теперь по теореме Фредгольма неоднородное уравнение разрешимо  $\forall \varphi \in C(\Gamma)$ .

#### Теорема 4.

Внешняя задача Дирихле  $D_l$  имеет единственное (классическое) решение для любой непрерывной граничной функции  $\varphi$  и это решение представляется в виде (выше).

## 25. Лекция 25

$$T : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Gamma), \quad Tu = \int_{\Gamma} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} dS_{\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{\xi}} \frac{1}{|x - \xi|^{n-2}} = K(\xi, \varepsilon) = -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi})}{r^{n-1}}$$

$|\cos(r, \nu_{\xi})| \leq |x - \xi|^{\alpha}$ ,  $\Gamma$  - поверхность Ляпунова с показателем  $\alpha$ .

$$K(\xi, \varepsilon) = -(n-2) \frac{\cos(r, \nu_{\xi}) r^{-\alpha/2}}{r^{n-1-\alpha/2}} = \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\alpha/2}}$$

$$Tu \equiv \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\alpha/2}} u(\xi) dS_{\xi} - \text{операторы со слабой особенностью}$$

$A(x, \xi) \in C(\Gamma \times \Gamma)$ - продолжение по непрерывности.

Пусть  $u \in L_2(\Gamma)$ ,  $\beta = \alpha/2$ , тогда

$$\|Tu\|_{L_2(\Gamma)}^2 = \int_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi) dS_{\xi} \right)^2 dS_x$$

$$\left( \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_{\xi} \right)^2 \leq \int_{\Gamma} \left( \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi} \int_{\Gamma} \left( \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi}$$

$|A(x, \xi)| \leq M_0$ ,  $x, \xi \in \Gamma$   $\eta \leq d$ - радиус сферы.

$$\int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq M_0^2 \left( \int_{\Gamma'_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} + \int_{\Gamma''_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \right)$$

$$\int_{\Gamma''_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq \infty$$

$$\int_{\Gamma'_{\eta}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq C_0 \int_0^{\eta} \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho \leq \infty \Rightarrow \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq \infty$$

$$\|Tu\|_{L_2(\Gamma)}^2 \leq M_1 \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} dS_x = M_1 \int_{\Gamma} u^2(\xi) \left( \int_{\Gamma} \frac{dS_x}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \right) \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_{\Gamma} u^2(\xi) dS_{\xi} = M_1 M_2 \|u\|_{L_2 \Gamma}^2 \Rightarrow Tu \in L_2(\Gamma), T - \text{ограничен.}$$

**Теорема 4.**

$T$  — вполне непрерывен.

*Доказательство.*

$\{T_n\}$ ,  $T_n : X \rightarrow X$  (банахово),  $T_n$  компактны,  $T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$ ,  $T : X \rightarrow X \Rightarrow T$  компактен.

$$T = T_{\varepsilon}^1 + T_{\varepsilon}^2$$

$$K_{\varepsilon}^1(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & |x - \xi| < \varepsilon \\ 0, & |x - \xi| \geq \varepsilon \end{cases} \quad K_{\varepsilon}^2(x, \xi) = \begin{cases} K(x, \xi), & |x - \xi| \geq \varepsilon \\ 0, & |x - \xi| < \varepsilon \end{cases}$$

При фиксированном  $\varepsilon$ ,  $T_{\varepsilon}^2$  - фредгольмов, т.к.  $|K_{\varepsilon}^2| \leq K_0$  Осталось доказать, что  $\|T_{\varepsilon}^1\| \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

$$\begin{aligned} \|T_{\varepsilon}^1 u\|_{L_2(\Gamma)}^2 &= \int_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} K(x, \xi) u(\xi) dS_{\xi} \right)^2 dS_x \\ &= \left( \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} dS_{\xi} \right)^2 \leq \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \left( \frac{A(x, \xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi} \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \left( \frac{u(\xi)}{r^{\frac{n-1-\beta}{2}}} \right)^2 dS_{\xi} \\ &= \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} \leq M \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq M \int_0^{\varepsilon} \rho^{1+\beta-n} \rho^{n-2} d\rho = M_2 \varepsilon^{\beta} \\ \|T_{\varepsilon}^1 u\|_{L_2(\Gamma)}^2 &\leq M_2 \varepsilon^{\beta} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{u^2(\xi)}{r^{n-1-\beta}} dS_{\xi} dS_x = M_2 \varepsilon^{\beta} \int_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \right) u^2(\xi) dS_x \leq M_3 \varepsilon^{\beta} \|u\|_{L_2(\Gamma)}^2 \end{aligned}$$

**Теорема 2**

Пусть  $u(x) \in L_2(\Gamma)$  решение интегрального уравнения со слабой особенностью:

$$u(x) - \int_{\Gamma} \frac{A(x, \xi)}{r^{n-1-\beta}} u(\xi) dS_{\xi} = \varphi(x), \quad A(x, \xi) \in C(\Gamma \times \Gamma), \quad \varphi(x) \in C(\Gamma), \quad \beta > 0$$

Тогда  $u \in C(\Gamma)$ . *Доказательство.*

$$T = T_{\varepsilon}^1 + T_{\varepsilon}^2, \quad K_{\varepsilon}^1(x, \xi) = K(x, \xi) \eta(|x - \xi|), \quad K_{\varepsilon}^2(x, \xi) = K(x, \xi) (1 - \eta(|x - \xi|)),$$

$\eta$  — «шапочка» до  $\varepsilon$ .  $u(x) - T_{\varepsilon}^1 u = T_{\varepsilon}^2 u + \varphi =: g(x)$ ,  $\|T_{\varepsilon}^1\| < M \varepsilon^{\beta/2}$ ,  $\varepsilon \ll 1$

$T_{\varepsilon}^2 u$  непрерывен, т.к.  $K_{\varepsilon}^2 \in C^{\infty} \Rightarrow g(x) \in C(\Gamma)$

$$(Id - T_{\varepsilon}^1)u = g(x) \in C(\Gamma), \quad \|T_{\varepsilon}^1\| < 1.$$

**Теорема Банаха.**

$A$  - линейный ограниченный оператор на банаховых пространствах и норма  $A$  меньше 1, тогда существует ограниченный оператор  $(Id - A)^{-1}$  и при этом  $(Id - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$

продолжим доказательство

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (T_{\varepsilon}^1)^n g(x); \quad (T_{\varepsilon}^1)^n g(x) \in C(\Gamma)$$

$$|T_{\varepsilon}^1 g| \leq \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{|A(x, \xi)|}{r^{n-1-\beta}} |g(\xi)| dS_{\xi}, \quad |g(\xi)| \leq M_0, \quad |A(x, \xi)| \leq M_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |T_{\varepsilon}^1 g| \leq M_0 M_1 \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}}, \quad \int_{\Gamma'_{\varepsilon}} \frac{dS_{\xi}}{r^{n-1-\beta}} \leq M_2 \varepsilon^{\beta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \max_x |T_{\varepsilon}^1 g| \leq M_0 M_1 M_2 \varepsilon^{\beta}$$

$$|(T_{\varepsilon}^1)^2 g| = |T_{\varepsilon}^1 (T_{\varepsilon}^1 g)| \leq (M_0 M_1 M_2 \varepsilon^{\beta})^2$$

$$|(T_{\varepsilon}^1)^n g| \leq (M_0 M_1 M_2 \varepsilon^{\beta})^n$$

Берем  $\varepsilon : M_0 M_1 M_2 \varepsilon^{\beta} = q < 1$  тогда исходный ряд будет сходиться равномерно  $\Rightarrow u \in C(\Gamma)$



## 25.1. Вариационный метод решения задачи Дирихле

$\Omega$  - ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $H' \subset H_1(\Omega)$  произвольное подпространство - линейное подпространство, на котором задано  $(\cdot, \cdot)$ , и оно эквивалентно  $(\cdot, \cdot)$  на  $H_1(\Omega)$ , причем  $H'$  полно относительно  $(\cdot, \cdot)$   $c\|u\|_{H_1} \leq \|u\|_{H'} \leq C\|u\|_{H_1}$ .

Рассмотрим:

$E : H' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Eu = \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2}$ ,  $f \in L_2(\Omega)$  фиксирована.

$$|(f, u)_{L_2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H_1(\Omega)} \leq c \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H'}$$

$$Eu = \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2} \geq \|u\|_{H'}^2 - 2c \|f\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{H'} = (\|u\|_{H'} - \|f\|_{L_2})^2 - c^2 \|f\|_{L_2}^2 \geq -c^2 \|f\|_{L_2}^2$$

$\Rightarrow \inf_{H'} Eu < -\infty$ ,  $\exists v_n : \lim_{m \rightarrow \infty} E(v_m) = d$  - минимизирующая последовательность.

$u \in H'$  называется элементом, реализующим  $\min E$  на  $H'$ , если  $Eu = d$

**Лемма.**

Для любого подпространства  $H'$  пространства  $H(\Omega)$   $\exists!$  элемент  $u \in H'$ , реализующий минимум функционала  $E$  на  $H'$ .

Любая минимизирующая последовательность сходится к этому элементу.

*Доказательство леммы*

$\{v_m\}$  минимизирующая последовательность.  $\forall \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) \forall m > M d \leq Ev_m < d + \varepsilon$

$$\left\| \frac{v_m \pm v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{4} \|v_m\|_{H'}^2 + \frac{1}{4} \|v_n\|_{H'}^2 \pm \frac{1}{2} (v_m, v_n)_{H'}$$

$$\left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{2} \|v_m\|_{H'}^2 + \frac{1}{2} \|v_n\|_{H'}^2 - \left\| \frac{v_m + v_n}{2} \right\|_{H'}^2 = \frac{1}{2} E(v_m) + \frac{1}{2} E(v_n) - E\left(\frac{v_m + v_n}{2}\right)$$

$m, n \geq M \Rightarrow \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|_{H'}^2 < \frac{1}{2}(d + \varepsilon) + \frac{1}{2}(d - \varepsilon) - d = \varepsilon \Rightarrow \{v_m\}$  фундаментальная, тогда сходится по норме в  $H'$ , т.к они эквивалентны

$v_m \xrightarrow{\|\cdot\|_{H'}} Eu = d$ . Единственность очевидна.

## 26. Лекция 26

### 26.1. Метод Ритца

Возьмем в  $H'$  произвольную линейно независимую систему функций  $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$ , линейная оболочка которой плотна в  $H'$ . обозначим через  $R_k$  линейную оболочку первых  $k$  функций из этой системы. Мы знаем, что

$\exists! v_k \in R_k : \min_{R_k} E(u) = E(v_k)$ . Ищем  $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \varphi_j$ . Введем функцию

$$F(c_1, \dots, c_k) = E\left(\sum_{j=1}^k c_j^k \varphi_j\right)$$

В точке минимума должны выполняться условия  $\frac{\partial F}{\partial c_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, k$ , что эквивалентно системе линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^k c_i (\varphi_i, \varphi_j)_{H'} + (f, \varphi_j)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad j = 1, \dots, k$$

Определитель системы представляет собой определитель Грама для системы  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  и не равен нулю в силу их линейной независимости. Поэтому существует решение  $c_1^k, \dots, c_k^k$ , и элемент  $v_k = \sum_{j=1}^k c_j^k \varphi_j$ , реализующий минимум на  $R_k$ .

Последовательность  $\{v_k\}$  называется *последовательностью Ритца*.

**Теорема 26.1.** *Последовательность Ритца является минимизирующей функционал  $E(\cdot)$  на подпространстве  $H'$  последовательностью.*

**Доказательство:**

Имеем

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \dots$$

$$E(v_1) \geq E(v_2) \geq E(v_3) \geq \dots \geq d$$

Так как система  $\{\varphi_k\}$  полна, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \exists u_\varepsilon(x) = C_1(\varepsilon)\varphi_1 + \dots + C_{K(\varepsilon)}\varphi_{K(\varepsilon)} \in R_{K(\varepsilon)} : \|u - u_\varepsilon\|_{H'} < \varepsilon$$

Где  $E(u) = d$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon) &= \|u_\varepsilon\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon)_{L_2} = \|u_\varepsilon - u + u\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(f, u)_{L_2} = \\ &= E(u) + E(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + \|u_\varepsilon - u\|_{H'}^2 + 2(f, u_\varepsilon - u)_{L_2} + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq d + \varepsilon^2 + C_0\varepsilon \leq \\ &\leq d + C_1\varepsilon \end{aligned}$$

Получили  $E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$ , Но  $d \leq E(v_{K_\varepsilon}) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + C_1\varepsilon$ , поэтому  $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \forall s > K(\varepsilon) \quad d \leq E(v_s) \leq d + C_1\varepsilon$ , откуда  $\lim_{s \rightarrow \infty} E(v_s) = d$ . Что и требовалось доказать.

Итак, пусть  $E(u) = d$  – минимум функционала в  $H'$ . Рассмотрим функцию  $w(t) = u + tw$ , где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $w \in H'$ , и многочлен

$$\begin{aligned} P(t) &= E(u + tw) = \|u + tw\|_{H'}^2 + 2(f, u + tw)_{L_2} = \\ &= \|u\|_{H'}^2 + 2(f, u)_{L_2} + 2t(u, w)_{H'} + t^2\|w\|_{H'}^2 + 2t(f, w)_{L_2} \geq d \quad \forall t \end{aligned}$$

Кроме того,  $P(0) = E(u) = d$ , значит  $P'(0) = 2(u, w)_{H'} + (f, w)_{L_2} = 0 \quad \forall w \in H'$ .

Рассмотрим  $H' = H_1^0(\Omega)$ , тогда это соотношение примет вид

$$(u, w)_{H'} = (u, w)_{H_1^0(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla w \, dx = - \int_{\Omega} f w \, dx \quad \forall w \in H_1^0(\Omega)$$

Тогда  $u \in H_1^0(\Omega)$  есть обобщенное решение задачи Дирихле.

Подведем итог.

**Теорема 26.2.** *Существует единственная функция, реализующая минимум функционала на. Если скалярное произведение на задается формулой, то эта функция является обобщенным решением задачи Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \\ u \in H_1^0(\Omega), & f \in L_2(\Omega) \end{cases}$$

Последовательность Рунца может быть рассмотрена как последовательность, приближающая решение.

## 26.2. Уравнение теплопроводности

Рассмотрим дифференциальный оператор (теплопроводности):

$$Tu = u_t - \Delta_x u$$

тогда сопряженный оператор

$$T^*v = -v_t - \Delta_x v$$

Уравнение теплопроводности имеет вид  $Tu = f(x, t)$ , где  $x \in \Omega$  – ограниченная область,  $t \geq 0$ .

Для уравнения теплопроводности имеет место аналог формулы Грина: пусть

$$u, v \in C^{2,1}(\tilde{\omega}_\tau) \cap C^1(\bar{\omega}_\tau),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\tau &= \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq \tau\} \\ \omega_\tau &= \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < \tau\} \end{aligned}$$

здесь  $C^{2,1}$  – пространство функций, дважды дифференцируемых по  $x$  и один раз по  $t$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\tau} (vTu - uT^*v) \, dxdt &= \int_{\omega_\tau} (vu_t + uv_t - v\Delta u + u\Delta v) \, dxdt = \\ &= \int_{\Omega} u(x, \tau)v(x, \tau) \, dx - \int_{\Omega} u(x, 0)v(x, 0) \, dx + \int_{S_\tau} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} + v \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS \end{aligned}$$

Проверим, что фундаментальным решением для оператора теплопроводности является

$$\Gamma(x, x_0, t, t_0) = \frac{\theta(t - t_0)}{(2\sqrt{\pi(t - t_0)})^n} e^{-\frac{|x - x_0|^2}{4(t - t_0)}}$$

То есть нужно проверить

$$(T_{x,t}\Gamma(x, x_0, t, t_0), f(x, t)) = (\Gamma(x, x_0, t, t_0), T^*f(x, t)) = f(x_0, t_0)$$

Убедимся, что  $\Gamma \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n \pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{|x-x_0|<C} \frac{1}{|t-t_0|^{n/2}} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}} dx dt \Big|_{\xi=\frac{x-x_0}{2\sqrt{t-t_0}}} &= \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{|\xi|<\frac{C}{2\sqrt{t-t_0}}} e^{-|\xi|^2} d\xi dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{t_0}^{t_0+R} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} d\xi dt = R \end{aligned}$$

То есть

$$\begin{aligned} (\Gamma(x, x_0, t, t_0), T^*f(x, t)) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dx dt = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dx dt &= \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Грина,

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{t_0+\varepsilon}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} T\Gamma(x, x_0, t, t_0) T^*f(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t_0 + \varepsilon, t_0) f(x, t_0 + \varepsilon) dx \right)$$

**Упражнение:** Для любого  $t > t_0$   $T\Gamma = 0$ .

Используя этот факт, пишем:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, x_0, t_0 + \varepsilon, t_0) f(x, t_0 + \varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\sqrt{\pi\varepsilon})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4\varepsilon}} f(x, t_0 + \varepsilon) dx \Big|_{\xi=\frac{x-x_0}{2\sqrt{\varepsilon}}} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|^2} f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) d\xi = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi|>N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) - f(x_0, t_0)) d\xi + \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi|<N} e^{-|\xi|^2} (f(x_0 + 2\sqrt{\varepsilon}\xi, t_0 + \varepsilon) - f(x_0, t_0)) d\xi \right\} \\ &\quad + f(x_0, t_0) \end{aligned}$$

Покажем, что интегралы стремятся к нулю:

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n} |f(x, t)| < \infty \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \frac{M}{\pi^{n/2}} \int_{|\xi|>N} e^{-|\xi|^2} d\xi < \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall x, t : |x - x_0| < \delta, |t - t_0| < \delta \quad |f(x, t) - f(x_0, t_0)| < \varepsilon$$

Возьмем  $2\sqrt{\varepsilon}N < \delta, \varepsilon < \delta$ , тогда и второй интеграл меньше  $\varepsilon$ , что мы и хотели показать. Итак, мы доказали, что  $\Gamma(x, x_0, t, t_0)$  является фундаментальным решением.

**Теорема 26.3 (Принцип максимума в ограниченной области).** Пусть  $u(x, t)$  - решение уравнения  $Tu = 0$  в слое  $\tilde{w}_\tau$ , принадлежащее классу  $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$ . Тогда  $\forall (x, t) \in \tilde{w}_\tau$ :

$$\min_{\sigma_\tau} u(x, t) \leq u(x, t) \leq \max_{\sigma_\tau} u(x, t)$$

Где  $\sigma_\tau = \Omega \cup S_\tau$ ,  $S_\tau$  – боковая поверхность цилиндра.

**Доказательство:**

Достаточно доказать, что  $\min_{\sigma_\tau} u(x, t) \leq u(x, t)$ , потому что применив это рассуждение к функции  $v = -u$ , получим утверждение для максимума.

Из непрерывности  $u \exists M > 0 : |u(x, t)| < M$  в  $\overline{w_\tau}$ . Выберем  $M_1$  такое, что

$$v(x, t) = u(x, t) - M_1 < 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{w_\tau}$$

Тогда  $Tv = 0$  в  $\tilde{w}_\tau$  и  $v < 0$  в  $\overline{w_\tau}$ . Положим  $v = e^{\gamma t} w$ ,  $\gamma = \text{const} > 0$ . Покажем, что минимум отрицательного значения  $w$  может достигаться лишь на  $\sigma_\tau$ . Предположим противное:  $\exists (x_0, t_0) \in \tilde{w}_\tau : 0 > w(x_0, t_0) = \min_{\overline{w_\tau}} w(x, t)$ .

Ясно, что  $w(x, t) < 0$  в  $\overline{w_\tau}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_j}(x_0, t_0) = 0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial t}(x_0, t_0) \leq 0$ , а  $\frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}(x_0, t_0) \geq 0$ . Но тогда

$$Tv \Big|_{(x_0, t_0)} = \left( \gamma e^{\gamma t} w(x, t) + e^{\gamma t} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) - e^{\gamma t} \Delta w(x, t) \right) \Big|_{(x_0, t_0)} < 0$$

Что противоречит равенству  $Tv = 0$ .

Следовательно

$$w(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} w(x, t)$$

Или, что то же самое,

$$e^{-\gamma t} v(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} e^{-\gamma t} v(x, t)$$

Переходя к пределу при  $\gamma \rightarrow 0$  получаем  $v(x, t) \geq \min_{\sigma_\tau} v(x, t)$ , а отсюда и требуемое неравенство для  $u(x, t)$ .

## 27. Лекция 27

### 27.1. Принципы максимума

**Теорема 27.1 (Принцип максимума в неограниченной области).** Пусть  $u(x, t)$  – решение уравнения  $Tu = 0$  в слое  $G_\tau = \left\{ (x, t) \mid x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq \tau \right\}$ , принадлежащее классу  $C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G_\tau})$ . Предположим, что  $\forall (x, t) \in G_\tau \quad |u(x, t)| \leq M$ . Тогда  $\forall (x, t) \in G_\tau$ :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0) \leq u(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0)$$

**Доказательство:**

Обозначим

$$M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0), \quad m_0 = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} u(x, 0)$$

Введем вспомогательную функцию  $v(x, t) = |x|^2 + 2nt$ . Легко видеть, что в  $G_\tau$   $Tv = v_t - \Delta|x|^2 = 2n - 2n = 0$ . Введем еще функции

$$W_1(x, t) = M_0 - u(x, t) + \varepsilon v(x, t)$$

$$W_2(x, t) = m_0 - u(x, t) - \varepsilon v(x, t)$$

Заметим, что  $TW_1 = TW_2 = 0$  в  $G_\tau$ , и кроме того

$$W_1(x, 0) = M_0 - u(x, 0) + \varepsilon|x|^2 \geq 0$$

$$W_2(x, 0) = m_0 - u(x, 0) - \varepsilon|x|^2 \leq 0$$

Далее,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R(\varepsilon) \quad \forall x : |x| \geq R(\varepsilon) \quad W_1(x, t) \geq 0, W_2(x, t) \leq 0$  Теперь применим принцип максимума для ограниченной области к функциям  $W_1$  и  $W_2$  в области  $G_\tau$ :

$$W_1(x, t) \geq 0, \quad W_2(x, t) \leq 0 \quad (x, t) \in G_\tau$$

Что равносильно

$$m_0 - \varepsilon v(x, t) \leq u(x, t) \leq M_0 + \varepsilon v(x, t) \quad \forall (x, t) \in G_\tau$$

Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим утверждение теоремы.

**Теорема 27.2 (строгий принцип максимума).** Пусть функция  $u(x, t)$  в цилиндре

$$\tilde{w}_\tau := \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq \tau\} \quad (1)$$

удовлетворяет уравнению  $Tu = 0$ , принадлежит классу  $C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$  и принимает в точке  $(x_0, t_0) \in \tilde{w}_\tau$  наибольшее значение, то  $u(x, t) \equiv u(x_0, t_0) = \text{const}$  в цилиндре  $\tilde{w}_{\tau_0} = \tilde{w}_\tau \cap \{t \leq \tau_0\}$ .

□ Предположим противное. Пусть  $u(x_1, t_1) < u(x_0, t_0) := M$ , где  $t_1 < t_0$ . Соединим точки  $(x_0, t_0)$  и  $(x_1, t_1)$  ломаной, содержащейся в  $\tilde{w}_\tau$  с вершинами в точках  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} = t_0$ , причем  $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1} = t_0$ . Если мы докажем, что из неравенства  $u(x_s, t_s) < M$  следует  $u(x_{s+1}, t_{s+1}) < M$ , то, двигаясь по ломаной, получим  $u(x_0, t_0) < M$  – противоречие, и теорема будет доказана.

Пусть точки  $(x_s, t_s)$  и  $(x_{s+1}, t_{s+1})$  лежат на прямой

$$x_j = k_j t + a_j, \quad j = 1, \dots, n$$

Рассмотрим цилиндр  $P(x, t) < \rho^2$ , где  $P(x, t) = \sum_{j=1}^n (x_j - k_j t - a_j)^2$ . Выберем  $\rho > 0 : u(x, t_s) < M - \varepsilon_1 \quad \forall x : P(x, t_s) < \rho^2$ . Построим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = e^{-\gamma t} (\rho^2 - P(x, t))^2, \quad \gamma > 0$$

Тогда

$$Tv = e^{-\gamma t} (-\gamma(\rho^2 - P)^2 - 2(\rho^2 - P) \frac{\partial P}{\partial t} + 4n(\rho^2 - 8P) - 8P)$$

Покажем, что можно  $\gamma$  выбрать настолько большим, что  $Tv < 0$  внутри цилиндра. Действительно, на боковой поверхности цилиндра  $Tv = -8e^{-\gamma t} \rho^2 < 0$ , поэтому неравенство справедливо и в некоторой  $\delta$ -окрестности поверхности. Если же  $P(x, t) < \rho^2 - \delta$ , то  $\rho^2 - P(x, t) > \delta$  и при достаточно большом  $\gamma$  первый член в скобках будет больше по модулю, чем сумма модулей остальных членов, то есть  $Tv < 0$  внутри цилиндра. Рассмотрим функцию

$$W(x, t) = M - u(x, t) - \alpha v(x, t)$$

Ясно, что  $TW = -\alpha Tv > 0$  в цилиндре. Тогда по принципу максимума для ограниченной области,

$$W(x, t) \geq \min_{\sigma} W(x, t)$$

Где  $\sigma$  – «наклонный стакан» (боковая поверхность плюс нижнее основание нашего цилиндра). На боковой поверхности цилиндра  $W(x, t) = M - u(x, t) > 0$ , а на нижнем основании  $W(x, t_s) = M - u(x, t_s) - \alpha v(x, t_s) \geq \varepsilon_1 - \alpha v(x_t, s) > 0$ , при достаточно маленьком  $\alpha$ . Значит, и во всем цилиндре  $W(x, t) \geq 0$ , в частности  $W(x_{s+1}, t_{s+1}) \geq 0$ , то есть

$$u(x_{s+1}, t_{s+1}) \leq M - \alpha v(x_s, t_s) < M$$

Что и хотели доказать. ■

**Теорема 27.3 (о стабилизации).** Пусть  $u(x, t) \in C^{2,1}(w_\infty) \cap C(\overline{w}_\infty)$  – решение уравнения  $Tu = 0$ ,

$$w_\infty = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t < \infty, \}$$

$$S_\infty = \{(x, t) \mid x \in \partial\Omega, 0 < t < \infty, \}$$

Пусть  $u|_{S_\infty} = 0$ , тогда  $u(x, t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$  равномерно по всем  $x \in \overline{\Omega}$

**Доказательство:**

Для удобства положим  $0 \in \Omega$ . Рассмотрим функцию

$$v(x, t) = e^{-at} \prod_{j=1}^n \cos bx_j, \quad a > 0$$

Поскольку  $v_t = -av$  и  $v_{x_j x_j} = -b^2 v$ , то  $Tv = (nb^2 - a)v$ . Следовательно при  $a = nb^2$   $v(x, t)$  – решение уравнения теплопроводности. Выберем  $b$  настолько малым, что

$$\Omega \subset \left\{ |x_j| < \frac{\pi}{4b}, \quad j = 1, \dots, n \right\}$$

Внутри этого параллелепипеда  $v(x, 0) > 0$ , поэтому (из непрерывности  $u$  и  $v$ )  $\exists M > 0 : |u(x, 0)| < v(x, 0), \quad x \in \Omega$ . Кроме того,  $v|_{S_\infty} > 0$ . Рассмотрим функции

$$W_1(x, t) = Mv(x, t) - u(x, t)$$

$$W_2(x, t) = Mv(x, t) + u(x, t)$$

Очевидно,  $TW_1 = TW_2 = 0$ , при этом  $M$  мы выбрали так, что  $W_1(x, 0) = Mv(x, 0) - u(x, 0) \geq 0$  и кроме того,  $W_1|_{S_\infty} > 0$ , отсюда по принципу максимума  $W_1(x, t) \geq 0, \quad x \in \overline{\omega}_\infty$ , то есть  $u(x, t) \leq Mv(x, t)$ . Аналогично применяя принцип максимума к  $W_2$ , получаем  $-u(x, t) \leq Mv(x, t)$ . Итак,

$$|u(x, t)| \leq Mv(x, t) \quad x \in \overline{\omega}_\infty$$

Но  $v(x, t)$  убывает к нулю равномерно по  $x \in \overline{\Omega}$ , так что теорема доказана.

## 27.2. Начально-краевые задачи

### 1) Первая начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_\tau$$

$$u|_{S_\tau} = \psi(x, t), \quad S_\tau = \partial\Omega \times (0, \tau)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь  $f, \psi, \varphi$  – заданные непрерывные функции.

### 2) Вторая начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_\tau$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{S_\tau} = \psi(x, t)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь  $f, \psi, \varphi$  – заданные непрерывные функции, а поверхность  $\partial\Omega$  – регулярна.

### 3) Третья начально-краевая задача:

$$C^{2,1}(\tilde{w}_\tau) \cap C(\overline{w}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in \tilde{w}_\tau$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \nu} + a(x, t)u \right)|_{S_\tau} = \psi(x, t)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

Здесь  $f, a, \psi, \varphi$  – заданные непрерывные функции, а поверхность  $\partial\Omega$  – регулярна.

### 4) Задача Коши:

$$C^{2,1}(G_\tau) \cap C(\overline{G}_\tau)$$

$$Tu = f(x, t) \quad (x, t) \in G_\tau = \mathbb{R}^n \times (0, \tau]$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Здесь  $f, \varphi$  – заданные непрерывные функции.

## 27.3. Теоремы единственности

**Теорема 27.4.** *Первая краевая задача для оператора теплопроводности имеет единственное решение.*

□ Как обычно, рассмотрим разность  $v = u_1 - u_2$  двух решений этой задачи. Тогда  $Tv = 0, \quad v|_{S_\tau} = 0, \quad v|_{t=0} = 0$ . Согласно принципу максимума для ограниченных областей,

$$0 = \min_{\sigma_\tau} v(x, t) \leq v(x, t) \leq \max_{\sigma_\tau} v(x, t) = 0$$

Поэтому  $v(x, t) = 0$  в  $\tilde{w}_\tau$  и единственность доказана. ■

**Теорема 27.5.** *Задача Коши для уравнения теплопроводности в классе ограниченных функций имеет единственное решение.*

□ Рассмотрим разность  $v = u_1 - u_2$  двух решений этой задачи. Тогда  $Tv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, |v| \leq M$  для  $v \in G_\tau$ . Согласно принципу максимума для неограниченных областей,

$$0 = \min_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) \leq v(x, t) \leq \max_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) = 0$$

Поэтому  $v(x, t) = 0$  в  $G_\tau$  и единственность доказана. ■