

**А. С. Мищенко
Ю. П. Соловьев
А. Т. Фоменко**

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ И ТОПОЛОГИИ**

Под общей редакцией
академика А. Т. Фоменко



М о с к в а
Физматлит
2 0 0 4

ББК 22.151

М 57

УДК 513

Р е ц е н з е н т ы:

профессор *A. Н. Паршин*

профессор *I. Х. Сабитов*

МИЩЕНКО А. С., СОЛОВЬЕВ Ю. П., ФОМЕНКО А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии: Учеб. пособие для вузов.—2-е изд., перераб. и доп.—М.: Издательство физико-математической литературы, 2004.—412 с.—ISBN 5-94052-078-2.

Сборник состоит из двух частей. Часть первая содержит задачи по дифференциальной геометрии. Во вторую часть включены задачи по топологии. Подавляющее большинство вошедших в сборник задач снабжены либо подробными решениями и указаниями, либо ответами. Многие задачи иллюстрированы.

Для студентов математических специальностей университетов. Сборник может быть использован преподавателями вузов.

Ответственный редактор Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ



9 785940 520788
ISBN 5-94052-078-2

© Физматлит, 2004

© Коллектив авторов, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Предисловие ко второму изданию	7

Часть 1

§ 1. Системы координат	9
§ 2. Уравнения кривых и поверхностей	17
§ 3. Классические метрики на сфере и плоскости Лобачевского, их свойства	20
§ 4. Теория кривых	26
§ 5. Риманова метрика	37
§ 6. Вторая квадратичная форма, гауссова и средняя кривизны	45
§ 7. Многообразия	51
§ 8. Тензоры	62
§ 9. Векторные поля	66
§ 10. Связности и параллельный перенос	68
§ 11. Геодезические на двумерных поверхностях	74
§ 12. Тензор кривизны	80
§ 13. Дифференциальные формы и котомологии де Рама	84
§ 14. Топология	93
§ 15. Гомотопия, степень отображения и индекс векторного поля	100

Часть 2

§ 16. Системы координат (дополнительные задачи)	109
§ 17. Кривые и поверхности: уравнения и параметризации	110
§ 18. Теория кривых (дополнительные задачи)	122
§ 19. Риманова метрика (дополнительные задачи)	141
§ 20. Гауссова и средняя кривизны	150
§ 21. Параметризации известных двумерных поверхностей	157
§ 22. Поверхности в \mathbb{R}^3	162
§ 23. Топология двумерных поверхностей	165
§ 24. Линии на поверхностях	168
§ 25. Многообразия (дополнительные задачи)	176
§ 26. Тензорный анализ	183
§ 27. Геодезические на многообразиях	186
§ 28. Тензор кривизны	190
§ 29. Векторные поля	193
§ 30. Группы преобразований	198
§ 31. Дифференциальные формы	204
§ 32. Теория гомотопий	208
§ 33. Накрытия и расслоения	220
§ 34. Критические точки, степень отображения, теория Морса	226
§ 35. Простейшие вариационные задачи	233
§ 36. Общая топология	236

Ответы и решения	241
Список литературы	410

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии» предназначен для обеспечения учебного процесса по курсам дифференциальной геометрии и топологии на механико-математических специальностях университетов и педагогических вузов. «Сборник» призван максимально отразить существующие требования к курсам дифференциальной геометрии и топологии как со стороны новых программ, так и со стороны других курсов математики, физики, механики. Кроме того, издание «Сборника» сделает доступными для широкой математической общественности новые научно-методические разработки ведущих ученых в области дифференциальной геометрии, топологии, алгебры и механики.

«Сборник» может служить основой для практических занятий по курсам дифференциальной геометрии и топологии на математических и механических специальностях университетов и педагогических вузов как российских, так и стран СНГ — таких, как Белоруссия, Украина, Грузия, Казахстан, Туркменистан, Литва, — откуда в последние годы неоднократно поступали заявки на сборник задач такого рода.

Он может быть также использован для поддержки разнообразных специальных курсов по различным разделам современной геометрии и ее приложениям к механике и математической физике.

«Сборник» состоит из двух частей. Первая часть содержит задачи по стандартным разделам дифференциальной геометрии и топологии. Этот материал перекрывает необходимый минимум задач по стандартным курсам геометрии и топологии. Вторая часть содержит задачи, предназначенные для более глубокого усвоения современной геометрии и ее приложений.

В книге представлены следующие темы: теория кривых (включая эволюты и эвольвенты), теория поверхностей, системы координат, риманова геометрия, классические метрики (на сфере, плоскости Лобачевского и т. п.), топологические пространства, многообразия (включая элементы расслоенных пространств, фазовые и конфигурационные пространства), топология двумерных поверхностей, двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, группы и алгебры Ли (включая маломерные группы Ли, их параметризации, часто используемые в механике), векторные поля и тензоры, дифференциальные формы (включая интегрирование и теорию де Рама и т. п.), связности и параллельный пе-

ренос, геодезические, тензор кривизны, элементы алгебраической топологии (эйлерова характеристика, индекс векторного поля, индекс пересечения и т. п.), связности и группы Ли.

Книга также содержит как дополнительные задачи по темам, отраженным в первой части, так и задачи по некоторым новым темам, затрагивающие более глубокие вопросы дифференциальной геометрии и топологии. Среди новых тем, представленных во второй части, следует отметить компьютерную геометрию и топологию, кинематику и геометрию, геометрические конструкции (такие, как джеты, многообразия Штифеля и Грассмана и т. п.), производная Ли, задачи на упаковку, комбинаторная геометрия на плоскости и в пространстве, элементы гамильтоновой механики.

Настоящий сборник задач является естественным дополнением к учебнику А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко «Курс дифференциальной геометрии и топологии», переизданному в 2000 г. В значительной степени настоящий «Сборник» базируется на книге А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьева, А. Т. Фоменко «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии», вышедшей в Издательстве Московского университета в 1981 г. Здесь следует отметить, что по истечении многих лет, в 1998 г., электронная версия этого предыдущего задачника была создана А. А. Ошемковым. Затем в 1998–1999 гг. на механико-математическом факультете МГУ по инициативе кафедры дифференциальной геометрии и приложений был организован специальный научно-методический семинар по составлению нового «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии». Семинаром руководили профессора А. С. Мищенко и Ю. П. Соловьев и академик А. Т. Фоменко. В силу перечисленных обстоятельств в качестве авторов на обложке книги указаны именно эти три фамилии. Однако фактически в создании «Сборника» принимал участие большой коллектив известных ученых, выдающихся специалистов в области современной геометрии, топологии, алгебры, механики и приложений: академик РАН В. В. Козлов, проф. В. В. Федорчук, проф. А. В. Болсинов, проф. Э. Р. Розендорн, проф. В. В. Трофимов, проф. А. А. Борисенко (Харьков), проф. И. Х. Сабитов, проф. Е. В. Троицкий, проф. А. О. Иванов, проф. А. А. Тужилин, ст.н.с. Г. В. Носовский, н.с. А. И. Шафаревич, доцент А. А. Ошемков, м.н.с. Ф. Ю. Попеленский, асс. Е. А. Кудрявцева.

Самое активное участие в работе семинара, составлении задач и их решении принимали практически все студенты и аспиранты кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Всем им выражаем глубокую благодарность.

В области дифференциальной геометрии и топологии существует несколько сборников задач, учебников и учебных пособий.

Небольшой список наиболее известных изданий мы приводим в конце книги.

Следует заметить, что сборники задач по дифференциальной геометрии и топологии, изданные в последнее время, выходили малыми тиражами и поэтому практически недоступны. Книги же, изданные ранее и более крупными тиражами, уже разошлись, стали редкостью. Кроме того, материал некоторых книг в значительной мере устарел и нуждается в обновлении. Это связано как с совершенствованием программ математических курсов, так и с тем, что со стороны других курсов, использующих или опирающихся на методы дифференциальной геометрии и топологии, значительно изменились и усилились требования к геометрическим курсам. Все это сделало издание «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии» особенно актуальным.

Мы собрали большой научно-методический материал, по большей части неизвестный широкой математической общественности. Неизвестный в силу нескольких причин, основными из которых являются следующие. Во-первых, многие задачи возникли во время собственных научных исследований участников упомянутого выше семинара. Во-вторых, некоторые задачи появились в результате дискуссий на заседаниях семинара. Наконец, достаточно большое количество задач было извлечено из старой математической литературы, уже давно ставшей библиографической редкостью и поэтому недоступной современным студентам и преподавателям.

Из собранного таким образом научно-методического материала и сформировался настоящий «Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии».

Особо отметим абсолютно неоценимую роль Ф.Ю.Попеленского при подготовке к изданию настоящей книги. Объем выполненной им работы по упорядочиванию задач, по организации проверки их условий и решений, а также по набору текста и т.п. был настолько велик, что лишь благодаря его неутомимым усилиям эта книга, наконец, увидела свет.

Москва, МГУ, май 2000 г.

*А. С. Мищенко
Ю. П. Соловьев
А. Т. Фоменко*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Перед читателем лежит второе издание «Сборника задач по дифференциальной геометрии и топологии». Первое его издание вышло в 2001 г. в издательстве «Физматлит». На протяжении последующих двух лет велась активная работа по улучшению задачника. Особо активное участие в этой работе приняли сотрудники кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета МГУ. Мы учли многочисленные желания как преподавателей, так и студентов, возникшие при использовании первого издания на занятиях. Были устраниены замеченные опечатки и неточности, добавлены новые задачи. Особенно это коснулось первой части задачника, наиболее активно используемой на семинарских занятиях по обязательным курсам механико-математического факультета МГУ «Классическая дифференциальная геометрия» и «Дифференциальная геометрия и топология». Мы также изменили структуру некоторых параграфов и добавили новые, стремясь к более четкому распределению задач по темам. Кроме того, в целях повышения наглядности добавлено много новых рисунков.

Несмотря на то, что дифференциальная геометрия — наука зрелая, процесс улучшения задачника оказался «расходящимся». Чем больше мы углублялись в работу, тем больше находилось сравнительно элементарных и в то же время весьма полезных задач, которые просто «невозможно было не включить» в задачник. Мы сознательно прервали этот процесс, постаравшись добиться большой содержательности при разумном объеме. Кроме того, мы отдаем себе отчет в том, что отразить в одной книге все богатство и разнообразие современной геометрии практически невозможно. Тем не менее, нам представляется, что настоящее издание является не только самым современным, но и наиболее полным задачником по университетским курсам дифференциальной геометрии и топологии.

*A. T. Фоменко
Ф. Ю. Попеленский*

Комментарий А.Т. Фоменко:

Хочу особо подчеркнуть важную роль Ф.Ю. Попеленского при подготовке настоящего издания. Он не только глубоко проанализировал большинство задач и их решений, обнаружил и исправил многие опечатки и неточности, но и предложил исключительно ценные и изящные новые серии задач.



Сфера Александера: топологическое вложение двумерной сферы в \mathbb{R}^3 , при котором образ сферы разделяет \mathbb{R}^3 на две открытые области. Одна из них — шар, а вторая — неодносвязна (рисунок А. Т. Фоменко)

Часть 1

§ 1. Системы координат

Рассмотрим область U пространства \mathbb{R}^n , в котором заданы декартовы координаты (x^1, \dots, x^n) . Предположим, что в другом экземпляре пространства \mathbb{R}^n с координатами (q^1, \dots, q^n) задана область V и установлено взаимно однозначное соответствие между точками областей U и V . В этом случае для задания точки области U мы можем использовать набор чисел (q^1, \dots, q^n) — декартовы координаты соответствующей точки области V . Будем говорить, что (q^1, \dots, q^n) являются *криволинейными координатами в области U* , если:

1) функции

$$x^i = x^i(q^1, \dots, q^n),$$

задающие взаимно однозначное соответствие между точками областей U и V , имеют непрерывные производные всех порядков в области V ;

2) якобиан $J = \left| \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \right|$ отличен от 0 во всех точках области V .

Заметим, что в подавляющем большинстве случаев достаточно предполагать, что функции $x^i(q^1, \dots, q^n)$ имеют непрерывные производные до третьего порядка включительно.

Из определения криволинейных координат следует, что обратные функции $q^i(x^1, \dots, x^n)$ также имеют непрерывные производные всех порядков в области U , причем якобиан $J' = \left| \frac{\partial q^i}{\partial x^j} \right|$ отличен от нуля (он равен J^{-1}).

Функции $x^i = x^i(q^1, \dots, q^n)$ удобно рассматривать одновременно для всех $i = 1, \dots, n$, используя для этого вектор-функцию

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, \dots, q^n), \quad \text{где } \mathbf{r} = (x^1, \dots, x^n).$$

В области U условия $q^i = \text{const}$ определяют n семейств *координатных гиперповерхностей*. Координатные гиперповерхности одного и того же семейства не пересекаются.

Любые $n - 1$ координатных гиперповерхностей, принадлежащих различным семействам, пересекаются по некоторой кривой. Такие кривые называются *координатными линиями*. Будем также называть их *координатными линиями*.

Векторы $\mathbf{r}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^k}$ имеют направления касательных к координатным линиям. В каждой точке области U эти векторы линейно независимы. Они определяют в окрестности некоторой точки $M(q^1, q^2, \dots, q^n)$ бесконечно малый вектор

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i.$$

Квадрат его длины, выраженный в криволинейных координатах, определяется из равенства

$$ds^2 = \langle d\mathbf{r}, d\mathbf{r} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i dq^i, \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j dq^j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dq^i dq^j,$$

где \langle , \rangle — скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

Величины $g_{ij} = g_{ji} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle$ определяют метрику в криволинейной системе координат (q^1, \dots, q^n) .

Ортогональной криволинейной системой координат называется такая система координат, для которой

$$g_{ij} = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ H_i^2, & i = j. \end{cases}$$

Величины $H_i > 0$ называются коэффициентами Ламе. Они равны модулям длин векторов \mathbf{r}_i :

$$H_i = |\mathbf{r}_i| = \sqrt{\left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial q^i}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial x^n}{\partial q^i}\right)^2}.$$

Квадрат линейного элемента в ортогональных криволинейных координатах задается выражением

$$ds^2 = H_1^2(dq^1)^2 + H_2^2(dq^2)^2 + \dots + H_n^2(dq^n)^2.$$

В задачах 1.1–1.5:

- установите формулы, выражающие криволинейные координаты точки плоскости \mathbb{R}^2 через декартовы и обратно;
- найдите координатные линии;
- подсчитайте определители

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

и выясните, в каких точках плоскости \mathbb{R}^2 нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и декартовыми координатами точки на плоскости для следующих криволинейных координат (u_1, u_2) .

1.1. Для обобщенной полярной системы координат, определяемой равенством $\frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} = u_1 e^{iu_2}$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. При каких условиях эти координаты совпадают с обычными полярными?

1.2. Для эллиптической системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = \operatorname{ch}(u_1 + iu_2)$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$.

1.3. Для параболической системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2$, где $-\infty < u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 < \infty$.

1.4. Для биполярной системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = \operatorname{th}\left(\frac{u_1 + iu_2}{2}\right)$, где $-\infty < u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, без точек $(u_1 = 0, u_2 = \pi) = (x_1 = x_2 = \infty)$, $(u_1 = +\infty) = (x_1 = 1, x_2 = 0)$, $(u_1 = -\infty) = (x_1 = -1, x_2 = 0)$.

1.5. Для системы координат, определяемой равенством $x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^3$, где $u_2 \geq 0$, $u_1 + u_2\sqrt{3} \geq 0$.

В задачах 1.6–1.12:

а) найдите координатные поверхности и координатные линии;

б) подсчитайте определители $\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|$, $\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$ и установите, в каких точках пространства \mathbb{R}^3 нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для следующих криволинейных систем координат u_1, u_2, u_3 пространства \mathbb{R}^3 ;

в) являются ли эти системы координат ортогональными?

1.6. Для обобщенной цилиндрической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \cos u_2, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2, \quad x_3 = u_3,$$

где $u_1 \geq 0$, $0 < u_2 \leq 2\pi$, $-\infty < u_3 < \infty$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ (см. рис. 1).

1.7. Для обобщенной сферической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = a_1 u_1 \sin u_2 \cos u_3, \quad x_2 = a_2 u_1 \sin u_2 \sin u_3, \quad x_3 = a_3 u_1 \cos u_2,$$

где $u_1 \geq 0$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $0 \leq u_3 < 2\pi$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ (см. рис. 2).

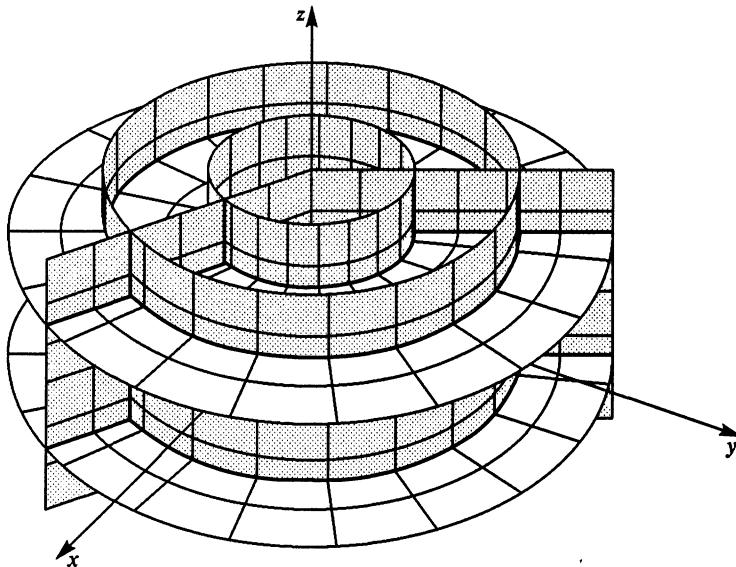


Рис. 1. Цилиндрическая система координат, $a_1 = a_2 = 1$

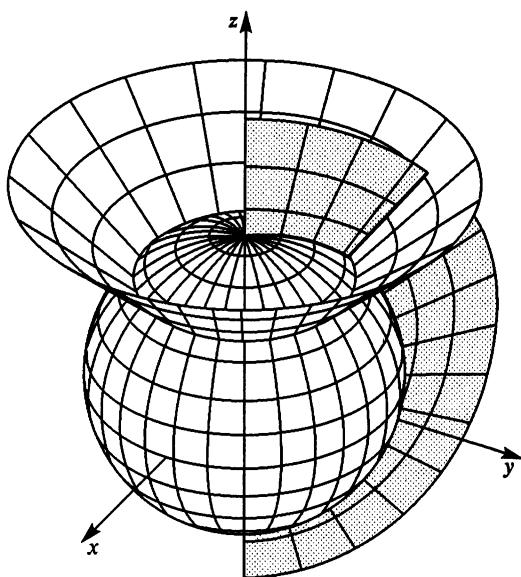


Рис. 2. Сферическая система координат, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

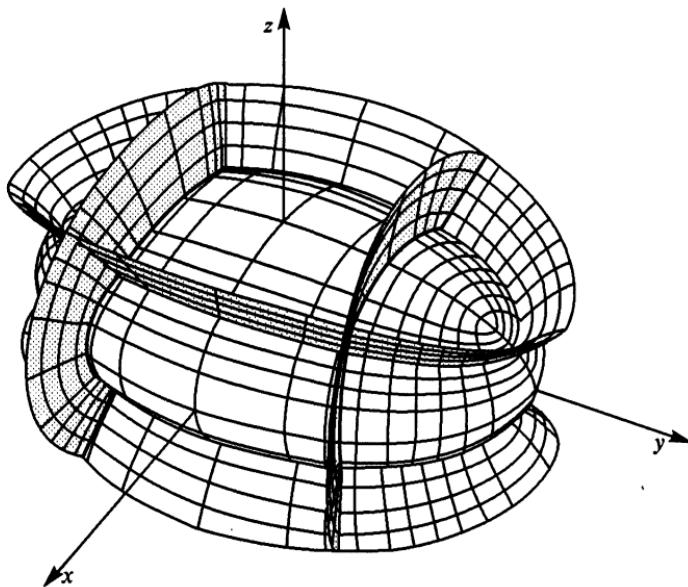


Рис. 3. Эллипсоидальная система координат

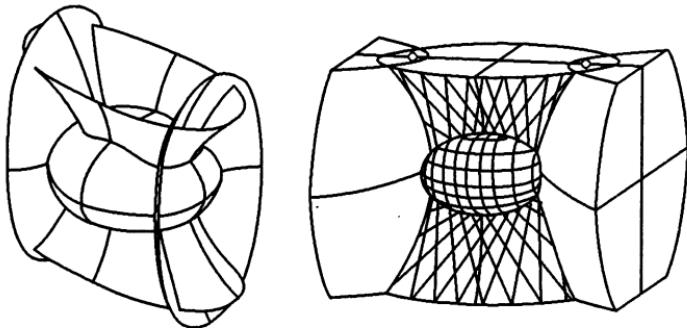


Рис. 4. Эллипсоидальная система координат

1.8. Для эллипсоидальной системы координат, определяемой равенствами

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - u_1)(a_1 - u_2)(a_1 - u_3)}{(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)},$$

$$x_2^2 = \frac{(a_2 - u_1)(a_2 - u_2)(a_2 - u_3)}{(a_3 - a_2)(a_1 - a_2)},$$

$$x_3^2 = \frac{(a_3 - u_1)(a_3 - u_2)(a_3 - u_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)},$$

где $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, $u_1 < a_3 < u_2 < a_2 < u_3 < a_1$ (см. рис. 3, 4).

1.9. Для параболической системы координат, определяемой равенствами $x_1 = u_1 u_2 \cos u_3$, $x_2 = u_1 u_2 \sin u_3$, $x_3 = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 < \infty$, $-\pi < u_3 \leq \pi$.

1.10. Для системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемой равенствами $x_1 = \operatorname{sh} u_1 \sin u_2 \cos u_3$, $x_2 = \operatorname{sh} u_1 \times \sin u_2 \sin u_3$, $x_3 = \operatorname{ch} u_1 \cos u_2$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 5).

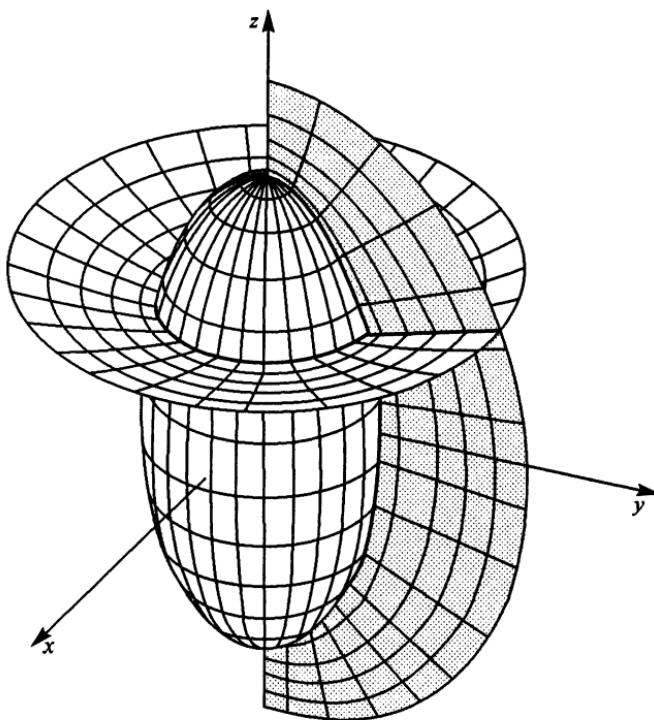


Рис. 5. Вырожденная эллипсоидальная система координат

1.11. Для системы вырожденных эллипсоидальных координат, определяемой равенствами $x_1 = \operatorname{ch} u_1 \sin u_2 \cos u_3$, $x_2 = \operatorname{ch} u_1 \times \sin u_2 \sin u_3$, $x_3 = \operatorname{sh} u_1 \cos u_2$, где $0 \leq u_1 < \infty$, $0 \leq u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 6).

1.12. Для системы тороидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{\operatorname{sh} u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_2 = \frac{\operatorname{sh} u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_3 = \frac{\sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2},$$

где $0 \leq u_1 < \infty$, $-\pi < u_2 \leq \pi$, $-\pi < u_3 \leq \pi$ (см. рис. 7).

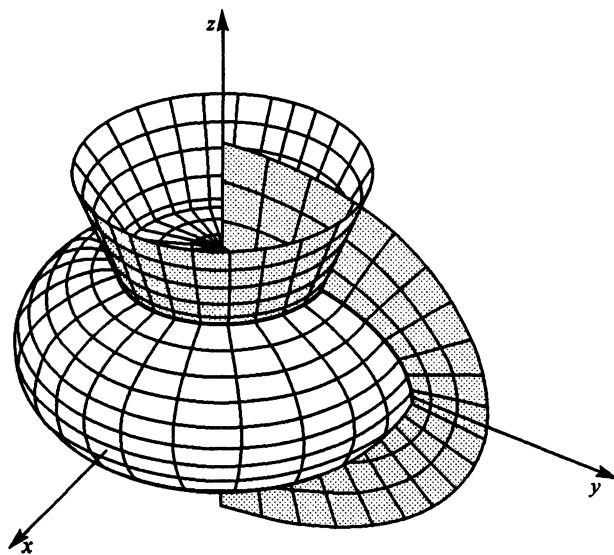


Рис. 6. Вырожденная эллипсоидальная система координат

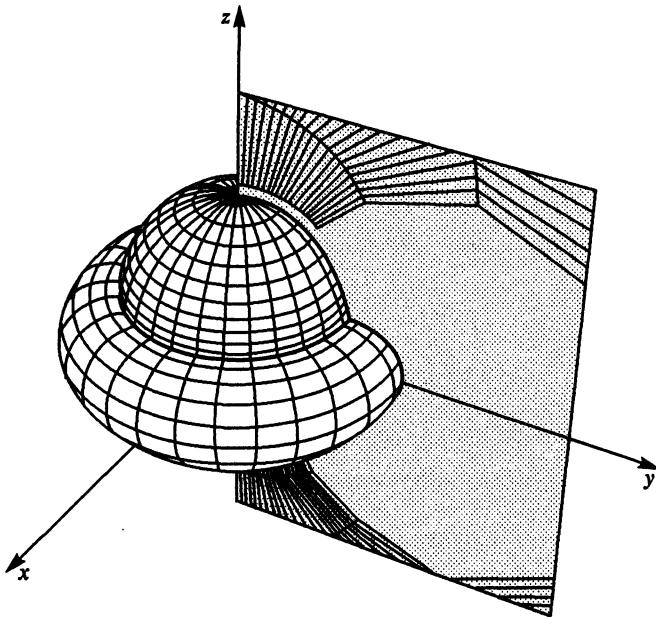


Рис. 7. Тороидальная система координат

1.13. Преобразовать выражение $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y}$ к новым координатам u, v , связанным с x, y соотношениями $u = x$, $v = x^2 + y^2$. Проверьте, действительно ли предложенная система u, v является криволинейной системой координат. Укажите ее область определения и область значений.

1.14. Преобразовать к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ выражения:

- а) $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$; б) $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y}$; в) $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$;
г) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (оператор Лапласа).

1.15. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ к новым координатам u, v , где $u = y + ax$, $v = y - ax$. При каких a предложенная замена дает регулярную систему координат?

1.16. Преобразовать выражение $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + k^2 z = 0$ к новым координатам u, v , где $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $y = uv$.

1.17. Преобразовать к сферическим координатам r, θ, φ , связанным с x, y, z равенствами $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$, следующие выражения:

- а) $\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2$; б) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

1.18. Пусть $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ — такая система координат, что $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u}$. Докажите, что выполнено соотношение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) \left(\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right).$$

1.19. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ в цилиндрической системе координат r, φ, z такой, что $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$.

1.20. Покажите, что при переходе от декартовых координат x, y к полярным координатам ρ, φ условия Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ принимают вид $\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$.

1.21. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = z^2$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

1.22. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = a \operatorname{ch} z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

1.23. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат u, v такой, что $w = e^z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

§ 2. Уравнения кривых и поверхностей

2.1. Точка M равномерно движется по прямой ON , равномерно вращающейся вокруг точки O . Составить уравнение траектории точки M (спираль Архимеда).

2.2. Прямая OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω . Точка M движется по прямой OL со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Составить уравнение траектории, описываемой точкой M (логарифмическая спираль).

2.3. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составить уравнение траектории точки M , жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра. Кривая, полученная при $d = a$, называется *циклоидой*, при $d < a$ — *укороченной циклоидой*, при $d > a$ — *удлиненной циклоидой*.

2.4. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R , оставаясь вне ее. Составить уравнение траектории точки M катящейся окружности (*эпициклоида*).

2.5. Окружность радиуса r катится без скольжения по окружности радиуса R , оставаясь внутри ее. Составить уравнение траектории точки M катящейся окружности (*гипоциклоида*).

2.6. Найти кривую, задаваемую уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $c < t < d$, зная, что $\mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{a}$, где $\lambda(t) > 0$ — непрерывная функция, \mathbf{a} — постоянный ненулевой вектор.

2.7. Найти кривую, задаваемую уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $-\infty < t < \infty$, если $\mathbf{r}''(t) = \mathbf{a}$ — постоянный ненулевой вектор.

2.8. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \times \mathbf{a}$, где \mathbf{a} — постоянный вектор. Выразить через \mathbf{a} и \mathbf{r}' следующие величины: а) $|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2$; б) $(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')$.

2.9. Плоская кривая задана уравнением $\mathbf{r}(t) = (\varphi(t), t\varphi(t))$. При каком условии это уравнение определяет прямую линию или ее часть?

2.10. Найти функцию $r = r(\varphi)$, зная, что это уравнение в полярных координатах на плоскости определяет прямую линию.

2.11. а) Доказать, что материальная точка M под действием центральной силы $\mathbf{F} = F\mathbf{r}$ описывает траекторию, лежащую в некоторой фиксированной плоскости, проходящей через начало координат. Отметим, что функция F может зависеть как от длины вектора \mathbf{r} , так и от его направления.

б) Составить уравнение движения точки M в этой плоскости в полярных координатах.

в) Показать, что для центральной силы \mathbf{F} , задаваемой формулой

$$\mathbf{F} = -k \frac{m\mathbf{r}}{r^3},$$

движение точки M происходит по кривой второго порядка. Здесь m — масса материальной точки M , r — длина вектора \mathbf{r} , а $k > 0$.

2.12. Движение электрона в постоянном магнитном поле определяется дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \text{const.}$$

Доказать, что траектория электрона является винтовой линией.

2.13. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — постоянный вектор.

2.14. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{e}),$$

где \mathbf{e} — фиксированный вектор единичной длины.

2.15. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = a\mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{r},$$

где число a и вектор \mathbf{e} постоянны.

2.16. Найти кривые, определяемые дифференциальным уравнением

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{2}|\mathbf{r}|^2 \mathbf{e} - \mathbf{r} \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle,$$

где \mathbf{e} — фиксированный вектор единичной длины.

2.17. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8, \quad y^2 = 2x?$$

2.18. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 + y^2 = 8x, \quad y^2 = \frac{x^3}{2-x}?$$

2.19. Под каким углом пересекаются кривые

$$x^2 = 4y, \quad y = \frac{8}{x^2 + 4}?$$

2.20. Найти натуральный параметр (или длину) следующих кривых:

- а) $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ — цепная линия;
- б) $y = x^{3/2}$;
- в) $y = x^2$;
- г) $y = \ln x$;
- д) $r = a(1 + \cos \varphi)$;
- е) $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$;
- ж) $\mathbf{r}(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$;
- з) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{3}(2 \cos t + \cos 2t), \frac{a}{3}(2 \sin t + \sin 2t) \right)$;
- и) $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$;
- к) $y = e^x$;
- л) $\mathbf{r}(t) = \left(a \left(\ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - \cos t \right), a \sin t \right)$.

2.21. Найти длину дуги кривой

$$\begin{aligned} x &= -f'(\alpha) \sin \alpha - f''(\alpha) \cos \alpha, \\ y &= f'(\alpha) \cos \alpha - f''(\alpha) \sin \alpha. \end{aligned}$$

2.22. Вокруг оси Oz вращается окружность $x = a + b \cos v$, $z = b \sin v$ ($0 < b < a$). Составить уравнение поверхности вращения.

2.23. Прямая движется поступательно с постоянной скоростью, пересекая другую прямую под прямым углом, и одновременно равномерно вращается вокруг этой прямой. Составить уравнение поверхности, которую описывает движущаяся прямая. Эта поверхность называется *прямым геликоидом*.

2.24. Составить уравнение поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ вокруг оси Ox . Эта поверхность называется *катеноидом*.

2.25. Составить уравнение поверхности, образованной вращением трактисы

$$\rho = \left(a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right) - a \sin t, a \cos t \right), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

вокруг ее асимптоты. Эта поверхность называется *псевдосферой*.

2.26. На круговом торе вращения, кроме параллелей и меридианов, являющихся плоскими окружностями, существует еще два семейства плоских окружностей, называемых *окружностями*

Виларсо. Они получаются пересечением тора его касательной плоскостью, касающейся тора в двух точках. Получить уравнения этих

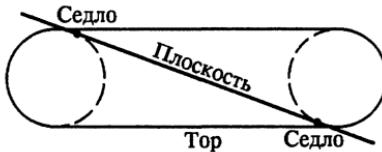


Рис. 8

окружностей, проверить, что все они имеют один и тот же радиус и пересекают все параллели тора под постоянным углом (см. рис. 8).

§ 3. Классические метрики на сфере и плоскости Лобачевского, их свойства

3.1. Вычислить метрики на стандартной единичной сфере в \mathbb{R}^3 в следующих координатах:

- в декартовых координатах x, y ;
- в сферических координатах θ, φ ;

в) в декартовых координатах u, v на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции из северного полюса сферы (см. рис. 9);

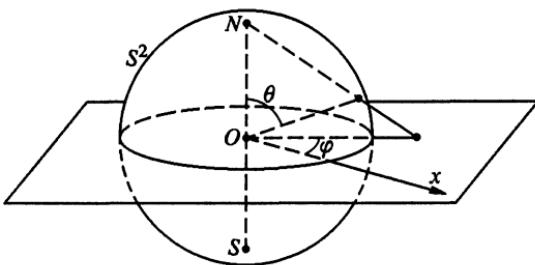


Рис. 9. Стереографическая проекция

г) в полярных координатах ρ, φ на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции (см. предыдущий пункт);

д) в комплексных координатах $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$ на плоскости $z = 0$, являющейся образом сферы при стереографической проекции.

3.2. Рассмотрим псевдоевклидово пространство с координатами t, x, y и со скалярным произведением $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2$.

Вычислить метрику псевдосферы мнимого радиуса $-t^2 + x^2 + y^2 = -1$ в следующих координатах:

а) в декартовых координатах x, y ;

б) в координатах φ, χ , где ρ, φ, χ — псевдосферические координаты в нашем псевдоевклидовом пространстве;

в) в декартовых координатах u, v на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы из ее южного полюса $(0, 0, -1)$ (см. рис. 10);

г) в полярных координатах r, φ на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы из ее южного полюса $(0, 0, -1)$;

д) в комплексных координатах $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ на плоскости $t = 0$, являющейся образом стереографической проекции псевдосферы;

е) от комплексных координат предыдущего пункта перейти к новым комплексным координатам в верхней полуплоскости при помощи дробно-линейного преобразования, переводящего круг единичного радиуса в верхнюю полуплоскость;

ж) для предыдущих двух пунктов нарисовать образы обеих компонент связности псевдосферы при ее указанных проекциях на плоскость;

з) доказать, что длина ρ отрезка прямой, соединяющего точки с радиус-векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} на верхней половине псевдосферы задается формулой $\operatorname{ch} \rho = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, где скалярное произведение вычисляется в псевдоевклидовом пространстве;

и) доказать, что расстояние ρ от точки с радиус-вектором \mathbf{a} на верхней половине псевдосферы до прямой, определяемой условием $\langle \mathbf{x}, \mathbf{e} \rangle = 0$, $|\mathbf{e}| = 1$, задается формулой $\operatorname{sh} \rho = |\langle \mathbf{a}, \mathbf{e} \rangle|$. Здесь скалярное произведение вычисляется в псевдоевклидовом пространстве.

3.3. В моделях метрики Лобачевского в единичном круге (модель Пуанкаре) и на верхней полуплоскости показать, что угол между пересекающимися кривыми равен углу между теми же кривыми в евклидовой метрике.

3.4. Доказать, что при стереографической проекции сферы S^2 на плоскость произвольная окружность переходит либо в прямую, либо в окружность.

3.5. Покажите что группа дробно-линейных преобразований, являющихся движениями метрики:

а) задачи 3.1д — изоморфна $SU(2)/\{\pm E\}$;

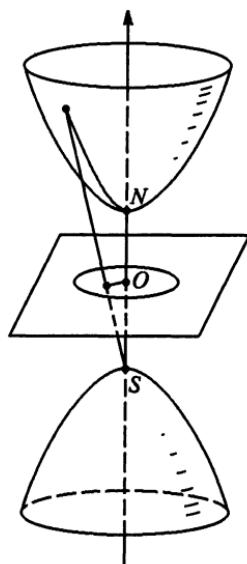


Рис. 10. Стереографическая проекция

- б) задачи 3.2д — изоморфна $SU(1, 1)/\{\pm E\}$;
 в) задачи 3.2е — изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm E\}$.

3.6. Показать, что группа дробно-линейных преобразований, являющихся движениями метрики плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости (см. задачу 3.2е) порождается преобразованиями $z \mapsto z + a$ и $z \mapsto -\frac{1}{z}$, где $a \in \mathbb{R}$.

3.7. Рассмотрим на плоскости Лобачевского произвольные прямые l_1 и l_2 с точками A_1, B_1 и A_2, B_2 на них соответственно, причем расстояние от A_1 до B_1 равно расстоянию от A_2 до B_2 . Показать, что существует движение, которое переводит:

- а) l_1 в l_2 ;
 б) l_1 в l_2 и A_1 в A_2 ;
 в) l_1 в l_2 , A_1 в A_2 и B_1 в B_2 .

3.8. Найти дробно-линейное преобразование верхней полуплоскости, являющееся движением плоскости Лобачевского, которое переводит:

- а) прямую $x^2 + y^2 = 1$ в прямую $x = 0$;
 б) прямую $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ и точку $(1, 2)$ в прямую $x = 3$ и точку $(3, 2)$.

3.9. Пусть точки плоскости Лобачевского $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ таковы, что $\rho(A_i, A_j) = \rho(B_i, B_j)$ для всех i и j . Показать, что существует единственное движение плоскости Лобачевского, которое переводит точку A_i в B_i , $i = 1, 2, 3$. Вывести отсюда, что группа всех движений плоскости Лобачевского порождается преобразованиями $z \mapsto z + a$, $z \mapsto -\frac{1}{z}$, $z \mapsto -\bar{z}$, где $a \in \mathbb{R}$.

3.10. а) Показать, что на плоскости Лобачевского существует единственная прямая, перпендикулярная данной и проходящая через данную точку.

б) Пользуясь предыдущим пунктом, определить симметрию относительно прямой на плоскости Лобачевского и показать, что это преобразование является движением.

- в) Найти формулу для симметрии относительно прямой

$$(x - 1)^2 + y^2 = 4.$$

- г) Найти формулу для симметрии относительно прямой $x = 0$.

3.11. а) Показать, что движение, заданное как дробно-линейное преобразование, разлагается в композицию четного числа симметрий относительно прямой. Показать, что можно обойтись двумя симметриями.

б) Показать, что остальные движения, т. е. не представимые в виде дробно-линейного преобразования, разлагаются в композицию нечетного числа симметрий относительно прямой.

3.12. Доказать, что группа всех изометрий плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости состоит из преобразований вида:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1;$$

$$z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = -1.$$

3.13. Доказать, что при произвольном дробно-линейном преобразовании комплексной плоскости $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, окружности и прямые переходят в окружности или прямые.

3.14. Доказать, что для любых попарно различных точек z_1, z_2, z_3 и попарно различных точек w_1, w_2, w_3 , принадлежащих расширенной комплексной плоскости, существует единственное дробно-линейное преобразование, отображающее z_i в w_i , $i = 1, 2, 3$.

3.15. Показать, что длина отрезка прямой, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки (см. рис. 11).

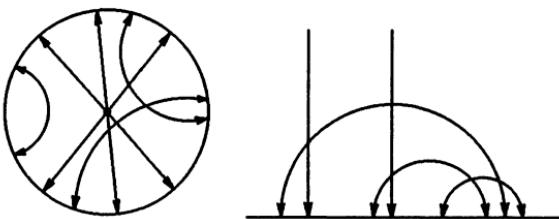


Рис. 11. Прямые на плоскости Лобачевского (модели в единичном круге и на верхней полуплоскости)

3.16. Доказать, что через любые две точки плоскости Лобачевского проходит единственная прямая (см. рис. 11).

3.17. Докажите, что в моделях метрики Лобачевского в единичном круге и на верхней полуплоскости окружности изображаются обычными окружностями.

3.18. Найдите длину окружности и площадь круга радиуса R на: а) плоскости Лобачевского; б) сфере радиуса 1. Сравните с формулами на плоскости.

3.19. а) Найти центр окружности в метрике Лобачевского на верхней полуплоскости, которая задается уравнением

$$x^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

б) Докажите, что при стереографической проекции сферы на плоскость окружности на сфере переходят в окружности или прямые.

в) Рассмотрим окружность $x^2 + (y - 2)^2 = 1$, являющуюся образом некоторой окружности на сфере при стереографической проекции (см. выше). Возьмем центр этой сферической окружности, лежащий на сфере. Найти его образ на плоскости.

3.20. Найдите середину отрезка AB на плоскости, где $A = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $B = (0,9; 0,3)$, в следующих метриках:

- метрике плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости;
- метрике сферы (при стереографической проекции).

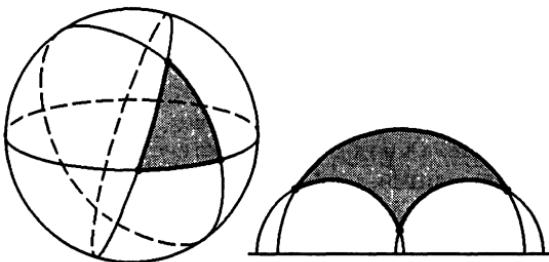


Рис. 12. Треугольники на плоскости Лобачевского и на сфере

3.21. Выразить площадь треугольника (см. рис. 12) через его углы: а) на сфере единичного радиуса; б) на плоскости Лобачевского.

3.22. Доказать для прямоугольного треугольника на плоскости Лобачевского формулы:

- | | |
|--|---|
| а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$; | б) $\operatorname{sh} b = \operatorname{sh} c \sin \beta$; |
| в) $\operatorname{th} a = \operatorname{th} c \cos \beta$; | г) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; |
| д) $\cos \alpha = \operatorname{ch} a \sin \beta$; | е) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg} \alpha$. |

Здесь c — длина стороны, противолежащей прямому углу.

3.23. Рассмотрим на сфере радиуса 1 прямоугольный треугольник ABC , у которого $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$, $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$. Доказать следующие соотношения:

- | | |
|--|--|
| а) $\cos c = \cos a \cos b$; | б) $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$; |
| в) $\sin a = \sin c \sin \alpha$; | г) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cos \beta$; |
| д) $\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$; | е) $\operatorname{tg} a = \sin b \operatorname{tg} \alpha$. |

3.24. Докажите теоремы косинусов для треугольников на плоскости Лобачевского:

- $\sin \beta \sin \gamma \operatorname{ch} a = \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma$;
- $\cos \alpha \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a$.

3.25. Докажите теоремы косинусов для треугольников на сфере единичного радиуса:

- $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$;
- $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$.

3.26. Докажите теоремы синусов для:

- плоскости Лобачевского:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma} = \frac{\sqrt{Q}}{\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma},$$

где $Q = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - 1$;

- сферы радиуса 1: $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$.

3.27. При каких целых n существуют правильные многоугольники с углом $\frac{2\pi}{n}$: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского?

3.28. Докажите, что на комплексной плоскости точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только тогда, когда двойное отношение $w = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_4}$ является вещественным числом.

3.29. Докажите, что на плоскости Лобачевского синус угла α в прямоугольном треугольнике равен отношению длины окружности радиуса, равного противолежащему катету, к длине окружности с радиусом, равным гипотенузе. То же самое для сферы.

3.30. Докажите, что в треугольнике с равными сторонами все углы: а) на плоскости Лобачевского меньше $\pi/3$; б) на сфере больше $\pi/3$.

3.31. Докажите следующие формулы для расстояния между точками A и B (см. рис. 13) в метрике плоскости Лобачевского на верхней полуплоскости:

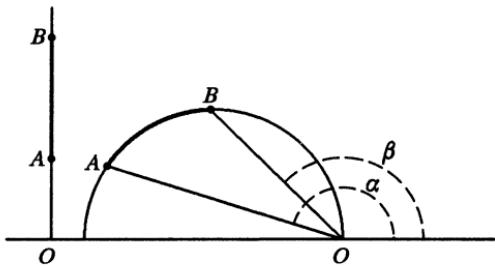


Рис. 13

- если они имеют одинаковую абсциссу, то $\rho(A, B) = \left| \ln \frac{OB}{OA} \right|$, где O — точка пересечения соединяющей их прямой с абсолютом;

б) если они имеют разные абсциссы, то $\rho(A, B) = \left| \ln \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} \right|$,

где O — точка пересечения абсолюта и прямой плоскости Лобачевского, проходящей через A и B , а α и β — углы между положительным направлением действительной оси и лучами OA и OB соответственно;

в) в общей ситуации: если z_1, z_2 произвольные точки верхней полуплоскости, то

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 + |(z_1 - \bar{z}_2)/(z_1 - z_2)|}{-1 + |(z_1 - \bar{z}_2)/(z_1 - z_2)|} \right),$$

или, что то же самое,

$$\rho(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{1 + |(z_1 - z_2)/(z_1 - \bar{z}_2)|}{1 - |(z_1 - z_2)/(z_1 - \bar{z}_2)|} \right).$$

3.32. Верно ли, что вокруг любого треугольника можно описать окружность: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского?

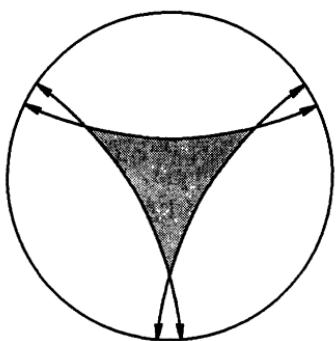


Рис.14. Правильный треугольник на плоскости Лобачевского

- а) плоскости Лобачевского в ее модели на верхней полуплоскости;
б) сфере в координатах стереографической проекции.

3.37. Выразить радиус описанной около треугольника окружности через его стороны и углы: а) на плоскости Лобачевского; б) на сфере.

§ 4. Теория кривых

Вообще говоря, мы будем считать, что кривизна плоской кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — натуральный параметр, определяется формулой $k = |\ddot{\mathbf{r}}| = |\dot{\mathbf{v}}|$. Нормаль к кривой при этом задается формулой $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{v}}/|\dot{\mathbf{v}}|$.

3.33. Покажите, что на плоскости Лобачевского через точку, лежащую внутри угла, не всегда можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла.

3.34. Сравните сторону правильного шестиугольника с радиусом описанной около него окружности: а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского.

3.35. Найдите площадь правильного треугольника со стороной a : а) на плоскости Лобачевского (см. рис. 14); б) на сфере.

3.36. Найдите площадь круга и длину окружности, задаваемой уравнением $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 1$, на:

Она не определена в точках, в которых $k = 0$. Более того, в точках перегиба поле нормалей разрывно, т. е. левый и правый пределы различны (см. рис. 15).

В некоторых задачах о глобальном поведении кривой удобнее пользоваться непрерывным полем нормалей. В таких случаях поле нормалей можно определить, поворачивая в каждой точке вектор скорости на угол

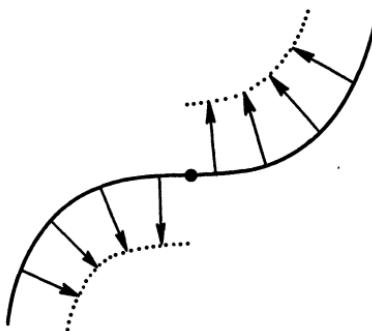


Рис. 15

$\pi/2$ в положительном направлении. В частности, в каждой точке кривой пара векторов $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{n}(s)$ образует положительно ориентированный репер на плоскости. Формулы Френе остаются в силе, при этом кривизна k может менять знак.

4.1. Вычислить кривизну следующих кривых:

- $y = \sin x$ в вершине (синусоида);
- $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ (цепная линия);
- $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската);
- $r = a(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида, см. рис. 16);
- $r = a\varphi$ (спираль Архимеда, см. рис. 17);
- $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (астроида, см. рис. 18);
- $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (циклоида, см. рис. 19).

4.2. Вычислить для лемнискаты Бернулли, заданной в полярных координатах (r, φ) уравнением $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, интегралы

$$\int_{\gamma} k(s) ds \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} |k(s)| ds,$$

где s — длина дуги, а $k(s)$ — кривизна кривой. См. пояснение в начале параграфа.

4.3. Найти кривизну эллипса с полуосами a и b в его вершинах.

4.4. Найти кривизну кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

4.5. Кривые заданы своим дифференциальным уравнением $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$. Найти их кривизну.

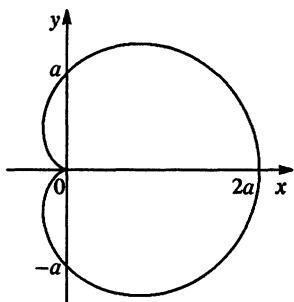


Рис. 16. Кардиоида

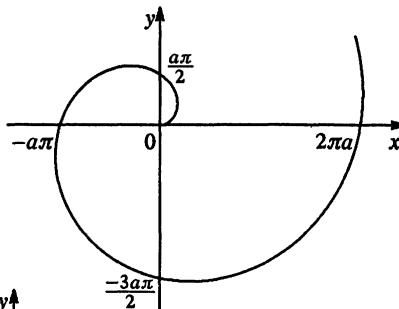


Рис. 17. Спираль Архимеда

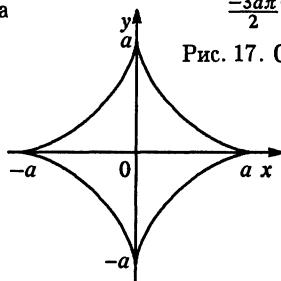


Рис. 18. Астроида

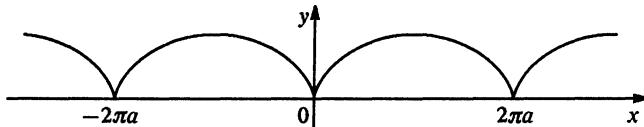


Рис. 19. Циклоида

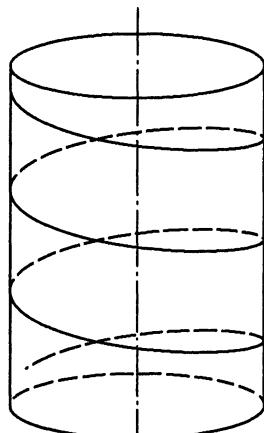


Рис. 20. Винтовая линия

4.6. Вывести формулу для кривизны плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$.

4.7. Заменить параметр t на винтовой линии (см. рис. 20)

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad b > 0,$$

на натуральный параметр s .

4.8. Заменить параметр t на кривой

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

на натуральный.

4.9. Заменить параметр t на кривой $\mathbf{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t, t)$ на натуральный.

4.10. Найти кривизну и кручение в произвольной точке следующих линий:

а) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2});$ б) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2);$

в) $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t);$ г) $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3);$

д) $\mathbf{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t).$

4.11. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$x^2 + z^2 - y^2 = 1,$$

$$y^2 - 2x + z = 0,$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

4.12. Найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнениями

$$x + \operatorname{sh} x = \sin y + y,$$

$$z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1,$$

в точке $M(0, 0, 0)$.

4.13. Вывести формулы для вычисления кривизны и кручения кривой, заданной уравнениями $y = y(x)$, $z = z(x)$, и найти репер Френе этой кривой.

4.14. Данна кривая

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 - t, t^3).$$

Найти репер Френе. Вычислить кривизну и кручение этой кривой.

4.15. а) Доказать, что кривизна и кручение винтовой линии постоянны.

б) Определить, при каком значении h винтовая линия $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = ht$ имеет наибольшее кручение.

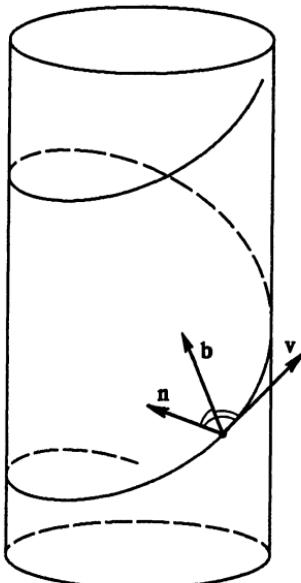


Рис. 21. Репер Френе винтовой линии

в) Найти репер Френе для винтовой линии (см. рис. 21)

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht).$$

г) Найти все кривые с постоянными кривизной k и кручением κ .

4.16. При каком условии центр кривизны винтовой линии лежит на том же цилиндре, что и сама линия?

4.17. Пусть γ — плоская кривая. Обозначим через S площадь области, ограниченной кривой γ и секущей, проведенной на расстоянии h от касательной в некоторой фиксированной точке $P \in \gamma$. Выразить $\lim_{h \rightarrow 0} (S^2/h^3)$ через кривизну кривой.

4.18. Доказать, что оператор $Y : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{x}$, действующий на векторах \mathbb{R}^3 , записывается кососимметрической матрицей. Напомним, что $\mathbf{y} \times \mathbf{x}$ — векторное произведение векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} . Найти связь коэффициентов этой матрицы с координатами вектора \mathbf{y} . Показать, что для любой кососимметрической матрицы найдется вектор \mathbf{y} , что ее действие как линейного оператора в \mathbb{R}^3 представится в виде $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \times \mathbf{x}$. Вектор \mathbf{y} называется вектором Дарбу кососимметрической матрицы.

4.19. Пусть Y, Z — матрицы операторов векторного умножения на векторы \mathbf{y}, \mathbf{z} . Доказать, что матрица оператора векторного умножения на $\mathbf{y} \times \mathbf{z}$ равна $[Y, Z] = YZ - ZY$.

4.20. Пусть кривизна k регулярной пространственной кривой $\mathbf{r}(s)$ обращается в нуль в конечном числе точек. Предположим, что на кривой есть гладкое векторное поле $\mathbf{n}^*(s)$ такое, что в тех точках, где $k \neq 0$, оно совпадает либо с $\mathbf{n}(s)$, либо с $-\mathbf{n}(s)$, где $\mathbf{n}(s)$ — главная нормаль кривой. Определим $\mathbf{b}^*(s)$ формулой $\mathbf{b}^* = \mathbf{v} \times \mathbf{n}^*$, а кривизну k и кручение κ из формул $\dot{\mathbf{v}} = k\mathbf{n}^*$, $\dot{\mathbf{b}}^* = -\kappa\mathbf{n}^*$ (где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(s)$). Доказать, что тогда формулы Френе будут верны и в точках, где $k = 0$, но при этом кривизна пространственной кривой может оказаться знакопеременной.

Натуральным уравнением плоской кривой называют уравнение одного из следующих видов:

- 1) $k = k(s)$,
- 2) $F(k, s) = 0$,
- 3) $k = k(t), s = s(t)$.

Если известно натуральное уравнение кривой, то параметризация кривой может быть задана в виде

$$x = \int \cos \alpha(s) ds, \quad y = \int \sin \alpha(s) ds,$$

$$\text{где } \alpha(s) = \int k(s) ds.$$

4.21. Составить натуральные уравнения кривых:

- $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t;$
- $y = x^{3/2};$
- $y = x^2;$
- $y = \ln x;$
- $y = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right);$
- $y = e^x;$
- $x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \quad y = a \sin t;$
- $r = a(1 + \cos \varphi);$
- $x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t);$
- $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).$

4.22. Найти параметрические уравнения кривых, зная их натуральные уравнения (здесь $R = 1/k$):

- $R = as;$
- $\frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1;$
- $Rs = a^2;$
- $R = a + \frac{s^2}{a};$
- $R^2 = 2as.$

4.23. В каких случаях кривая имеет следующие параметрические уравнения: $x = s, \quad y = y(s), \quad z = z(s)$, где s — натуральный параметр?

4.24. Рассмотрим «перевернутую» выпуклостью вниз циклоиду

$$x(t) = R(t + \pi + \sin t), \quad y(t) = R - R \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Здесь точка $t = 0$ соответствует самой нижней точке циклоиды. Ускорение свободного падения обозначим через g . Поместим в циклоиду материальную точку массы m . Показать, что период колебаний материальной точки, движущейся по циклоиде без трения в поле силы тяжести, не зависит от ее начального положения. Написать дифференциальное уравнение для расстояния от материальной точки до нижней точки циклоиды.

4.25. Найти плоскую кривую, у которой касательная образует постоянный угол α с радиус-вектором кривой.

4.26. Пусть p — расстояние от начала радиус-векторов до касательной к кривой γ в точке M , а l — расстояние от точки O до точки M (см. рис. 22). Доказать, что

$$k = \left| \frac{dp}{l dl} \right|.$$

4.27. Пусть γ — гладкая регулярная замкнутая кривая. Доказать, что

$$\int_{\gamma} r \, dk + \int_{\gamma} \kappa b \, ds = 0.$$

4.28. Пусть плоская выпуклая дуга L_1 касается плоской строго выпуклой дуги L_2 , оставаясь по одну сторону от нее. Доказать, что в точке касания кривизна кривой L_1 не меньше, чем кривизна кривой L_2 .

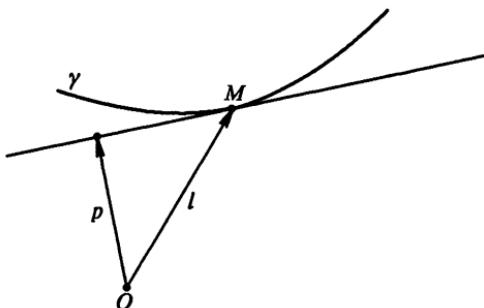


Рис. 22

4.29. В некоторой точке $r_0 = r(s_0)$ кривой $r = r(s)$ имеем: $k_0 = k(s_0) \neq 0$, $\dot{k}(s_0) \neq 0$. Рассмотрим уравнение соприкасающейся окружности $|\rho - r_0 - R_0 n_0| = R_0$ в этой точке исходной кривой, $R_0 = \frac{1}{k_0}$. Здесь ρ — радиус-вектор точки на соприкасающейся окружности. Доказать, что соприкасающаяся окружность пересекает данную кривую в окрестности указанной точки, т. е.

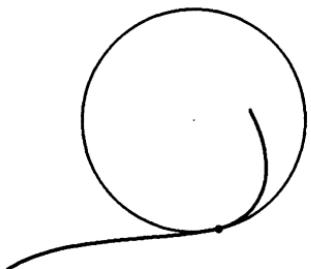


Рис. 23. Кривая и соприкасающаяся окружность

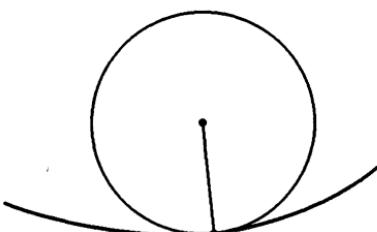


Рис. 24. Кривая и соприкасающаяся окружность

малая дуга кривой, соответствующая значениям параметра из интервала $(s_0 - \varepsilon, s_0)$, и малая дуга кривой, соответствующая значениям параметра из интервала $(s_0, s_0 + \varepsilon)$, лежат по разные стороны от соприкасающейся окружности (см. рис. 23).

Пояснение. Порядок касания кривой и ее соприкасающейся окружности равен 3. Наложенные на кривую условия гарантируют, что в данной точке порядок касания в точности равен 3, а не выше.

4.30. В некоторой точке кривой выполнены условия: $k_0 \neq 0$, $\dot{k}_0 = 0$, $\ddot{k}_0 \neq 0$. Доказать, что соприкасающаяся окружность кривой в этой точке не пересекает кривую в достаточно малой окрестности этой точки (см. рис. 24).

4.31. Пусть α — угол между постоянным вектором a и касательным вектором v к кривой (см. рис. 25). Составить параметрическое уравнение кривой, если известна зависимость:

- а) $R = f(\alpha)$, где R — радиус кривизны кривой; б) $\alpha = f(R)$;
- в) $s = f(\alpha)$, где s — дуга кривой; г) $\alpha = f(s)$.

4.32. Кривая, по которой сфера пересекается с круглым цилиндром в два раза меньшего радиуса, причем цилиндр проходит через центр сферы, называется кривой Вивиани (см. рис. 26).

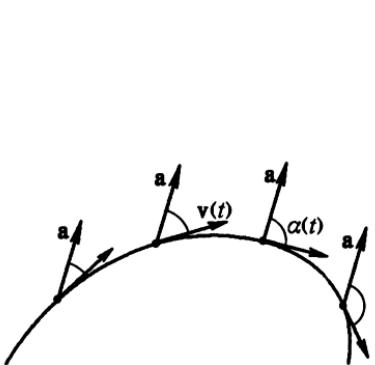


Рис. 25

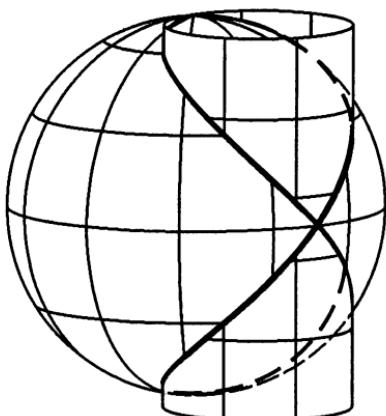


Рис. 26. Кривая Вивиани

Составить уравнение кривой Вивиани в неявной и параметрической форме. Найти уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, главной нормали и соприкасающейся плоскости. Найти также репер Френе, кривизну и кручение.

4.33. Доказать, что линия

$$x^2 = 2az, \quad y^2 = 2bz$$

является плоской.

4.34. Доказать, что если в некоторой точке M кривой C кривизна и кручение отличны от нуля, то части кривой, близкие к точке M , лежат по разные стороны от соприкасающейся плоскости.

4.35. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой проходят через одну и ту же точку, то кривая плоская на каждом участке бирегулярности (т. е. на участке, где $k \neq 0$ во всех точках).

4.36. Выразить $\frac{d}{ds}\mathbf{r}$, $\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}$, $\frac{d^3}{ds^3}\mathbf{r}$ через \mathbf{v} , \mathbf{n} , \mathbf{b} , k и κ .

4.37. Доказать, что $\left(\mathbf{v}, \mathbf{b}, \frac{d}{ds}\mathbf{b}\right) = \kappa$, где (\cdot, \cdot, \cdot) обозначает смешанное произведение трех векторов.

4.38. Вычислить $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{b}\right)$.

4.39. Доказать, что $\left(\frac{d}{ds}\mathbf{v}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{v}, \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{v}\right) = k^5 \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k}\right)$.

4.40. Доказать, что если главные нормали кривой образуют постоянный угол с направлением вектора \mathbf{e} , то

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{k^2 + \kappa^2}{k(d/ds)(\kappa/k)} \right) + \kappa = 0,$$

и обратно, если выполнено последнее соотношение, то главные нормали кривой образуют постоянный угол с направлением некоторого вектора. Найти этот вектор.

4.41. Доказать, что если кривая бирегулярна (т. е. $k(s) \neq 0$ при всех s) и все нормальные плоскости кривой содержат вектор \mathbf{e} , то данная кривая плоская.

4.42. Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости кривой γ , не являющейся прямой линией, содержат один и тот же вектор, то кривая плоская (на любом связном участке бирегулярности кривой).

4.43. а) Доказать, что если кривая регулярна и $k = 0$, то это — прямая линия.

б) Доказать, что если $\mathbf{b} = \text{const}$, то кривая плоская. Напишите уравнение этой плоскости.

в) Доказать, что если $k \neq 0$ во всех точках кривой, то кривая плоская в том и только в том случае, когда κ обращается в нуль повсюду.

г) Привести пример неплоской кривой, у которой $\kappa \equiv 0$.

4.44. Доказать, что если соприкасающиеся плоскости кривой имеют один и тот же наклон (т. е. все они ортогональны некоторому фиксированному ненулевому вектору \mathbf{e}), то кривая плоская.

4.45. Для каких функций $f(t)$ кривые:

$$\text{а) } \mathbf{r}(t) = (e^t, 2e^{-t}, f(t)); \quad \text{б) } \mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, f(t))$$

будут плоскими?

4.46. Доказать, что кривые плоские и найти их плоскости:

a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t} \right);$

б) $\mathbf{r}(t) = (a_1 t^2 + b_1 t + c_1, a_2 t^2 + b_2 t + c_2, a_3 t^2 + b_3 t + c_3).$

4.47. Пусть \bar{s} — длина касательного сферического образа кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ (см. рис. 27):

$$\bar{s} = \int_0^s |\mathbf{v}'(\sigma)| d\sigma.$$

a) Доказать, что $\frac{d\bar{s}}{ds} = k$.

б) Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы касательный сферический образ был регулярной кривой.

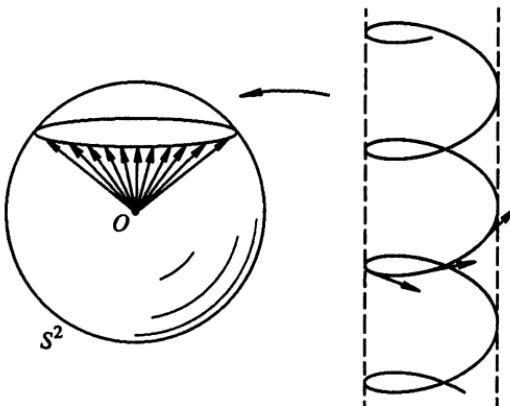


Рис. 27. Касательный сферический образ кривой

в) Доказать, что для замкнутой кривой выполняется неравенство $\int k ds \geqslant 2\pi$.

4.48. Пусть s^* — длина вдоль нормального (соответственно, би-нормального) сферического образа кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. Доказать, что

$$\frac{ds^*}{ds} = \sqrt{k^2 + \kappa^2} \quad (\text{соответственно, } |\kappa|).$$

Сферическая кривая — это кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, для которой существуют постоянный вектор \mathbf{m} и действительное число R такие, что

$$\langle \mathbf{r}(t) - \mathbf{m}, \mathbf{r}(t) - \mathbf{m} \rangle = R^2.$$

4.49. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$, то $\mathbf{r}(s)$ — сферическая кривая тогда и только тогда, когда

$$\frac{\kappa}{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dk/ds}{\kappa k^2} \right).$$

4.50. Пусть неплоская кривая γ имеет постоянную отличную от нуля кривизну и $\kappa \neq 0$. Рассмотрим γ^* — множество центров ее кривизны. Доказать, что кривизна γ^* также постоянна. Найти кручение γ^* .

Пусть \mathbf{m} — постоянный вектор, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — некоторая кривая, $c(s) = |\mathbf{r}(s) - \mathbf{m}|^2$ и a — некоторое положительное число. Говорят, что кривая $\mathbf{r}(s)$ имеет в точке $s = s_0$ сферический контакт j -го порядка со сферой радиуса a с центром в точке \mathbf{m} , если

$$c(s_0) = a^2, \quad c'(s_0) = c''(s_0) = \dots = c^{(j)}(s_0) = 0, \quad c^{(j+1)}(s_0) \neq 0.$$

4.51. Если $k \neq 0$, выразить первые три производные функции $c(s)$ (определение см. выше) через $\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, k, \kappa$ и их производные.

4.52. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, $k \neq 0$, $\kappa \neq 0$ и $\rho = 1/k$, $\sigma = 1/\kappa$. Предположим, что $\rho^2 + (\rho'\sigma)^2 = a^2 = \text{const}$, $a > 0$. Доказать, что образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ лежит на сфере радиуса a .

4.53. Доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет сферический контакт второго или более высокого порядка в точке $s = s_0$ тогда и только тогда, когда $k(s_0) > 0$ и радиус-вектор центра сферы задается формулой

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) + \lambda \mathbf{b}(s_0),$$

где λ — произвольное число.

4.54. Пусть $k(s_0) \neq 0$, $\kappa(s_0) \neq 0$. Доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет сферический контакт третьего или более высокого порядка в точке $s = s_0$ тогда и только тогда, когда центр сферы задается формулой

$$\mathbf{m} = \mathbf{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} \mathbf{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\kappa(s_0)} \mathbf{b}(s_0),$$

а ее радиус

$$R^* = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{(dk/ds)^2}{k^4\kappa^2}}.$$

4.55. Доказать, что для любой замкнутой кривой на сфере существует точка, в которой кручение кривой равно 0.

4.56. Пусть гладкая регулярная кривая касается в точке M некоторой окружности Γ , центр которой расположен на том же нормальном к кривой луче, что и центр круга кривизны. Показать, что:

а) если кривая в окрестности точки M расположена вне (внутри) окружности Γ , то радиус кривизны кривой не меньше (не больше) радиуса R окружности Γ ;

б) если радиус кривизны кривой больше (меньше) R , то кривая в окрестности M лежит вне (внутри) Γ ;

в) если окружность Γ совпадает с окружностью кривизны и в точке M радиус кривизны кривой имеет локальный максимум (минимум), то кривая в окрестности M лежит внутри (вне) окружности Γ .

4.57. Пусть регулярная гладкая простая замкнутая кривая L на плоскости всюду имеет положительную кривизну. Доказать, что L является выпуклой в целом. Получить то же самое утверждение в предположении неотрицательности кривизны.

4.58. Может ли точка двигаться по регулярной кривой так, что величина скорости движения пропорциональна длине пройденного с начала движения пути?

§ 5. Риманова метрика

5.1. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей:

а) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ (сфера, рис. 28);

б) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \sin u \cos v, c \sin v)$ (эллипсоид, рис. 29);

в) $\mathbf{r}(u, v) = (av \cos u, bv \sin u, cv)$ (конус, рис. 30);

г) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, cv)$ (цилиндр, рис. 31).

5.2. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей (здесь s — натуральный параметр на кривой $\rho(s)$):

а) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{e}$, $\mathbf{e} = \text{const}$ (цилиндрическая поверхность, рис. 32);

б) $\mathbf{r}(s, v) = v \rho(s)$ (коническая поверхность);

в) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{e}(s)$ ($|\mathbf{e}(s)| = 1$) (линейчатая поверхность, рис. 33);

г) $\mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + \mathbf{n}(s) \cos \varphi + \mathbf{b}(s) \sin \varphi$ (каналовая поверхность, рис. 34);

д) $\mathbf{r}(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v))$ (поверхность вращения);

е) $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos v) \cos u, (a + b \cos v) \sin u, b \sin v)$ (топ);

ж) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ (геликоид);

з) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{n}(s)$ (поверхность главных нормалей);

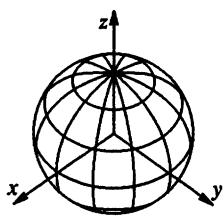


Рис. 28. Сфера

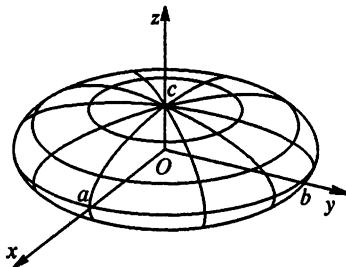


Рис. 29. Эллипсоид

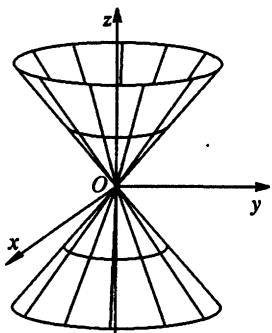


Рис. 30. Конус

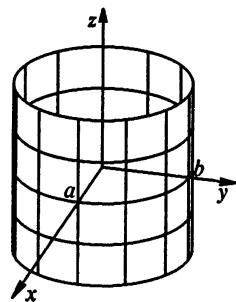


Рис. 31. Цилиндр

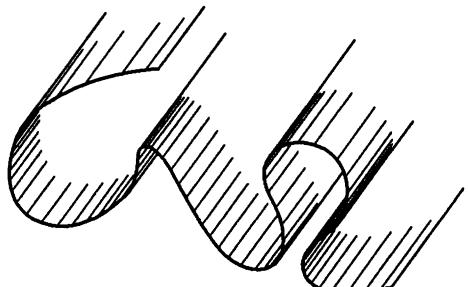


Рис. 32. Цилиндрическая поверхность

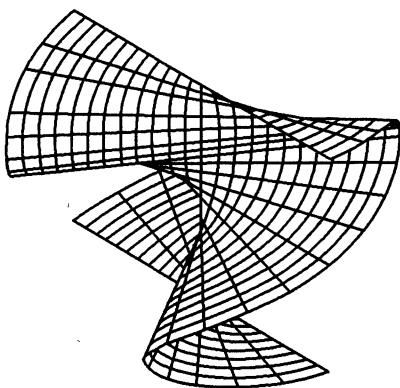


Рис. 33. Линейчатая поверхность

и) $\mathbf{r}(s, \lambda) = \rho(s) + \lambda \mathbf{b}(s)$ (поверхность бинормалей);

к) $\mathbf{r}(z, \varphi) = (a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \cos \varphi, a \operatorname{ch} \frac{z}{a} \sin \varphi, z)$ (катеноид, рис. 35).

5.3. Найдите первую квадратичную форму поверхности (псевдосферы Бельтрами)

$$x = a \sin u \cos v, \quad y = a \sin u \sin v, \quad z = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right),$$

где $u \neq \pi/2$, $a = \text{const}$ (см. рис. 36).

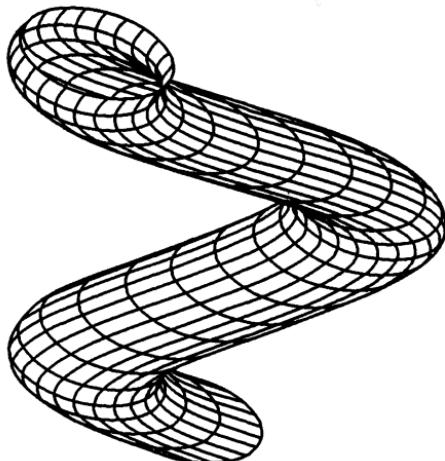


Рис. 34. Каналовая поверхность

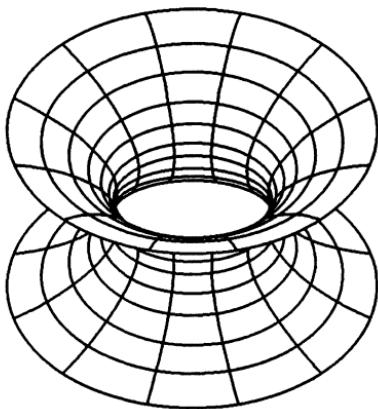


Рис. 35. Катеноид

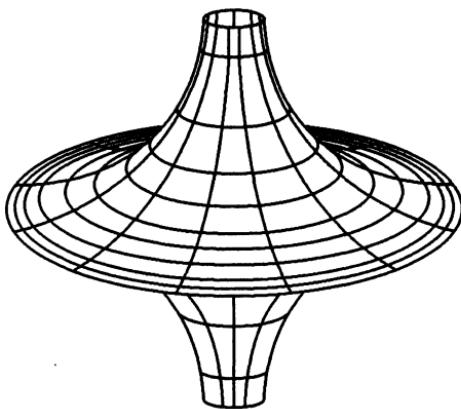


Рис. 36. Псевдосфера Бельтрами

5.4. Найдите угол между линиями $v = u + 1$ и $v = 3 - u$ на поверхности $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = u^2$.

5.5. На плоскости с координатами (u, v) дана метрика $ds^2 = du^2 + 2dv^2$. Найдите угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$.

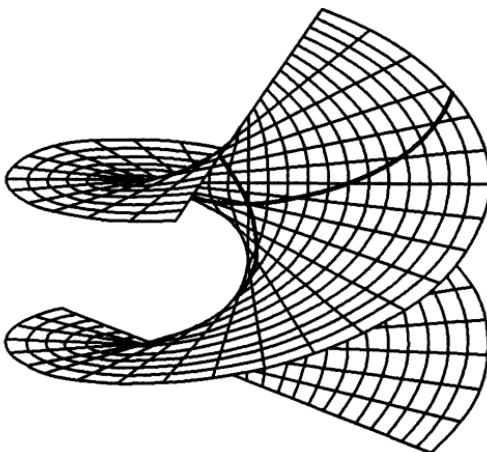


Рис. 37. Две линии на геликоиде

5.6. На поверхности $(u \cos v, u \sin v, av)$ найти угол между пересекающимися кривыми (см. рис. 37)

$$u + v = 0, \quad u - v = 0.$$

5.7. Найдите угол между линиями $v = 2u + 1$ и $v = -2u + 1$ на плоскости с координатами (u, v) , если метрика задается матрично-значной функцией

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.8. Проверьте, что на плоскости с координатами (u, v) матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} 1 + v^2 & -uv \\ -uv & 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

задает метрику. Найдите длину кривой $u = v$.

5.9. Проверить, что матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & uv \\ uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

задает некоторую метрику в единичном круге на плоскости с координатами (u, v) :

а) в этой метрике найти длину кривой $-1 < u < 1, v = 0$;

б) в этой же метрике найти длину кривой S_α : $u^2 + v^2 = \alpha = \text{const}$. Найти угол, под которым кривая $v = ku$ пересекает кривые S_α .

5.10. Проверить, что матрично-значная функция

$$G = \frac{R^2}{1 - u^2 - v^2} \begin{pmatrix} 1 - v^2 & -uv \\ -uv & 1 - u^2 \end{pmatrix}$$

на плоскости с координатами (u, v) задает некоторую метрику в единичном круге. В этой метрике найти длину кривой $-1 < u < 1$, $v = 0$.

5.11. Проверить, что на плоскости с координатами (x, y) матрично-значная функция

$$G = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2 + y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2 + y^2)^4 \end{pmatrix}$$

задает метрику. Вычислите длину кривой $x^2 + y^2 = \alpha$, где α — некоторое фиксированное число. Вычислить, под каким углом эти линии пересекаются с кривыми $y = kx$.

5.12. Найдите угол пересечения линий $u + 2v = 0$ и $4u - v = 0$ на прямом геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

5.13. На поверхности

$$x = u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right), \quad y = v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right), \quad z = 2uv$$

найти угол между координатными линиями.

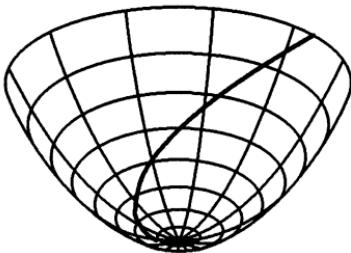


Рис. 38



Рис. 39. Линии на параболоиде вращения

5.14. Найти уравнения кривых, которые делят пополам углы между координатными линиями параболоида вращения (см. рис. 38, 39)

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \frac{1}{2}u^2.$$

5.15. Найти на поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$$

кривые, пересекающие кривые $v = \text{const}$ под постоянным углом θ (см. рис. 40).

5.16. Найти кривые, пересекающие прямолинейные образующие гиперболического параболоида $xy = az$ под прямыми углами.

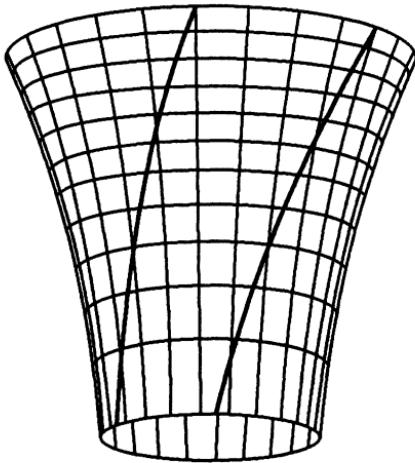


Рис. 40. Локсадромии

5.17. Кривая, расположенная на сфере и пересекающая все меридианы сферы под данным углом, называется локсадромией



Рис. 41. Локсадромия на сфере

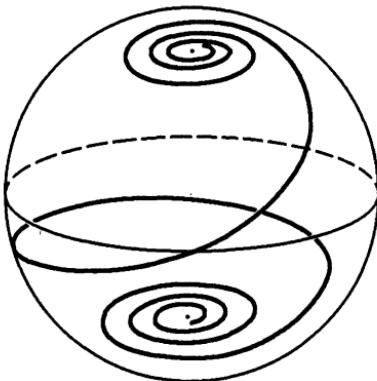


Рис. 42. Локсадромия на сфере

(см. рис. 41, 42). Составить уравнение локсадромии. Найти векторы \mathbf{v} , \mathbf{n} , \mathbf{b} репера Френе этой кривой в произвольной точке, вычислить ее кривизну и кручение.

5.18. Написать уравнение локсодромии в полярных координатах стереографической проекции сферы на плоскость.

5.19. Пусть первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2;$$

а) найти периметр криволинейного треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm \frac{1}{2}av^2, \quad v = 1;$$

б) найти углы этого криволинейного треугольника;

в) вычислить площадь треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

5.20. Данна поверхность $\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v)$. Найти:

а) площадь криволинейного треугольника $0 \leq u \leq \operatorname{sh} v, 0 \leq v \leq v_0$ (см. рис. 43);

б) длины сторон этого треугольника;

в) углы этого треугольника.

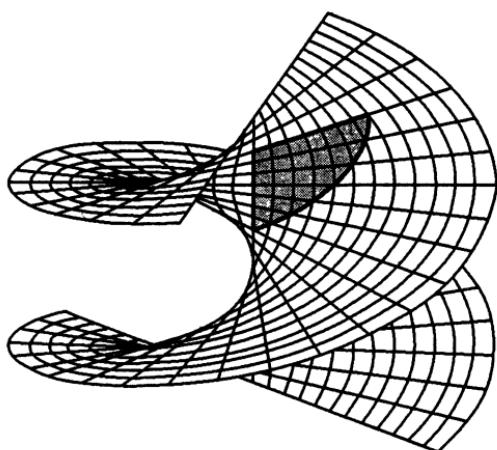


Рис. 43. Треугольник на геликоиде

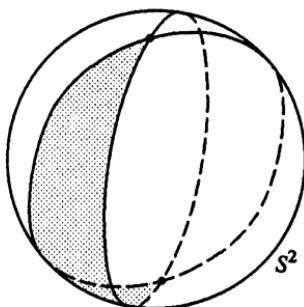


Рис. 44. Сферический двуугольник

5.21. Сферический двуугольник — это фигура, образованная двумя большими полуокружностями, имеющими общие концы (см. рис. 44). Вычислить площадь S сферического двуугольника с углом α при вершине.

5.22. Вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности, образован тор. Радиус окружности r , расстояние от прямой до центра окружности R , $R > r$. Найти площадь тора в индуцированной метрике.

5.23. Доказать, что отображение, являющееся конформным и сохраняющим площадь, является локальной изометрией.

5.24. Зафиксируем на плоскости некоторую точку. Найти все конформные преобразования плоскости, оставляющие эту точку на месте.

5.25. Написать общий вид конформного отображения сферы S : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ на себя с условием сохранения ориентации и неподвижности северного и южного полюсов.

5.26. Доказать, что деформация гиперболического параболоида, определяемая следующими формулами, сохраняет площадь:

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = \frac{\sin t}{2}(u^2 - v^2) + uv \cos t. \end{cases}$$

5.27. Доказать, что поверхностью вращения, локально изометричной геликоиду

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \sin v, u \cos v, av),$$

является катеноид.

Пояснение. На самом деле, верен более общий факт. А именно, после разрезания катеноида по меридиану полученная поверхность мо-

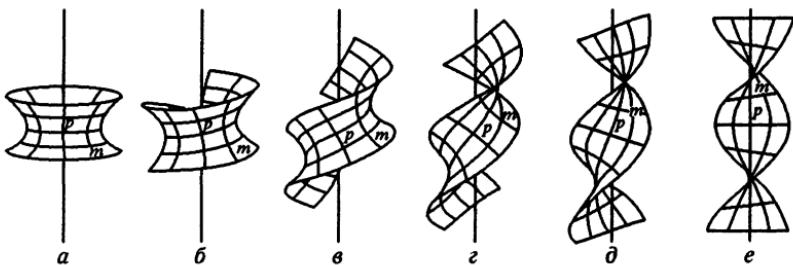


Рис. 45. Изгибание катеноида на часть геликоида

жет быть изогнута, как показано на рис. 45, так, что получится часть геликоида.

5.28. Показать, что винтовая поверхность (коноид)

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = \rho + v$$

локально изометрично отображается на гиперболоид вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = \sqrt{r^2 - 1},$$

если соответствие точек устанавливается уравнениями

$$\varphi = v + \operatorname{arctg} \rho, \quad r^2 = \rho^2 + 1.$$

5.29. Показать, что винтовая поверхность

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v, \quad z = a \left(\ln \frac{\rho}{a} + v \right)$$

локально изометрично отображается на поверхность вращения

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = a \sqrt{2} \ln (r + \sqrt{r^2 - a^2}).$$

5.30. Показать, что всякая винтовая поверхность

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = F(u) + av$$

локально изометрично отображается на поверхность вращения так, что винтовые линии переходят в параллели.

5.31. а) Доказать, что любая изометрия \mathbb{R}^n (даже локальная) задается линейным отображением $x \mapsto Ax + x_0$.

б) В условиях пункта а) доказать, что A — ортогональная матрица.

5.32. Доказать, что любая цилиндрическая поверхность локально изометрична плоскости.

5.33. Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.

5.34. Существует ли изометрическое отображение области на прямом круговом цилиндре, заданной в виде $x^2 + y^2 = R^2$, $0 \leq z \leq H$, на какую-либо область на выпуклой конической поверхности?

§ 6. Вторая квадратичная форма, гауссова и средняя кривизны

В этом параграфе средней кривизной называется сумма главных кривизн.

6.1. Вычислить вторую квадратичную форму следующих поверхностей:

а) $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, R \sin u)$ (сфера);

б) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)$ (эллипсоид вращения);

в) $\mathbf{r}(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u)$ (топ);

г) $\mathbf{r}(u, v) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right)$ (катеноид);

д) $\mathbf{r}(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right) \right)$;

е) $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ (прямой геликоид);

ж) $xyz = a^3$.

6.2. Доказать, что при каждой параметризации плоскости ее вторая квадратичная форма равна нулю.

6.3. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй.

6.4. Данна поверхность вращения

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = (x(u), \rho(u) \cos \varphi, \rho(u) \sin \varphi).$$

а) Найти вторую квадратичную форму.

б) Найти гауссову кривизну K в произвольной точке поверхности. Выяснить зависимость знака K от направления выпуклости меридиана.

в) Вычислить кривизну K в частном случае $\rho(u) = u$,

$$x(u) = \pm \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \sqrt{a^2 - u^2} \right), \quad a > 0$$

(псевдосфера). Эта поверхность называется также поверхностью Бельтрами.

Доказать, что поверхность Бельтрами локально изометрична плоскости Лобачевского.

г) Найти среднюю кривизну H в произвольной точке поверхности вращения.

д) В частном случае $x(u) = u$ выбрать функцию $\rho = \rho(u)$ так, чтобы $H = 0$ на всей поверхности.

е) Найти главные кривизны поверхности вращения, не вычисляя ее вторую форму.

6.5. Доказать, что у поверхности, полученной вращением параболы вокруг ее директрисы, отношение главных кривизн постоянно.

6.6. Доказать, что если у поверхности тождественно равны нулю гауссова и средняя кривизны, то это поверхность является плоскостью или ее частью.

6.7. Данна кривая $\rho = \rho(s)$ с натуральным параметром s , кривизной $k = k(s) \neq 0$ и кручением $\kappa = \kappa(s) \neq 0$. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ — орт касательной к этой кривой. Для поверхности, образованной касательными к данной кривой, т. е.

$$\mathbf{r}(s, u) = \rho(s) + u\mathbf{v}(s), \quad u > 0,$$

найти кривизны K и H .

6.8. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности:

а) $z = f(x, y)$; б) $x = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

6.9. Найти гауссову и среднюю кривизну поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$.

6.10. Показать, что поверхность

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(\sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, a \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \right)$$

является катеноидом. Найти ее вторую форму.

6.11. Найти главные радиусы кривизны поверхности $y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}$.

6.12. Найти главные радиусы кривизны поверхности

$$x = \cos v - u \sin v, \quad y = \sin v + u \cos v, \quad z = u + v.$$

6.13. Вычислить гауссову и среднюю кривизны винтовой поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u + v.$$

6.14. Вычислить гауссову и среднюю кривизны поверхности

$$x = 3u + 3uv^2 - u^3, \quad y = v^3 - 3v - 3u^2v, \quad z = 3(u^2 - v^2).$$

6.15. Найти главные кривизны и главные направления:

а) геликоида $(u \cos v, u \sin v, kv)$;

б) катеноида $\left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right)$;

в) поверхности $z = xy$ в точке $(1, 1, 1)$.

6.16. Для поверхности $(u^2 + v^2, u^2 - v^2, uv)$ найти главные кривизны в точке P : $(u, v) = (1, 1)$. Найти кривизну нормального сечения в точке P , касающегося кривой $u = v^2$.

6.17. Пусть поверхность в \mathbb{R}^3 задана функцией $\mathbf{r}(u, v)$. Рассмотрим выражение $d\mathbf{n}^2 = \langle d\mathbf{n}, d\mathbf{n} \rangle$, где $\mathbf{n}(u, v)$ — вектор единичной нормали к поверхности. Проверить, что это выражение является квадратичной формой относительно дифференциалов du, dv . Эта форма называется *третьей квадратичной формой поверхности*. Выразить ее через первую и вторую формы поверхности, а также через гауссову и среднюю кривизны.

6.18. Показать, что сферическое отображение минимальной поверхности является конформным, и обратно, если сферическое отображение некоторой гладкой регулярной поверхности является конформным, то эта поверхность либо минимальная, либо является сферой (частью сферы).

6.19. Доказать, что на линейчатой поверхности или всюду $K = 0$, или всюду $K < 0$. Кроме того, доказать, что на линейчатой поверхности $K = 0$ тогда и только тогда, когда поверхность — развертывающаяся.

6.20. Доказать, что на неразвертывающейся линейчатой поверхности кривизна поверхности при уходе точки в бесконечность вдоль любой образующей стремится к нулю.

6.21. Показать, что средняя кривизна геликоида (задача 6.1) равна нулю.

6.22. Пусть S — некоторая заданная поверхность. Отложим на нормалих к поверхности S в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность

S^* , «параллельную» поверхности S (см. рис. 46). Если поверхность S задана в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, то поверхность S^* задается в виде

$$\rho = \mathbf{r}(u, v) + a\mathbf{n}(u, v),$$

где $\mathbf{n}(u, v)$ — единичный вектор нормали к S .

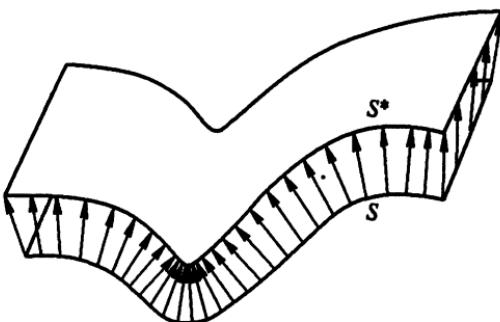


Рис. 46. Параллельные поверхности

Выразить коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S^* через коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности S . Доказать, что свойство параллельности двух поверхностей взаимно.

6.23. При каких длинах отрезков, отложенных по нормалиям, поверхность, параллельная данной, будет регулярной?

6.24. Выразить гауссову кривизну K^* поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности.

6.25. Выразить среднюю кривизну H^* поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , через гауссову и среднюю кривизны поверхности.

6.26. а) Доказать, что у параллельных поверхностей гауссова и средние кривизны связаны соотношением

$$\frac{H^2 - 4K}{K^2} = \frac{H^{*2} - 4K^*}{K^{*2}}.$$

б) Составить уравнение минимальной поверхности S^* , «параллельной» поверхности S , если для поверхности S отношение $H/K = \text{const}$.

в) Данна поверхность постоянной средней кривизны H . На всех ее нормалиах отложены отрезки длиной $1/H$. Доказать, что у построенной таким образом поверхности, «параллельной» данной, гауссова кривизна постоянна.

г) На всех нормалиах поверхности постоянной положительной гауссовой кривизны K отложены отрезки длиной $1/\sqrt{K}$. Доказать,

что средняя кривизна построенной таким образом поверхности постоянна. Вычислить эту среднюю кривизну.

6.27. Доказать, что на параллельных поверхностях точки, соответствующие друг другу вдоль нормалей, одновременно являются или не являются омбилическими.

6.28. Доказать, что если замкнутая поверхность имеет неравную нулю постоянную среднюю кривизну и положительную гауссову кривизну, то она сфера.

6.29. Доказать, что $H^2 \geq 4K$. Когда достигается равенство?

6.30. Пусть e_1 и e_2 — ортогональные касательные векторы единичной длины, приложенные к некоторой точке поверхности. Доказать, что

$$H = \text{II}(e_1, e_1) + \text{II}(e_2, e_2),$$

где $\text{II}(\cdot, \cdot)$ — вторая квадратичная форма поверхности.

6.31. На поверхности $z = x^2$ найти кривизну нормального сечения в точке $(2, 2, 4)$ в направлении кривой $y = x^2/2$, $z = x^2$.

6.32. На поверхности $z = 2z^2 + 9y^2$ найти кривизну нормального сечения в начале координат в направлении вектора, составляющего с осью Ox угол $\pi/4$.

6.33. Предположим, что две поверхности M_1 и M_2 пересекаются по кривой γ . Пусть k — кривизна γ , λ_i — нормальные кривизны γ в M_i и θ — угол между нормальными M_1 и M_2 . Доказать, что

$$k^2 \sin^2 \theta = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \cos \theta.$$

6.34. Исходя из того, что эллипс можно спроектировать в окружность, с помощью теоремы Менье и формулы Эйлера найти кривизны эллипса в его вершинах.

6.35. Доказать, что кривизна кривой на поверхности положительной кривизны нигде не обращается в нуль.

6.36. Доказать, что для того чтобы точка на поверхности была сферической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $K \neq 0$, $4K = H^2$.

6.37. Определить тип точек тора, эллипсоида, гиперболоида, параболоида вращения.

6.38. Определить тип точек на поверхностях:

а) $z = a^2x^4 + b^2y^4$; б) $z = x^4 + y^4 + x^2y^2$; в) $y = x^4$.

6.39. Доказать, что если метрика поверхности $g(u, v)$ в \mathbb{R}^3 записана в изотермических координатах, т. е. $ds^2 = \Lambda^2(du^2 + dv^2)$, то $\Delta g = -H\Lambda^2 n$, где n — нормаль к поверхности, а H — средняя кривизна.

6.40. Доказать, что если поверхность в \mathbb{R}^3 минимальна, то ее радиус вектор — гармоническая функция относительно конформных координат.

6.41. Доказать, что если гауссовые кривизны двух поверхностей постоянны и равны, то эти поверхности локально изометричны.

6.42. Показать, что существуют аналитически диффеоморфные аналитические поверхности, которые не изометричны, и тем не менее, их гауссовые кривизны в соответствующих точках равны. Другими словами, равенства гауссовых кривизн двух поверхностей в соответствующих точках недостаточно даже для их локальной изометричности.

6.43. Найти гладкую регулярную и связную поверхность вращения, переходящую в себя под действием центральной симметрии относительно начала координат, гауссова кривизна которой постоянна и равна $K = -1$.

В задачах 6.44, 6.45, 6.47 через $g_{ij} dx^i dx^j$ обозначается первая квадратичная форма поверхности, а через $b_{ij} dx^i dx^j$ — вторая квадратичная форма. Кроме того, (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}) . По индексу, появляющемуся сверху и снизу подразумевается суммирование.

6.44. Что представляет собой поверхность, для которой $g^{kl} b_{ik} = \delta_i^l$?

6.45. а) Показать, что коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности равны $b_{ik} b_{jl} g^{kl}$.

б) Доказать, что $g^{ij} \gamma_{ij} = H^2 - 2K$, где H — средняя, K — гауссова кривизна поверхности, а γ_{ij} — коэффициенты третьей квадратичной формы поверхности.

6.46. Что представляют собой поверхности, на которых первая и третья квадратичная форма пропорциональны?

6.47. Доказать, что средняя кривизна поверхности определяется формулой $H = g^{ij} b_{ij}$.

6.48. Пусть k_1, \dots, k_m — нормальные кривизны поверхности в направлениях, разбивающие плоскость на углы π/m . Доказать, что $k_1 + \dots + k_m = mH/2$.

6.49. Доказать, что если на гладкой регулярной поверхности есть три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является плоскостью или областью на ней.

6.50. Доказать, что если на гладкой регулярной поверхности есть два различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность является поверхностью 2-го порядка.

6.51. а) Показать, что омбилическая точка, в которой гауссова кривизна равна нулю, обязательно является точкой уплощения.

б) Показать, что на поверхностях отрицательной кривизны нет омбилических точек.

6.52. Показать, что среднюю кривизну H поверхности можно рассматривать как интегральное среднее всех нормальных кри-

визн, т. е.

$$H = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi,$$

где $k(\varphi)$ — нормальная кривизна в направлении φ , отсчитываемом от одного из главных направлений.

§ 7. Многообразия

7.1. Доказать, что n -мерная сфера S^n , задаваемая в \mathbb{R}^{n+1} уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$, является гладким многообразием.

а) Построить атлас карт.

б) Построить атлас из минимального числа карт.

в) Построить атлас из минимального числа карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

г) Построить минимальный атлас из карт, гомеоморфных диску, такой, что всевозможные непустые пересечения любого числа карт гомеоморфны диску.

7.2. Доказать, что 2-мерный тор T^2 , заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxz и не пересекающейся с осью Oz , является гладким многообразием.

а) Построить атлас карт.

б) Построить атлас из минимального числа карт.

в) Построить атлас из минимального числа карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

г) Построить минимальный атлас из карт, гомеоморфных диску, такой, что всевозможные непустые пересечения любого числа карт гомеоморфны диску.

7.3. Доказать, что n -мерное проективное пространство \mathbb{RP}^n является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

7.4. Доказать, что n -мерное комплексное проективное пространство \mathbb{CP}^n является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

7.5. Доказать, что:

а) график непрерывной функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ является гладким многообразием;

б) график гладкой функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ является гладким подмногообразием в \mathbb{R}^{n+1} .

в) Привести пример непрерывной функции $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$, график которой не является гладким подмногообразием в \mathbb{R}^{n+1} .

7.6. Ввести структуру гладкого многообразия на множестве всех прямых в \mathbb{R}^2 . Доказать, что полученное многообразие гомеоморфно листу Мёбиуса.

7.7. Установить диффеоморфизм S^2 и \mathbb{CP}^1 .

7.8. Доказать, что формулы

$$y^k = \frac{x^k}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$x^k = \frac{y^k}{\sqrt{\varepsilon^2 + (y^1)^2 - \dots - (y^n)^2}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

задают взаимно обратные диффеоморфизмы \mathbb{R}^n и шара радиуса ε с центром в начале координат пространства \mathbb{R}^n .

7.9. Показать, что стереографическая проекция сферы на касательную плоскость из полюса, противоположного точке касания, является диффеоморфизмом всюду, за исключением полюса проекции.

7.10. Доказать, что у композиции гладких отображений матрица Якоби является произведением матриц Якоби сомножителей.

7.11. Доказать, что ранг матрицы Якоби не зависит от выбора локальной системы координат.

7.12. Вычислить ранг матрицы Якоби отображения

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x, 0).$$

7.13. Доказать, что из гладкости функции в некоторой карте следует ее гладкость в произвольной системе координат.

7.14. Пусть тор $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ образован вращением окружности вокруг оси (стандартное вложение). Доказать, что координаты x, y, z — гладкие функции на торе T^2 .

7.15. Пусть тор $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ стандартно вложен в \mathbb{R}^3 , функция $f: T^2 \rightarrow S^2$ ставит в соответствие каждой точке $p \in T^2$ вектор единичной длины, нормальный к тору T^2 в точке p . Записать отображение f в координатах. Доказать, что f — гладкое отображение.

7.16. Доказать, что отображение $f: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$, ставящее в соответствие точке p на сфере S^2 прямую, проходящую через начало координат и точку p , является гладким отображением. Записать отображение f в координатах.

7.17. Рассмотрим $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ с координатами (z, w) . Пусть поверхность M^2 является пересечением трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$ и конуса $|z| = |w|$.

а) Доказать, что M^2 диффеоморфна двумерному тору T^2 .

б) Доказать, что индуцированная на M^2 метрика локально евклидова.

в) Доказать, что каждая из частей трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$, выделяемая неравенствами $|z| \leq |w|$ или $|z| \geq |w|$, диффеоморфна полноторию, т. е. $S^1 \times D^2$.

7.18. Рассмотрим в \mathbb{R}^5 двумерную поверхность, задаваемую формулами:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{xy}{\sqrt{3}}, & x_2 &= \frac{yz}{\sqrt{3}}, & x_3 &= \frac{xz}{\sqrt{3}}, \\x_4 &= \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, & x_5 &= \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6},\end{aligned}$$

где $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Она называется *поверхностью Веронезе*. Доказать, что поверхность Веронезе является гладким вложением \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^5 .

7.19. Доказать, что группа $SO(2)$ диффеоморфна окружности. Какому многообразию диффеоморфна группа $O(2)$?

7.20. Доказать, что группа $SO(3)$ гомеоморфна проективному пространству \mathbb{RP}^3 . Построить диффеоморфизм.

7.21. Доказать, что $SO(3)$ является гладким подмногообразием в пространстве \mathbb{R}^9 всех квадратных матриц третьего порядка.

7.22. Доказать, что $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n : \sum x_i^2 = 0, \sum |x_i|^2 = 2\}$ есть множество единичных касательных векторов к сфере единичного радиуса.

7.23. Доказать, что множество единичных касательных векторов к S^2 гомеоморфно $SO(3)$. Построить диффеоморфизм.

7.24. Рассмотрим в $SO(3)$ подмножество матриц $A = (a_{ij})$ таких, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} + 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказать, что это подмножество диффеоморфно \mathbb{RP}^2 .

7.25. Доказать, что уравнение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ задает в $\mathbb{C}P^2$ подмногообразие диффеоморфное S^2 .

7.26. Доказать, что группа $SU(2)$ диффеоморфна сфере S^3 .

7.27. Доказать, что группы $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ являются гладкими многообразиями.

7.28. Группу $O(n)$ можно рассматривать как подмножество \mathbb{R}^{n^2} . Доказать, что $O(n)$ лежит в сфере S^{n^2-1} радиуса \sqrt{n} .

7.29. Рассмотрим «комплексную окружность» $X = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^2 + z_2^2 = 1\}$. Доказать, что пространство X гомеоморфно цилиндру без границы.

7.30. Найти касательное пространство к группе $SO(3)$ в точке

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.31. Найти координаты вектора $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$, касающегося сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в точке $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$:

- а) в сферических координатах;
- б) в координатах стереографической проекции.

7.32. Найти координаты произвольного вектора, касающегося большого круга единичной сферы, лежащего в плоскости

$$x + 2y - 3z = 0:$$

- а) в сферических координатах;
- б) в координатах стереографической проекции.

7.33. Для проективной плоскости \mathbb{RP}^2 в аффинных картах найти координаты вектора скорости кривой $r(t) = (\cos t : \sin t : t)$ при $t = \pi/4$.

7.34. Доказать, что объединение двух координатных осей в \mathbb{R}^2 не является многообразием.

7.35. Являются ли гладкими многообразиями следующие кривые на плоскости: а) треугольник; б) два треугольника, имеющие только одну общую точку — вершину?

7.36. Будут ли гладкими подмногообразиями граница квадрата и восьмерка в \mathbb{R}^2 ?

7.37. а) Доказать, что при $n \neq m$ пространства \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m не диффеоморфны.

б) Доказать, что гладкие многообразия разных размерностей не диффеоморфны.

7.38. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

7.39. Привести пример нехаусдорфова многообразия.

Две гладкие структуры (два гладких атласа) на многообразии называются согласованными, если каждая карта одного атласа согласована со всеми картами другого атласа, и наоборот.

7.40. Привести пример многообразия с двумя несогласованными гладкими структурами.

7.41. Доказать, что две гладкие структуры на многообразии согласованы тогда и только тогда, когда совпадают пространства гладких функций для этих гладких структур.

7.42. Рассмотрим на \mathbb{R}^1 следующие отображения $\varphi_k: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $\varphi_k(x) = x^{2k-1}$, где k — целое положительное число. Доказать, что каждое φ_k задает карту на \mathbb{R}^1 с областью определения, совпадающей со всей прямой \mathbb{R}^1 . Доказать, что эти карты попарно не согласованы. В частности, это означает, что атлас A_k , задаваемый картой φ_k , не согласован с атласом A_l при $l \neq k$. Казалось бы, отсюда следует, что на \mathbb{R}^1 существует бесконечное множество попарно неэквивалентных гладких структур. На самом деле это не так: доказать, что все многообразия (\mathbb{R}^1, A_k) попарно диффеоморфны.

7.43. Доказать, что любое гладкое многообразие имеет такой атлас, что каждая карта гомеоморфна евклидовому пространству.

7.44. Показать, что на плоскости \mathbb{R}^2 можно ввести такую структуру гладкого двумерного многообразия, что множество $y = x^2$ не будет гладким одномерным подмногообразием.

7.45. Доказать, что произведение гладких многообразий является гладким многообразием, причем проекции — гладкие регулярные отображения.

7.46. Доказать, что овеществление n -мерного комплексного многообразия является гладким вещественным ориентируемым многообразием размерности $2n$.

7.47. Доказать, что край гладкого многообразия M^n является гладким $(n-1)$ -мерным многообразием. При этом в качестве гладкого атласа края многообразия можно взять ограничения карт многообразия на его край. Показать, что край — ориентируемое многообразие, независимо от того, ориентируемо ли M^n .

7.48. Показать, что окружность, двумерная сфера, тор — ориентируемые многообразия.

7.49. Проверить, ориентируемы ли следующие многообразия:
а) сфера S^n ; б) тор T^n .

7.50. Доказать, что лист Мёбиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна — неориентируемые многообразия.

7.51. Построить такое погружение листа Мёбиуса в трехмерное евклидово пространство, чтобы его граничная окружность была стандартно вложена в двумерную евклидову плоскость.

7.52. Доказать, что двумерное многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда оно не содержит в себе листа Мёбиуса.

7.53. Доказать, что лист Мёбиуса не гомеоморден прямому произведению отрезка на окружность.

7.54. Доказать, что декартово произведение двух многообразий тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентируемы оба сомножителя.

7.55. Доказать теорему о существовании римановой метрики на любом гладком многообразии: а) с помощью разбиения единицы; б) с помощью теоремы Уитни.

7.56. Пусть $i: N \rightarrow M$ — погружение, а g — риманова метрика на M . Доказать, что i^*g — риманова метрика на N . Почему это неверно для произвольного гладкого отображения i ?

7.57. а) Доказать, что два кольца, склеенные, как показано на рис. 47, образуют поверхность, гомеоморфную тору с выброшенным маленьким диском.

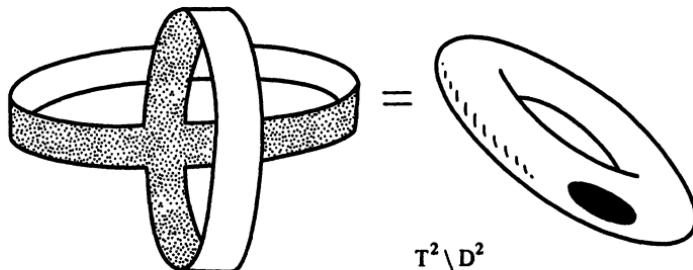


Рис. 47

б) Доказать, что поверхность, полученная склейкой двух листов Мёбиуса, как показано на рис. 48, гомеоморфна листу Мёбиуса с дыркой или, что то же самое, проективной плоскости с двумя дырками.

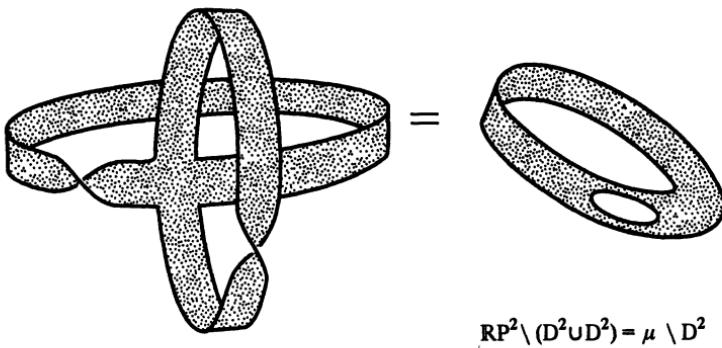


Рис. 48

в) Доказать, что поверхность, изложенная на рис. 49, гомеоморфна тору с дыркой.

г) Доказать, что поверхность, изложенная на рис. 50, гомеоморфна бутылке Клейна с дыркой.

д) Доказать, что поверхность, изложенная на рис. 51, гомеоморфна бутылке Клейна с дыркой.

е) Чему гомеоморфна поверхность, изложенная на рис. 52?

ж) Чему гомеоморфна поверхность, изложенная на рис. 53?

7.58. Доказать, что велосипедная камера с оторванным ниппелем (тор с дыркой) может быть вывернута наизнанку.

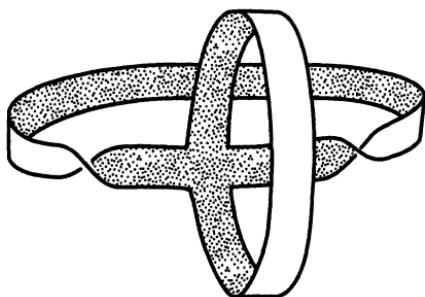


Рис. 49

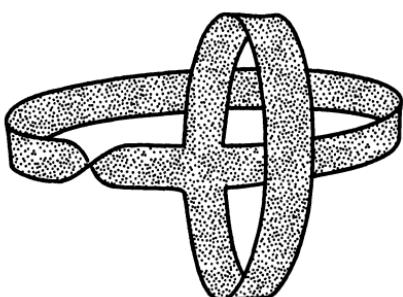


Рис. 50

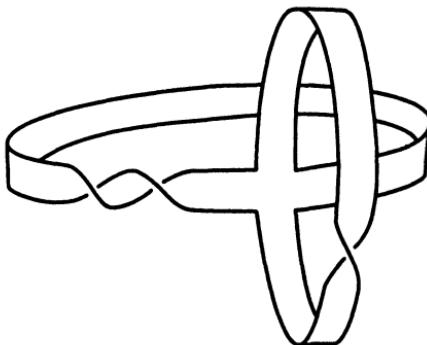


Рис. 51

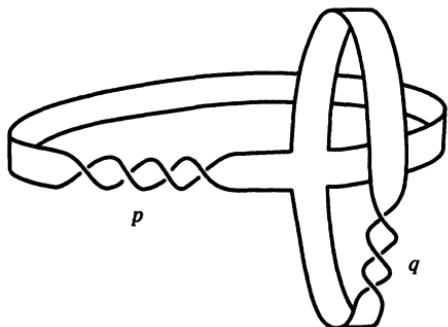


Рис. 52

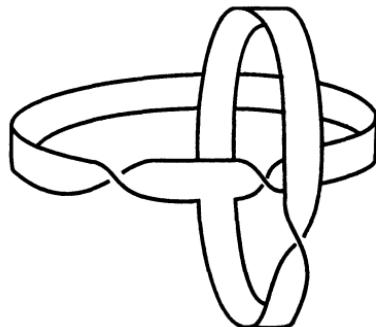


Рис. 53

7.59. Рассечь стандартный тор вращения в \mathbb{R}^3 двумя параллельными плоскостями так, чтобы часть тора, заключенная между

ними, была гомеоморфна поверхности с краем, показанной на рис. 54. Доказать, что эта поверхность гомеоморфна тору с двумя дырками.

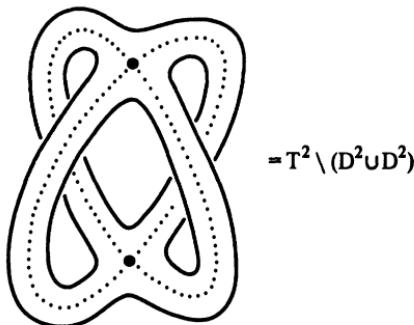


Рис. 54

7.60. Доказать, что поверхность, изображенная на рис. 55, гомеоморфна бутылке Клейна с двумя дырками.

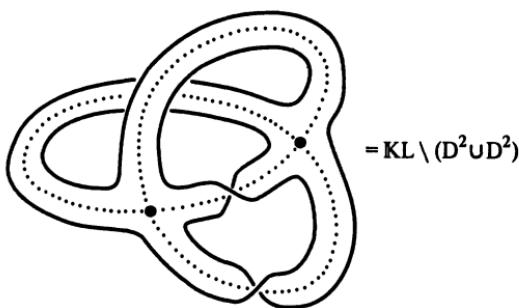


Рис. 55

7.61. Доказать, что плоскость с приклеенной к ней ручкой гомеоморфна двум кольцам, склеенным, как показано на рис. 56.

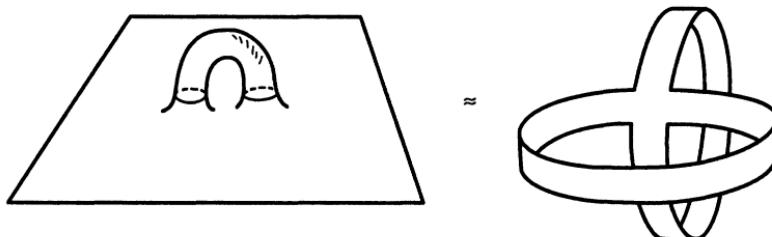


Рис. 56

7.62. Доказать, что две из трех поверхностей, изображенных на рис. 57, гомеоморфны проективной плоскости с тремя дырками, а оставшаяся — бутылке Клейна с двумя дырками.

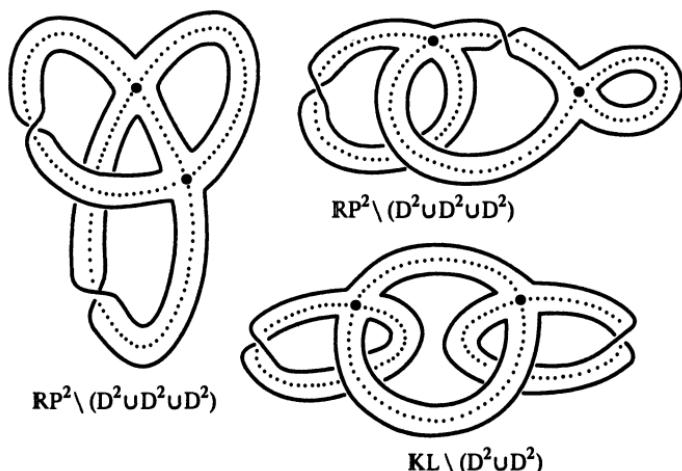


Рис. 57

7.63. Провести на торе такой разрез, чтобы получилась поверхность, изображенная на рис. 58.

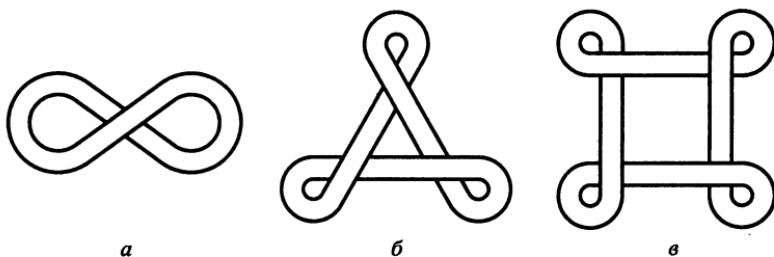


Рис. 58

7.64. Рассмотрим две поверхности в \mathbb{R}^3 с нарисованными на них кривыми, изображенные на рис. 59. Можно ли путем гладкой деформации поверхности в \mathbb{R}^3 без самопересечений и разрывов (изотопией) перевести одну поверхность в другую так, чтобы кривая, нарисованная на одной поверхности, переходила в кривую, нарисованную на другой.

7.65. Рассмотрим две поверхности в \mathbb{R}^3 с нарисованными на них парами кривых, изображенные на рис. 60. Можно ли путем гладкой деформации поверхности в \mathbb{R}^3 без самопересечений

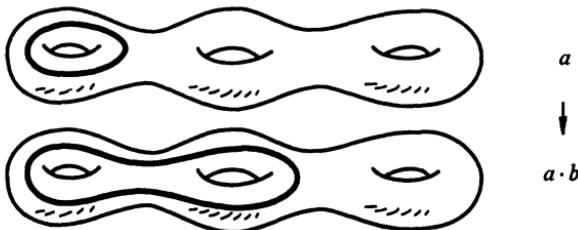


Рис. 59

и разрывов (изотопией) перевести одну поверхность в другую так, чтобы кривые, нарисованные на одной поверхности, переходили в кривые, нарисованные на другой.

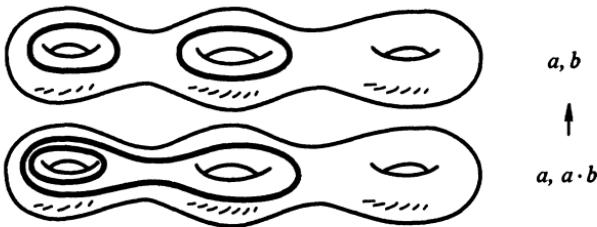


Рис. 60

7.66. Рассмотрим «топологического человека», т. е. сферу с двумя ручками.

а) Может ли топологический человек «расцепить» руки путем гладкой изотопии (см. рис. 61)?

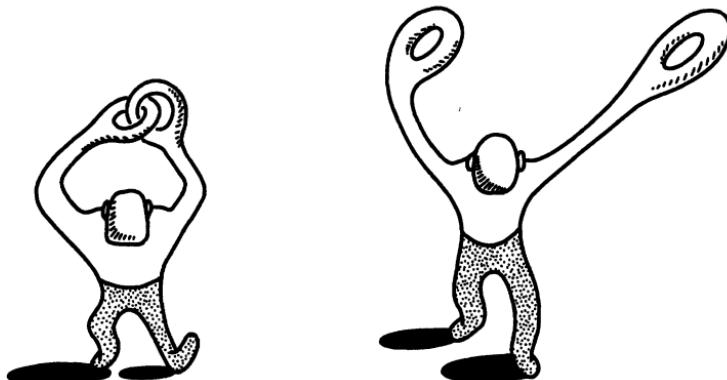


Рис. 61

б) Тот же вопрос при условии, что одна из рук зацеплена с окружностью (на руку надеты часы), рис. 62.

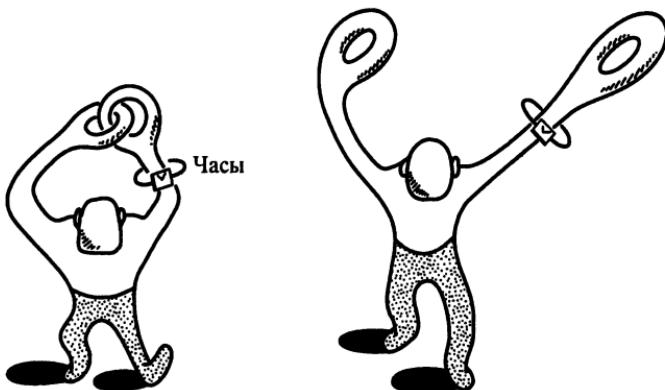


Рис. 62

7.67. Выяснить, является ли отображение прямой в плоскость с декартовыми координатами (x, y) вложением или погружением, если:

$$\text{а)} \quad x(t) = \frac{2+t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t+t^2}{1+t^2};$$

$$\text{б)} \quad x(t) = \frac{t^2}{t^2+1}, \quad y(t) = \frac{t^2+1}{t^2+2}.$$

7.68. Выяснить, является ли гладким подмногообразием в \mathbb{R}^3 с декартовыми координатами (x, y, z) множество, заданное уравнением:

$$\text{а)} \quad x^2(z-1) + y^2z = 0;$$

$$\text{б)} \quad z(x^2+y^2)^n = y^{2n}.$$

7.69. Выяснить, является ли гладким подмногообразием в \mathbb{R}^2 с декартовыми координатами (x, y) множество, заданное уравнением:

$$\text{а)} \quad x^4 + y^4 = 8xy^2;$$

$$\text{б)} \quad x^6 + 18x^3y - y^3 = 0.$$

7.70. Рассмотрим на двумерной сфере S^2 координаты стереографической проекции (u, v) . Является ли замыкание \overline{M} гладким подмногообразием в S^2 , если множество M задается уравнением:

$$\text{а)} \quad y^2 - x^3 + 2x^2 - x = 0;$$

$$\text{б)} \quad y^3 - x^3 + y - 2x = 0;$$

$$\text{в)} \quad (x^2 - y^2)^2 - 2x = 0;$$

$$\text{г)} \quad (x^2 - y^2)(x - y) + 1 = 0;$$

$$\text{д)} \quad (2x + y)^2(x + y) - x = 0.$$

§ 8. Тензоры

8.1. Определить валентность следующих тензоров:

а) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$;

б) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ в точках, где градиент функции f равен нулю;

в) T_j^i — компоненты матрицы линейного оператора векторного пространства;

г) T_{ij} — компоненты матрицы билинейной формы на векторном пространстве.

8.2. Пусть

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Показать, что $\{\delta_j^i\}$ образует тензор валентности $(1, 1)$. Также показать, что набор чисел δ_{ij} , заданный в каждой системе координат формулой

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

не является тензором типа $(0, 2)$.

8.3. Пусть $\{\xi^{ij}\}$ — тензор валентности $(2, 0)$. Показать, что числа η_{ij} , удовлетворяющие условию $\xi^{ij}\eta_{jk} = \delta_k^i$, образуют тензор валентности $(0, 2)$.

8.4. Пусть матрица $(g_{ij}(x))$ — симметрическая невырожденная положительно определенная в некоторой системе координат $x = (x^1, \dots, x^n)$. Доказать, что все ее свойства сохраняются при любой регулярной замене координат.

8.5. Привести пример, показывающий, что операция перестановки верхнего и нижнего индексов не является тензорной.

8.6. Показать, что операция, которая тензору $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ставит в соответствие набор чисел $S_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p}$ по формуле

$$S_{j_1 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} T_{j_2 \dots j_{q+1}}^{i_1 \dots i_p},$$

не является тензорной.

8.7. Пусть V_n^m — пространство всех тензоров типа (m, n) . Показать, что если $f: V_n^m \rightarrow V_q^p$ — линейное отображение тензорных пространств, то компоненты отображения образуют тензор. Определить его валентность.

8.8. Определить размерность тензорного пространства V_n^m .

8.9. Показать, что любой тензор валентности $(2, 0)$ однозначно разлагается в сумму симметрического и кососимметрического слагаемых. Привести пример тензора валентности $(3, 0)$, для которого это не верно.

8.10. Доказать, что операторы альтернирования и симметрирования являются проекторами в пространстве тензоров. Доказать, что если $n > 2$, то сумма этих операторов не равна 1. Привести пример тензора (при $n > 2$), лежащего в ядрах операторов альтернирования и симметрирования.

8.11. Доказать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования.

8.12. Доказать, что композиция операций альтернирования и симметрирования (в любом порядке) дает нулевой тензор для любого тензора типа $(0, k)$, где $k > 1$.

8.13. Пусть размерность пространства V равна n . Определить размерность пространства $\Lambda^k V$ кососимметрических тензоров.

8.14. Пусть размерность пространства V равна n . Определить размерность пространства $S^k V$ симметрических тензоров.

8.15. Описать все инвариантные тензоры рангов 0, 1, 2, 3, 4. Здесь тензор называется инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат.

8.16. Показать, что смешанное и векторное произведения в \mathbb{R}^3 задаются тензорами типа $(0, 3)$ и $(1, 2)$ соответственно. Выписать их компоненты в произвольном базисе. Показать, что компоненты этих тензоров связаны операцией опускания и поднимания индексов.

8.17. Выразить через коэффициенты характеристического многочлена оператора (c_j^i) величины $\det c$, c_i^i , $c_i^j c_j^i$, $c_i^j c_j^k c_k^i$ и т. д.

8.18. Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций.

8.19. Пусть дан набор величин $S^{i_1 \dots i_p}$. Доказать, что если при некотором фиксированном q набор величин

$$S^{i_1 \dots i_p} T_{i_1 \dots i_q}, \quad q < p,$$

является тензором при любом выборе тензора $T_{i_1 \dots i_q}$, то и $S^{i_1 \dots i_p}$ также тензор.

8.20. Если v_{ij} — тензор и в некоторой системе координат имеет место уравнение $av_{ij} + bv_{ji} = 0$ (a и b — числа), то это уравнение справедливо в любой другой системе координат. Кроме того, если $v_{ij} \neq 0$, то или $a = b$, или $a = -b$.

8.21. Пусть g_{ij} — метрический тензор. Доказать, что если тензоры $g_{ij} P_k^j$ и $g_{ij} Q_k^j$ симметричны, то после опускания верхнего индекса тензор $PQ + QP$ симметричен, а $PQ - QP$ антисимметричен.

8.22. Пусть f — гладкая функция на римановом многообразии M с метрикой g_{ij} . Доказать, что векторное поле $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$, компоненты которого задаются равенством

$$v^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j},$$

перпендикулярно поверхностям уровня функции f .

8.23. Пусть A_j^i — тензорное поле типа $(1, 1)$ на многообразии M . Доказать, что формула

$$N(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = A^2[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - A[A\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - A[\mathbf{X}, A\mathbf{Y}] + [A\mathbf{X}, A\mathbf{Y}],$$

где \mathbf{X}, \mathbf{Y} — векторные поля на M , определяет тензорное поле N_{jk}^i типа $(1, 2)$.

Если дан оператор $A: V \rightarrow V$, то определены операторы

$$\begin{aligned} A^{\otimes k} : V^{\otimes k} &\rightarrow V^{\otimes k}, \\ \Lambda^{\otimes k} A : \Lambda^{\otimes k} V &\rightarrow \Lambda^{\otimes k}, \\ S^{\otimes k} A : S^{\otimes k} V &\rightarrow S^{\otimes k}. \end{aligned}$$

8.24. Найти $\operatorname{tr} \Lambda^q A$ через коэффициенты характеристического многочлена A в n -мерном пространстве V .

8.25. Выразить через след и определитель оператора A величины $\operatorname{tr} A \otimes A$, $\operatorname{tr} A^{\otimes k}$, $\det A \otimes A$.

8.26. Доказать, что для $\xi \in \Lambda^p(V)$, $\omega \in \Lambda^1(V)$ равенство $\xi \wedge \omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\xi = \omega \wedge \eta$ для некоторого $\eta \in \Lambda^{p-1}(V)$.

8.27. Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам и кососимметричен по второму и третьему, то он равен нулю.

8.28. Доказать, что если a_{ij} — симметрический, b^{ij} — кососимметрический тензоры, то $a_{ij}b^{ij} = 0$.

В следующих задачах векторы e_i образуют базис пространства V , а e^i — дуальный базис пространства V^* , т. е. $e^i(e_j) = \delta_j^i$.

8.29. Найти значение тензора $e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 3e_3) \otimes e^2$ на паре $e^1 + e^2 + e^3$, $e_1 + 5e_2 + 4e_3$.

8.30. Найти значение тензора

$$\begin{aligned} (e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^1) \otimes (e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)) - \\ - (e^1 \otimes e^1 \otimes (e^1 - e^3)) \otimes (e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^3 + e^2 \otimes e^2) \end{aligned}$$

на наборе $e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_2, e_2$.

8.31. Все координаты тензора T типа $(2, 3)$ в базисе (e_1, e_2, e_3) равны 1. Найти координату \tilde{T}_{123}^{12} этого тензора в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.32. Найти координаты:

а) T_{21}^1 тензора $e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 + e_2 \otimes e^1 \otimes e^2$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

б) \tilde{T}_{31}^{12} тензора $e_3 \otimes e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e^3 \otimes e^3$ в базисе

$$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.33. Найти координаты тензоров:

а) $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 - e_2);$

б) $(e_1 + 2e_2) \otimes (e_1 + e_2) - (e_1 + e_2) \otimes (e_1 + 2e_2).$

8.34. Найти свертку тензоров:

а) $(e_1 + 3e_2 - e_3) \otimes (e^1 - 2e^3 + 3e^4) - (e_1 + e_3) \otimes (e^1 - 3e^3 + e^4);$

б) $e_1 \otimes (e^1 + e^2 + e^3 + 3e^4) + e_2 \otimes (e^1 + 2e^2 + 3e^3 + 4e^4) + 2e_3 \otimes \otimes (e^1 - e^2 - e^4).$

8.35. Применить линейный оператор, заданный тензором $e_3 \otimes \otimes e^1$, к вектору $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$.

8.36. Тензор $(e_1 + e_2) \otimes (2e^1 - e^3)$ задает линейный оператор A . Какой тензор задает оператор A^2 ?

8.37. Скалярное произведение задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поднять и опустить индекс у тензоров:

а) $e_3 \otimes e^1 + e_4 \otimes e^2;$

б) $(e_3 + e_4) \otimes (e^1 + e^2) - e_3 \otimes (e^1 + e^3).$

в) $T_j^i = \delta_{2i} + \delta_{4j}.$

§ 9. Векторные поля

9.1. Доказать эквивалентность трех определений касательного вектора в точке P к многообразию:

- тензор валентности $(1, 0)$;
- дифференцирование гладких функций в точке P ;
- класс соприкасающихся в точке P кривых.

9.2. Найти производную функции f в точке P по направлению вектора ξ :

- $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $P = (1, 1, 1)$, $\xi = (2, 1, 0)$;
- $f = x^2y + xz^2 - 2$; $P = (1, 1, -1)$, $\xi = (1, -2, 4)$;
- $f = xe^y + ye^x - z^2$; $P = (3, 0, 2)$, $\xi = (1, 1, 1)$;
- $f = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$; $P = (1, 1)$, $\xi = (3, 4)$.

9.3. Найти производную функции $f = 1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, по направлению ее градиента.

9.4. Найти производную функции $f = yze^x$ по направлению ее градиента.

9.5. Пусть ∇ — векторный дифференциальный оператор в \mathbb{R}^3 , компоненты которого равны $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Показать, что:

- $\operatorname{grad} F = \nabla F$;
- $\operatorname{div} \mathbf{X} = \langle \nabla, \mathbf{X} \rangle$;
- $\operatorname{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X}$.

9.6. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(u\mathbf{X}) = u \cdot \operatorname{div} \mathbf{X} + \langle \mathbf{X}, \operatorname{grad} u \rangle,$$

где \mathbf{X} — векторное поле, а u — функция в \mathbb{R}^3 .

9.7. Доказать формулу

$$\operatorname{rot}(u\mathbf{X}) = u \cdot \operatorname{rot} \mathbf{X} - \mathbf{X} \times \operatorname{grad} u.$$

9.8. Доказать, что вектор $\mathbf{X} = u \operatorname{grad} v$ ортогонален к $\operatorname{rot} \mathbf{X}$.

9.9. Показать, что:

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = 0$;

- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{X}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{X} - \Delta \mathbf{X}$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

9.10. Пусть $\mathbf{X} = (x, y, z)$. Показать, что:

- $\operatorname{div} \mathbf{X} = 3$;
- $\operatorname{rot} \mathbf{X} = 0$;
- $\operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3} \right) = 0$;

$$\text{г) } \operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3} \right) = 0; \quad \text{д) } \operatorname{grad} \frac{1}{|\mathbf{X}|} = -\frac{\mathbf{X}}{|\mathbf{X}|^3}.$$

Найти такую функцию φ , что $\mathbf{X} = \operatorname{grad} \varphi$.

9.11. Показать, что коммутатор векторных полей, рассматриваемых как операторы дифференцирования гладких функций, является векторным полем.

9.12. Рассмотрим в \mathbb{R}^n векторное поле \mathbf{V}_A , которое в точке $x \in \mathbb{R}^n$ принимает значение Ax , где A — некоторая квадратная матрица порядка n . Такое векторное поле называется линейным. Доказать, что $[\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B] = -\mathbf{V}_{[A,B]}$. Здесь $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор матриц.

9.13. Пусть M — многообразие и N — его подмногообразие. Доказать, что для любых векторных полей \mathbf{X} и \mathbf{Y} на M выполняется равенство $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]|_N = [\mathbf{X}|_N, \mathbf{Y}|_N]$. Здесь $\mathbf{X}|_N$ означает векторное поле \mathbf{X} , ограниченное на подмногообразие N .

9.14. Вычислить коммутатор двух векторных полей на S^3 ($x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$), одно из которых в точке $(x, y, z, w) \in S^3$ равно $(y, -x, w, -z)$, а другое — $(z, w, -x, -y)$.

9.15. Пусть φ_t — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, соответствующая векторному полю ξ . Показать, что

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt}(\varphi_t^*(\eta) - \eta).$$

9.16. Пусть ξ, η — векторные поля, f, g — гладкие функции. Доказать формулу

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] - g\eta(f)\xi + f\xi(g)\eta.$$

9.17. Пусть ξ, η — векторные поля, φ_t, ψ_t — соответствующие им однопараметрические группы преобразований. Показать, что если $[\xi, \eta] = 0$, то преобразования φ_t коммутируют с преобразованиями ψ_t .

9.18. Построить интегральные траектории следующих векторных полей на плоскости:

а) $\xi = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y};$ б) $\xi = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y};$

в) $\xi = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y};$ г) $\xi = (x+y) \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y};$

д) $\xi = (x-y) \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y};$ е) $\xi = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}.$

9.19. Пусть ξ — постоянное векторное поле в угловых координатах двумерного тора T^2 . Выяснить, при каких условиях на координаты поля ξ интегральные траектории будут замкнутыми кривыми.

9.20. Обобщить предыдущую задачу на случай тора T^n . А именно, пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ — постоянное векторное поле в угловых координатах на торе T^n . Доказать, что замыкание любой траектории гомеоморфно тору T^k , где k — число линейно независимых чисел ξ^1, \dots, ξ^n над полем рациональных чисел.

9.21. Пусть векторное поле \mathbf{Y} фиксировано. Можно ли задать такое тензорное поле A типа $(1, 1)$ (тензорное поле операторов), чтобы выполнялось равенство $A(\mathbf{X}) = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$ для всех векторных полей \mathbf{X} ?

§ 10. Связности и параллельный перенос

10.1. Доказать следующие утверждения.

а) Если Γ_{ij}^k и γ_{ij}^k — коэффициенты некоторых связностей, то $\alpha\Gamma_{ij}^k + \beta\gamma_{ij}^k$ также являются коэффициентами некоторой связности. Здесь α и β — гладкие функции, причем $\alpha + \beta = 1$.

б) Если связности с коэффициентами Γ_{ij}^k и $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ имеют одинаковые геодезические, то те же геодезические имеет связность $\alpha\Gamma_{ij}^k + \beta\tilde{\Gamma}_{ij}^k$; здесь α и β — гладкие функции, $\alpha + \beta = 1$.

в) Доказать, что разности коэффициентов $\Gamma_{ij}^k - \tilde{\Gamma}_{ij}^k$ двух связностей ∇ и $\tilde{\nabla}$ образуют тензор типа $(1, 2)$ и что любой тензор типа $(1, 2)$ можно представить в таком виде. Доказать, что если к коэффициентам связности прибавить тензор типа $(1, 2)$, то получатся коэффициенты связности.

10.2. Доказать, что тензорное поле δ_j^i символов Кронекера параллельно вдоль любой кривой для любой связности.

10.3. Показать, что ковариантная производная тензорного поля вдоль кривой зависит от значения коэффициентов связности и поля только на этой кривой. Иными словами, если тензорное поле задано только в точках кривой, то, тем не менее, можно вычислить ковариантную производную этого тензорного поля вдоль вектора скорости кривой.

10.4. Доказать, что при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров вдоль данной кривой параллельно переносятся и тензоры, полученные из исходных операциями тензорной алгебры.

10.5. Пусть $f: M \rightarrow M'$ — изометрия римановых многообразий, $x' = f(x)$, $x \in M$, $x' \in M'$. Снабдим M и M' соответствующими римановыми связностями. Доказать, что дифференциал $df: TM \rightarrow TM'$ перестановочен с параллельными переносами τ и τ' на M и M' соответственно.

10.6. Снабдим раманово многообразие соответствующей симметричной римановой связностью. Доказать, что тогда операция ковариантного дифференцирования коммутирует с операциями поднятия и опускания индексов.

10.7. Дано векторное поле, векторы которого имеют одну и ту же длину. Пусть многообразие снабжено симметричной римановой связностью. Доказать, что ковариантная производная этого векторного поля в произвольном направлении ортогональна векторам поля.

10.8. Пусть N — гладкое подмногообразие в M , γ — гладкая кривая на N , ξ — векторное поле вдоль кривой γ , касательное к N . Доказать формулу

$$\tilde{\nabla}_\gamma \xi = \text{pr}(\nabla_\gamma \xi),$$

где ∇ , $\tilde{\nabla}$ — симметрические римановы связности на многообразиях M и N соответственно (на N рассматривается индуцированная метрика), pr — ортогональная проекция на касательное пространство к N .

10.9. Показать, что если два подмногообразия:

а) евклидова пространства;

б) произвольного риманова многообразия,

соприкасаются вдоль некоторой кривой γ , то результаты параллельного перенесения вектора вдоль этой кривой на одном подмногообразии и вдоль этой же кривой на другом подмногообразии совпадают (см. рис. 63).

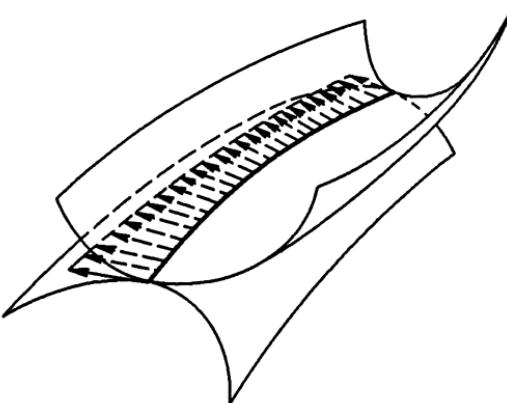


Рис. 63

10.10. Пусть дана поверхность с метрикой g_{ij} . Положим по определению $\nabla\varphi = g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\varphi$, $\nabla(\varphi, \psi) = g^{ij}\nabla_i\varphi\nabla_j\psi$. Доказать, что угол θ между кривыми $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ на поверхности определяется равенством

$$\cos \theta = \frac{\nabla(\varphi, \psi)}{\sqrt{\nabla\varphi\nabla\psi}}.$$

10.11. Пусть дано многообразие M , снаженное связностью ∇ , и его подмногообразие N . Доказать эквивалентность следующих условий:

а) в результате перенесения по кривой, расположенной в N , касательного к N вектора, получается вектор, касающийся N ;

б) для любых векторных полей \mathbf{X} и \mathbf{Y} , касающихся N , $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}$ тоже касается N .

10.12. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики плоскости в полярных координатах.

10.13. Вычислить символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

10.14. Вычислить явно символы Кристоффеля на сфере, если метрика задана в виде:

а) $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$; б) $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2}$;

в) $ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 + r^2)^2}$.

10.15. Вычислить явно символы Кристоффеля на плоскости Лобачевского, если метрика имеет вид:

а) $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$; б) $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - x^2 - y^2)^2}$;

в) $ds^2 = \frac{4(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{(1 - r^2)^2}$.

10.16. Вычислить явно символы Кристоффеля в сферической системе координат в \mathbb{R}^3 .

10.17. Вычислить символы Кристоффеля на поверхности вращения в \mathbb{R}^3 , заданной в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)).$$

10.18. Вычислить символы Кристоффеля псевдосферы Бельтрами, заданной в виде

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u \right) \right).$$

10.19. Найти символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2.$$

10.20. Вычислить символы Кристоффеля на катеноиде

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left(a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v, a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v, u \right).$$

10.21. Вычислить символы Кристоффеля на геликоиде

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, hv).$$

10.22. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом цилиндре в \mathbb{R}^3 в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Зависит ли результат от вида кривой?

10.23. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в \mathbb{R}^3 в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от вида кривой.

10.24. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$:

- вдоль кривой $\theta = \theta_0 = \text{const}$, т. е. вдоль параллели;
- вдоль кривой $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$, т. е. вдоль меридиана.

10.25. Выяснить, на какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате перенесения вдоль параллели.

10.26. Рассмотрим сферу S^2 со стандартной метрикой. Пусть вектор \mathbf{X} касается S^2 в точке P , а вектор \mathbf{Y} — в точке Q , причем $\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\|$. Доказать, что существует такая гладкая регулярная кривая на сфере S^2 с концами в точках P и Q , что в результате параллельного переноса вектора \mathbf{X} вдоль нее получается вектор \mathbf{Y} .

10.27. На поверхности вращения перенести касательный вектор вдоль параллели. Найти угол между начальным и конечным положением вектора.

10.28. а) Доказать, что при параллельном перенесении вдоль меридиана поверхности вращения вектора, касающегося параллели, результат перенесения будет параллелен исходному вектору в объемлющем евклидовом пространстве (см. рис. 64).

б) Перенести по поверхности вращения вектор, касательный к меридиану, вдоль этого меридиана.

10.29. Перенести параллельно по прямому геликоиду

$$(u \cos v, u \sin v, hv)$$

вектор, касательный к поверхности. Перенос осуществить вдоль витка винтовой линии

$$(a \cos v, a \sin v, hv), \quad a = \text{const}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Найти угол (в пространстве) между исходным и конечным вектором.

10.30. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости:

- вдоль кривой $x = x_0 = \text{const}$;
- вдоль кривой $y = y_0 = \text{const}$.

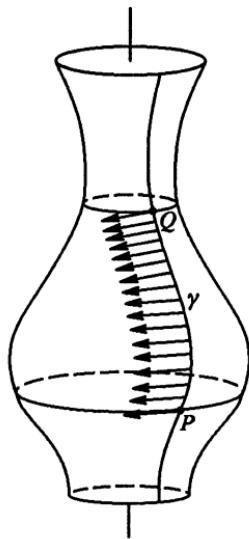


Рис. 64

10.31. Вычислить, на какой угол повернется касательный вектор к сфере в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ , если:

а) γ — параллель;

б) γ составлена из двух меридианов и части экватора, заключенного между ними;

в) γ составлена из двух меридианов и части параллели, заключенной между ними.

10.32. Найти ковариантные производные вдоль координатных линий $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ следующих векторных полей, заданных в полярной системе координат:

$$\mathbf{v}_1 = \left(\cos \varphi, -\frac{1}{r} \sin \varphi \right), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (r, 1).$$

Все вычисления выполнить в полярной системе координат.

10.33. На плоскости заданы полярные координаты (r, φ) . Перенести параллельно вектор $\mathbf{v}_0 = (v_0^1, v_0^2)$ вдоль кривой $r = 2$ из точки $\varphi = 0$ в точку $\varphi = \pi/2$. Все вычисления выполнить в полярной системе координат.

10.34. а) Написать и решить уравнения параллельного переноса вектора по кривой $\theta = \text{const}$ для метрики $ds^2 = d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2$.

б) Вычислить угол, на который повернется вектор при однократном перенесении вдоль кривой $\theta = \text{const}$ для метрики $ds^2 = d\theta^2 + \text{sh}^2 \theta d\varphi^2$.

10.35. Параллельно перенести вектор вдоль пространственной кривой по поверхности, составленной из:

а) касательных к этой кривой;

б) нормалей к этой кривой;

в) бинормалей к этой кривой.

10.36. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к сфере единичного радиуса в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

10.37. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к плоскости Лобачевского в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

10.38. Найти все связности на окружности. Установить формулу для параллельного переноса для произвольной связности на окружности.

10.39. На плоскости с координатами u^1, u^2 найти аффинную связность, относительно которой векторные поля $\xi = (e^{u^1}, 1)$, $\eta = (0, e^{u^2})$ ковариантно постоянны.

10.40. Оператором Лапласа–Бельтрами на римановом многообразии называется оператор $\Delta f = \nabla^i \nabla_i f$, где ∇ — симметрическая

риманова связность, $\nabla^i = g^{ij} \nabla_j$. Найти явную формулу для этого оператора на поверхности вращения.

10.41. Рассмотрим риманово многообразие с соответствующей симметричной римановой связностью. Определим градиент функции f как векторное поле $\text{grad } f = g^{ij} \nabla_j f$, а дивергенцию $\text{div } \mathbf{v}$ векторного поля — как свертку ковариантной производной векторного поля \mathbf{v} (она имеет валентность $(1, 1)$): $\text{div } \mathbf{v} = \nabla_i v^i$.

а) Доказать, что в евклидовом пространстве так определенные операции градиента и дивергенции совпадают с обычными.

б) Доказать, что на римановом многообразии оператор Лапласа $\text{div grad } f$ совпадает с оператором Лапласа–Бельтрами Δf .

10.42. Пусть на многообразии, снабженном аффинной связностью без кручения, заданы два ковариантно постоянных векторных поля. Доказать, что они коммутируют.

10.43. Доказать следующие равенства (здесь $g = \det \|g_{ij}\|$):

$$\text{а) } \Gamma_{ij}^i = \frac{1}{2g} \frac{\partial}{\partial x^j} \ln g = \frac{\partial}{\partial x^j} \ln \sqrt{g};$$

$$\text{б) } \nabla_i T^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} (\sqrt{g} T^j);$$

$$\text{в) } \nabla_i T^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} T^{ij}) + \Gamma_{kl}^j T^{kl};$$

$$\text{г) если } A^{ij} = -A^{ji}, \text{ то } \nabla_i A^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} A^{ij}).$$

10.44. На плоскости даны два линейно независимых векторных поля с нулевым коммутатором. Доказать, что существует единственная связность, относительно которой эти два векторных поля ковариантно постоянны. Выяснить, является ли она симметрической. Привести контрпример для случая некоммутирующих векторных полей.

10.45. Найти в \mathbb{R}^2 с координатами (x, y) область, в которой линейно независимы следующие векторные поля:

$$\text{а) } \mathbf{u} = (-y, x), \mathbf{v} = (1, 0);$$

$$\text{б) } \mathbf{u} = (\cos x, \sin x), \mathbf{v} = (-\sin x, \cos x);$$

$$\text{в) } \mathbf{u} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right), \mathbf{v} = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r} \right), \text{ где } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найти коэффициенты связности, относительно которой эти поля ковариантно постоянны.

10.46. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^3 с координатами x^1, x^2, x^3 . Найти область в \mathbb{R}^3 , в которой линейно независимы векторные поля

$$\mathbf{u} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{w} = (0, x^1, 1).$$

Найти коэффициенты связности, относительно которой эти поля ковариантно постоянны.

§ 11. Геодезические на двумерных поверхностях

11.1. Доказать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 вполне характеризуется одним из следующих свойств:

- а) в каждой точке линии, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к поверхности является главной нормалью кривой;
- б) в каждой точке линии ее геодезическая кривизна равна нулю;
- в) в каждой точке линии ее кривизна равна абсолютной величине нормальной кривизны в направлении касательной к этой кривой.

11.2. Пусть поверхность в \mathbb{R}^3 такова, что на ней лежит некоторая прямая линия. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.

11.3. Две поверхности в \mathbb{R}^3 касаются по линии l . Доказать, что если l — геодезическая линия на одной поверхности, то она должна быть геодезической и на другой поверхности.

11.4. Пусть две поверхности пересекаются трансверсально по линии l , причем линия l является геодезической на каждой из этих поверхностей. Доказать, что эта линия — прямая.

11.5. На поверхности в \mathbb{R}^3 находится материальная точка, которая может свободно двигаться по поверхности. Точка приведена в движение. Доказать, что точка будет двигаться по геодезической линии поверхности.

11.6. На поверхности в \mathbb{R}^3 лежит невесомая нить, причем эта нить не может оторваться от поверхности, но может по ней свободно скользить. Доказать, что если натянуть нить между двумя точками поверхности, то нить пройдет по геодезической. (На нить действуют только силы натяжения и реакции поверхности.)

11.7. Доказать, что геодезическая кривизна линии $u = u(s)$, $v = v(s)$ на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, лежащей в \mathbb{R}^3 , может быть вычислена по формуле

$$k_g = \left| \left(\mathbf{m}, \frac{d}{ds} \mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \right) \right|,$$

где \mathbf{m} — единичный вектор нормали к поверхности.

11.8. а) Доказать, что дифференциальное уравнение геодезических линий $u = u(s)$, $v = v(s)$ поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, лежащей в \mathbb{R}^3 , можно представить в виде $\left(\mathbf{m}, \frac{d}{ds} \mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{r} \right) = 0$, где \mathbf{m} — вектор нормали поверхности.

б) Вывести отсюда, что через каждую точку в каждом направлении на поверхности проходит ровно одна геодезическая.

11.9. Доказать, что при параллельном перенесении вектора вдоль геодезической на римановом многообразии угол между ним и касательным вектором геодезической остается постоянным.

11.10. Доказать, что геодезическими линиями плоскости являются прямые и только они.

11.11. Найти условия, при которых координатные линии будут геодезическими на двумерной поверхности M с координатами x^1 , x^2 и символами Кристоффеля Γ_{ij}^k .

11.12. Показать, что для любой связности ∇ существует связность $\tilde{\nabla}$ без кручения с теми же геодезическими.

11.13. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

11.14. Доказать, что параллель поверхности вращения будет геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

11.15. Найти геодезические линии двумерной сферы.

11.16. Найти геодезические линии цилиндрической поверхности в \mathbb{R}^3 (см. задачу 5.2а).

11.17. Доказать, что через каждую точку цилиндра (не обязательно прямого кругового) проходит только одна замкнутая геодезическая.

11.18. Найти геодезические линии круглого конуса $x^2 + y^2 = z^2$.

11.19. Найти геодезические линии произвольной конической поверхности в \mathbb{R}^3 (см. задачу 5.2б).

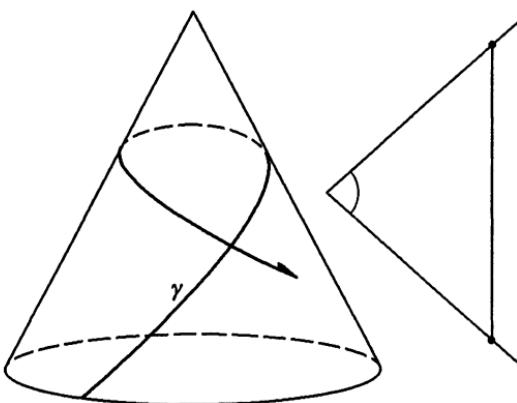


Рис. 65. Геодезическая на конусе

11.20. Доказать, что на бесконечном конусе (без границы) с углом развертки при вершине $\alpha < \pi$ единственной самопересекающейся геодезической, исходящей из данной точки образующей, будет та, которая пересекает эту образующую под углом $\frac{\pi - \alpha}{2}$ (см.

рис. 65). Найти угол, под которым эта геодезическая пересекает саму себя. Если же $\alpha \geqslant \pi$, то на таком конусе нет самопересекающихся геодезических.

11.21. Показать, что геодезические линии поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = v(du^2 + dv^2)$$

изображаются параболами на плоскости с декартовыми координатами u, v .

11.22. Найти геодезические линии геликоида

$$\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, hv).$$

11.23. Показать, что на поверхности с первой квадратичной формой

$$ds^2 = (\varphi(u) + \psi(v))(du^2 + dv^2)$$

(поверхность Лиувилля) геодезические определяются уравнением

$$\frac{du}{\sqrt{\varphi(u) + a}} \pm \frac{dv}{\sqrt{\psi(v) - a}} = 0,$$

где a — произвольная постоянная.

11.24. а) Привести метрику поверхности вращения

$$(\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u))$$

к виду, указанному в задаче 11.23.

б) Найти геодезические на поверхности вращения.

11.25. Доказать, что на поверхности с метрикой

$$ds^2 = (u^2 + \cos v + 2)(du^2 + dv^2)$$

линия $v = \pi$ является геодезической.

11.26. Показать, что на поверхности вращения

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = (x(t) \cos \varphi, x(t) \sin \varphi, z(t))$$

можно выбрать параметр $\tau(t)$ вдоль меридиана так, чтобы первая квадратичная форма поверхности имела вид $ds^2 = \rho(\tau)(d\varphi^2 + d\tau^2)$. Показать, что $\rho(\tau)$ — это расстояние от точки (τ, φ) на поверхности до оси вращения. Написать уравнение геодезической линии $(\tau(s), \varphi(s))$.

11.27. Теорема Клеро. Доказать, что радиус геодезической кривизны параллели поверхности вращения (величина обрат-

ная геодезической кривизне) равен отрезку касательной к меридиану, заключенному между точкой касания и осью поверхности (см. рис. 66).

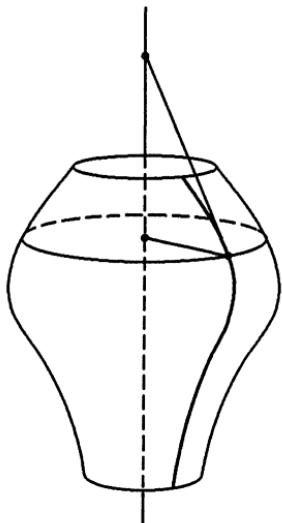


Рис. 66

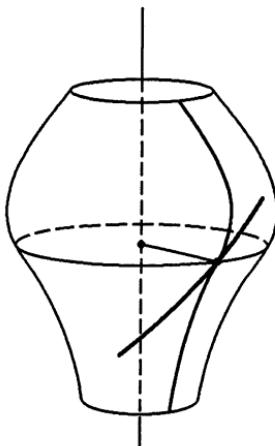


Рис. 67

11.28. (Другая формулировка теоремы Клеро.) Доказать, что на поверхности вращения вдоль каждой геодезической линии произведение радиуса параллели на синус угла между геодезической линией и меридианом постоянно (см. рис. 67).

11.29. Доказать, что если геодезическая на поверхности вращения пересекает все встречающиеся параллели под постоянным углом, то она является или меридианом, или параллелью, или же поверхность является прямым круговым цилиндром.

11.30. Доказать, что все геодезические на поверхности вращения

$$16a^2(x^2 + y^2) = z^2(2a^2 - z^2)$$

замкнуты. В цилиндрических координатах (r, φ, z) эту поверхность можно параметризовать так:

$$r = \frac{a}{4} \cos u, \quad z = a \left(\sin \frac{u}{2} - \cos \frac{u}{2} \right), \quad \varphi = v.$$

11.31. Привести пример поверхности вращения, на которой существует замкнутая геодезическая, отличная от меридиана и параллели. Поверхность вращения должна быть отлична от сферы и поверхности из предыдущей задачи.

Заметим, что в действительности пример поверхности с замкнутой геодезической, отличной от параллели и меридиана не является чем-то исключительным: многие поверхности вращения обладают этим свойством.

11.32. Привести пример поверхности вращения, на которой нет замкнутых геодезических.

11.33. Является ли видимый контур эллипсоида геодезической на нем? Здесь считается, что «наблюдатель» находится в бесконечности, т. е. все лучи зрения параллельны между собой.

11.34. Рассмотрим на римановом многообразии пучок геодезических, исходящих из некоторой фиксированной точки O , т. е. в каждом направлении в точке O выпустим геодезическую. Отметим на каждой из них точку, удаленную от точки O вдоль этой геодезической на одно и то же расстояние R . Получившееся множество точек называется геодезической сферой радиуса R . Доказать, что геодезическая сфера ортогональна ко всем геодезическим радиусам, т. е. ко всем геодезическим указанным пучкам.

11.35. Найти геодезическую кривизну винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, hv):$$

а) на геликоиде $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, hv)$;

б) на цилиндре $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (a \cos v, a \sin v, u)$.

11.36. Вычислить геодезическую кривизну линии $u = \operatorname{sh} v$, $0 \leq v \leq v_0$, на геликоиде

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = v.$$

11.37. На поверхности с метрикой $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 u \, dv^2$ найти геодезическую кривизну линии $v = \ln \operatorname{ch} u$.

11.38. Доказать, что если линии однопараметрического семейства линий на поверхности таковы, что длины дуг ортогональных траекторий между любыми двумя кривыми семейства равны между собой, то ортогональные траектории являются геодезическими.

11.39. Доказать, что кручение κ геодезической линии, проходящей в направлении вектора $du \cdot \mathbf{r}_u + dv \cdot \mathbf{r}_v$, находится по формуле

$$-\kappa = \frac{(LF - ME) \, du^2 + (LG - NE) \, du \, dv + (MG - NF) \, dv^2}{(EG - F^2)(E \, du^2 + 2F \, du \, dv + G \, dv^2)}.$$

11.40. Определить геодезическую кривизну параллелей и меридианов поверхности вращения

$$(f(u) \cos v, f(u) \sin v, u).$$

11.41. Найти геодезические кривизны координатных линий поверхности с метрикой $ds^2 = E \, du^2 + G \, dv^2$.

11.42. Пусть поверхность образована касательными к линии с кривизной $\hat{k}(s)$. Отложим на касательных от точки касания в обе стороны отрезки длины l . Определить геодезическую кривизну линий, образованных концами этих отрезков на поверхности касательных (см. задачу 6.7).

11.43. Показать, что на любом компактном римановом многообразии любые две достаточно близкие точки можно соединить геодезической, причем имеется единственная геодезическая наименьшей длины.

11.44. Доказать, что гладкая кривая, совпадающая со связной компонентой множества неподвижных точек некоторой изометрии риманова многообразия, является геодезической.

11.45. а) Описать геодезические торы T^2 в плоской метрике.

б) Доказать, что торы, полученные склеиванием из прямоугольника с вершинами $\{(0, 0), (2, 0), (1, 0), (2, 1)\}$ и из параллелограмма с вершинами $\{(0, 0), (2, 0), (1, 1), (3, 1)\}$ не изометричны.

в) Рассмотрим параллелограммы единичной площади и с общим основанием. Выяснить, в каком случае торы, полученные склейкой из таких параллелограммов изометричны.

г) Описать все плоские метрики на торе T^2 .

11.46. Показать, что геодезическими на открытом круге с метрикой Лобачевского (модель Пуанкаре) являются диаметры круга и дуги окружностей, пересекающие границу круга под прямым углом.

11.47. Показать, что геодезические на верхней полуплоскости в метрике Лобачевского — это вертикальные полуправые и дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту, т. е. оси абсцисс.

11.48. Найти римановы метрики вида

$$ds^2 = e^{2\lambda(u, v, w)}(du^2 + dv^2 + dw^2),$$

у которых кривые $v = \text{const}$ и $w = \text{const}$ — геодезические (при надлежащей параметризации этих кривых).

11.49. Привести пример:

а) метрики на евклидовой плоскости, не являющейся геодезически полной;

б) метрики в открытом круге, являющейся геодезически полной.

11.50. Пусть дана поверхность постоянной гауссовой кривизны. Найти формулу, устанавливающую зависимость между углом поворота α касательного вектора к поверхности в результате параллельного перенесения вдоль замкнутой кривой γ и S — площадью области, ограниченной кривой γ .

11.51. а) Найти все замкнутые геодезические на бесконечном цилиндре с замкнутой направляющей.

б) Для двух данных точек найти соединяющую их кратчайшую.

в) В каком случае любая дуга геодезической на цилиндре является кратчайшей между своими концевыми точками?

11.52. Исследовать поведение кратчайших на конической поверхности в зависимости от значения полного угла при вершине конуса. Существуют ли кратчайшие, проходящие через вершину конуса?

11.53. Пусть замкнутая поверхность представляет собой прямой круговой конус с круговым основанием. Эта поверхность имеет особую линию — окружность, в которой склеены конус и его плоское основание. Описать кратчайшие, соединяющие две данные точки, в зависимости от расположения этих точек: обе они расположены на боковой поверхности конуса, обе на основании, одна на боковой поверхности, другая — на основании.

11.54. Описать кратчайшие на кубе и на тетраэдре, соединяющие две точки. Исследовать зависимость от расположения точек на поверхности.

Рассмотрим точку P на римановом многообразии M . Для вектора $v \in T_P M$ через $\gamma_v(t)$ обозначим геодезическую такую, что $\gamma_v(0) = P$ и $\gamma'_v(0) = v$. Определим геодезическую экспоненту формулой $\exp_P(v) = \gamma_v(1)$ для тех $v \in T_P M$, для которых определена точка $\gamma_v(1)$.

11.55. а) Доказать, что отображение \exp_P задает диффеоморфизм некоторой окрестности V нуля пространства $T_P M$ и некоторой окрестности U точки P в M . Таким образом, \exp_P определяет некоторую систему координат в окрестности $U \subset M$, которая называется *нормальной*.

б) Показать, что в нормальных координатах с центром в точке P матрица метрики является единичной, а символы Кристоффеля в точке P обращаются в 0.

в) Рассмотрим нормальные координаты на стандартной двумерной сфере. Как устроена максимальная область определения нормальной системы координат?

§ 12. Тензор кривизны

12.1. Вычислить тензор кривизны одномерного многообразия с произвольной метрикой.

12.2. Вычислить скалярную кривизну следующих римановых многообразий:

а) сфера S^2 радиуса R в \mathbb{R}^3 ;

б) тор T^2 , вложенный в \mathbb{R}^3 как поверхность вращения (см. задачу 6.1в);

в) тор T^2 вложенный в $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2(z, w)$, задаваемый уравнениями $|z|^2 + |w|^2 = 1$ и $|z| = |w|$;

г) плоскость Лобачевского (см. задачи 3.2 и 3.3);

д) прямой круговой конус в \mathbb{R}^3 ;

- е) цилиндрическая поверхность в \mathbb{R}^3 ;
 ж) сфера S^n радиуса R в \mathbb{R}^{n+1} ;
 з) поверхность Бельтрами (см. задачу 6.4в).

12.3. Доказать, что риманова метрика двумерного многообразия является локально евклидовой тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны тождественно равен нулю.

12.4. Вычислить тензор кривизны на сфере S^2 в сферических координатах.

12.5. Пусть $ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2)$. Выразить в явном виде скалярную кривизну этой метрики через функцию $\lambda(x, y)$ и ее производные.

12.6. Пусть M — многообразие в \mathbb{R}^n ($n > 2$). Пусть $x \in M$, а P — двумерное подпространство $T_x M$. Определим число $\sigma(P)$ формулой

$$\sigma(P) = \langle R(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle,$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — ортонормальный базис плоскости P .

Число $\sigma(P)$ называется *секционной кривизной* поверхности M в направлении двумерной плоскости P , или, как еще говорят, в двумерном направлении P .

а) Доказать, что $\sigma(P)$ не зависит от выбора ортонормального базиса P .

б) Доказать, что если $n = 2$, то секционная кривизна $\sigma(P)$ совпадает с гауссовой кривизной поверхности M^2 в точке x .

в) Пусть P — двумерное подпространство $T_x S$. Доказать формулу

$$\sigma(P) = R(V),$$

где $R(V)$ — гауссова кривизна двумерной поверхности V , образованной геодезическими, касательные векторы которых лежат в плоскости P .

12.7. Пусть S^n — n -мерная сфера $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$ с индуцированной метрикой.

а) Показать, что тензор кривизны сферы S^n вычисляется по формуле

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \frac{1}{r^2} (\langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{X} - \langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y}),$$

где $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ — векторы, касательные к сфере.

б) Показать, что секционная кривизна сферы S^n постоянна:

$$\sigma(P) = \frac{1}{r^2} \text{ для всех точек } x.$$

в) Показать, что метрика

$$ds^2 = \frac{4}{1 + K(y_1^2 + \dots + y_n^2)^2} (dy_1^2 + \dots + dy_n^2)$$

имеет постоянную секционную кривизну.

12.8. а) Найти символы Кристоффеля для поверхности с метрикой $ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2$.

б) Найти гауссову кривизну поверхности с метрикой

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

12.9. Найти гауссову кривизну поверхности с метрикой

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega(u, v) du dv + dv^2.$$

12.10. а) Доказать, что у двумерной поверхности тензор Риччи пропорционален метрическому. Найти коэффициент пропорциональности.

б) Доказать, что на трехмерном многообразии справедливо равенство

$$R_{lmnk} = g_{ln} R_{mk} - g_{lk} R_{mn} - g_{mn} R_{lk} + g_{mk} R_{ln} - \frac{1}{2}(g_{ln} g_{mk} - g_{lk} g_{mn}) R.$$

Здесь R_{lm} — тензор Риччи, R — скалярная кривизна.

12.11. Доказать равенства:

а) $\nabla^i \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) = 0;$

б) для двумерного многообразия $R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = 0$.

12.12. Пусть ∇ — каноническая связность в \mathbb{R}^3 со стандартной евклидовой метрикой. Рассмотрим новую операцию

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \times \mathbf{Y}.$$

Доказать, что это — связность. Найти ее тензоры кручения и кривизны.

12.13. Пусть M — многообразие, снабженное связностью, а x — некоторая фиксированная точка M . Пусть $Q = \{-1 < u, v < 1\}$ — квадрат, $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in T_x M$. Далее, пусть $f: Q \rightarrow M$ — такое гладкое отображение, что $f(0, 0) = x$, $df(\partial/\partial u) = \mathbf{X}$, $df(\partial/\partial v) = \mathbf{Y}$. Для $|t| < 1$ рассмотрим параллельный перенос τ по пути $x \rightarrow f(t, 0) \rightarrow f(t, t) \rightarrow f(0, t) \rightarrow x$. Доказать, что

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{Z} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2} (\tau^{-1}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}).$$

12.14. Найти компоненту R_{1212} тензора кривизны следующих метрик:

а) $ds^2 = du^2 + u^2 dv^2$; б) $ds^2 = du^2 - u^2 dv^2$;

в) $ds^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2)$, $a = \text{const.}$

12.15. Риманово многообразие, в котором $R_{ij} = \lambda(x)g_{ij}$ называется пространством Эйнштейна. Доказать, что:

а) для пространства Эйнштейна выполняется равенство $\lambda(x) = R(x)/n$, где R — скалярная кривизна, а n — размерность многообразия;

б) любое двумерное риманово многообразие является пространством Эйнштейна.

12.16. Доказать, что при $n > 2$ скалярная кривизна пространства Эйнштейна постоянна.

12.17. Тензор Эйнштейна на римановом многообразии определяется формулой

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij}.$$

Доказать, что $\nabla_k G_i^k = 0$, где $G_i^k = g^{kl}G_{li}$.

12.18. Доказать, что связность на n -мерном многообразии, допускающая n ковариантно постоянных линейно независимых в каждой точке векторных полей, имеет нулевой тензор кривизны.

12.19. Пусть в каждой точке секционная кривизна риманова многообразия размерности $n > 2$ постоянна, т. е. не зависит от двумерного направления. Такие многообразия обычно называются пространствами *постоянной кривизны*. Показать, что в пространстве постоянной кривизны секционная кривизна K связана со скалярной соотношением $K = \frac{R}{n(n-1)}$.

12.20. Показать, что пространство постоянной кривизны является пространством Эйнштейна. С учетом задачи 12.16 получаем, что в пространстве постоянной кривизны при $n > 2$ скалярная кривизна постоянна, а секционная не зависит ни от точки, ни от двумерного направления.

12.21. Доказать, что в пространстве постоянной кривизны любой симметричный невырожденный ковариантно постоянный тензор типа $(0, 2)$ имеет вид $a_{ij} = \lambda g_{ij}$, $\lambda = \text{const}$.

12.22. Доказать, что на четырехмерном многообразии с метрикой

$$ds^2 = 2du^1 du^4 + (u^4)^2 (du^2)^2 + 2du^2 du^3$$

тензор кривизны ковариантно постоянен, а тензор Риччи нулевой.

12.23. Доказать, что если тензор кривизны риманова многообразия ковариантно постоянен и размерность многообразия больше 2, то пространство имеет постоянную кривизну.

12.24. Показать, что на двумерной поверхности в \mathbb{R}^3 компоненты тензора кривизны представляются в виде

$$R_{ijkl} = K(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}),$$

где K — гауссова кривизна.

12.25. Доказать, что символы Кристоффеля в некоторой системе координат равны 0 тогда и только тогда, когда тензор кручения связности S_{ij}^k и тензор кривизны R_{ijk}^l тождественно равны нулю.

§ 13. Дифференциальные формы и когомологии де Рама

В этом параграфе внешним произведением векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$, $\dim V = n$, называется тензор

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma \mathbf{v}_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes \mathbf{v}_{\sigma(p)},$$

где S_p — группа перестановок на p элементах, а $(-1)^\sigma$ — знак перестановки σ .

При таком определении значение внешней формы $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ на наборе векторов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ равно объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Здесь e^1, \dots, e^n — базис сопряженного пространства V^* .

13.1. Доказать, что если векторы $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V$ линейно зависимы, то

$$T(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = 0$$

для любой формы $T \in \Lambda^p(V^*)$.

13.2. Доказать, что если формы $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in V^*$ линейно зависимы, то $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_p = 0$.

13.3. а) Записать линейную форму $\omega = f(x^2 + y^2)(x \, dx + y \, dy)$ в полярных координатах.

б) Записать форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \wedge dy$ в полярных координатах.

в) Записать форму $\omega = x \, dx + y \, dy + z \, dz$ в сферических координатах.

г) Записать форму

$$\omega = \frac{x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

д) Форму предыдущего пункта записать в цилиндрических координатах.

е) Записать форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

13.4. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ задано формулами

$$\begin{aligned} y^1 &= x^1 - x^2 x^3 x^4, & y^2 &= x^2 - x^1 x^3 x^4, \\ y^3 &= x^3 - x^1 x^2 x^4, & y^4 &= x^4 - x^1 x^2 x^3. \end{aligned}$$

Вычислить форму $\varphi^*\omega$, если:

- а) $\omega = y^1 dy^1 + y^2 dy^2 + y^3 dy^3 + y^4 dy^4$;
- б) $\omega = dy^1 \wedge dy^2 + dy^3 \wedge dy^4$;
- в) $\omega = dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 \wedge dy^4$.

13.5. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ задано формулой

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Вычислить $\varphi^*\omega$, если:

- а) $\omega = x dx + y dy$;
- б) $\omega = x dy - y dx$;
- в) $\omega = (x^2 - y^2) dy - 2xy dx$.

13.6. Пусть отображение $\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ задано формулой

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|},$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$. Для формы

$$\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n$$

найти $\varphi^*\omega$ и доказать, что $d(\varphi^*\omega) = 0$.

13.7. Пусть $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. Найти $\varphi^*\omega$, если отображение φ задается формулой:

- а) $\varphi: (x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$;
- б) $\varphi: (x, y) \mapsto (\operatorname{ch} y \cos x, -\operatorname{sh} y \sin x)$;
- в) $\varphi: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.

13.8. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$; $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$. Доказать, что

$$(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \det \|\varphi_i(\mathbf{v}_j)\|.$$

13.9. Доказать, что на ориентированном многообразии с римановой метрикой, заданной в локальных координатах (x^1, \dots, x^n) набором функций g_{ij} , выражение вида $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ является дифференциальной формой, корректно определенной на всем многообразии. Эта форма называется *формой объема*.

13.10. Показать, что операцию внешнего дифференцирования дифференциальной формы можно представить как композицию операции ковариантного градиента и альтернирования для произвольной симметрической связности на многообразии.

13.11. Вычислить внешний дифференциал следующих дифференциальных форм:

а) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y) dx \wedge dz;$

б) $13x dx + y^2 dy + xyz dz;$

в) $(x + 2y^3) \left(dz \wedge dx + \frac{1}{2} dy \wedge dx \right);$

г) $(x dx + y dy)/(x^2 + y^2);$

д) $(y dx - x dy)/(x^2 + y^2);$

е) $f(x^2 + y^2)(x dx + y dy);$

ж) fdg , где f и g — гладкие функции;

з) $f(g(x^1, \dots, x^n))dg(x^1, \dots, x^n).$

13.12. Доказать формулу Картана

$$(dw)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}(w(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(w(\mathbf{X})) - w([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]),$$

где w — одномерная дифференциальная форма; \mathbf{X}, \mathbf{Y} — векторные поля. Как изменится формула, если определить внешнее произведение формулой

$$\mathbf{v}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \mathbf{v}_{\sigma(p)}?$$

13.13. Доказать следующие обобщения формул из предыдущей задачи (они также называются формулами Картана).

а) Если ω — форма степени 2, то

$$d\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{X}\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) - \mathbf{Y}\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{Z}\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \\ - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) + \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}) - \omega([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}).$$

б) Если ω — форма степени p , то

$$d\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \mathbf{X}_i \omega(\mathbf{X}_1, \dots, \widehat{\mathbf{X}}_i, \dots, \mathbf{X}_{p+1}) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], \mathbf{X}_1, \dots, \widehat{\mathbf{X}}_i, \dots, \widehat{\mathbf{X}}_j, \dots, \mathbf{X}_{p+1}).$$

Пусть ω — дифференциальная p -форма. Обозначим через $i_{\mathbf{X}}\omega$, где \mathbf{X} — векторное поле, дифференциальную $(p-1)$ -форму, значение которой на векторах $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}$ определяется формулой

$$i_{\mathbf{X}}\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}) = \omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{p-1}).$$

Форма $i_{\mathbf{X}}\omega$ называется *внутренним произведением* формы ω и поля \mathbf{X} .

13.14. Пусть ω — p -форма, а $\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_p$ — векторные поля. Доказать, что

$$(i_{\mathbf{X}_0} d\omega)(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) + (di_{\mathbf{X}_0}\omega)(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) = \\ = \mathbf{X}_0\omega(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p) - \sum_i \omega(\mathbf{X}_1, \dots, [\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_i], \dots, \mathbf{X}_p).$$

13.15. Пусть \mathbf{X} — векторное поле, а ω_1 и ω_2 — дифференциальные формы. Доказать, что

$$i_{\mathbf{X}}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (i_{\mathbf{X}}\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge i_{\mathbf{X}}\omega_2,$$

где r — степень формы ω_1 .

Пусть в векторном пространстве \mathbb{R}^n задано скалярное произведение. Введем следующие две операции. Первая ставит в соответствие каждому вектору \mathbf{X} такую линейную форму $\omega = V(\mathbf{X})$, что $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = V(\mathbf{X})(\mathbf{Y})$. Вторая операция каждой полилинейной кососимметрической форме ω степени p ставит в соответствие форму $*(\omega)$ степени $n - p$ следующим образом. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ — ортонормированный базис линейных форм, $\omega = f\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}$. Тогда $*(\omega) = (-1)^\sigma f\omega_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega_{j_{n-p}}$, где σ — четность перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & n \\ i_1 & \dots & i_p & j_1 & \dots & j_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Эта операция обычно называется «операцией звездочки».

Заметим, что первая операция задает хорошо известный линейный изоморфизм между пространством V и пространством V^* . Вторая операция устанавливает изоморфизм между пространством внешних форм степени p и пространством внешних форм степени $n - p$.

13.16. Выписать в явном виде результат применения операции $*$ к дифференциальным k -формам ($k = 0, 1, 2, 3$), заданным в \mathbb{R}^3 с метрикой $ds^2 = \lambda_1 dx^2 + \lambda_2 dy^2 + \lambda_3 dz^2$, где λ_i — гладкие функции.

13.17. Доказать, что $(*T) = (-1)^{k(n-k)} T$.

13.18. Показать, что в пространстве \mathbb{R}^3 выполнены следующие формулы для векторных полей:

- а) $\text{grad } F = V^{-1}(dF)$;
- б) $\text{div } \mathbf{X} = *d * V(\mathbf{X})$;
- в) $\text{rot } \mathbf{X} = V^{-1} * dV(\mathbf{X})$.

13.19. Рассмотрим \mathbb{R}^3 со стандартной евклидовой метрикой. Доказать, что значение 2-формы $V(\mathbf{X}_1) \wedge V(\mathbf{X}_2)$ на паре векторов \mathbf{Y}_1 и \mathbf{Y}_2 может быть вычислено по формуле

$$V(\mathbf{X}_1) \wedge V(\mathbf{X}_2)(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = \det \|\langle \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_j \rangle\|.$$

13.20. Показать, что формулы Грина, Стокса и Гаусса–Остроградского являются частными случаями общей формулы Стокса для дифференциальных форм.

13.21. Вывести формулу интегрирования по объему V , ограниченному замкнутой поверхностью Σ :

$$\text{a) } \iiint_V (\varphi \Delta \psi + \langle \operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi \rangle) dV = \iint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} d\sigma;$$

$$\text{б) } \iiint_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$$

Здесь $\partial/\partial \mathbf{n}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ .

13.22. Найти градиенты функций в сферических координатах:

$$\text{а) } u(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \theta;$$

$$\text{б) } u(r, \theta, \varphi) = 3r^2 \sin \theta + e^r \cos \varphi - r;$$

$$\text{в) } u(r, \theta, \varphi) = \cos \theta / r^2.$$

13.23. Доказать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_i v^i + v^i \partial_i \ln \sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i (\sqrt{|g|} v^i).$$

13.24. Вычислить дивергенцию векторного поля на плоскости в:

- а) полярных координатах; б) эллиптических координатах; в) параболических координатах (см. задачи 1.1, 1.2, 1.3).

13.25. Вычислить дивергенцию векторного поля в трехмерном пространстве в: а) сферических координатах; б) цилиндрических координатах.

13.26. Найти закон преобразования форм связности

$$\omega_k^i = \Gamma_{jk}^i du^j$$

при переходе от одной карты к другой. Заметим, что формы связности, вообще говоря, не образуют глобально определенную дифференциальную форму.

13.27. Пусть на многообразии M задана связность. Тогда в каждой системе координат определена 1-форма $\gamma = \Gamma_{ki}^i dx^k$.

а) Доказать, что 2-форма $d\gamma$ корректно определена на всем многообразии, т. е. не зависит от выбора системы координат.

б) Доказать, что при замене координат с якобианом J к форме γ добавляется слагаемое $d(\ln J)$.

в) Доказать, что для римановой связности

$$\gamma = d \ln \sqrt{\det(g_{ij})}.$$

13.28. Пусть M^n — риманово многообразие с метрикой g_{ij} .

Доказать, что ковариантная производная формы объема

$$\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

относительно римановой связности на M^n равна нулю.

13.29. Пусть \mathbf{F} — векторное поле в 3-мерной области W с гладкой границей ∂W , \mathbf{n} — единичный нормальный вектор к ∂W . Доказать, что

$$\int\limits_W (\operatorname{div} \mathbf{F}) dx dy dz = \int\limits_{\partial W} \langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент площади на ∂W , а $\langle \mathbf{n}, \mathbf{F} \rangle$ — скалярное произведение.

13.30. В условиях предыдущей задачи доказать, что

$$\int\limits_S \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int\limits_{\partial S} (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3),$$

где S — гладкая поверхность с гладкой границей ∂S и $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$.

13.31. Вывести из формулы Стокса теорему Коши о вычетах.

13.32. Пусть p и q — произвольные многочлены от переменных z^1, \dots, z^n ; k, l — вещественные числа. Пусть существует такая дифференциальная форма w , что $dp \wedge w = p dz$, $dw = l dz$, $dq \wedge w = kq dz$. Доказать, что $d(p^{-k-l} q w) = 0$. Здесь $dz = dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$.

13.33. Пусть $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная 2-форма на многообразии, a^{kl} — обратный тензор, т. е. $a^{kl} \omega_{li} = \delta_i^k$. Доказать, что два следующих условия эквивалентны:

- а) форма ω замкнута;
- б) операция

$$\{f, g\} = a^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial g}{\partial x^l},$$

заданная на пространстве гладких функций тензором a^{kl} , удовлетворяет тождеству Якоби.

13.34. Пусть $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ — линейно независимые векторные поля на n -мерном многообразии, $\omega^1, \dots, \omega^n$ — двойственные 1-формы, т. е. $\omega^i(\mathbf{X}_j) = \delta_j^i$. Доказать формулу

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j,$$

где гладкие функции c_{ij}^k определяются из соотношения $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c_{ij}^k \mathbf{X}_k$.

13.35. Доказать, что если на многообразии существует невырожденная форма максимального ранга, то многообразие ориентируемо.

13.36. Пусть $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ — невырожденная 2-форма на многообразии M . Доказать, что размерность многообразия M

четна и справедлива следующая формула:

$$\underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_{n \text{ раз}} = \pm \frac{1}{n!} \sqrt{\det(\omega_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{2n}.$$

Здесь $\dim M = 2n$.

13.37. Пусть на многообразии существует невырожденная 2-форма. Доказать, что многообразие ориентируемо.

13.38. Пусть θ, φ — стандартные координаты на сфере. Являются ли гладкими на всей сфере следующие дифференциальные формы:

$$d\theta, \quad d\varphi, \quad \cos \theta d\theta, \quad \sin \theta d\theta, \quad \cos \theta d\varphi, \quad \sin \theta d\varphi, \quad d\theta \wedge d\varphi?$$

В каких случаях можно к этим формам применять формулу Стокса?

13.39. Пусть Ω — дифференциальная p -форма, ω — дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Показать, что Ω представляется в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

13.40. Пусть на многообразии M задана невырожденная 2-форма. Доказать, что на M существует тензорное поле J типа $(1, 1)$, удовлетворяющее условию $J^2 = -E$, т. е. $J_k^i J_m^k = -\delta_m^i$. Такое поле J называется *почти комплексной* структурой на M .

13.41. Показать, что ограничение формы

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{z^2}$$

на любой конус с центром в начале координат является замкнутой формой.

13.42. Вычислить интеграл от формы $\Omega = x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy$ по области $D = \{-1 < u < 1, -1 < v < 1\}$ на поверхности $x = u + v, y = u - v, z = uv$. Система координат u, v считается положительно ориентированной.

13.43. Записать внешнюю дифференциальную форму в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$:

$$\Omega = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в цилиндрических и сферических координатах. Показать, что интеграл от этой формы по гладкой поверхности, взаимно-однозначно и гладко проектирующейся из начала координат на единичную сферу, равен площади проекции.

13.44. Рассмотрим форму

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Вычислить $d\omega$ и $\int_{x^2+y^2=1} \omega$. Вывести отсюда, что форма ω замкнута, но не точна в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

13.45. Пусть

$$\omega = \frac{x \, dy \wedge dz + y \, dz \wedge dx + z \, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Вычислить $d\omega$. Показать, что в полупространстве $z > 0$ существует такая 1-форма θ , что $d\theta = \omega$. Показать, что в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ не существует такой 1-формы θ , что $d\theta = \omega$.

13.46. Доказать, что ограничение замкнутой (точной) формы многообразия M на подмногообразие $N \subset M$ является замкнутой (точной) формой.

13.47. Доказать, что $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ и $H^i(\mathbb{R}) = 0$ при $i \neq 0$.

13.48. Вычислить 0-мерные когомологии де Рама для произвольного гладкого многообразия.

13.49. Показать, что любая форма степени n на \mathbb{R}^n точна.

13.50. Лемма Пуанкаре. Доказать, что

$$H^*(\mathbb{R}^{n+1}) = H^*(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство можно провести по следующей схеме. Пусть $i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ задано формулой $i: x \mapsto (x, 0)$, а $p: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ формулой $p: (x, t) \mapsto x$. Так как $p \circ i = 1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $i^* \circ p^* = 1: H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n)$. Если показать, что $p^* \circ i^*: H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ также является тождественным, то отсюда будет следовать, что $p^*: H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^{n+1})$ и $i^*: H^*(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n)$ являются взаимно обратными изоморфизмами. Определим отображение $S: \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ следующим образом. Форма $\omega \in \Omega^p(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ однозначно представляется в виде суммы $\omega = \omega_1 + \omega_2$, где форма ω_1 не содержит dt , а ω_2 — содержит. Форма ω_2 имеет вид $p^*\theta \cdot f(x, t) dt$, где $\theta \in \Omega^{p-1}(\mathbb{R}^n)$. Положим

$$S(\omega) = p^*\theta \int_0^t f(x, t) dt.$$

a) Показать, что $(dS - Sd)\omega = (-1)^{p-1}\omega$, где p — степень формы ω .

б) Показать, что отображение

$$1 - p^* \circ i^*: \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$$

переводит замкнутые формы в точные. Вывести отсюда, что $p^* \circ i^*: H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$ является тождественным отображением.

13.51. Пусть $f_t: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ — гладкое отображение, ω — дифференциальная форма на Y , $d\omega = 0$. Доказать, что

$$f_0^*(\omega) - f_1^*(\omega) = d\Omega$$

для подходящей формы Ω на X .

13.52. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ гомотопическая эквивалентность, т. е. существует такое отображение $g: Y \rightarrow X$, что $f \circ g \sim \text{id}_Y$ и $g \circ f \sim \text{id}_X$, то $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$ — изоморфизм.

13.53. Доказать, что если многообразие X стягиваемо, то для любой замкнутой формы ω (т. е. $d\omega = 0$) разрешимо уравнение $d\Omega = \omega$.

13.54. Доказать, что n -мерные когомологии гладкого замкнутого n -мерного ориентируемого многообразия нетривиальны.

13.55. Пусть M — замкнутое компактное симплектическое многообразие, т. е. на нем существует невырожденная замкнутая 2-форма $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Доказать, что вторая группа когомологии многообразия M нетривиальна.

13.56. Пусть $M = M_1 \cup M_2$ — несвязная сумма двух многообразий одинаковой размерности. Доказать, что для всех p имеется разложение в прямую сумму $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

13.57. Пусть $M = M_1 \cup M_2$, где M_1 и M_2 — открытые подмногообразия, причем пересечение $M_1 \cap M_2$ диффеоморфно \mathbb{R}^n . Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$ при $p > 0$.

13.58. а) Доказать, что замкнутая форма ω на $M^n \times \mathbb{R}^m$ точна тогда и только тогда, когда для некоторой точки $t \in \mathbb{R}^m$ ограничение формы ω на $M^n \times \{t\}$ является точной формой.

б) Привести пример многообразия M^n и дифференциальной формы $\omega \in \Omega^p(M^n \times \mathbb{R}^m)$ такой, что для всех $t \in \mathbb{R}^m$ ограничение ω на $M^n \times \{t\}$ замкнуто, но сама форма ω незамкнута.

13.59. а) Показать, что форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^1} \omega = 0$.

б) Показать, что форма $\omega \in \Omega^n(S^n)$ точна тогда и только тогда, когда $\int_{S^n} \omega = 0$.

13.60. Доказать, что формула $\omega \mapsto \int_{S^n} \omega$ задает изоморфизм

$$H^n(S^n) = \mathbb{R}.$$

13.61. Вычислить когомологии S^n .

13.62. Вычислить когомологии:

а) тора T^2 ;

б) плоскости \mathbb{R}^2 без k точек;

в) бутылки Клейна;

г) проективной плоскости \mathbb{RP}^2 ;

д) пространства \mathbb{R}^n без k точек.

13.63. Доказать, что на сфере S^n , где $n > 1$, не существует замкнутых 1-форм, ненулевых в каждой точке сферы.

13.64. Пусть M — замкнутое многообразие, на котором существует невырожденная замкнутая 2-форма. Доказать, что $\dim H^2(M) > 0$.

13.65. а) Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ — попарно коммутирующие векторные поля на сфере S^3 . Доказать, что они не могут быть линейно независимыми во всех точках сферы.

б) Привести пример двух векторных полей на сфере S^3 , линейно независимых в каждой точке и коммутирующих друг с другом.

13.66. Теорема Брауэра.

а) Доказать, что не существует непрерывного отображения $r: \overline{D}^n \rightarrow \partial \overline{D}^n = S^{n-1}$, неподвижного на точках сферы S^{n-1} . Для этого рассмотреть композицию r и $i: S^{n-1} \rightarrow \overline{D}^n$ (вложение S^{n-1} на граничную сферу шара D^n) и отображение, которое оно индуцирует в когомологиях сферы. Здесь \overline{D}^n — замкнутый шар.

б) Доказать, что у всякого непрерывного отображения шара \overline{D}^n в себя обязательно существует неподвижная точка.

13.67. Рассмотрим сферу S^2 и экватор S^1 на ней. Доказать, что не существует непрерывного отображения $S^2 \rightarrow S^1$, неподвижного на S^1 .

13.68. а) Доказать, что не существует непрерывного отображения $f: S^2 \rightarrow S^1$ такого, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^2$.

б) Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — непрерывное отображение такое, что $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in S^2$. Доказать, что существует точка $x \in S^2$, в которой $f(x) = 0$.

13.69. Пусть M — ориентируемое многообразие с границей ∂M . Доказать, что не существует непрерывного отображения $M \rightarrow \partial M$, неподвижного на границе. Доказательство можно провести по аналогии с теоремой Брауэра.

§ 14. Топология

14.1. Доказать эквивалентность двух определений внутренности $\text{Int } Y$ подмножества Y топологического пространства X :

а) $\text{Int } Y$ — это совокупность всех внутренних точек пространства Y , т. е. таких точек, которые содержатся в Y вместе с некоторой своей окрестностью;

б) $\text{Int } Y$ — это наибольшее содержащееся в Y открытое множество, т. е. $\text{Int } Y = \bigcup_{\substack{U \in \tau(X), \\ U \subseteq Y}} U$.

$$\bigcup_{\substack{U \in \tau(X), \\ U \subseteq Y}}$$

14.2. Доказать эквивалентность двух определений замыкания \overline{Y} подмножества Y топологического пространства X :

а) \overline{Y} — это совокупность всех точек прикосновения множества Y , т. е. таких точек, в любой окрестности которых есть точки из Y ;

б) \overline{Y} — это наименьшее содержащее Y замкнутое множество, т. е.

$$\overline{Y} = \bigcap_{\substack{F - \text{замкнуто}, \\ F \supseteq Y}} F.$$

14.3. Доказать, что $\text{Int } Y$ — открытое, а \overline{Y} — замкнутое множества.

14.4. Доказать, что:

а) Y открыто тогда и только тогда, когда $Y = \text{Int } Y$;

б) Y замкнуто тогда и только тогда, когда $Y = \overline{Y}$.

14.5. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Показать, что $\overline{A \cap B}$ может не совпадать с $\overline{A} \cap \overline{B}$.

14.6. Показать, что $\text{Int}(A \cup B)$ может не совпадать с $\text{Int } A \cup \text{Int } B$. Доказать, что $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B$.

14.7. Пусть $G \subset \mathbb{R}^1$ — открытое множество на прямой. Доказать, что G — объединение непересекающихся интервалов.

14.8. Доказать, что канторово множество на отрезке $[0, 1]$ замкнуто.

14.9. Пусть множество X состоит из трех точек. Описать все возможные топологии на нем. Сколько из них хаусдорфовых? Сколько связных? Сколько линейно связных?

14.10. Доказать, что в хаусдордовом топологическом пространстве все одноточечные подмножества замкнуты.

14.11. Доказать, что топологическое произведение двух хаусдорфовых топологических пространств хаусдорфово.

14.12. Доказать, что топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = x_2\}$ замкнута в $X \times X$.

14.13. Пусть X — бесконечное множество. Его конечные подмножества объявим замкнутыми. Проверить, что получилась нехаусдорфова топология.

14.14. Пусть X — метрическое пространство. Доказать, что каждое одноточечное множество замкнуто.

14.15. Доказать, что метрическое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме отделимости Хаусдорфа.

14.16. Верно ли, что расстояние между двумя непересекающимися, замкнутыми множествами на плоскости (на прямой) всегда больше 0?

Отображение $f: X \rightarrow Y$ метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если существует вещественная постоянная $\lambda < 1$, такая, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \lambda \rho(x, y)$ для любых двух точек $x, y \in X$.

14.17. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства непрерывно.

14.18. Доказать, что любое сжимающее отображение полного метрического пространства в себя всегда имеет неподвижную точку, причем эта точка единственна.

14.19. Привести пример, показывающий, что от условия полноты метрического пространства в задаче 14.18 отказаться нельзя.

14.20. Доказать, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкая вещественнозначная функция f такая, что $K = f^{-1}(0)$.

14.21. Привести пример метрического пространства, в котором существуют два шара, причем шар большего радиуса строго содержится в шаре меньшего радиуса.

14.22. Пусть (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Определим на $X \times Y$ следующие «расстояния»:

$$\rho_{\max}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)),$$

$$\rho_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2))^{1/2},$$

$$\rho_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Доказать, что:

а) это метрики на $X \times Y$;

б) соответствующие им топологии на $X \times Y$ совпадают.

14.23. Доказать равносильность следующих определений непрерывности отображения топологических пространств $f: X \rightarrow Y$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда:

а) для любого открытого $U \subset Y$ прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ тоже открыт;

б) для любого замкнутого $F \subset Y$ прообраз $f^{-1}(F) \subset X$ тоже замкнут;

в) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U ее образа $f(x) \in Y$ существует окрестность V точки x такая, что $f(V) \subseteq U$;

г) график f , т. е. множество $\{(x, y) : f(x) = y\}$, замкнут в $X \times Y$ при условии, что Y — хаусдорфово.

14.24. Пусть $f: E \rightarrow F$, $E = A \cup B$, $A = \overline{A}$, $B = \overline{B}$. Тогда f непрерывно тогда и только тогда, когда $f|_A$ и $f|_B$ непрерывны. Если $A \neq \overline{A}$ то это, вообще говоря, неверно. Привести пример.

14.25. Доказать, что если $f_n: X \rightarrow Y$ — последовательность непрерывных отображений и f_n равномерно сходятся к f (здесь X и Y — метрические пространства), то f непрерывно.

14.26. Пусть отображение $f: X \rightarrow X$ непрерывно, а топологическое пространство X хаусдорфово. Доказать, что множество

$\{x \in X : x = f(x)\}$ неподвижных точек отображения f замкнуто. Привести пример, показывающий, что от требования хаусдорфовости отказаться нельзя.

14.27. Пусть топологическое пространство Y хаусдорфово, а отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ непрерывны. Доказать, что множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто. Показать, что от требования хаусдорфовости отказаться нельзя.

14.28. Пусть A — всюду плотное подмножество в топологическом пространстве X , а Y — хаусдорфово. Пусть непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$ и $g: X \rightarrow Y$ таковы, что $f|_A = g|_A$. Доказать, что $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

14.29. Доказать, что всякое бесконечное замкнутое множество прямой является замыканием своего счетного подмножества.

14.30. Построить пример метрического пространства X , такого, что его некоторое подмножество $Y \subset X$ (указать Y) замкнуто и ограничено, но при этом не является компактом.

14.31. Пусть отображение $f: E \rightarrow F$ является непрерывным отображением «на» и пусть E компактно. Доказать, что F компактно.

14.32. Доказать, что куб I^n — компактное пространство.

14.33. Доказать, что n -мерная сфера ($n < \infty$) компактна. Верно ли это для $n = \infty$?

14.34. Пусть $X \subset Y$ и Y — компактное пространство. Доказать, что X — компактное пространство тогда и только тогда, когда X — замкнутое пространство.

14.35. Показать, что группа ортогональных матриц размера 3×3 — компактное топологическое пространство.

14.36. Доказать, что группа ортогональных преобразований n -мерного евклидова пространства — компактное топологическое пространство.

14.37. Выяснить компактны ли $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$.

14.38. Пусть X — компактное, Y — метрическое пространства, $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение. Доказать, что f — равномерно-непрерывное отображение.

14.39. Пусть A и B — связные подмножества некоторого топологического пространства, причем $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Доказать, что $A \cup B$ связно.

14.40. Доказать, что если E, F связны, то и $E \times F$ связно.

14.41. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение и его образ совпадает с Y . Доказать, что если X связно (линейно связно), то Y тоже связно (линейно связно).

14.42. Доказать, что:

а) интервалы $0 < x < 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x < 1$ связны и линейно связны;

б) если множество $A \subset \mathbb{R}^1$ связно, то A имеет вид: $a < x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x \leq b$ или $a \leq x < b$, где a, b могут принимать значения $\pm\infty$.

14.43. Доказать, что куб I^n и сфера S^n связны.

14.44. Пусть X — метрическое компактное связное пространство. Можно ли две его точки соединить непрерывным путем?

14.45. Доказать, что $SO(n)$ — связное топологическое пространство; $O(n)$ состоит из двух компонент связности. Доказать, что $U(n)$, $SU(n)$ — связные топологические пространства.

14.46. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{C})$, рассматриваемая как подмножество в пространстве всех комплексных матриц размера $n \times n$, — открытое и связное подмножество.

14.47. Доказать, что группа $GL^+(n, \mathbb{R})$ вещественных матриц размера $n \times n$ с положительным определителем — связное топологическое пространство.

14.48. Доказать, что группа $GL(n, \mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц размера $n \times n$ — топологическое пространство, состоящее из двух связных компонент.

14.49. Доказать, что замыкание связного подмножества топологического пространства связно.

14.50. Пусть A и B — подмножества топологического пространства X . Верно ли, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B тоже связны? Аналогичный вопрос про линейную связность.

14.51. Пусть A и B одновременно либо замкнутые, либо открытые подмножества топологического пространства X . Доказать, что если $A \cup B$ и $A \cap B$ связны, то A и B тоже связны.

14.52. а) Доказать, что с помощью операций замыкания и перехода к внутренности множества из данного подмножества топологического пространства можно получить не более семи различных подмножеств. Привести пример такого подмножества \mathbb{R} , из которого получаются в точности семь различных подмножеств.

б) Доказать, что с помощью операций замыкания и перехода к дополнению из данного подмножества топологического пространства можно получить не более 14 различных подмножеств.

14.53. Пусть Y — связное (линейно связное) подпространство X . Исследовать связность (линейную связность) внутренности $\text{Int } Y$ и границы $\partial Y = \overline{Y} \setminus \text{Int } Y$.

14.54. Доказать, что если X — связное компактное пространство, а $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — непрерывное отображение, то образом f является отрезок.

14.55. Пусть A — открытое подмножество \mathbb{R}^n . Доказать равносильность условий:

а) A связно;

б) A линейно связно;

в) любые две точки A можно соединить ломаной, состоящей из конечного числа отрезков, целиком лежащей в A .

14.56. Доказать, что следующее множество A связно, но не является линейно связным.

а) A состоит из графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, и отрезка $\{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$ (координаты декартовы);

б) A состоит из окружности $r = 1$ и спирали $r = e^{-1/\varphi}$, $\varphi > 0$.

14.57. Привести пример двух метрических пространств X и Y и отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow X$ таких, что f и g взаимно однозначны и непрерывны, и тем не менее X и Y не гомеоморфны.

Напомним, что взаимная однозначность означает одновременную сюръективность и инъективность отображения.

14.58. Привести пример непрерывного биективного отображения двух гомеоморфных топологических пространств $f: X \rightarrow Y$, не являющегося гомеоморфизмом.

14.59. Доказать, что открытый диск $x^2 + y^2 < 1$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ и плоскость $\mathbb{R}^2(x, y)$ гомеоморфны. Доказать, что интервал $0 < x < 1$ и открытый квадрат $\{|x| < 1, |y| < 1\}$ не гомеоморфны.

14.60. Доказать, что куб $\{|x_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ и шар $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$ гомеоморфны. Доказать, что открытый куб и открытый шар диффеоморфны.

14.61. Доказать, что шар $\left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\}$ и верхнее полушарие сферы $\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1, x_{n+1} \geq 0 \right\}$ гомеоморфны.

14.62. Доказать, что эллипсоид $\left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1 \right\}$ гомеоморфен сфере S^n .

14.63. Гомеоморфны ли отрезок $0 \leq x \leq 1$ и буква T ?

14.64. Доказать, что интервал $(-1, 1)$ гомеоморден прямой $(-\infty, \infty)$. Доказать, что любые два интервала гомеоморфны.

14.65. Гомеоморфны ли шар и сфера?

14.66. Доказать следующие гомеоморфизмы:

а) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$;

б) $S^n \setminus S^k \approx S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

14.67. Доказать гомеоморфность пространств

$$\mathbb{R}^3 \setminus S^1 \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^3 \setminus (\{y = z = 0\} \cup \{(1, 1, 1)\}).$$

14.68. Доказать, что:

- пространства \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^2 не гомеоморфны;
- пространства \mathbb{R}^1 и \mathbb{R}^n не гомеоморфны.

14.69. Доказать, что ни для какого топологического пространства X его квадрат $X \times X$ не гомеоморфен \mathbb{R} .

14.70. Пусть $f: D^2 \rightarrow D^2$ — гомеоморфизм. Доказать, что тогда граничная сфера отображается на граничную сферу.

14.71. Доказать, что сфера S^2 не гомеоморфна никакому подпространству \mathbb{R}^2 .

14.72. Определить топологический тип поверхности, полученной склейкой строк шестиугольника в соответствии со словом:

- $a b c a^{-1} b^{-1} c^{-1}$;
- $a b c a^{-1} b^{-1} c$.

14.73. Рассмотрим шаровой слой, ограниченный двумя концентрическими сферами. Топологический червяк прогрыз ход в шаровом слое от одной граничной сферы до другой, который

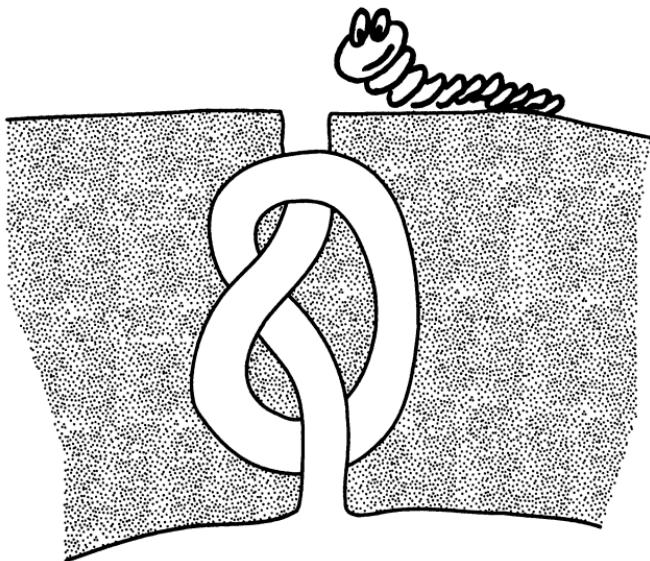


Рис. 68

заузлен так, как показано на рис. 68. Определить топологический тип поверхности, ограничивающей полученное пространственное тело.

14.74. Дать классификацию с точностью до гомеоморфизма букв русского алфавита.

§ 15. Гомотопия, степень отображения и индекс векторного поля

15.1. Доказать, что $f: X \rightarrow Y$ гомотопно отображению в точку, если:

а) $X = \mathbb{R}^n$; б) $Y = \mathbb{R}^n$.

15.2. Пусть f — отображение единичного отрезка $[0, 1]$ в себя, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказать, что существует гомотопия, неподвижная в концах отрезка и деформирующая отображение f к тождественному отображению.

15.3. Стягивается ли по себе в точку векторное пространство \mathbb{R}^n ?

15.4. Пусть пространство X стягивается по себе в точку. Доказать, что любые два пути с одинаковыми концами гомопотны между собой (гомотопия неподвижна на концах).

15.5. Доказать, что на сфере S^n , $n > 1$, всякие два пути гомотопны (концы одинаковы, гомотопия неподвижна на концах).

15.6. Дать классификацию букв русского алфавита с точностью до гомотопической эквивалентности.

15.7. а) Доказать, что двумерное плоское кольцо гомотопически эквивалентно окружности.

б) Доказать, что лист Мёбиуса гомотопически эквивалентен окружности.

15.8. а) Доказать, что пространство $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, полученное выбрасыванием из плоскости некоторой точки, гомотопически эквивалентно окружности.

б) Доказать, что $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$, где x_1, \dots, x_k — различные точки \mathbb{R}^n , гомотопически эквивалентно букету k сфер размерности $n - 1$.

Напомним определение *букета* связных пространств X_1, \dots, X_k . Выберем в каждом из них по одной точке $p_i \in X_i$. В несвязном объединении $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ отождествим все точки p_1, \dots, p_k (и только их). Полученное пространство называется букетом пространств X_1, \dots, X_k и обозначается $X_1 \vee X_2 \vee \dots \vee X_k$.

15.9. Доказать, что двумерный тор без точки гомотопически эквивалентен букету $S^1 \vee S^1$.

15.10. Выяснить, чему гомотопически эквивалентен n -мерный тор без точки.

15.11. Выяснить, чему гомотопически эквивалентно проективное пространство \mathbb{RP}^n без точки.

15.12. Выяснить, чему гомотопически эквивалентны следующие пространства (см. рис. 69):

а) тор, меридиан которого заклеен диском;

б) тор, параллель которого заклеена диском;

в) тор $(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, на котором траектория $(e^{2\pi it/p}, e^{2\pi it/q})$, где p и q — взаимно простые целые числа, заклеена диском;

- г) сфера, у которой экватор заклеен диском;
- д) сфера, у которой отождествлены две точки;
- е) сфера, у которой отождествлены p точек.

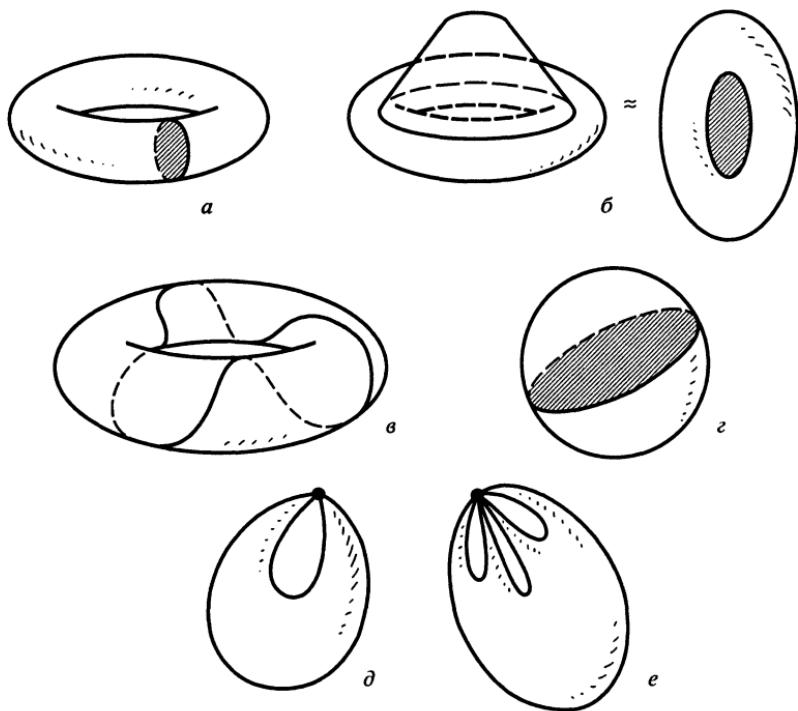


Рис. 69

15.13. Рассмотрим линейно связные достаточно хорошие пространства X и Y (например, многообразия). Выберем в каждом из них k попарно различных точек $x_1, \dots, x_k \in X$ и $y_1, \dots, y_k \in Y$. Отождествим точки x_i и y_i для $i = 1, \dots, k$. Доказать, что полученное пространство (см. рис. 70) гомотопически эквивалентно $X \vee Y \vee S^1 \vee \dots \vee S^1$, где окружность S^1 встречается $k - 1$ раз.

15.14. Доказать следующие гомотопические эквивалентности:

- а) $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k \sim S^{n-k-1}$;
- б) $S^n \setminus S^k \sim S^{n-k-1}$;
- в) $\mathbb{R}^n \setminus S^1 \sim S^{n-k-1} \vee S^{n-1}$.

г) Рассмотрим в \mathbb{R}^n попарно непересекающиеся аффинные подпространства $\Pi^{k_1}, \dots, \Pi^{k_j}$ размерностей k_1, \dots, k_j соответственно. Букету каких сфер гомотопически эквивалентно пространство $\mathbb{R}^n \setminus (\Pi^{k_1} \cup \dots \cup \Pi^{k_j})$?

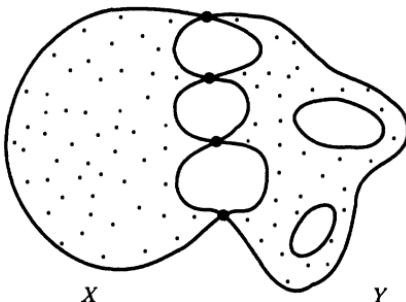


Рис. 70

д)* Рассмотрим в S^n набор попарно непересекающихся сфер S^{k_1}, \dots, S^{k_j} . Чему гомотопически эквивалентно пространство $S^n \setminus (S^{k_1} \cup \dots \cup S^{k_j})$?

15.15. Доказать, что любое векторное поле гомотопно нулевому.

15.16. Доказать, что на связном многообразии векторное поле с изолированными особыми точками гомотопно векторному полю с одной особой точкой в классе векторных полей с изолированными особенностями.

15.17. Доказать, что если при гомотопии векторного поля \mathbf{v} (в классе полей с изолированными особенностями) две особые точки X_1 и X_2 слились в одну, то ее индекс равен сумме индексов $\text{ind}_{X_1} \mathbf{v} + \text{ind}_{X_2} \mathbf{v}$.

15.18. Изобразить на плоскости \mathbb{R}^2 качественную картину распределения интегральных траекторий потоков

$$\mathbf{v}_1 = \text{grad Re } f(z), \quad \mathbf{v}_2 = \text{grad Im } f(z)$$

для перечисленных ниже комплексно-аналитических функций $f(z)$.

Найти особые точки потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Исследовать устойчивость особых точек.

Изобразить качественную картину поведения траекторий потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ на сфере S^2 (пополненная плоскость \mathbb{R}^2 : $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$).

Изобразить процесс распада особенности $z = 0$ этих векторных полей при малом возмущении исходной функции $f(z)$, при котором получается функция $g(z)$, для которой все особые точки потоков $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ невырождены:

а) $f(z) = z^n$ (n — целое число);

б) $f(z) = z + \frac{1}{z}$ (функция Жуковского);

в) $f(z) = z + \frac{1}{z^2}; \quad \text{г) } f(z) = \frac{z+1}{z-2};$

д) $f(z) = \ln z;$ е) $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b};$

ж) $f(z) = z^4(2(7-5)^2 + 12z^6)$ (исследовать в окрестности точки $z = 0$);

з) $f(z) = z^3(z-1)^{100}(z-2)^{900};$

и) $f(z) = 2z - \ln z;$

к) $f(z) = 1 + z^4(z^4 - 4)^{44} \cdot (z^{44} - 44)^{444}$ (исследовать в окрестности точки $z = 0$);

л) $f(z) = \frac{1}{100} \ln \left(\frac{z-2i}{z-4} \right)^3;$ м) $f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 1};$

н) $f(z) = \frac{2}{z} + 21 \ln(z^2);$ о) $f(z) = z^5 + 2 \ln z;$

п) $f(z) = 2 \ln(z-1)^2 - \frac{4}{3} \ln(z+10i)^3;$

р) $f(z) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{(z-i)^3};$

с) $f(z) = \left(2 + \frac{5i}{2} \right) \ln \frac{4z-2}{64z+i};$

т) $f(z) = \left(1 - \frac{i}{2} \right)^4 \ln \left(\frac{18z-i}{10z+1} \right)^2.$

15.19. Найти индекс особых точек векторных полей $\operatorname{grad} \operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{grad} \operatorname{Im} f(z)$, где:

а) $f(z) = z^n;$ б) $f(z) = z^{-n};$ в) $f(z) = \ln z;$

г) $f(z) = z + \frac{1}{z};$ д) $f(z) = \ln \frac{z-a}{z-b}.$

15.20. Доказать, что на всяком связном компактном замкнутом многообразии существует гладкое векторное поле ровно с одной особой точкой. Найти индекс этой точки как особой точки векторного поля.

15.21. Пусть некомпактное многообразие M является открытой областью в некотором компактном замкнутом многообразии. Доказать, что на M существует векторное поле без особых точек.

15.22. Построить гладкое векторное поле ровно с двумя особенностями на следующих ориентированных поверхностях:

а) на сфере; б) на торе; в) на сфере с g ручками.

15.23. Построить гладкое векторное поле с одной особой точкой на следующих поверхностях: а) на сфере; б) на торе; в) на кренделе; г) на сфере с g ручками; д) на проективной плоскости; е) на бутылке Клейна; ж) на сфере с k листами Мёбиуса. Найти индексы этих особых точек.

15.24. Доказать, что индекс (вращение) векторного поля вдоль замкнутой кривой на плоскости не меняется при гомотопии кривой, не проходящей через особые точки векторного поля.

15.25. Доказать, что индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой равен нулю, если векторное поле не имеет особенностей внутри контура.

15.26. Показать, что индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой равен сумме индексов особых точек векторного поля внутри контура.

15.27. Доказать, что не существует гладкого векторного поля без особенностей:

а) на сфере S^2 ;

б) на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$.

15.28. Показать, что на бутылке Клейна существует гладкое векторное поле без особенностей. Доказать, что для любых двух гладких векторных полей на бутылке Клейна существует точка, в которой они линейно зависимы.

15.29. Найти степень векторного поля \mathbf{X} на гиперповерхности Γ :

а) $\xi = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, где $A \in SO(2)$, и $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\xi = A_z(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, где $A_z(\varphi)$ — матрица поворота на угол φ

вокруг оси Oz , и $\Gamma: \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$.

15.30. Найти степень векторного поля \mathbf{X} на гиперповерхности Γ :

а) $\mathbf{X} = \left(x^2 + y^2 - 1, \frac{x^2}{4} + 4y^2 - 1 \right)$ и $\Gamma: 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 3 = 0$;

б) $\mathbf{X} = (2z^2 - y^2 - 4, 2x^2 + z^2 - 1, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ и
 $\Gamma: x^2 + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$;

в) $\mathbf{X} = (y^2 + 3z^2 - x^2 - 4, x^2 + 2y^2 + z^2 - 1, x^2 - y^2 + 2)$ и
 $\Gamma: x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

15.31. Доказать, что индексы двух векторных полей на произвольной 2-мерной замкнутой поверхности равны. Верно ли это утверждение для многообразия любой размерности?

15.32. Пусть $\mathbf{v}(x)$ — гладкое векторное поле на плоскости \mathbb{R}^2 ; L — гладкий самопересекающийся контур на плоскости \mathbb{R}^2 ; j_L — индекс контура L в векторном поле $\mathbf{v}(x)$; j — число точек внутреннего касания поля \mathbf{v} и контура L ; E — число точек внешнего

касания. Доказать, что если число всех точек касания поля и контура конечно, то $j_L \leq \frac{1}{2}(2 + J - E)$.

15.33. Рассмотрим на римановом многообразии M^n векторное поле $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f$, где f — гладкая функция. Пусть $x_0 \in M^n$ — изолированная особая точка поля \mathbf{v} , т. е. $\mathbf{v}(x_0) = 0$. Пусть гессиан функции f , т. е. $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right)$, — невырожденная в точке x_0 матрица, причем ее индекс (число отрицательных собственных значений) равен λ . Доказать, что $\operatorname{ind}_{x_0} \mathbf{v} = (-1)^\lambda$.

15.34. Пусть $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — гладкая поверхность и $\zeta: M^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ — гауссово отображение. Пусть l — прямая, проходящая через начало координат и точку $x \in S^{n-1}$. Рассмотрим функцию высоты $f_l: M^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, задаваемую ортогональным проектированием M^{n-1} на l .

а) Доказать, что все критические точки f_l являются прообразами точек x и $-x$ при гауссовом отображении ζ .

б) Доказать, что гессиан функции f_l в этих критических точках совпадает с матрицей Якоби отображения ζ , вычисленной в тех же точках.

15.35. Пусть $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Найти особые точки и их индексы векторного поля, значение которого в точке $x \in \mathbb{R}^n$ равняется:

а) Ax ; б) $Ax + x_0$, где $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

15.36. Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^1 \rightarrow S^1$, $f(z) = z^k$, $z \in S^1 \subset \mathbb{C}$, $|z| = 1$. Найти его степень.

15.37. а) Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$, где $f(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 1$, здесь S^2 — дополненная комплексная плоскость, т. е. $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Найти его степень.

б) Сделать то же самое для $f(z) = z^3 - 3z^2 - 9z + 27$.

в) Рассмотреть общий случай $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$.

15.38. а) Найти критические точки и критические значения отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$, заданного формулой $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z + 1}$. Найти его степень.

б) Сделать то же самое для $f(z) = \frac{z^2 + 4}{z^3 + 2z^2 + 5}$.

в) Рассмотреть общий случай $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ для многочленов $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $Q(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m$ с комплексными коэффициентами.

15.39. а) Для отображения $SO(2) \rightarrow SO(2)$, заданного формулой $A \mapsto A^7$ найти критические точки и критические значения. Найти степень отображения.

б) Сделать то же самое для отображения $O(2) \rightarrow O(2)$, заданного той же формулой.

в) Отображение $SU(2) \rightarrow SU(2)$ задано формулой $A \mapsto A^3$. Найти его критические точки, критические значения и степень.

г) Отображение $SO(3) \rightarrow SO(3)$ задано формулой $A \mapsto A^3$. Найти его критические точки, критические значения и степень.

д) Решить задачи а)–г) для отображения $A \mapsto A^k$.

15.40. Пусть X , Y и Z — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия и $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — гладкие отображения. Доказать, что $\deg g \circ f = \deg g \cdot \deg f$.

15.41. Пусть M_1 , M_2 , N_1 , N_2 — ориентируемые замкнутые гладкие многообразия, причем $\dim M_1 = \dim N_1$, $\dim M_2 = \dim N_2$. Пусть $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ и $f_2: M_2 \rightarrow N_2$ — гладкие отображения. Доказать, что $\deg f_1 \times f_2 = \deg f_1 \cdot \deg f_2$, где $f_1 \times f_2: M_1 \times M_2 \rightarrow N_1 \times N_2$.

15.42. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, причем X и Y — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия одинаковой размерности. Тогда $\deg f = \pm 1$.

15.43. Доказать, что если $f: M \rightarrow N$ гомотопно отображению в точку, то у f обязательно есть критические точки. Здесь M и N — гладкие замкнутые ориентируемые многообразия одинаковой размерности.

15.44. Доказать, что замкнутые ориентируемые многообразия разных размерностей не могут быть гомотопически эквивалентны.

15.45. а) Доказать, что замкнутое ориентируемое многообразие не стягивается.

б) Останется ли утверждение верным, если отбросить предположение об ориентируемости?

15.46. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — центральная симметрия.

а) Вычислить $\deg f$.

б) Доказать, что при нечетных n отображение f гомотопно тождественному.

15.47. Пусть $f: S^n \rightarrow S^n$ — непрерывное отображение. Пусть n — четное. Доказать, что найдется точка $x \in S^n$, для которой либо $x = f(x)$, либо $x = -f(x)$.

15.48. Пусть на сфере S^2 заданы две функции f и g такие, что $f(x) = -f(\tau x)$ и $g(x) = -g(\tau x)$, где τ — центральная симметрия. Доказать, что у f и g имеется общий нуль.

15.49. Пусть на S^2 заданы непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что обязательно найдется точка $x \in S^2$ такая, что $f(x) = f(\tau x)$ и $g(x) = g(\tau x)$, где τ — симметрия сферы относительно ее центра.

15.50. Пусть f — непрерывное отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ такое, что $f(x) \neq -x$ ни для каких $x \in S^n$. Доказать, что:

а) $\deg f = 1$;

б) если n — четное, то существует точка $x \in S^n$ такая, что $f(x) = x$.

15.51. Доказать, что отображение $f: S^n \rightarrow S^n$, не имеющее неподвижных точек, гомотопно центральной симметрии сферы τ : $x \mapsto -x$.

15.52. Пусть отображение $f: S^n \rightarrow S^n$ имеет степень $2k+1$. Доказать, что существует пара диаметрально противоположных точек сферы, которые под действием f переходят в диаметрально противоположные точки, т. е. $f(-x) = -f(x)$.

15.53. Пусть $f: X \rightarrow S^n$, $g: X \rightarrow S^n$ — два непрерывных отображения. Доказать, что если для всех x точки $f(x)$ и $g(x)$ не являются диаметрально противоположными, то отображения f и g гомотопны.

15.54. Напомним, что многообразие $\mathbb{R}P^n$ при $n = 2k+1$ ориентируемо. Найти степень канонического отображения $f: S^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2k+1}$.

15.55. Доказать, что степень любого гладкого отображения $S^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}P^{2k+1}$ четна.

15.56. Привести в явном виде пример отображения $f: S^n \rightarrow S^n$ степени k .

15.57. Доказать, что на сфере S^{2k+1} не существует четного касательного векторного поля (т. е. такого, что $\mathbf{v}(x) = \mathbf{v}(-x)$) без особенностей.

15.58. а) Доказать, что не существует непрерывного отображения A векторного пространства \mathbb{R}^3 в себя такого, что вектора x и $A(x)$ ортогональны для всех $x \in \mathbb{R}^3$.

б) Тот же вопрос для \mathbb{R}^4 .

15.59. Пусть M^2 — замкнутая вложенная поверхность в \mathbb{R}^3 . Пусть $f: M^2 \rightarrow S^2$ — отображение нормалей (гауссово отображение). Пусть ω и ω' — формы площади сферы S^2 и поверхности M соответственно. Доказать, что $f^*(\omega) = K\omega'$, где K — гауссова кривизна поверхности M . Доказать также, что

$$2 \deg f = \int_M K \omega'$$

и равняется эйлеровой характеристикике M .

15.60. а) Построить гладкое отображение степени 1 тора T^2 на сферу S^2 . Описать отображение геометрически для тора и сферы, стандартно вложенных в \mathbb{R}^3 .

б) Построить гладкое отображение тора T^2 на сферу S^2 степени k .

в)* Выяснить, существует ли отображение степени 1 сферы S^2 на тор T^2 .

г)* Для каких g_1 и g_2 существует гладкое отображение M_{g_1} на M_{g_2} степени 1, где M_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода g (сфера с g ручками)?

д)* Для каких g_1 и g_2 существует гладкое отображение M_{g_1} на M_{g_2} ненулевой степени?

15.61. Доказать, что два гладких отображения $S^1 \rightarrow S^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.

15.62. Теорема Хопфа. Пусть M^n — замкнутое ориентируемое многообразие. Доказать, что два отображения $M^n \rightarrow S^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень.

15.63. Привести пример отображения степени 0, не гомотопного отображению в точку.

15.64. Пусть $P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ — полином степени n с комплексными коэффициентами. Он задает отображение сферы S^2 в себя, где в качестве S^2 рассматривается дополненная комплексная плоскость $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

а) Доказать, что формула

$$H_1(z, t) = z^n + (1-t)(a_1z^{n-1} + \dots + a_n),$$

где $t \in [0, 1]$, задает гомотопию исходного отображения к отображению $z \mapsto z^n$.

б) Пусть $a_n \neq 0$. Рассмотрим отображение

$$H_2(z, t) = (1-t)(z^n + \dots + a_{n-1}z) + a_n.$$

Оно является гомотопией исходного отображения к отображению $z \mapsto a_n$, которое, очевидно, имеет нулевую степень. Следовательно, многочлен $P_n(z)$ не имеет комплексных корней. Найти ошибку в рассуждениях.

Часть 2

§ 16. Системы координат (дополнительные задачи)

В задачах 16.1–16.4:

- найдите координатные поверхности и координатные линии;
- вычислите определители

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right|, \quad \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right|$$

и установите, в каких точках пространства \mathbb{R}^3 нарушается взаимная однозначность соответствия между криволинейными и прямоугольными декартовыми координатами для перечисленных ниже криволинейных систем координат u_1, u_2, u_3 пространства \mathbb{R}^3 ;

в) являются ли эти системы координат ортогональными?

16.1. Для биполярной системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{a \sin u_1}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_2 = \frac{a \sin u_2}{\operatorname{ch} u_1 - \cos u_2}, \quad x_3 = u_3,$$

где a — постоянный множитель.

16.2. Для бисферической системы координат, определяемой равенствами

$$x_1 = \frac{c \sin u_1 \cos u_3}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1}, \quad x_2 = \frac{c \sin u_1 \sin u_3}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1}, \quad x_3 = \frac{c \operatorname{sh} u_2}{\operatorname{ch} u_2 - \cos u_1},$$

где c — постоянный множитель, $0 \leq u_1 < u_2, -\infty < u_2 < \infty, -\pi < u_3 \leq \pi$.

16.3. Для системы вытянутых сфероидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = c u_1 u_2, \quad x_2 = c \sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)} \cos u_3,$$

$$x_3 = c \sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)} \sin u_3,$$

где $|u_1| \geq 1, -1 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq u_3 < 2\pi, c$ — постоянный множитель.

16.4. Для системы сплюснутых сфериоидальных координат, определяемой равенствами

$$x_1 = cu_1 u_2 \sin u_3, \quad x_2 = c\sqrt{(u_1^2 - 1)(1 - u_2^2)}, \quad x_3 = cu_1 u_2 \cos u_3,$$

где $|u_1| \geq 1$, $-1 \leq u_2 \leq 1$, $0 \leq u_3 < 2\pi$.

16.5. Преобразовать выражение

$$y^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - x \frac{\partial V}{\partial x} - y \frac{\partial V}{\partial y} + V$$

к полярным координатам r , φ , т. е. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

16.6. Преобразовать выражение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial V}{\partial x} + 2(y - y^3) \frac{\partial V}{\partial y} + x^2 y^2 V = 0$$

к новым координатам u , v таким, что $x = uv$, $y = \frac{1}{v}$. Найти область определения и область значения этой системы координат.

16.7. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = \ln \ln z$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

16.8. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = \ln \ln \frac{z - z_1}{z - z_2}$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

16.9. Вычислите оператор Лапласа $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ в системе координат (u, v) такой, что $w = z^3 - 3z^2 + 1$, где $w = x + iy$, $z = u + iv$.

§ 17. Кривые и поверхности: уравнения и параметризации

Обычно в настоящем задачнике кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ мы называем гладкой, если существуют и непрерывны производные всех порядков вектор-функции $\mathbf{r}(t)$. Однако в некоторых задачах мы уточняем класс гладкости. Именно:

а) кривая называется *гладкой класса C^n* , если она допускает параметризацию $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно;

б) кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется *аналитической*, если вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ является вещественно-аналитической, т. е. допускает разложение в сходящийся степенной ряд.

17.1. а) Привести примеры нерегулярных кривых, допускающих аналитическую параметризацию.

б) Доказать, что кривая, допускающая аналитическую параметризацию, может иметь только такие точки излома, в которых вектор скорости скачком поворачивается на угол π .

в) Доказать, что если гладкая кривая не допускает аналитической параметризации, то в ее особых точках угол поворота вектора скорости может быть любым. Построить примеры.

17.2. Доказать, что если кривая определена аналитическим отображением окружности в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, то ее регулярность может нарушаться только в конечном числе точек.

17.3. Представить график функции $y = |x|$ как кривую следующего типа:

а) с C^n -гладкой параметризацией для любого натурального n , но не являющуюся C^{n+1} -гладкой;

б) с C^∞ -гладкой параметризацией;

в) показать, что для нее не существует аналитической параметризации.

17.4. Пусть плоская кривая задана отображением $x = t^k$, $y = t^n$, $k \leq n$, где k и n — натуральные числа, $t \in (-1, 1)$. Исследовать, при каких k и n кривая является:

а) регулярной, но неаналитической в любой регулярной параметризации;

б) регулярной аналитической;

в) нерегулярной в любой гладкой параметризации.

В пунктах а) и б) привести соответствующие регулярные параметризации. Во всех трех случаях нарисовать качественный вид кривых в окрестности начала координат.

17.5. Пусть пространственная кусочно-регулярная кривая состоит из двух плоских дуг. Какая возможна максимальная гладкость кривой в целом?

17.6. Найти регулярную аналитическую параметризацию лемнискаты Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

17.7. Можно ли преобразовать лемнискату в классе регулярных кривых в кривую без самопересечений?

17.8. Пусть γ — некоторая плоская кривая, M — точка кривой γ , xOy — заданная в плоскости кривой прямоугольная система координат. Обозначим через T и N точки пересечения касательной и нормали к этой кривой с осью Ox , и пусть P — проекция точки M на ось Ox (см. рис. 71).

а) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка PN постоянна и равна a .

б) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка PT постоянна и равна a .

в) Найти уравнение кривой γ , если длина отрезка MN постоянна и равна a .

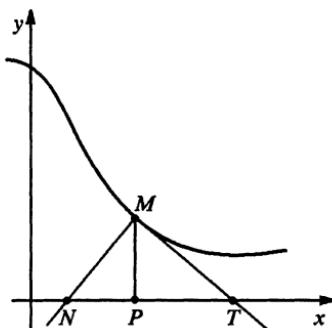


Рис. 71

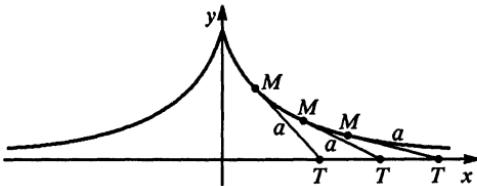


Рис. 72

17.9. Найти уравнение кривой γ с постоянной длиной касательной $MT = a$ (см. рис. 72). Такая кривая называется *тракттрикосой*.

17.10. Произвольный луч OE пересекает в точке D окружность

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

а в точке E — касательную к ней, проходящую через точку γ , диаметрально противоположную O . Через точки D и E проведены прямые, параллельные соответственно осям Ox и Oy , до пересечения в точке M . Составить уравнение кривой, образованной точками M (*локон Аньези*) (см. рис. 73). Нарисовать эту кривую.

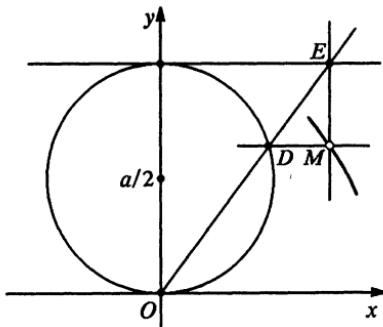


Рис. 73. Локон Аньези

17.11. Пусть γ — замкнутая гладкая кривая. Доказать, что для любого вектора \mathbf{a} найдется точка $x \in \gamma$, в которой касательная к γ ортогональна \mathbf{a} .

17.12. Пусть две точки движутся в пространстве так, что расстояние между ними остается постоянным. Доказать, что проекции их скоростей на направление прямой, соединяющей эти точки, равны между собой.

17.13. Доказать, что, если на некотором сегменте $[a, b]$ вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна вместе со своей производной \mathbf{r}' , причем вектор \mathbf{r} параллелен \mathbf{r}' , и при этом $\mathbf{r}' \neq 0$ и $\mathbf{r} \neq 0$, то годограф вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ есть отрезок прямой линии.

17.14. Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана гладкая вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, причем производные \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' отличны от нуля при всех $t \in [a, b]$, и, кроме того, они коллинеарны, т. е. вектор \mathbf{r}' параллелен \mathbf{r}'' при всех $t \in [a, b]$. Доказать, что годографом такой вектор-функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ является отрезок прямой линии.

17.15. Пусть по плоскости движется твердый стержень, причем его концы описывают кривые $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$. Найти уравнение неподвижной центроиды. *Неподвижной центроидой* называется множество точек пересечения прямых, проходящих через концы стержня перпендикулярно направлениям скоростей его концов.

17.16. Рассмотрим движение стержня, описанное в предыдущей задаче. *Подвижной центроидой* называется множество мгновенных центров вращения относительно движущегося стержня. Составить уравнение подвижной центроиды, если заданы законы движения концов стержня $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$.

17.17. Пусть движение плоскости (т. е. изометрия) задано движением по плоскости жесткого стержня. Доказать, что тогда линейная скорость \mathbf{v} точки определяется соотношением $\mathbf{v} = \omega[\mathbf{r}]$, где \mathbf{r} — радиус-вектор рассматриваемой точки $M(R)$ относительно мгновенного центра вращения (см. задачи 17.15, 17.16), а $[\mathbf{r}]$ — вектор, полученный из \mathbf{r} поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Выразить ω через \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а также найти скорость \mathbf{v} точки $M(R)$ (см. рис. 74).

17.18. Составить уравнения касательной и нормали к следующим кривым:

a) $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$ (эллипс);

б) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right)$ (гипербола);

в) $\mathbf{r}(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$ (астроида);

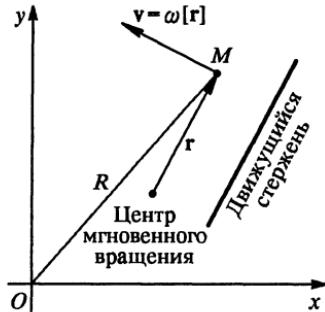


Рис. 74. Движение твердого стержня

г) $\mathbf{r}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (циклоида);

д) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right)$ в точке $t = 0$;

е) $\mathbf{r}(t) = (a\varphi \cos \varphi, a\varphi \sin \varphi)$ (спираль Архимеда).

17.19. Доказать, что длина отрезка касательной к астроиде

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

заключенного между осями координат, равна a (см. рис. 75).

17.20. Доказать, что кардиоиды, заданные в полярных координатах уравнениями

$$r = a(1 + \cos \varphi), \quad r = a(1 - \cos \varphi),$$

ортогональны в точках пересечения, отличных от начала координат.

17.21. Найти огибающую семейства прямых, соединяющих концы пар сопряженных диаметров эллипса.

17.22. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от сторон прямого угла треугольник постоянной площади.

17.23. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от данной параболы сегменты данной площади.

17.24. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от сторон данного угла треугольник данного периметра.

17.25. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на параллельных хордах некоторой окружности.

17.26. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих общие главные оси и заданную сумму полуосей.

17.27. На плоскости расположено зеркало, имеющее форму окружности. На него падает пучок параллельных лучей. Найти огибающую отраженных лучей. Эта кривая называется *каустикой*.

17.28. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих заданную площадь и общие главные оси.

17.29. Найти огибающую семейства окружностей, имеющих центры на эллипсе и проходящих через один из его фокусов.

17.30. Найти огибающую семейства окружностей радиуса a с центрами на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.31. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена, непрерывна и дважды дифференцируема на сегменте $[a, b]$. Далее, пусть в каждой точке этого сегмента векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' неколлинеарны. Найти огибающую нормалей кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.32. Найти огибающую лучей, отраженных от окружности, если светящаяся точка находится на окружности.

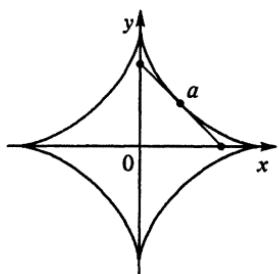


Рис. 75. Астроида

отсекающих от сторон прямого угла треугольник постоянной площади.

17.23. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от данной параболы сегменты данной площади.

17.24. Найти огибающую семейства прямых, отсекающих от сторон данного угла треугольник данного периметра.

17.25. Найти огибающую семейства окружностей, построенных, как на диаметрах, на параллельных хордах некоторой окружности.

17.26. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих общие главные оси и заданную сумму полуосей.

17.27. На плоскости расположено зеркало, имеющее форму окружности. На него падает пучок параллельных лучей. Найти огибающую отраженных лучей. Эта кривая называется *каустикой*.

17.28. Найти огибающую семейства эллипсов, имеющих заданную площадь и общие главные оси.

17.29. Найти огибающую семейства окружностей, имеющих центры на эллипсе и проходящих через один из его фокусов.

17.30. Найти огибающую семейства окружностей радиуса a с центрами на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.31. Пусть вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ определена, непрерывна и дважды дифференцируема на сегменте $[a, b]$. Далее, пусть в каждой точке этого сегмента векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' неколлинеарны. Найти огибающую нормалей кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

17.32. Найти огибающую лучей, отраженных от окружности, если светящаяся точка находится на окружности.

17.33. Для кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 - t^2 - 5, 3t^2 + 1, 2t^3 - 16)$$

написать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости в точке, для которой $t = 2$.

17.34. Найти касательную прямую и нормальную плоскость в точке $A(3, -7, 2)$ кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^4 + t^2 + 1, 4t^3 + 5t + 2, t^4 - t^3).$$

17.35. Найти касательную прямую и нормальную плоскость в точке $A(2, 0, -2)$ кривой

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t + 3, t^3 - 2t^2 + t, 2t^3 - 6t + 2).$$

17.36. Составить уравнения касательной прямой и нормальной плоскости для кривой, заданной в \mathbb{R}^3 трансверсальным пересечением двух поверхностей:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

17.37. Найти длину дуги винтовой линии

$$x = 3a \cos t, \quad y = 3a \sin t, \quad z = 4at$$

от точки пересечения с плоскостью xOy до произвольной точки $M(t)$.

17.38. Найти длину дуги одного витка между двумя точками пересечения с плоскостью xOy кривой

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad z = 4a \cos \frac{t}{2}.$$

17.39. Найти длину дуги кривой

$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2$$

между плоскостями $y = a/3$ и $y = 9a$.

17.40. Найти длину замкнутой кривой

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad z = \cos 2t.$$

17.41. В каждой точке кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ задан касательный вектор $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) \neq 0$. Функция $\mathbf{r}(t)$ определена, непрерывна и имеет непрерывную производную $\mathbf{r}'(t)$ на сегменте $[a, b]$. Функция $\mathbf{T}(t)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Доказать, что на данной кривой можно ввести такую параметризацию, при которой $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{T}$. Иными словами, всякое достаточно хорошее векторное поле, касательное к кривой, можно сделать полем ее скорости при подходящем выборе параметра вдоль кривой.

17.42. Найти необходимое и достаточное условие, при котором данное семейство прямых

$$\mathbf{r} = \rho(u) + \lambda \mathbf{e}(u) \quad (|\mathbf{e}| = 1)$$

в пространстве \mathbb{R}^3 имеет огибающую. Найти эту огибающую.

17.43. Составить параметрическое уравнение цилиндра, для которого кривая $\rho = \rho(u)$ является направляющей, а образующие параллельны вектору \mathbf{e} .

17.44. Составить параметрическое уравнение конуса с вершиной в начале радиуса-вектора $\rho(t)$, для которого кривая $\rho = \rho(t)$ является направляющей.

17.45. Составить параметрическое уравнение поверхности, образованной касательными к данной кривой $\rho = \rho(t)$. Такая поверхность называется *развертывающейся* поверхностью.

17.46. Окружность радиуса a перемещается так, что ее центр движется по заданной кривой $\rho = \rho(s)$, а плоскость, в которой она расположена, является в каждый момент нормальной плоскостью к данной кривой. Здесь для простоты записи ответа параметр s на кривой взят натуральным. Составить параметрическое уравнение поверхности, описываемой окружностью.

17.47. Вокруг оси Oz вращается плоская кривая $x = \varphi(v)$, $z = \psi(v)$. Составить параметрические уравнения поверхности вращения. Рассмотреть частный случай, когда меридиан задан уравнением $x = f(z)$.

17.48. Составить уравнение поверхности, образованной главными нормалями винтовой линии.

17.49. Составить уравнение поверхности, образованной семейством главных нормалей данной кривой $\rho = \rho(s)$.

17.50. Прямая движется так, что точка M пересечения ее с окружностью движется по данной окружности, причем эта прямая остается в нормальной плоскости к окружности в соответствующей точке и поворачивается на угол, равный углу $\widehat{MOM_0}$, который прошла точка, двигаясь по окружности. Составить уравнение поверхности, описываемой движущейся прямой, считая, что начальным положением движущейся прямой была ось Ox , а окружность задана уравнениями $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

17.51. Даны две кривые $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и $\rho = \rho(v)$. Составить уравнение поверхности, описываемой серединой отрезка, концы которого лежат на данных кривых. Такая поверхность называется *поверхностью переноса*.

17.52. Пусть даны: плоскость (направляющая плоскость), не параллельная ей прямая (направляющая прямая) и некоторая кривая (направляющая кривая). Через каждую точку направляющей кривой проведем прямую l , параллельную направляющей плоскости и пересекающую прямую. Рассмотрим поверхность, заметаемую прямой l при ее движении. Такая поверхность называется

коноидом (см. рис. 76). Составить уравнение коноида, если даны: направляющая плоскость yOz , направляющая прямая $y = 0$, $z = h$, и направляющая кривая $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$ (эллипс).

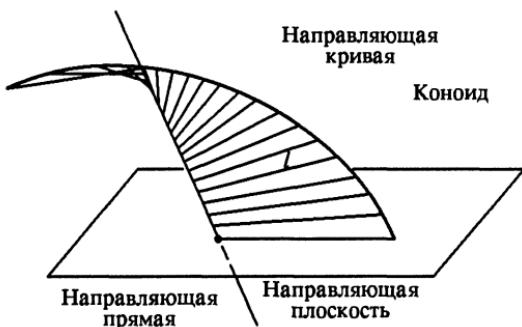


Рис. 76. Коноид

17.53. Составить уравнение коноида, для которого направляющие прямая, плоскость и кривая заданы соответственно уравнениями:

$$a) x = a, y = 0; \quad b) z = 0; \quad v) y^2 = 2pz, x = 0.$$

17.54. *Цилиндроидом* называется поверхность, образованная прямыми, параллельными некоторой плоскости (см. рис. 77). Цилиндроид может быть задан двумя направляющими кривыми

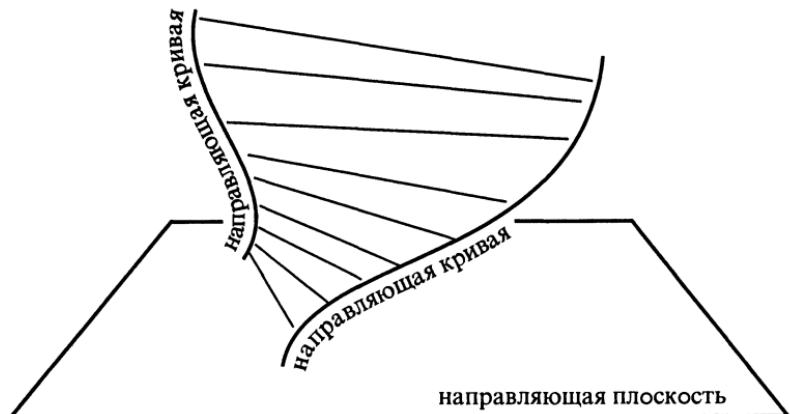


Рис. 77. Цилиндроид

(лежащими на нем) и направляющей плоскостью (которой параллельны образующие цилиндроида). Частным случаем цилиндро-

ида является коноид, описанный в задачах 17.52 и 17.53. Цилиндроид превращается в коноид, если одна из двух направляющих кривых является прямой линией. Составить уравнение цилиндроида, если его направляющими являются окружности $x^2 + z^2 - 2ax = 0$, $y = 0$ и $y^2 + z^2 - 2ay = 0$, $x = 0$, а направляющей плоскостью является плоскость xOy .

17.55. Пусть в \mathbb{R}^3 задана кривая $\rho = \rho(u)$ и в каждой ее точке задан вектор $\mathbf{a}(u)$. Линейчатой называется поверхность, задаваемая параметрическим уравнением

$$\mathbf{r}(u, v) = \rho(u) + v\mathbf{a}(u).$$

Прямые, проходящие через точки кривой $\rho(u)$ в направлении вектора $\mathbf{a}(u)$, называются *прямолинейными образующими* линейчатой поверхности. Отметим, что коноид и цилиндроид являются линейчатыми поверхностями.

Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости $y - z = 0$ и пересекают параболы $y^2 = 2px$, $z = 0$ и $z^2 = -2px$, $y = 0$.

17.56. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой пересекают ось Oz , параллельны плоскости xOy и пересекают линию $xyz = a^3$, $x^2 + y^2 = b^2$.

17.57. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой пересекают прямую $\mathbf{r} = \mathbf{a} + u\mathbf{b}$, кривую $\rho = \rho(v)$ и перпендикулярны вектору \mathbf{n} .

17.58. Составить уравнение линейчатой поверхности, образующие которой параллельны плоскости xOy и пересекают два эллипса

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = a;$$

$$\frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad x = -a.$$

17.59. Составить уравнение линейчатой поверхности, образованной прямыми, пересекающими кривую $\rho = (u, u^2, u^3)$, параллельными плоскости xOy и пересекающими ось Oz .

17.60. Составить уравнение поверхности, образованной прямыми, параллельными плоскости $x + y + z = 0$, пересекающими ось Oz и окружность $\rho = (b, a \cos u, a \sin u)$.

17.61. Составить параметрические уравнения поверхности, образованной прямыми, пересекающими окружность $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$ и прямые $y = 1$, $z = 1$ и $x = 1$, $z = 0$.

17.62. Составить уравнение поверхности, образованной касательными к винтовой линии $\rho(v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$. Такая поверхность называется *развертывающимся геликоидом*.

17.63. Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(0, 0, -c)$ и направляющей — кривой $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, лежащей в плоскости $z = 0$.

17.64. В плоскости π дана прямая AB и кривая $\rho = \rho(u)$. Кривая ρ равномерно перемещается в плоскости π так, что каждая ее точка движется параллельно AB . В то же время плоскость π равномерно вращается вокруг AB . Составить уравнение поверхности, описываемой кривой ρ . Эта поверхность называется *винтовой поверхностью*. Частным случаем винтовой поверхности является прямой геликоид. В этом случае $\rho = \rho(u)$ — прямая, ортогональная AB .

17.65. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ — кривая с отличной от нуля кривизной k . Через каждую ее точку проведена нормальная плоскость, и в этой плоскости построена окружность с центром на кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и заданным радиусом a , причем $a > 0$, $ak < 1$. Эти окружности заметают в пространстве трубкообразную поверхность S . Такие поверхности называются *трубками* или *каналовыми поверхностями*.

а) Составить уравнение поверхности S .

б) Доказать, что любая нормаль поверхности S пересекает кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u)$ и перпендикулярна вектору скорости этой кривой.

17.66. Найти поверхность S , зная, что все ее нормали пересекаются в одной точке O .

17.67. Показать, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскости поверхности

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \frac{a^3}{uv},$$

не зависит от выбора точки касания на поверхности.

17.68. Показать, что сумма квадратов длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной плоскостью поверхности

$$x = u^3 \sin^3 v, \quad y = u^3 \cos^3 v, \quad z = (a^2 - u^2)^{3/2},$$

постоянна.

17.69. Показать, что касательная плоскость к коноиду

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = a \sin 2v$$

пересекает коноид по эллипсу.

17.70. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности $z = xf(y/x)$, проходят через одну и ту же точку.

17.71. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к геликоиду

$$\mathbf{r}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, ku).$$

17.72. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности

$$xyz = a^3.$$

17.73. Пусть поверхность образована касательными к кривой γ . Доказать, что эта поверхность во всех точках одной и той же касательной к кривой γ имеет одну и ту же касательную плоскость.

17.74. Пусть поверхность образована главными нормальми кривой γ . Составить уравнение касательной плоскости и нормали в производной точке этой поверхности.

17.75. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, образованной бинормальми кривой γ .

17.76. Доказать, что нормаль поверхности вращения совпадает с главной нормалью меридиана и пересекает ось вращения.

17.77. Доказать, что если все нормали поверхности пересекают одну и ту же прямую, то поверхность будет поверхностью вращения.

17.78. Линейчатая поверхность (см. определение в задаче 17.55) называется развертывающейся, если во всех точках произвольной прямолинейной образующей касательная плоскость к поверхности одна и та же. Докажите, что линейчатая поверхность

$$\mathbf{r}(u, v) = \rho(u) + v\mathbf{a}(u)$$

является развертывающейся тогда и только тогда, когда

$$(\mathbf{r}', \mathbf{a}, \mathbf{a}') = 0.$$

17.79. Докажите, что любая развертывающаяся поверхность может быть разбита на следующие части: 1) часть плоскости; 2) часть цилиндра; 3) часть конуса; 4) часть фигуры, состоящей из касательных к некоторой неплоской линии. В последнем случае указанная линия называется ребром возврата.

17.80. Найти огибающую и ребро возврата семейства эллипсоидов

$$\alpha^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где α — параметр семейства.

17.81. Найти огибающую семейства сфер, построенных на хордах, параллельных большой оси эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

как на диаметрах.

17.82. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер, диаметрами которых служат хорды окружности

$$x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad z = 0,$$

проходящие через начало координат.

17.83. Две параболы расположены в перпендикулярных плоскостях и имеют общую вершину и общую касательную в вершине. Найти огибающую семейства плоскостей, касательных к обеим параболам.

17.84. Найти огибающую семейства сфер постоянного радиуса, центры которых расположены на данной кривой $\rho = \rho(s)$ (каналовая поверхность).

17.85. Найти ребро возврата семейства сфер постоянного радиуса a , центры которых расположены на кривой $\rho = \rho(s)$.

17.86. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер радиуса a , центры которых расположены на окружности

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad z = 0.$$

17.87. Найти огибающую и ребро возврата семейства сфер, проходящих через начало координат, центры которых расположены на кривой

$$\mathbf{r}(u) = (u^3, u^2, u).$$

17.88. Найти огибающую семейства эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

с заданной суммой полуосей

$$a + b + c = l.$$

17.89. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов длин которых равна a^2 .

17.90. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают от координатного угла тетраэдр постоянного объема a^3 .

17.91. Найти огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$x\alpha^2 + y\alpha + z = 0,$$

где α — параметр семейства.

17.92. Найти огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha + z = \alpha C,$$

где α — параметр семейства.

17.93. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства соприкасающихся плоскостей данной кривой.

17.94. Найти огибающую, характеристики и ребро возврата семейства нормальных плоскостей данной кривой.

17.95. Найти характеристики, огибающую и ребро возврата семейства плоскостей

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{n} \rangle + D = 0, \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(u), \quad D = D(u), \quad |\mathbf{n}| = 1,$$

где u — параметр семейства.

17.96. Найти развертывающуюся поверхность, проходящую через две параболы:

$$y^2 = 4ax, \quad z = 0$$

и

$$x^2 = 4ay, \quad z = b.$$

17.97. Показать, что поверхность

$$x = \cos v - (u + v) \sin v, \quad y = \sin v + (u + v) \cos v, \quad z = u + 2v$$

является развертывающейся.

17.98. Показать, что поверхность

$$x = u^2 + \frac{v}{3}, \quad y = 2u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2u^2 v}{3}$$

является развертывающейся.

17.99. Дан параболоид

$$x = 2au \cos v, \quad y = 2bu \sin v, \quad z = 2u^2(a \cos^2 v + b \sin^2 v),$$

где a и b — постоянные. Определить уравнение кривых на поверхности так, чтобы касательные плоскости к поверхности образовывали с плоскостью xOy постоянный угол вдоль кривой.

Показать, что характеристики этого семейства касательных плоскостей образуют постоянный угол с осью z . Найти ребро возврата огибающей.

17.100. Найти ребро возврата развертывающейся поверхности, которая касается поверхности $az = xy$ вдоль линии пересечения ее с цилиндром $x^2 = by$.

17.101. Показать, что развертывающаяся поверхность, проходящая через окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ и $x^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$, пересекает плоскость $x = 0$ по равносторонней гиперболе.

§ 18. Теория кривых (дополнительные задачи)

18.1. Вычислить кривизну кривых:

a) $\begin{cases} x(t) = a(1+m) \cos mt - am \cos(1+m)t, \\ y(t) = a(1+m) \sin mt - am \sin(1+m)t \end{cases}$ (эпициклоида);

б) $x^2 y^2 = (a^2 - y^2)(b + y)^2$ (конхоида);

18.2. Вычислить кривизну следующих кривых:

а) $y = -\ln \cos x$;

б) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ при $t = 1$;

в) $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ при $t = \pi/2$;

г) $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$.

18.3. Найти кривизну следующих кривых, заданных в полярных координатах:

- а) $r = a\varphi$; б) $r = a\varphi^k$;
- в) $r = a^\varphi$ в точке $\varphi = 0$.

18.4. Найти кривизну следующих кривых:

- а) $y = \sin x$; б) $y = \operatorname{sh} x$;
- в) $y = \operatorname{ch} x$; г) $y = \operatorname{tg} x$;
- д) $y = \operatorname{th} x$; е) $y = \operatorname{ctg} x$.

18.5. Определить кривизну кривой

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

18.6. Найти параметрическое уравнение кривой:

- а) $s^2 + 9R^2 = 16a^2$;
- б) $s^2 + R^2 = 16a^2$;
- в) $R^2 + a^2 = a^2 e^{-2s-a}$.

18.7. Доказать, что если координаты точек кривой удовлетворяют соотношению

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{(x dx + y dy + z dz)^2} = 1,$$

то касательные к кривой также касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

18.8. Доказать, что касательные к кривой

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}(\sin t + \cos t), \frac{1}{2}(\sin t - \cos t), e^{-t} \right)$$

пересекают плоскость xOy по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

18.9. Пусть O — центр эллипса, A — конец одной полуоси ($OA = a$), B — конец другой полуоси ($OB = b$). Рассмотрим точку C такую, что $CAOB$ является прямоугольником. Перпендикуляр, опущенный из C на AB , продолжим до пересечения с AO в точке P и до пересечения с BO в точке Q . Доказать, что P — центр кривизны эллипса в вершине A , а Q — центр кривизны в B .

18.10. Написать уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $\mathbf{r}(u) = (u^2, u, u^3 - 20)$ в точке $A(9, 3, 7)$.

18.11. Показать, что кривая

$$\mathbf{r}(u) = (au + b, cu + d, u^2)$$

имеет во всех точках одну и ту же соприкасающуюся плоскость.

18.12. Составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали кривой

$$y^2 = x, \quad x^2 = z$$

в точке $(1, 1, 1)$.

18.13. В каждой точке кривой

$$x(t) = t - \sin t, \quad y(t) = 1 - \cos t, \quad z(t) = 4 \sin \frac{t}{2}$$

в положительном направлении главной нормали отложен отрезок, равный четверти кривизне кривой в этой точке. Найти уравнение соприкасающейся плоскости кривой, описанной концом отрезка.

18.14. Данна винтовая линия

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали.

18.15. Данна кривая

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, 1 - t, t^3).$$

Составить уравнения касательной, нормальной плоскости, бинормали, соприкасающейся плоскости, главной нормали в точке $t = 1$.

18.16. Доказать, что если:

- а) все соприкасающиеся плоскости регулярной гладкой кривой параллельны между собой, то кривая плоская;
- б) все соприкасающиеся плоскости регулярной гладкой кривой имеют общую точку, то кривая плоская;
- в) все касательные к кривой перпендикулярны одному направлению, то кривая плоская;
- г) все нормальные плоскости параллельны одному и тому же направлению, то кривая плоская.

18.17. Доказать, что в окрестности точки, где кручение кривой отлично от нуля, выполняются нижеследующие свойства. В обоих случаях определить, каковы при этом главные члены отклонения d кривой от этих плоскостей по сравнению с длиной дуги, отсчитываемой от рассматриваемой точки:

- а) кривая пересекает свою соприкасающуюся плоскость, располагаясь по разные ее стороны;
- б) кривая располагается по одну сторону от своей спрямляющей плоскости.

18.18. Вычислить радиусы кривизны и кручения кривой

$$x^3 = 3a^2y, \quad 2xz = a^2.$$

18.19. Данна кривая

$$\mathbf{r}(u) = (v \cos u, v \sin u, kv),$$

где $v = v(u)$. Доказать, что эта кривая расположена на конусе. Определить функцию $v(u)$ так, чтобы эта кривая пересекала образующие конуса под постоянным углом θ .

18.20. Обобщенной винтовой линией или линией откоса называется пространственная линия, касательные которой образуют постоянный угол с фиксированным направлением. Доказать, что линия будет обобщенной винтовой тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) главные нормали перпендикулярны фиксированному направлению;

б) бинормали образуют постоянный угол с фиксированным направлением;

в) отношение кривизны к кручению постоянно.

г) все спрямляющие плоскости кривой параллельны некоторой прямой (напомним, что спрямляющая плоскость в данной точке кривой проходит через эту точку перпендикулярно главной нормали);

$$\text{д)} \left(\frac{d}{ds} \mathbf{v}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{v}, \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{v} \right) = 0; \quad \text{е)} \left(\frac{d}{ds} \mathbf{b}, \frac{d^2}{ds^2} \mathbf{b}, \frac{d^3}{ds^3} \mathbf{b} \right) = 0;$$

ж) вектор

$$\frac{\mathbf{v}/k + \mathbf{b}/\kappa}{\sqrt{1/k + 1/\kappa}} = \frac{\kappa \mathbf{v} + k \mathbf{b}}{\sqrt{k^2 + \kappa^2}}$$

постоянный.

18.21. Доказать, что кривая

$$x = a \int \sin \alpha(t) dt, \quad y = a \int \cos \alpha(t) dt, \quad z = ht$$

является обобщенной винтовой линией.

18.22. Доказать, что кривая $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ является обобщенной винтовой линией. Найти вектор, с которым касательные к линии образуют постоянный угол.

18.23. При каких значениях параметров a , b и c кривая $\mathbf{r}(t) = (at, bt^2, ct^3)$ является обобщенной винтовой?

Пусть задана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — натуральный параметр. Кривая $\rho = \dot{r}(s)$ лежит на сфере единичного радиуса с центром в начале координат и называется *касательным сферическим образом* кривой. Аналогично определяются нормальный и бинормальный сферические образы. Так, например, из определения ясно, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ является обобщенной винтовой линией тогда и только тогда, когда ее касательный сферический образ является дугой окружности.

18.24. Доказать, что бинормальный сферический образ обобщенной винтовой линии является окружностью.

18.25. Найти касательный, нормальный и бинормальный сферический образы винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt).$$

18.26. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром.

а) Доказать, что касательный сферический образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ вырождается в точку тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — прямая линия.

б) Доказать, что бинормальный сферический образ кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ вырождается в точку тогда и только тогда, когда $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — плоская кривая.

в) Доказать, что нормальный сферический образ кривой не может быть точкой.

18.27. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром, причем $k\kappa \neq 0$. Доказать, что касательная к касательному сферическому образу параллельна касательной к бинормальному сферическому образу в точках, соответствующих одному и тому же значению параметра s .

18.28. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — кривая, параметризованная натуральным параметром. Доказать, что если касательный сферический образ этой кривой лежит в плоскости, проходящей через начало координат, то кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — плоская.

18.29. Показать, что при инверсии плоскости соприкасающаяся окружность к данной кривой переходит в соприкасающуюся окружность образа этой кривой. При этом предполагается, что центр инверсии не совпадает с точкой соприкосновения кривой с окружностью.

Напомним, что *сферическая кривая* — это кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, для которой существуют такой постоянный вектор \mathbf{m} и такое постоянное вещественное число R , что $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{m}| = R$.

18.30. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — регулярная кривая, и пусть существует точка \mathbf{a} , лежащая во всех нормальных плоскостях кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Доказать, что $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — сферическая кривая.

18.31. Доказать, что

$$\mathbf{r}(t) = (-\cos 2t, -2 \cos t, \sin 2t)$$

— сферическая кривая.

Указание. Показать, что точка $(-1, 0, 0)$ лежит в каждой нормальной плоскости рассматриваемой кривой. См. задачу 18.30.

18.32. Используя результаты предыдущих задач, доказать, что кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ лежит на сфере тогда и только тогда, когда существуют такие постоянные вещественные числа A и B , что

$$k \left(A \cos \int_0^s \kappa ds + B \sin \int_0^s \kappa ds \right) \equiv 1.$$

18.33. Кривые γ и γ^* называются *кривыми Бертрана*, если между точками этих кривых можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором главные нормали (как аффинные прямые) в соответствующих точках кривых совпадают (см. рис. 78). Это означает, что отрезок, соединяющий соответствующие точки кривых, является отрезком главной нормали для обеих кривых.

Доказать следующие свойства кривых Бертрана γ и γ^* :

- расстояние между соответствующими точками кривых постоянно;
- кривизна и кручение каждой из кривых Бертрана связаны соотношением

$$ak + b\kappa = 1,$$

где a и b — некоторые постоянные числа. При этом числа a и b для каждой кривой — свои;

- касательные к кривым γ и γ^* в соответствующих точках образуют постоянный угол.

18.34. а) Доказать, что две произвольные концентрические окружности в плоскости образуют пару кривых Бертрана.

б) Пусть

$$\mathbf{r}_1(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos t} - t\sqrt{1-t^2}, 1-t^2, 0 \right),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos t} - t\sqrt{1-t^2} - t, 1-t^2 + t\sqrt{1-t^2}, 0 \right).$$

Доказать, что $\mathbf{r}_1(t)$ и $\mathbf{r}_2(t)$ образуют пару кривых Бертрана.

18.35. Показать, что если кривизна и кручение кривой γ связаны линейной зависимостью $ak + b\kappa = 1$, где a и b — числа, отличные от 0, то существует кривая γ^* такая, что кривые γ и γ^* образуют пару кривых Бертрана.

18.36. Доказать, что для кривой с постоянной кривизной обязательно найдется вторая кривая, вместе с которой они образуют пару кривых Бертрана.

18.37. Доказать, что кривая $\mathbf{r}(t)$ является кривой Бертрана тогда и только тогда, когда ее можно задать векторным уравнением

$$\mathbf{r}(t) = a \int \mathbf{e}(t) dt + c \int \mathbf{e}(t) \times \mathbf{e}'(t) dt,$$

где $\mathbf{e}(t)$ — вектор-функция такая, что $|\mathbf{e}(t)| = 1$ и $|\mathbf{e}'(t)| = 1$.

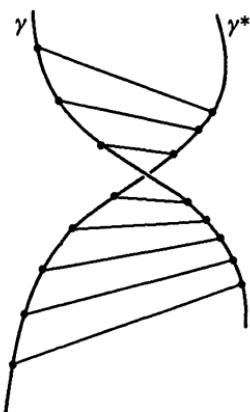


Рис. 78. Кривые Бертрана

18.38. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ — регулярная гладкая кривая, причем $\kappa \neq 0$. Доказать, что $\mathbf{r}(t)$ является обычной винтовой линией тогда и только тогда, когда существуют по крайней мере две различные кривые, каждая из которых образует с $\mathbf{r}(t)$ пару кривых Бертрана.

18.39. Доказать, что если между точками двух различных кривых γ и γ^* установлено взаимно однозначное соответствие, при котором бинормали кривых в соответствующих точках совпадают (как аффинные прямые), то эти кривые плоские.

18.40. Пусть для гладкой кривой γ существует такая кривая γ^* , что главные нормали γ являются бинормалами к γ^* в соответствующих точках. Доказать, что кривизна и кручение кривой γ удовлетворяют соотношению $k = \lambda(k^2 + \kappa^2)$, где λ — некоторое постоянное число.

18.41. Пусть между точками кривых γ_1 и γ_2 можно установить такое соответствие, при котором касательные в соответствующих точках параллельны. Доказать, что отношения кручения к кривизне в соответствующих точках кривых равны по абсолютной величине. Также показать, что в соответствующих точках нормали (бинормали) параллельны.

18.42. Пусть между точками кривых γ_1 и γ_2 установлено такое соответствие, что в соответствующих точках касательные γ_1 параллельны бинормалим γ_2 . Доказать, что в соответствующих точках бинормали γ_1 параллельны касательным γ_2 и главные нормали обеих кривых параллельны между собой. Кроме того, показать, что их кривизны и абсолютные значения кручений обратно пропорциональны, т. е. $\frac{k_1}{k_2} = \frac{|\kappa_2|}{|\kappa_1|}$.

Овалом называется регулярная простая замкнутая плоская кривая с $k > 0$. *Вершина* регулярной плоской кривой — это точка, где кривизна k имеет относительный максимум или минимум.

Пусть $\mathbf{r}(s)$ — овал и P — точка на $\mathbf{r}(s)$. Тогда существует точка P' , где касательный вектор \mathbf{v} к овалу противоположен касательному вектору в точке P , т. е. $\mathbf{v}(P') = -\mathbf{v}(P)$. Касательные в точках P и P' параллельны. Ясно, что такая точка P' единственна. Она называется *противоположной точкой* к точке P .

Шириной $w(s)$ *овала в точке* $P = \mathbf{r}(s)$ называется расстояние между касательными прямыми к овалу в противоположных точках в P и P' .

Говорят, что овал имеет *постоянную ширину*, если его ширина в точке P постоянна, т. е. не зависит от выбора P .

18.43. Доказать, что понятие вершины кривой не зависит от выбора параметризации.

18.44. Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — овал, доказать, что вектор \mathbf{v}'' параллелен вектору \mathbf{v} по крайней мере в четырех точках.

18.45. Теорема о четырех вершинах. Доказать, что любой овал имеет по меньшей мере четыре вершины.

18.46. Показать, что теорема о четырех вершинах (см. задачу 18.45) неверна, если опустить условие замкнутости.

18.47. Доказать, что если $\mathbf{r}(s)$ — овал постоянной ширины w , то его длина равна πw .

18.48. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — овал постоянной ширины. Доказать, что прямая, соединяющая пару противоположных точек P и P' овала, ортогональна к касательным в точках P и P' .

18.49. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — плоская кривая постоянной ширины. Показать, что сумма радиусов кривизны $1/k$ в противоположных точках является постоянной, не зависящей от выбора точек.

18.50. Пусть $\mathbf{r}(s)$ — овал длины L , заданный в натуральном параметре. Обозначим через θ угол между горизонталью и касательным вектором $\mathbf{v}(s)$.

а) Доказать, что отображение $\theta: [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ является взаимно однозначным. Показать, что отображение $\mathbf{r} \circ \theta^{-1}$ является гладкой регулярной параметризацией овала.

б) Пусть $\rho(\theta)$ — параметризация овала такая, что $\mathbf{r}(s) = \rho(\theta(s))$ (см. предыдущий пункт). Доказать, что противоположная точка к $\mathbf{r}(s)$ есть $\mathbf{R}(s) = \rho(\theta(s) + \pi)$.

в) Доказать, что кривая $\mathbf{R}(s)$ регулярна.

18.51. Пусть $\rho(\theta)$ — овал, параметризованный углом θ , как в предыдущей задаче. Пусть $w(\theta)$ — ширина овала в точке $\rho(\theta)$. Доказать, что

$$\int_0^{2\pi} w d\theta = 2L,$$

где L — длина овала.

18.52. Пусть $\rho(\theta)$ — овал, параметризованный углом θ ; $k(\theta)$ и $w(\theta)$ соответственно его кривизна и ширина. Доказать, что

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w = \frac{1}{k(\theta)} + \frac{1}{k(\theta + \pi)}.$$

18.53. Доказать, что кривизна кривой γ в точке M равна кривизне проекции γ на соприкасающуюся плоскость в точке M .

18.54. Выразить кривизну и кручение эвольвенты кривой через кривизну и кручение исходной кривой.

18.55. Доказать, что эвольвента линии откоса — плоская кривая. Определение линии откоса см. выше.

Подерой пространственной кривой по отношению к точке O называется множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки O на касательные к данной кривой.

18.56. Найти уравнение подеры линии $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

18.57. Найти подеру винтовой линии $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$ относительно начала координат. Доказать, что она лежит на однополостном гиперболоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{h^2 z^2}{a^4} = 1.$$

18.58. Пусть кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ имеет постоянную кривизну. Доказать, что соприкасающаяся сфера и окружность имеют один и тот же радиус.

18.59. Доказать, что радиус кривизны кривой на сфере радиуса R не может быть больше, чем R .

18.60. Доказать, что на сфере неплоская регулярная гладкая кривая не может иметь постоянную кривизну.

18.61. Найти общий вид кривизны сферической кривой с постоянным кручением.

18.62. Доказать, что кривая на сфере определяется заданием своей кривизны или кручения как функции длины дуги.

18.63. а) Доказать, что на сфере имеются кривые с постоянным ненулевым кручением.

б) Доказать, что на сфере нет замкнутой регулярной кривой со знакопостоянным кручением, отличным от 0.

в) Из предыдущих пунктов вытекает, что на сфере кривая с постоянным ненулевым кручением не может быть замкнутой. Вопрос — как «далеко» простирается сферическая кривая с постоянным кручением: обязательно ли она имеет конечную длину или же она бесконечной длины и обматывает сферу плотно?

18.64. Доказать, что если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в натуральном параметре s , то радиус-вектор центра соприкасающейся сферы задается формулой $\rho = \mathbf{r} + R\mathbf{n} + \frac{\dot{R}}{\kappa}\mathbf{b}$, а радиус соприкасающейся сферы равен

$$R_s = \sqrt{R^2 + \frac{\dot{R}^2}{\kappa^2}}.$$

18.65. Найти соприкасающуюся окружность кривой:

а) $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, \sin t)$ при $t = 0$;

б) $\mathbf{r}(t) = (2t, \ln t, t^2)$ при $t = 1$.

18.66. Найти радиус соприкасающейся сферы кривой $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ в точке $t = 0$.

18.67. Найти радиус соприкасающейся сферы в произвольной точке следующих кривых:

а) $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht)$; б) $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$;

в) $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t, e^t \cos t, e^t)$.

18.68. Доказать, что соприкасающаяся плоскость кривой пересекает соприкасающуюся сферу по соприкасающейся окружности в той же точке.

18.69. Найти геометрическое место центров соприкасающихся сфер винтовой линии

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, ht).$$

18.70. Доказать, что если радиус соприкасающейся сферы постоянен, то кривая либо лежит на сфере, либо имеет постоянную кривизну.

18.71. Пусть кривая γ_1 является геометрическим местом центров соприкасающихся сфер кривой γ_2 и наоборот. Доказать, что кривизны кривых γ_1 и γ_2 постоянны и равны, их соприкасающиеся плоскости взаимно перпендикулярны, а произведение кручений в соответствующих точках равно квадрату кривизны.

18.72. Доказать, что если в каждой своей точке кривая имеет со своей соприкасающейся плоскостью касание третьего порядка, то эта кривая плоская.

18.73. Рассмотрим всевозможные кривые второго порядка, проходящие через данную точку плоской регулярной кривой γ . Показать, что среди них есть единственная, порядок касания которой с кривой γ равен 4. Определить тип и параметры этой кривой второго порядка через кривизну $k(s)$ кривой γ .

18.74. Из начала координат на плоскую кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ падает пучок лучей. Составить уравнение огибающей отраженных лучей (каустика).

18.75. Какой вид примет уравнение каустики плоской кривой относительно начала координат, если уравнение кривой задано в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в произвольном параметре?

18.76. На плоскую кривую, заданную уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, падает пучок параллельных лучей, имеющих направление вектора \mathbf{e} ($|\mathbf{e}| = 1$). Составить уравнение огибающей лучей, отраженных от данной кривой (каустика). Рассмотреть случаи, когда кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в произвольном параметре, а также, когда она задана уравнением $y = f(x)$.

18.77. Пусть $\mathbf{r}_1: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$ — сегмент кривой, параметризованной натуральным параметром, и $\mathbf{r}_2(s)$ — кривая

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{r}_1(s) + (a_0 - s)\mathbf{v}(s),$$

где $\mathbf{v}(s)$ — касательный вектор к $\mathbf{r}_1(s)$, $a_0 > a$ — некоторая константа. Показать, что единичная касательная к $\mathbf{r}_2(s)$ в каждой точке ортогональна к $\mathbf{v}(s)$.

Заметим, что кривая \mathbf{r}_1 является эволютой кривой \mathbf{r}_2 , а кривая \mathbf{r}_2 является эвольвентой кривой \mathbf{r}_1 .

18.78. Найти эволюты, эвольвенты и радиусы кривизны следующих кривых:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; в) $x^2 - 2py = 0$;

г) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t); \end{cases}$

д) $r = a(1 + \cos \varphi)$ (в полярной системе координат);

е) $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$;

ж) $r = \lambda \varphi$ (в полярной системе координат);

з) $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (в полярной системе координат);

и) $r^m = a^m \cos m\varphi$ (в полярной системе координат), где m — некоторая целая положительная постоянная;

к) $r = a \operatorname{ctg} \varphi$.

18.79. Найти эволюту логарифмической спирали $r = a^\varphi$. Доказать, что это — та же самая спираль, но повернутая вокруг начала координат на некоторый угол. Найти этот угол.

18.80. Расположенный на плоскости Oxy луч равномерно вращается в плоскости вокруг своей начальной точки O . Точка M на луче движется по лучу со скоростью, пропорциональной расстоянию OM . В этих условиях:

а) вывести уравнение траектории движения точки в полярных координатах с полюсом в O ;

б) показать, что на полученной кривой (называемой логарифмической спиралью Бернулли) касательные образуют с радиус-вектором кривой постоянный угол;

в) это свойство логарифмических спиралей является для них характеристическим;

г) спираль стремится к своему полюсу $r = 0$, имея конечную длину;

д) выписать натуральные уравнения логарифмической спирали;

е) радиус кривизны спирали пропорционален длине ее дуги, отсчитываемой от полюса, и это свойство тоже является характеристическим свойством логарифмических спиралей;

ж) эволюта данной логарифмической спирали конгруэнтна самой спирали;

з) указать значение параметра a , для которого эволюта спирали совпадает с ней самой, т. е. когда спираль является огибающей своих нормалей;

и) каждая логарифмическая спираль является орбитой действия группы G линейных преобразований плоскости, которое состоит в преобразовании подобия с коэффициентом подобия $t > 0$.

с последующим поворотом плоскости на угол $\alpha = \ln t$ (центр подобия и центр вращения — в общем полюсе спиралей);

к) для дуги спирали $r = e^\varphi$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, указать элемент группы G , который переводит ее в дугу этой же спирали, начинающуюся в точке с полярными координатами $\varphi = \pi + \varphi_1$, $r = e^{\pi + \varphi_1}$; будет ли образ дуги иметь такой же угловой раствор величиной $\varphi_2 - \varphi_1$, что и исходная дуга?

18.81. Найти особые точки эволюты эллипса. Сколько нормалей можно провести к эллипсу через произвольную точку плоскости?

18.82. Найти эвольвенту окружности.

18.83. Найти радиус кривизны кривой Штейнера

$$x = 2r \cos \frac{t}{3} + r \cos \frac{2t}{3}, \quad y = 2r \sin \frac{t}{3} - r \sin \frac{2t}{3}$$

в произвольной точке. Кривая Штейнера — это гипоциклоида, образованная в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса $3r$.

18.84. Доказать, что эволютой кривой Штейнера является кривая Штейнера, подобная исходной, причем коэффициент подобия равен 3. При этом эволюта повернута относительно исходной кривой на угол $\frac{\pi}{3}$.

18.85. Найти эволюту астроиды. Доказать, что ее эволютой является астроида, подобная исходной с коэффициентом подобия, равным 2, и повернутая относительно исходной на угол $\frac{\pi}{2}$. Заметим, что астроида является гипоциклоидой, образованной в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса $4r$. Далее, свойства эволюты астроиды, описанные в этой задаче, аналогичны свойствам эволюты кривой Штейнера (см. предыдущую задачу).

18.86. Исследовать эволюты гипоциклоид, образованных в результате качения окружности радиуса r по окружности радиуса R для различных отношений R/r (см. задачи 18.84 и 18.85).

18.87. Найти эволюту листа Декарта

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

18.88. Найти кривизну плоской кривой, у которой кривизна равна кривизне ее эволюты (в соответствующих точках).

18.89. По натуральному уравнению кривой $R = \varphi(s)$ составить натуральное уравнение эволюты.

18.90. Написать натуральное уравнение эвольвенты по натуральному уравнению кривой.

18.91. Доказать следующие утверждения:

- касательные к эволюте являются нормалами к исходной кривой;
- любая ортогональная кривая семейства касательных к кривой является эвольвентой исходной кривой;
- длина дуги эволюты равна абсолютному значению разности радиусов кривизны в соответствующих точках исходной кривой;
- радиус кривизны эволюты равен

$$\frac{1}{2} \frac{d(R^2)}{ds},$$

где R — радиус кривизны самой кривой.

18.92. Пусть неплоская кривая имеет постоянную отличную от нуля кривизну, и пусть ее кручение отлично от нуля. Рассмотрим множество центров кривизн этой кривой. Полученную кривую обозначим γ^* . Доказать, что кривизна кривой γ^* постоянна. Найти кручение γ^* .

18.93. Пусть гладкая кривая C задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где функция $\mathbf{r}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть в некоторой точке M производные $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}'''$ некомпланарны. Доказать, что соприкасающаяся плоскость кривой C в точке M пересекает кривую C .

18.94. Пусть гладкая кривая C задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где функция $\mathbf{r}(t)$ определена на отрезке $[a, b]$. Пусть в некоторой точке $M(t)$ вектор \mathbf{r}' не параллелен вектору \mathbf{r}'' . Вычислить предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d}{|\Delta t|^3},$$

где d — расстояние от точки $M(t + \Delta t)$ до соприкасающейся плоскости кривой C в точке $M(t)$. Рассмотреть частный случай, когда кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ в натуральном параметре.

18.95. Доказать, что кручение асимптотической линии на поверхности с $K < 0$ равно $\pm\sqrt{-K}$.

18.96. Пусть кривизна поверхности вращения строго отрицательна. Существуют ли на ней замкнутые асимптотические линии?

Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s \in [0, a]$, — плоская кусочно-регулярная класса C^2 кривая, параметризованная натуральным параметром. Индексом (числом) вращения $i_{\mathbf{r}(s)}$ этой кривой называется число

$$i_{\mathbf{r}(s)} = \frac{\int_0^a k ds + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \theta_i}{2\pi},$$

где k — кривизна кривой, s_i ($0 \leq i \leq n - 1$) — точки нерегулярности, $\mathbf{v}^-(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \mathbf{v}(s)$, $\mathbf{v}^+(s_i) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \mathbf{v}(s)$, $\Delta\theta_i$ — угол между векторами $\mathbf{v}^-(s_i)$ и $\mathbf{v}^+(s_i)$ (см. рис. 79).

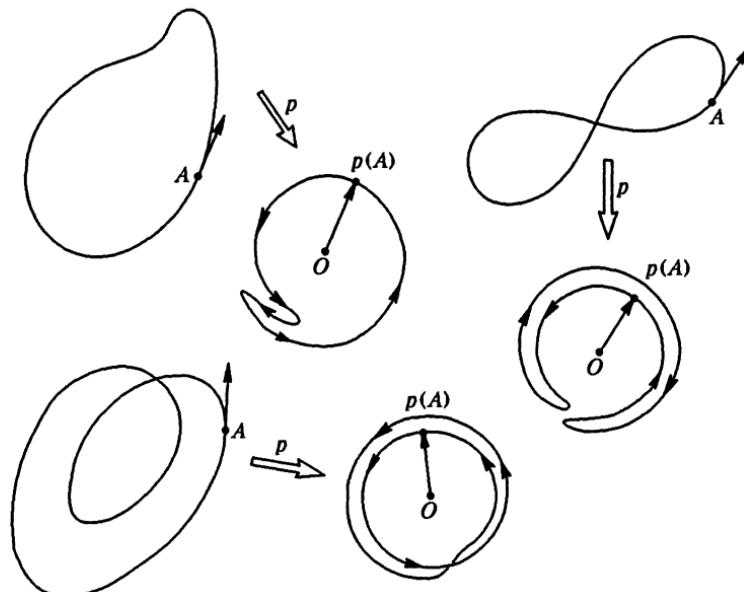


Рис. 79. Индекс вращения кривой

18.97. Вычислить индексы вращения кривых, заданных следующими уравнениями:

- $\mathbf{r}(t) = (a + \rho \cos t, \rho \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $|a| < \rho$;
- $\mathbf{r}(t) = (a + \rho \cos t, \rho \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $0 < \rho < |a|$;
- $\mathbf{r}(t) = (\rho \cos 2t, -\rho \sin 2t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $\rho > 0$;
- $\mathbf{r}(t) = ((1/2) \cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;
- $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, -\sin t)$, $0 \leq t \leq 6\pi$;
- $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin^2 t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

18.98. Пусть $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая кривая (не обязательно простая, т. е. допускаются самопересечения). Доказать, что

$$l^2 \geq 4\pi \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x) ds,$$

где функция $\omega(x)$ есть число вращений кривой γ вокруг точки $x \in \mathbb{R}^2$.

18.99. Доказать, что если $\mathbf{r}(s)$ — простая замкнутая регулярная плоская кривая, то касательный круговой образ $v: [0, L] \rightarrow S^1$ этой кривой является отображением «на».

18.100. Доказать, что если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ — регулярная замкнутая кривая, то ее касательный сферический образ не может лежать ни в какой открытой полусфере.

18.101. Доказать, что касательный сферический образ регулярной замкнутой кривой не может лежать ни в какой замкнутой полусфере, за исключением случая, когда он является большой окружностью, ограничивающей полусферу.

18.102. Пусть γ — гладкая замкнутая кривая на единичной сфере S^2 . Доказать, что она содержится в открытой полусфере, если:

а) длина l кривой γ строго меньше 2π ;

б) длина l кривой γ равна 2π , но кривая не является объединением двух больших полуокружностей.

Тотальным кручением регулярной пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ длины L , параметризованной натуральным параметром, называется число $\int_0^L \kappa ds$. Заметим, что тотальные кривизна и кручение кривой

в \mathbb{R}^3 , определенные выше для натурального параметра s вдоль кривой, можно вычислять в произвольном параметре $t = t(s)$. При этом соответствующее выражение, например, для кручения имеет вид

$$\int_a^b \kappa(t) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt,$$

где $a = t(0)$, $b = t(L)$.

18.103. Используя результаты задач 18.100–18.102, доказать следующее утверждение: тотальная кривизна замкнутой пространственной кривой γ не меньше 2π , причем она равна 2π тогда и только тогда, когда γ — плоская выпуклая кривая (теорема Фенхеля).

18.104. Пусть γ — пространственная замкнутая кривая. Предположим, что $0 \leq k \leq 1/R$ для некоторого вещественного числа $R > 0$. Доказать, что длина l кривой γ удовлетворяет неравенству $l \geq 2\pi R$.

18.105. Вычислить касательный сферический образ для эллипса

$$\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Что можно сказать об этом образе с учетом теоремы Фенхеля?

Рассмотрим стандартную единичную двумерную сферу S^2 в \mathbb{R}^3 . Множество ориентированных больших окружностей сферы находится во взаимно однозначном соответствии с точками самой сферы S^2 . Это соответствие устанавливается следующим образом. Каждой большой окружности нужно сопоставить конец единичной положительной нормали, которая перпендикулярна плоскости окружности и выходит из начала координат. При этом нормаль называется положительной, если именно вдоль нее перемещается правый штопор, вращаемый в направлении, указанном на большой окружности (см. рис. 80).

Мерой множества ориентированных больших окружностей будем называть меру соответствующего множества точек S^2 .

Если $x \in S^2$, то через $w = x^\perp$ обозначается соответствующая точке x большая ориентированная окружность. Для регулярной кривой γ на сфере через $n_\gamma(x)$ обозначается число точек в $\gamma \cap x^\perp$ (которое может быть бесконечно). Заметим, что число $n_\gamma(x)$ не зависит от параметризации кривой γ .

18.106. Пусть γ — регулярная кривая длины l на сфере S^2 . Доказать, что мера множества ориентированных больших окружностей, которые пересекают γ (с учетом кратностей), равна $4l$.

Другими словами, $\int\limits_{S^2} n_\gamma(w) d\sigma = 4l$ (формула Крофтона).

Замкнутая простая кривая γ в \mathbb{R}^3 называется *незаузленной*, если существует взаимно-однозначная непрерывная функция $g: D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (D^2 — единичный диск), которая отображает границу S^1 диска D^2 на образ кривой γ . В противном случае кривая называется *заузленной*.

18.107. Доказать, что если γ — простая заузленная регулярная кривая, то ее totальная кривизна больше или равна 4π .

18.108. Используя формулу Крофтона, доказать, что для любой замкнутой пространственной регулярной кривой ее totальная кривизна $\int\limits_{\gamma} k(s) ds$ не меньше 2π (частный случай теоремы Фенхеля).

18.109. Пусть для замкнутой гладкой регулярной кривой γ сферическая индикаториса ее бинормалей не имеет самопересечений. Доказать, что тогда для ориентированной (см. задачу 4.20) кривизны k кривой γ выполняется неравенство

$$-2\pi < \int\limits_0^l k(s) ds < 2\pi,$$

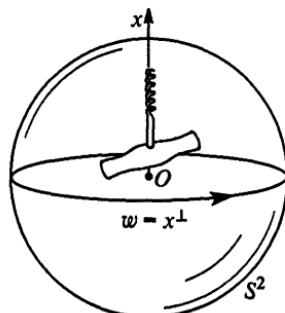


Рис. 80

где l — длина L . Вывести отсюда, что кривизна кривой L обязана изменять свой знак.

18.110. Доказать, что для любого вещественного числа r существует такая замкнутая кривая γ , что ее тотальное кручение $\int\limits_{\gamma} \kappa ds$ равно r .

18.111. Доказать, что для замкнутой кривой γ , заданной в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ и расположенной на сфере S^2 , ее тотальное кручение $\int\limits_{\gamma} \kappa(s) ds$ равно нулю.

18.112. Пусть M — такая поверхность в \mathbb{R}^3 , что $\int\limits_{\gamma} \kappa ds = 0$ для всех замкнутых кривых γ , расположенных на M . Доказать, что M есть часть плоскости или сферы.

18.113. Доказать, что для любой замкнутой сферической кривой γ интеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{\kappa}{k} ds$ равен нулю.

18.114. Найти геодезическую кривизну линии $u = \text{const}$ на поверхности $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, av)$.

18.115. Найти геодезическую кривизну линии $ax + by + c = 0$ в верхней полуплоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

18.116. Доказать, что если каждая нормаль плоской замкнутой регулярной кривой делит ее на две равные части, то эта кривая — окружность.

18.117. Доказать следующее утверждение: периодическая с периодом S функция $k(s)$ является функцией кривизны некоторой плоской замкнутой кривой тогда и только тогда, когда выполняются следующие два равенства:

$$\int\limits_0^S \cos \left(\int\limits_0^s k(t) dt + C \right) ds = 0,$$

$$\int\limits_0^S \sin \left(\int\limits_0^s k(t) dt + C \right) ds = 0,$$

где C — некоторая константа.

Опорной функцией $h(t)$ плоской кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ называется расстояние от фиксированной точки O до переменной касательной к кривой в точке $\mathbf{r}(t)$.

18.118. Пусть дана плоская выпуклая кривая. Тогда в качестве параметра на кривой можно взять угол α , который составляет касательная в точке кривой с фиксированным направлением на плоскости. Доказать, что для радиуса кривизны этой кривой имеет место формула

$$R(\alpha) = h(\alpha) + h''(\alpha),$$

где $h(\alpha)$ — опорная функция кривой.

18.119. Доказать, что площадь области, ограниченной плоской выпуклой регулярной замкнутой кривой γ , равна $\frac{1}{2} \int_{\gamma} h(t) dt$, где

$h(t)$ — опорная функция данной кривой.

18.120. Пусть замкнутая плоская выпуклая регулярная кривая длины L ограничивает область площади S . Пусть R — радиус описанной окружности, а r — вписанной. Доказать следующие неравенства:

а) $L^2 - 4\pi S \geq 0$;

б) $L^2 - 4\pi S \geq \pi^2(R - r)^2$;

в) $L^2 - 4\pi S \geq S^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)^2$;

г) $L^2 - 4\pi S \geq L^2 \left(\frac{R - r}{R + r} \right)^2$;

д) $\frac{L - \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi} \leq r \leq R \leq \frac{L + \sqrt{L^2 - 4\pi S}}{2\pi}$,

причем равенства достигаются только в том случае, если кривая является окружностью.

18.121. Доказать, что овал, имеющий четыре вершины, пересекается с произвольной окружностью самое большое в четырех точках.

18.122. Доказать, что если овал пересекается с некоторой окружностью в $2n$ точках, то у него по меньшей мере $2n$ вершин.

18.123. Пусть γ — пространственная кривая постоянной кривизны, а кривая γ^* — множество ее центров кривизны. Доказать, что кривая γ^* имеет ту же кривизну, что и γ . Доказать, что кривая γ является множеством центров кривизны кривой γ^* .

18.124. Доказать, что соприкасающаяся сфера имеет постоянный радиус тогда и только тогда, когда кривая либо лежит на сфере, либо имеет постоянную кривизну.

18.125. Доказать, что пространственная кривая, заданная в следующем виде:

$$\mathbf{r}(s) = \frac{1}{\varkappa} \int_0^s \left(\mathbf{b}(t) \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}(t) \right) dt,$$

имеет постоянное кручение \varkappa . Здесь $\mathbf{b}(t)$ — произвольная кривая на единичной сфере, а \varkappa — произвольное ненулевое вещественное число.

И обратно, любая пространственная кривая с постоянным отличным от нуля кручением \varkappa может быть представлена в таком виде для подходящей кривой $\mathbf{b}(t)$.

18.126. Доказать, что всякая кривая непостоянной кривизны, для которой выполняется соотношение

$$\left(\frac{d(1/k)}{ds} \right)^2 = \varkappa^2 \left(R^2 - \frac{1}{k^2} \right),$$

лежит на сфере радиуса R .

18.127. Доказать, что если кривая лежит на сфере, то ее кривизна и кручение удовлетворяют соотношению

$$\frac{\varkappa}{k} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\varkappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} \right) \right) = 0.$$

И обратно, если кривизна и кручение некоторой кривой удовлетворяют этому соотношению, что кривая лежит на сфере.

18.128. Если кривизна и кручение пространственной кривой не обращаются в нуль, то кривая сферическая тогда и только тогда, когда

$$\frac{\varkappa}{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\varkappa k^2} \frac{d}{ds} k \right).$$

Если положить $\rho = \frac{1}{k}$, $\sigma = \int \varkappa ds$, то уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{d^2 \rho}{d\sigma^2} + \rho = 0.$$

18.129. Показать, что для кривой общего положения, расположенной на сфере, соотношения предыдущих трех задач равносильны (см. также задачу 4.52).

18.130. Доказать, что для произвольного числа A существует бирегулярная замкнутая кривая такая, что $\int_{\gamma} \varkappa ds \geq A$. Напомним, что кривая называется бирегулярной, если $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$ и $\ddot{\mathbf{r}} \neq 0$.

18.131. Если плоская кривая вместе с хордой, стягивающей ее концы, ограничивает выпуклую область, то при скручивании кривой, т. е. при замене ее на пространственную кривую с той же кривизной, длина хорды увеличивается.

18.132. Пусть γ — замкнутая регулярная гладкая кривая. Доказать, что множество направлений, по которым касательные прямые касаются кривой в точках с нулевой кривизной, имеет нулевую угловую меру. Доказать, что направлений, по которым касательные касаются кривой более чем в одной точке с ненулевой кривизной, может быть только конечное число.

18.133. Доказать теорему Якоби: если сферическая индикатриса главных нормалей замкнутой кривой не имеет самопереесечений, то она делит сферу на две равновеликие части.

§ 19. Риманова метрика (дополнительные задачи)

19.1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике на плоскости Лобачевского перпендикуляр, опущенный из середины гипотенузы на один из катетов, меньше половины другого катета.

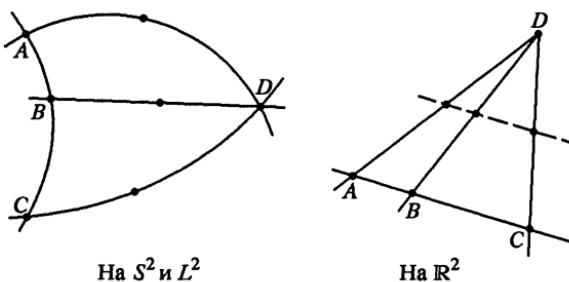


Рис. 81

19.2. Пусть три точки A, B, C принадлежат одной прямой, а точка D ей не принадлежит. Докажите, что середины отрезков DA, DB и DC не лежат на одной прямой:

а) на сфере; б) на плоскости Лобачевского.

Напомним, что на евклидовой плоскости этот факт неверен (см. рис. 81).

19.3. Рассмотрим плоскость Лобачевского в модели Пуанкаре на открытом круге радиуса 1 с метрикой

$$ds^2 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Рассмотрим диаметр круга, задаваемый уравнением $v = 0$. Как известно, он является прямой плоскости Лобачевского. Найти эквидистанту этой прямой.

19.4. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площади треугольников, ограниченных прямыми:

- а) $x = -a, x = a, x^2 + y^2 = a^2;$
- б) $x = a, x = 2a, (x - a)^2 + y^2 = a^2;$
- в) $x = 0, x = a/2, x^2 + y^2 = 4a^2;$
- г) $x = 0, x = a/2, x^2 + y^2 = a^2;$
- д) $x = -a, x = a, x^2 + y^2 = 4a^2;$
- е) $x = -a, x = a, x^2 + y^2 = 2a^2;$
- ж) $x = a, x = b, (x - a)^2 + y^2 = 2b^2.$

19.5. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь треугольника с вершинами $(-2, 2), (0, 2), (2, 2)$.

19.6. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь четырехугольника, ограниченного прямыми $x = 0, x = a, y = a/2, y = a$.

19.7. Для модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости найти площадь четырехугольника с вершинами в точках $(0, a\sqrt{12}), (0, 2a), (a, a), (a, a\sqrt{3})$.

19.8. Какой области в круге с метрикой Лобачевского (модели Пуанкаре) изометрична псевдосфера Бельтрами с разрезом по меридиану? Какой области изометрично универсальное накрытие над псевдосферой Бельтрами (без разреза)?

Пояснение. После разрезания по меридиану псевдосфера Бельтрами оказывается изометрична области на плоскости Лобачевского, ограниченной так называемым *орициклом* (см. рис. 82).

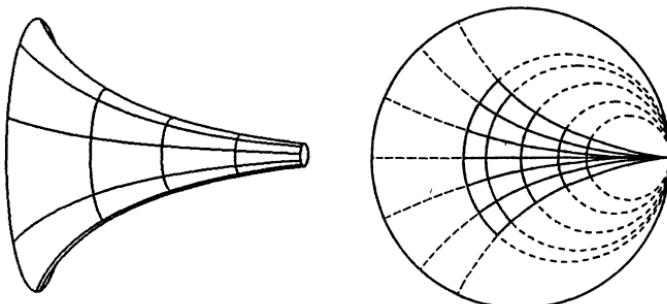


Рис. 82

19.9. Рассмотрим G — множество изометрий вида $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости, имеющих ровно одну заданную неподвижную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Найти орбиту произвольной точки плоскости Лобачевского под действием G .

19.10. Рассмотрим G — множество изометрий вида $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости, имеющих ровно две заданные неподвижные точки $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Найти орбиту произвольной точки плоскости Лобачевского под действием G .

19.11. Найти дробно-линейное преобразование $w = \frac{az + b}{cz + d}$, при котором:

а) верхняя полуплоскость отображается на себя, причем $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$;

б) верхняя полуплоскость отображается на единичный круг, причем $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = -\pi/2$;

в) верхняя полуплоскость отображается на единичный круг, причем $w(-1) = 1$, $w(0) = i$, $w(1) = -1$;

г) единичный круг отображается на нижнюю полуплоскость, причем $w(1) = 1$, $w(i) = 0$, $w(-i) = -1$;

д) единичный круг отображается на верхнюю полуплоскость, причем $w(-1) = \infty$, $w(1) = 0$, $w(i) = 1$;

е) единичный круг отображается на себя, причем $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = \pi/2$.

19.12. Рассмотрим на плоскости Лобачевского треугольник ABC , около которого описана окружность, причем сторона AB является ее диаметром. Доказать, что в треугольнике ABC выполняется равенство $\angle C = \angle A + \angle B$.

19.13. Рассмотрим на плоскости Лобачевского треугольник со сторонами a , b и c . Пусть r — радиус вписанной окружности, l_a и m_a — соответственно биссектриса и медиана, проведенные к стороне a , противолежащий к ней угол — α . Доказать равенства:

$$\text{а)} \operatorname{th} l_a = \frac{2 \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos(\alpha/2)}{\operatorname{sh}(b+c)},$$

$$\text{б)} \operatorname{ch} m_a = \frac{\operatorname{ch} [(b+c)/2] \operatorname{ch} [(b-c)/2]}{\operatorname{ch}(a/2)},$$

$$\text{в)} \operatorname{th}^2 r = \frac{\operatorname{sh}(p-a) \operatorname{sh}(p-b) \operatorname{sh}(p-c)}{\operatorname{sh} p}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

19.14. Рассмотрим преобразование единичного круга с центром в начале координат, заданное формулой

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}+1}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}+1} \right).$$

а) Доказать, что при этом единичный круг отображается в себя диффеоморфно.

б) Вычислить метрику, в которую переходит метрика плоскости Лобачевского при указанном преобразовании.

в) Найти символы Кристоффеля метрики пункта б).

г) Вычислить параллельный перенос вдоль хорд единичного круга в метрике пункта б).

д) Найти геодезические метрики пункта б).

19.15. В единичном круге $x^2 + y^2 < 1$ рассмотрим метрику с матрицей

$$\frac{1}{1-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 1-y^2 & xy \\ xy & 1-x^2 \end{pmatrix}.$$

Показать, что преобразование

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

является движением этой метрики.

19.16. Доказать, что угол φ между окружностями на единичной сфере S^2 с центром в начале координат, заданными плоскостями $a_i x + b_i y + c_i z = d_i$, $i = 1, 2$, вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 - d_1 d_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - d_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - d_2^2}}.$$

19.17. Вычислить первую квадратичную форму следующих поверхностей в \mathbb{R}^3 :

а) $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \cos u, \frac{b}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \sin u, \frac{c}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \right)$ (однополостный гиперболоид);

б) $\mathbf{r}(u, v) = \left(a \frac{uv+1}{v+u}, b \frac{v-u}{v+u}, c \frac{uv-1}{v+u} \right)$ (однополостный гиперболоид);

в) $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \cos u, \frac{b}{2} \left(v - \frac{1}{v} \right) \sin u, \frac{c}{2} \left(v + \frac{1}{v} \right) \right)$ (двуполостный гиперболоид);

г) $\mathbf{r}(u, v) = \left(v\sqrt{p} \cos u, v\sqrt{q} \sin u, \frac{v^2}{2} \right)$ (эллиптический параболоид);

д) $\mathbf{r}(u, v) = ((u+v)\sqrt{p}, (u-v)\sqrt{q}, 2uv)$ (гиперболический параболоид);

е) $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, v)$ (эллиптический цилиндр);

ж) $\mathbf{r}(u, v) = \left(\frac{a}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right), \frac{b}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right), v \right)$ (гиперболический цилиндр).

В следующих задачах 19.18 и 19.19 доказать, что рассматриваемые поверхности являются поверхностями второго порядка (иногда их называют квадриками), и установить их тип.

19.18. Найдите первую квадратичную форму поверхности

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v, \quad y = a \operatorname{ch} u \sin v, \quad z = c \operatorname{sh} u, \quad a, c = \text{const.}$$

19.19. Найдите первую квадратичную форму поверхности

$$x = a \operatorname{sh} u \cos v, \quad y = a \operatorname{sh} u \sin v, \quad z = c \operatorname{ch} u, \quad a, c = \text{const.}$$

19.20. Доказать, что при соответствующем выборе криволинейных координат на поверхности вращения ее первая квадратичная форма может быть приведена к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u) dv^2.$$

19.21. Привести первую квадратичную форму сферы, тора, катеноида и псевдосфера Бельтрами к виду

$$ds^2 = du^2 + G(u) dv^2.$$

19.22. Система криволинейных координат на поверхности называется *изотермической* (иногда ее называют *конформной*), если первая квадратичная форма поверхности в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Найти изотермические координаты на псевдосфере Бельтрами.

19.23. Поверхностью *Лиувилля* называется поверхность, первая квадратичная форма которой может быть приведена к виду

$$ds^2 = (f(u) + g(v))(du^2 + dv^2).$$

Доказать, что поверхность, локально изометрическая поверхности вращения, есть поверхность Лиувилля.

19.24. Доказать, что любую поверхность вращения можно локально конформно отобразить на плоскость.

19.25. Доказать, что метрика $ds^2 = dx^2 + f(x) dy^2$, $0 < f(x) < \infty$, приводится к виду

$$ds^2 = g(u, v)(du^2 + dv^2)$$

(изотермические координаты).

19.26. Для поверхности вращения

$$x = f(r) \cos \varphi, \quad y = f(r) \sin \varphi, \quad z = g(r),$$

где $u \in (a, b)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, найти изотермические координаты (u, v) , в которых $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ является функцией от r . В частности, найти для катеноида

$$x = \operatorname{ch} z \cos \varphi, \quad y = \operatorname{ch} z \sin \varphi, \quad z = z$$

представление его радиус-вектора в таких изотермических координатах.

19.27. На плоскости с координатами x, y задана матрично-значная функция $F(x, y)$. Проверить, что функция F определяет риманову метрику. Найти координаты, в которых метрика имеет вид $du^2 + G(u) dv^2$:

$$\text{а) } F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 & 4xy \\ 4xy & 1 + 2y^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 16x^2(x^2 + y^2)^2 & 16xy(x^2 + y^2)^2 \\ 16xy(x^2 + y^2)^2 & 1 + 16y^2(x^2 + y^2)^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) в единичном круге } F(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2} \begin{pmatrix} 1 - y^2 & xy \\ xy & 1 - x^2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } F(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \begin{pmatrix} 4x^2 + (x^2 + y^2)^4 & 4xy \\ 4xy & 4y^2 + (x^2 + y^2)^4 \end{pmatrix}.$$

19.28. Доказать, что на всякой вещественно-аналитической поверхности M^2 можно ввести локальные изотермические координаты.

19.29. Доказать, что любое конформное отображение сферы на плоскость является композицией некоторого движения сферы по себе и стереографической проекции сферы на эту плоскость (см. рис. 83).

19.30. Проекция Меркатора поверхности земного шара определяется следующим образом. На карте вводятся прямоугольные координаты (x, y) , такие что любой прямой на карте соответствует линия постоянного азимута (фиксированного положения стрелки компаса) на поверхности земного шара (см. рис. 84).

а) Доказать, что в проекции Меркатора точке на поверхности земного шара со сферическими координатами (θ, φ) на карте соответствует точка с координатами $x = \varphi$, $y = \ln \operatorname{ctg} \theta / 2$.

б) Записать метрику сферы в координатах x, y проекции Меркатора.

19.31. Найти метрику в двумерном пространстве скоростей в специальной теории относительности.

19.32. В предыдущей задаче произвести замену координат $v \rightarrow \rightarrow \operatorname{th} \chi$ (v — скорость движущейся точки).

19.33. Записать метрику предыдущей задачи в полярных координатах единичного круга.

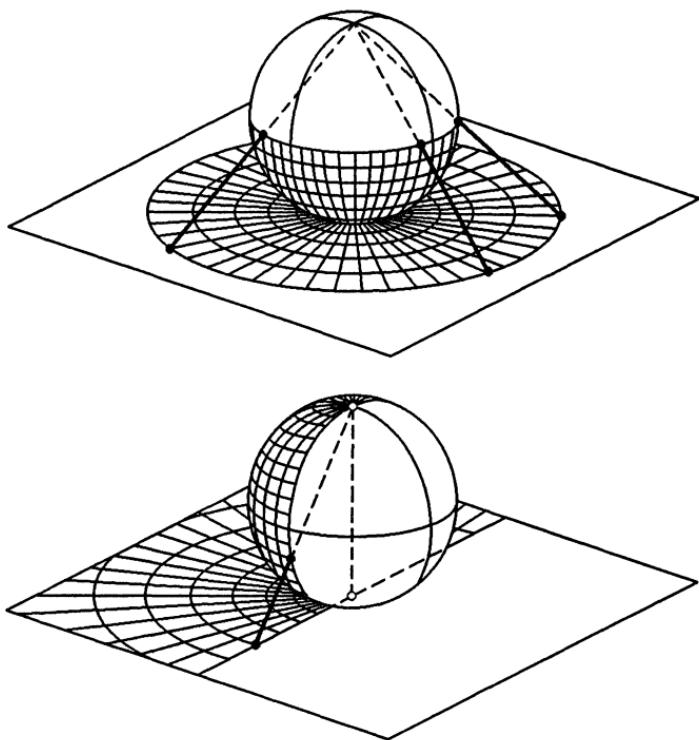


Рис. 83. Стереографическая проекция сферы на плоскости

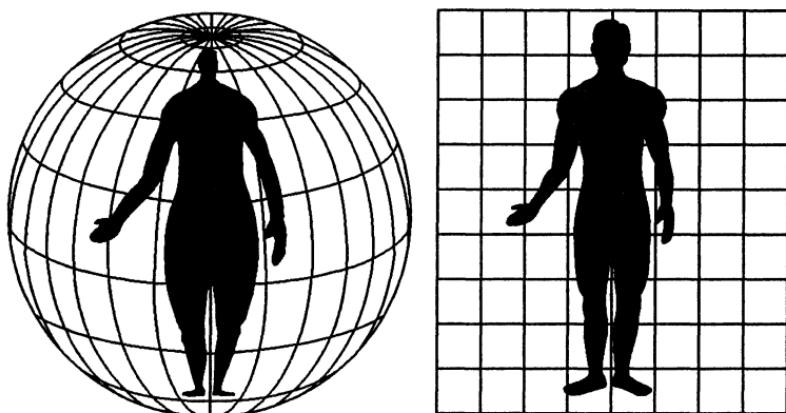


Рис. 84. Проекция Меркатора

19.34. Доказать, что в классе поверхностей 2-го порядка любая поверхность 2-го порядка ненулевой кривизны однозначно определена своей метрикой, даже локально. Говорят, что поверхность S определена однозначно своей метрикой, если любая изометрическая ей поверхность получается из S движением с возможным добавлением зеркального отражения.

19.35. Пусть на плоскости заданы две изометрические области. Показать, что они конгруэнтны.

19.36. Доказать, что две изометрические области на сфере всегда могут быть получены одна из другой вращением пространства, т. е. они конгруэнтны.

19.37. Пусть на цилиндрической поверхности заданы две изометрические области. Будут ли они обязательно конгруэнтными в \mathbb{R}^3 ? Указать условия, при выполнении которых любые две изометрические области на цилиндрической поверхности являются конгруэнтными в \mathbb{R}^3 .

19.38. Рассмотрим на псевдосфере Бельтрами всевозможные круги одного и того же внутреннего радиуса r . Выяснить, какие из этих кругов конгруэнтны в \mathbb{R}^3 , а какие нет.

19.39. Изометричны ли метрики $ds^2 = \frac{a}{r^2}(dx^2 + dy^2)$ и $ds^2 = \frac{b}{r^2}(dx^2 + dy^2)$, $a \neq b$, $0 < r^2 = x^2 + y^2 < \infty$? Найти реализацию каждой из них в \mathbb{R}^3 на поверхности цилиндра.

19.40. Показать, что любая поверхность трехмерного пространства изгибаются с «выходом» в четырехмерное пространство.

19.41. Доказать, что две полные цилиндрические поверхности, гомеоморфные кольцу, изометричны тогда и только тогда, когда их перпендикулярные образующим плоские сечения имеют одинаковую длину.

19.42. Построить изометрическое отображение области $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$ на цилиндре $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $z = z$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq z \leq +\infty$ на какую-либо изометрическую область на поверхности прямого кругового конуса с известными параметрами.

19.43. Дать пример полной евклидовой метрики в открытом единичном круге.

19.44. Доказать, что компактная полная локально выпуклая поверхность является выпуклой в целом.

19.45. Доказать, что односвязное полное локально евклидово двумерное многообразие изометрично в целом евклидовой плоскости со стандартной метрикой

$$dx^2 + dy^2.$$

19.46. Доказать, что в круге нельзя задать полную евклидову метрику в изотермическом виде.

19.47. В некоторой области изменения переменных (x, y) дана метрика

$$ds^2 = E(x) dx^2 + G(y) dy^2$$

с непрерывными коэффициентами $E(x) > 0, G(y) > 0$. Доказать, что:

а) эта метрика является локально евклидовой;

б) если эта метрика задана в замкнутой односвязной области, то ее можно непрерывно продолжить на внутренность выпуклой оболочки области;

в) если эта метрика задана в многосвязной области, то ее можно непрерывно продолжить на область, ограниченную выпуклой оболочкой внешней границы области;

г) эта метрика в целом является евклидовой, т. е. область ее задания в целом можно изометрически отобразить в евклидову плоскость со стандартной метрикой $du^2 + dv^2$.

При каких условиях на область и коэффициенты эта метрика является полной?

19.48. Данна метрика

$$ds^2 = \frac{1}{(1-r)^p} dr^2 + \frac{r^2}{(1-r)^q} d\varphi^2.$$

а) Считая r и φ полярными координатами на плоскости x, y , показать, что эта метрика является невырожденной во всем круге D : $x^2 + y^2 = r^2 < 1$.

б) Найти все геодезические линии, выходящие из начала координат, и определить значения p и q , при которых эта метрика является полной в круге D .

в) Убедиться, что эта метрика является локально евклидовой только при $p = 4, q = 2$ и найти при этих p и q ее изометрическое отображение на евклидову плоскость со стандартной метрикой.

19.49. Поверхности с радиус-вектором $x = u \cos v, y = u \sin v, z = hv + f(u)$ называются общими винтовыми поверхностями.

а) Проверить, что на участке, где v изменяется в некотором интервале длины 2π , сечения общей винтовой поверхности плоскостями, проходящими через ось Oz , состоят из кривых, каждая из которых конгруэнтна кривой $z = f(x), y = 0$.

б) Убедиться, что при $h = 0$ общая винтова поверхность превращается в поверхность вращения и что при $f(u) = \text{const}$ общая винтова поверхность превращается в геликоид.

в) Доказать теорему Бура: метрика общей винтовой поверхности изометрична метрике вида

$$ds^2 = dU^2 + G(U) d\varphi^2,$$

реализуемой на поверхности вращения, т. е. любая общая винтова поверхность локально изометрична некоторой поверхности

вращения, и обратно, любая поверхность вращения в окрестности любой своей точки, кроме полюса, локально изометрична некоторой общей винтовой поверхности.

г) Теорему Бура можно уточнить: общая винтовая поверхность локально допускает наложение на некоторую поверхность вращения, т. е. она непрерывно деформируется с сохранением метрики или, по-другому, изгибаются на поверхность вращения.

д) Общая винтовая поверхность S допускает *изгибание скольжения по себе*, а именно, существует деформация $S \rightarrow S_t$, выражаемая через радиус-векторы по закону S_t : $\mathbf{r}(u, v; t) = \mathbf{r}(u, v + t)$, которая переводит точки поверхности S в другие точки той же поверхности с сохранением метрики. При этом расстояния между точками на S равны расстояниям между их образами на S_t . Покажите, что это изгибание является *тривиальным*, т. е. оно получается движением всей поверхности в пространстве как твердого тела.

19.50. Доказать, что если поверхность допускает изгибание скольжения по себе, то ее метрика изометрична метрике вращения.

19.51. Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ представлен в параметрическом виде

$$x = uf(v) \cos v, \quad y = uf(v) \sin v, \quad z = g(u),$$

где

$$f(v) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}, \quad g(u) = c\sqrt{1 - u^2}.$$

Подобрать функцию $\psi(v)$ таким образом, чтобы деформация с параметром t

$$x = u\sqrt{f^2 - t^2} \cos \psi, \quad y = u\sqrt{f^2 - t^2} \sin \psi, \quad z = \int \sqrt{g'^2 + t} du$$

была изгибанием некоторой части эллипсоида. На какую часть эллипсоида распространяется эта деформация при малых t ?

§ 20. Гауссова и средняя кривизны

В задачах 20.1–20.4 требуется найти вторую квадратичную форму поверхностей.

20.1. а) $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{ch} u \cos v, a \operatorname{ch} u \sin v, c \operatorname{sh} u)$;

б) $\mathbf{r}(u, v) = (a \operatorname{sh} u \cos v, a \operatorname{sh} u \sin v, c \operatorname{ch} u)$.

20.2. $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$.

20.3. $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos v, R \sin v, u)$.

20.4. $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, ku)$.

20.5. Показать, что главные кривизны прямого коноида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = f(v),$$

где $f(v)$ — произвольная гладкая функция с отличной от нуля производной, имеют разные знаки.

20.6. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности, образованной бинормальями данной кривой.

20.7. Найти гауссову и среднюю кривизны поверхности, образованной главными нормальями данной кривой.

20.8. Проверить, что для тора вращения интегральная гауссова кривизна равна нулю, а интегральная средняя кривизна отлична от нуля, т. е.

$$\iint K dS = 0, \quad \iint H dS \neq 0.$$

Заметим, что равенство $\iint K dS = 0$ выполняется для любого тора.

20.9. Найти линии кривизны на поверхности

$$x = \frac{a}{2}(u - v), \quad y = \frac{b}{2}(u + v), \quad z = \frac{uv}{2}.$$

20.10. Найти линии кривизны геликоида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

20.11. Доказать, что при локально изометричном наложении геликоида

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = av.$$

на катеноид

$$x = \sqrt{u^2 + a^2} \cos v, \quad y = \sqrt{u^2 + a^2} \sin v, \\ z = a \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right)$$

линии кривизны переходят в асимптотические линии.

20.12. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(s, u) = \rho(s) + f(u)\mathbf{a} + g(u)(\mathbf{v}(s) \times \mathbf{a}),$$

где $\mathbf{v}(s) = \dot{\rho}(s)$, $|\mathbf{v}(s)| = 1$, $\langle \mathbf{v}(s), \mathbf{a} \rangle = 0$, $|\mathbf{a}| = 1$, \mathbf{a} — постоянный вектор.

20.13. Плоская кривая γ задана уравнением $\rho = \rho(s)$, где s — натуральный параметр; $k = k(s)$ — ее кривизна, $0 < k < 1/a$; \mathbf{n} — главная нормаль к γ , \mathbf{b} — орт нормали к плоскости кривой γ . Поверхность S задана уравнением

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + a\mathbf{n}(s) \cos \varphi + a\mathbf{b} \sin \varphi.$$

- а) Проверить, что поверхность S регулярна.
 б) Найти гауссову кривизну поверхности S .
 в) Найти среднюю кривизну поверхности S .
 г) Найти линии кривизны поверхности S .

20.14. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(s, \varphi) = \rho(s) + a\mathbf{n}(s) \cos \varphi + a\mathbf{b}(s) \sin \varphi,$$

здесь \mathbf{n} и \mathbf{b} — орты главной нормали и бинормали кривой $\rho = \rho(s)$, имеющей натуральный параметр s , кривизну $k(s) < 1/a$ и кручение $\kappa(s)$.

20.15. Найти линии кривизны поверхности

$$\mathbf{r}(u, v) = \left(u \left(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} \right), v \left(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} \right), 2uv \right).$$

20.16. Предположим, что первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Доказать, что

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial E / \partial v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial G / \partial u}{\sqrt{EG}} \right) \right\}.$$

20.17. Найти выражение для гауссовой кривизны поверхности, отнесенной к таким координатам, в которых первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = du^2 + G(u, v) dv^2.$$

20.18. Найти гауссову кривизну поверхности, если ее первая квадратичная форма имеет вид

$$ds^2 = B(u, v)(du^2 + dv^2).$$

20.19. Найти кривизну поверхности, первая квадратичная форма которой имеет вид

$$ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2.$$

20.20. Доказать, что гауссова кривизна K двумерной поверхности выражается только через метрику, т. е. через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные. Отсюда следует, что гауссова кривизна не меняется при изометриях поверхности.

20.21. Можно ли подобрать λ, φ, ψ так, чтобы поверхность

$$\mathbf{r}(u, \theta) = (\varphi(u) \cos \lambda \theta, \varphi(u) \sin \lambda \theta, \psi(u))$$

имела гауссову кривизну 1?

- а) Найти пример, отличный от сферы.
 б) Описать все такие поверхности (см. задачу 6.4).

20.22. Можно ли подобрать λ, φ, ψ так, чтобы поверхность

$$\mathbf{r}(u, \theta) = (\varphi(u) \cos \lambda\theta, \varphi(u) \sin \lambda\theta, \psi(u))$$

имела гауссову кривизну -1 ? Найти пример, отличный от псевдосферы.

20.23. Доказать, что любая поверхность вращения постоянной отрицательной кривизны относится к одному из следующих трех типов:

1) катушка Миндинга (выглядит как китайские фонарики);

2) волчок Миндинга, т. е. поверхность с острием на оси вращения;

3) псевдосфера Бельтрами.

Графики образующих, соответствующих этим трем типам поверхностей, приведены на рис. 85, 86.

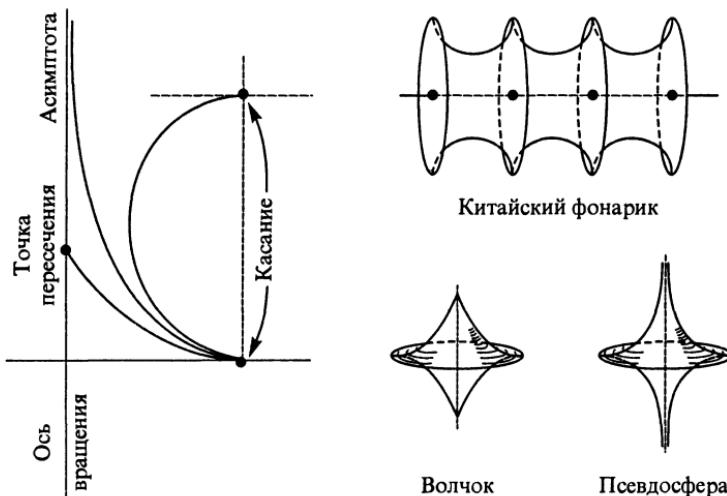


Рис. 85

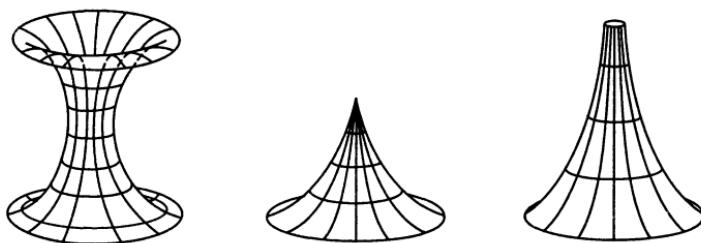


Рис. 86. Катушка Миндинга, волчок Миндинга, псевдосфера Бельтрами

20.24. Доказать, что каждая поверхность вращения (замкнутая или с краем по параллели) допускает изгибание в классе поверхностей вращения с отображением параллелей в параллели и с сохранением формы площади.

20.25. Доказать, что при проективном преобразовании пространства \mathbb{R}^3 сохраняется свойство точки поверхности быть эллиптической, параболической или точкой уплощения.

20.26. Доказать, что все точки любой поверхности 2-го порядка имеют один и тот же тип (эллиптический, гиперболический или параболический).

20.27. Пусть в изотермических координатах (u, v) поверхность задана в виде

$$x = \operatorname{Re} F_1(w), \quad y = \operatorname{Re} F_2(w), \quad z = \operatorname{Re} F_3(w),$$

где $F_k(w)$, $k = 1, 2, 3$, — аналитические функции комплексного аргумента $w = u + iv$. Такое представление называется *представлением Вейерштрасса*.

а) Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять эти функции, чтобы поверхность была минимальной?

б) Вычислить метрическую форму этой минимальной поверхности.

20.28. Пусть минимальная поверхность M , заданная представлением Вейерштрасса (см. задачу 20.27), подвергается деформации M_t вида

$$x = \operatorname{Re} (F_1(w)e^{it}), \quad y = \operatorname{Re} (F_2(w)e^{it}), \quad z = \operatorname{Re} (F_3(w)e^{it})$$

с параметром деформации t . Доказать справедливость следующих утверждений:

а) эта деформация является изгибанием поверхности M . В частности, все поверхности M_t изометричны друг другу;

б) изгибаия происходят в классе минимальных поверхностей;

в) все поверхности M_t имеют параллельные нормали в соответствующих по изометрии точках.

20.29. Минимальные поверхности, определяемые формулами из задачи 20.28, называются *ассоциированными*. Показать, что изгибание минимальной поверхности в классе минимальных поверхностей происходит только в семействе ассоциированных минимальных поверхностей.

20.30. Рассмотрим поверхность M :

$$x = u - \frac{4}{3}u^3 + 4uv^2, \quad y = v - \frac{4}{3}v^3 + 4u^2v, \quad z = 2(u^2 - v^2)$$

и ее деформацию M_t :

$$\begin{aligned}x &= u - \left(\frac{4}{3}u^3 - 4uv^2 \right) \cos 2t + \left(4u^2v - \frac{4}{3}v^3 \right) \sin 2t, \\y &= v + \left(\frac{4}{3}u^3 - 4uv^2 \right) \sin 2t + \left(4u^2v - \frac{4}{3}v^3 \right) \cos 2t, \\z &= 2(u^2 - v^2) \cos t - 4uv \sin t.\end{aligned}$$

Доказать, что эта деформация является изгиблением и что исходная поверхность M и все ее деформации M_t являются минимальными поверхностями. При каком значении параметра поверхность M_t является зеркальным образом поверхности M_t ?

20.31. Пусть поверхность M такова, что существует ее непрерывное изгибление на ее центрально-симметрический образ M^* . В таких случаях говорят, что M *наложима* на M^* . Доказать, что M также наложима на свой зеркальный образ (отражение в плоскости).

20.32. Доказать, что минимальная поверхность наложима на свой зеркальный образ.

20.33. Доказать, что на поверхности постоянной кривизны окрестности двух любых точек имеют трехпараметрическое семейство изометрических отображений друг на друга. Отметим, что при этом центры этих окрестностей не обязаны переходить друг в друга.

20.34. Доказать, что не существует поверхности, на которой окрестности двух любых точек имели бы в точности двупараметрическое семейство изометрических отображений друг на друга (см. предыдущую задачу). Отметим, что поверхности, имеющие в точности однопараметрическое семейство изометрий, существуют. Ими являются поверхности вращения, не являющиеся поверхностями постоянной кривизны.

20.35. Доказать, что если две изометричные поверхности в соответствующих по изометрии точках имеют параллельные нормали, то их средние кривизны или равны, или отличаются знаком.

20.36. Доказать, что если две изометричные поверхности в соответствующих по изометрии точках имеют параллельные нормали и средняя кривизна хотя бы одной из них не равна нулю, то эти поверхности конгруэнтны. Если же обе поверхности минимальные, то они могут быть неконгруэнтными. Более того, любая минимальная поверхность допускает изгиблание с сохранением направления нормалей в соответствующих по изометрии точках.

20.37. Пусть известно, что две метрики $ds^2 = g_{ij} du^i du^j$ и $d\sigma^2 = \gamma_{ij} d\xi^i d\xi^j$, $1 \leq i, j \leq n$, локально изометричны. Вывести систему уравнений, которым должна удовлетворять изометрия $f: (u) \rightarrow (\xi)$, где через (u) и (ξ) обозначены окрестности соответствующих точек в двух областях задания метрик. Рассмотреть

отдельно случай $n = 2$ и показать, что в этом случае нахождение искомого отображения может быть сведено к решению квазилинейной системы.

20.38. На плоскости переменных (u, v) задана метрика

$$ds^2 = e^{-2u^2} (du^2 + dv^2).$$

Убедиться, что эта метрика положительной кривизны, что она не полная и что она не может быть реализована ни на какой выпуклой поверхности в \mathbb{R}^3 .

20.39. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{-Kr^2(A + \ln(1/r))^2},$$

где $r^2 = u^2 + v^2$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Является ли эта метрика в кольце $0 < r < e^A$ полной?

20.40. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{a^2 r^{2a-2}}{(1 - Ar^{2a})^2} (du^2 + dv^2),$$

где $r^2 = u^2 + v^2$ и $A = \frac{-K}{4}$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Пусть $a > 0$. Является ли тогда метрика пункта а) в кольце

$0 < r < \left(\frac{1}{A}\right)^{1/2a}$ полной?

в) Рассмотрим две метрики из пункта а): одну при $a > 0$, другую при $a < 0$. Определить максимальные области существования обеих метрик и проверить, являются ли эти метрики изометричными в этих областях.

20.41. а) Проверить, что метрика

$$ds^2 = \frac{a^2}{(r\sqrt{-K}(A \sin(a \ln r) + B \cos(a \ln r)))^2} (du^2 + dv^2),$$

где $r^2 = u^2 + v^2$ и $A^2 + B^2 = 1$, имеет постоянную кривизну $K < 0$.

б) Определить максимальные области существования метрики пункта а) и проверить, является ли она в этих областях полной.

20.42. Найти для метрик из предыдущих трех задач их изометрические погружения в \mathbb{R}^3 в виде поверхностей вращения вида $x = f(r) \cos n\varphi$, $y = f(r) \sin n\varphi$, $z = g(r)$, где $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$. Описать области погружения этих метрик в зависимости от значений целочисленного параметра n .

20.43. Рассмотрим семейство поверхностей вращения, полученных друг из друга параллельным переносом вдоль оси вращения.

Рассмотрим поверхность вращения M , имеющую ту же ось и пересекающую поверхности семейства под прямым углом. Доказать, что в точке пересечения поверхности семейства и поверхности M они имеют одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку гауссовые кривизны.

§ 21. Параметризации известных двумерных поверхностей

В этом параграфе требуется проверить, что указанные в задачах формулы задают параметризации вложений или погружений известных поверхностей.

21.1. Поверхность с особенностями, параметрически задаваемая в \mathbb{R}^3 следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\theta, \varphi) = & ((1 + \cos 2\theta) \cos 2\varphi, (1 + \cos 2\theta) \sin 2\varphi, \sin 2\theta \sin \varphi), \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant & \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\end{aligned}$$

является одной из моделей (см. рис. 87) проективной плоскости \mathbb{RP}^2 . Описать особые точки этой поверхности.

Доказать, что сфера

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$$

двулистно накрывает эту поверхность. Найти соответствие между парами точек сферы и точками \mathbb{RP}^2 в терминах параметров θ, φ .

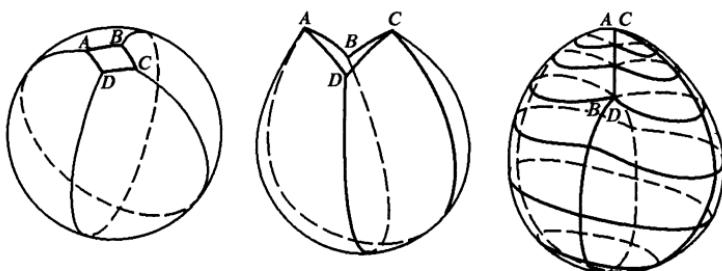


Рис. 87. Склейка проективной плоскости из квадрата

Отметим, что если от описанной модели проективной плоскости отрезать плоскостью небольшой диск, то оставшаяся часть является моделью листа Мёбиуса. Она называется *скрещенным колпаком* (см. рис. 88). Линия самопересечения колпака соответствует $\varphi = 0$. Точками пинча (см. рис. 89) являются $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ и $\theta = \pi/2$.

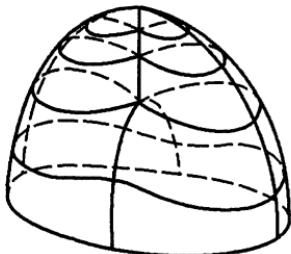


Рис. 88. Скрещенный колпак

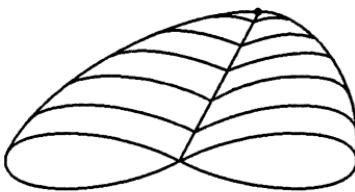


Рис. 89. Окрестность точки пинча

21.2. Напомним, что одной из моделей проективной плоскости является поверхность Боя в \mathbb{R}^3 (см. рис. 90, 91).

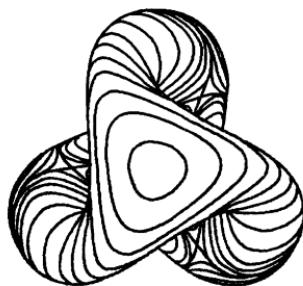
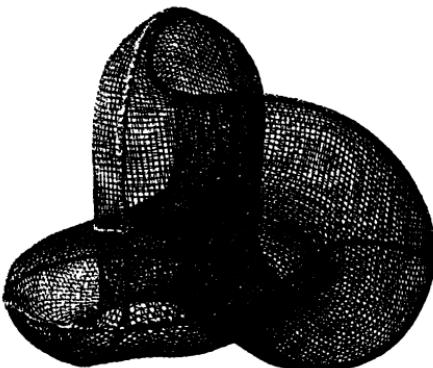
Рис. 90. Поверхность Боя — погружение проективной плоскости в \mathbb{R}^3 

Рис. 91. «Прозрачная» поверхность Боя. Здесь хорошо видно, как устроено ее множество точек самопересечения

Параметризация Апери поверхности Боя:

$$r(\theta, \varphi) = A \begin{pmatrix} r_1 \cos 2\varphi \\ r_1 \sin 2\varphi \\ 1 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} r_2 \cos \varphi \\ -r_2 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{\cos^2 \theta}{1 - b \sin 3\varphi \sin 2\theta}, \quad B = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 - b \sin 3\varphi \sin 2\theta}.$$

Здесь $r_1 = \sqrt{2}/3$, $r_2 = 2/3$. При $1/\sqrt{6} < b < 1$ точек пинча на поверхности нет.

Доказать, что стандартная сфера накрывает эту параметризованную поверхность двулистно.

Структура поверхности Боя показана на рис. 92, 93.

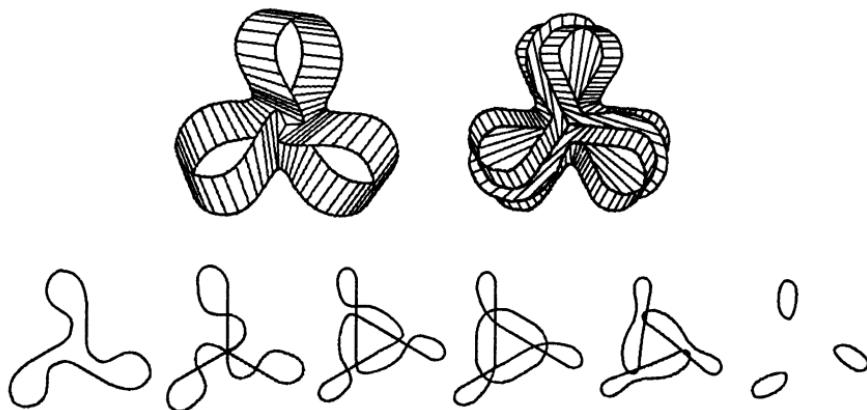


Рис. 92. Начало процесса построения поверхности Боя из листа Мёбиуса



Рис. 93. Завершение процесса построения поверхности Боя из листа Мёбиуса

21.3. Пусть θ и φ — сферические координаты на S^2 (угол θ отсчитывается от горизонтальной плоскости). Доказать, что формулы

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (w, x, y, z),$$

$$w(\theta, \varphi) = (\cos \theta)^2 \cos 2\varphi, \quad x(\theta, \varphi) = \sin 2\theta \cos \varphi,$$

$$y(\theta, \varphi) = \sin 2\theta \sin \varphi, \quad z(\theta, \varphi) = (\cos \theta)^2 \sin 2\varphi.$$

задают вложение проективной плоскости в \mathbb{R}^4 .

21.4. Доказать, что следующие вектор-функции задают погружения бутылки Клейна в \mathbb{R}^3 (см. рис. 94).

а) $\mathbf{r}(u, v) = (R_x, R_y, R_z^2)$, где R_x, R_y, R_z — компоненты в декартовых координатах следующей вектор-функции:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}_0(u) + \rho(u)(\mathbf{e}_1(u) \cos v + \mathbf{e}_2 \sin v).$$

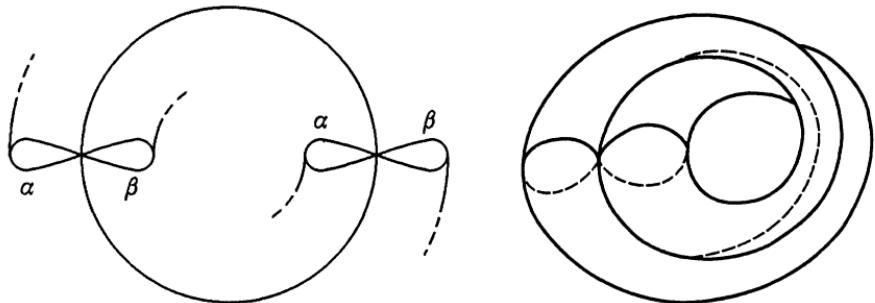


Рис. 94. Погружение бутылки Клейна

Здесь

$$\mathbf{R}_0(u) = \begin{pmatrix} a \sin 2u \\ 0 \\ b \cos u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{e}_1(u) = \begin{pmatrix} b \sin u \\ 0 \\ a \cos 2u \end{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{R}'_0|}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — единичные векторы, ортогональные \mathbf{R}'_0 ,

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \sin^{2n} (u - u_0).$$

Здесь, например, можно положить

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 1, \quad \rho_0 = 0,1, \quad \rho_1 = 0,6, \quad u_0 = 0,3, \quad n = 4.$$

б) Еще одна параметризация, где a — вещественное число:

$$\mathbf{r}_a(u, v) = \begin{pmatrix} \left(a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \cos u \\ \left(a + \cos \frac{u}{2} \sin v - \sin \frac{u}{2} \sin 2v \right) \sin u \\ \sin \frac{u}{2} \sin v + \cos \frac{u}{2} \sin 2v \end{pmatrix}.$$

21.5. Доказать, что следующая вектор-функция задает параметризацию листа Мёбиуса в \mathbb{R}^3 :

$$\mathbf{r}(t, \varphi) = \left(\left(1 + t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \cos \varphi, \left(1 + t \sin \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi, t \cos \frac{\varphi}{2} \right).$$

Доказать, что для $t \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ это отображение является вложением.

21.6. Зададим открытый лист Мёбиуса как косое (скрученное) произведение окружности на интервал. Окружность назовем осевой, а длину интервала — шириной листа Мёбиуса (см. рис. 95).

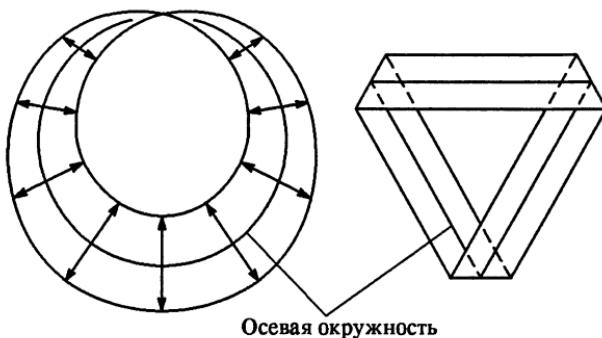


Рис. 95. Лист Мёбиуса в \mathbb{R}^3

а) Доказать, что лист Мёбиуса бесконечной ширины с плоской метрикой в \mathbb{R}^3 не вкладывается.

б) Найти максимальное отношение длины осевой окружности к ширине листа Мёбиуса, при котором существует изометрическое вложение плоского листа Мёбиуса в \mathbb{R}^3 .

21.7. Доказать, что следующая алгебраическая поверхность в \mathbb{R}^3 является скрещенным колпаком, т. е. моделью листа Мёбиуса:

$$(k_1 x^2 + k_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0,$$

где $k_1 \neq k_2$. Доказать, что эту поверхность можно параметризовать следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\cos \theta \cos \varphi}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}, & y &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}, \\ z &= \frac{1 + \sin \theta}{k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

а) При этом требуется доказать, что первое уравнение (алгебраическое) задает *поверхность*, т. е. указанная выше параметризация действительно задает множество *всех* решений этого уравнения.

б) Доказать, что указанные формулы задают гладкую регулярную параметризацию вне особых точек. Найти особые точки.

в) Проверить, что при этой параметризации квадрат $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ склеивается в лист Мёбиуса.

21.8. Доказать, что формулы $x = u^2 - v^2$, $y = uv$, $z = uw$, $t = vw$ задают регулярное погружение сферы $u^2 + v^2 + w^2 = 1$

в \mathbb{R}^4 . Заметим, что при этом отображении противоположные точки сферы переходят в одну точку, поэтому возникает регулярное отображение \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^4 . Доказать, что при этом получается вложение проективной плоскости в \mathbb{R}^4 .

§ 22. Поверхности в \mathbb{R}^3

22.1. Доказать, что если в некоторой точке поверхности в \mathbb{R}^3 гауссова кривизна $K > 0$, то поверхность локально лежит по одну сторону от касательной плоскости в этой точке.

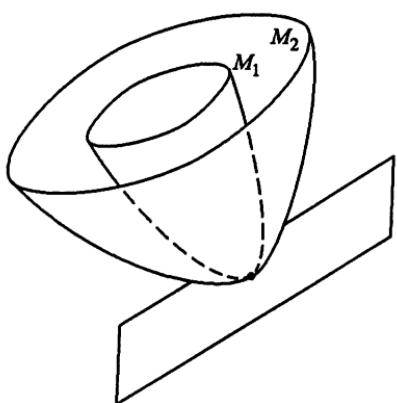


Рис. 96

22.2. Пусть две поверхности M_1 и M_2 касаются одной и той же плоскости в некоторой общей точке. При этом в некоторой окрестности этой точки обе поверхности находятся по одну сторону от плоскости, причем поверхность M_1 целиком лежит внутри поверхности M_2 (см. рис. 96). Доказать, что для гауссовых кривизн справедливо нестрогое неравенство $K_1 \geq K_2$. Этот факт является локальным.

22.3. Можно ли реализовать лист Мёбиуса в \mathbb{R}^3 в виде гладкой поверхности всюду положительной кривизны?

22.4. Можно ли вложить лист Мёбиуса в \mathbb{R}^3 в виде гладкой поверхности, однозначно проектирующейся на какую-либо плоскость?

22.5. а) Доказать, что неориентированную поверхность (замкнутую или с границей) нельзя погрузить в \mathbb{R}^3 так, чтобы в каждой ее точке либо гауссова кривизна K была строго положительна, либо гауссова кривизна K была нулевой, но средняя кривизна H отлична от нуля.

б) Построить вложение плоского листа Мёбиуса (т. е. с локально евклидовой метрикой) в \mathbb{R}^3 . Объяснить, почему наличие такого вложения не противоречит предыдущему пункту.

22.6. Доказать, что замкнутая гладкая поверхность в \mathbb{R}^3 всегда имеет точку, в которой:

- гауссова кривизна не меньше 0;
- гауссова кривизна строго больше 0.

22.7. а) Доказать, что гладкая замкнутая поверхность отрицательной гауссовой кривизны не погружается в \mathbb{R}^3 .

б) Доказать, что гладкая замкнутая поверхность неположительной гауссовой кривизны не погружается в \mathbb{R}^3 .

в) Доказать, что плоский тор нельзя гладко и изометрично погрузить в \mathbb{R}^3 .

22.8. а) Доказать, что на гладкой ориентированной погруженной в \mathbb{R}^3 поверхности рода не меньшего, чем 2, обязательно найдется точка, в которой гауссова кривизна K строго меньше 0.

б) Пусть тор (или бутылка Клейна) гладко погружен в \mathbb{R}^3 . Доказать, что тогда обязательно существует точка, в которой $K < 0$.

22.9. Доказать, что сферическое отображение минимальной поверхности в окрестности каждой точки, не являющейся точкой уплощения, конформно.

22.10. Доказать следующие утверждения:

а) на листе Мёбиуса существует метрика постоянной положительной кривизны. Это пример метрики, которая не погружается изометрично в \mathbb{R}^3 (см. задачу 22.3);

б) на листе Мёбиуса можно ввести метрику постоянной отрицательной кривизны.

22.11. Можно ли изометрично вложить в \mathbb{R}^3 лист Мёбиуса с метрикой постоянной отрицательной кривизны?

22.12. Можно ли реализовать лист Мёбиуса в \mathbb{R}^3 как область на некоторой поверхности вращения?

22.13. Рассмотрим поверхность вращения относительно оси z и введем на ней действие группы $\mathbb{Z}/2$: $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Профакторизуем поверхность по этому действию. Получим новую поверхность с метрикой.

Рассмотреть пример однополостного гиперболоида вращения и полученную описанным образом фактор-поверхность изометрически реализовать в \mathbb{R}^3 как поверхность вращения.

22.14. Найти площадь сферического образа поверхности

$$r = r(u, v), \quad u_1 < u < u_2, \quad v_1 < v < v_2,$$

с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

22.15. Найти площадь сферического образа эллиптического параболоида.

22.16. Найти образ гауссова отображения для:

а) однополостного гиперболоида;

б) двуполостного гиперболоида;

в) катеноида.

22.17. Найти сферический образ тора, реализованного в \mathbb{R}^3 стандартным образом как поверхность вращения.

22.18. Доказать, что площадь сферического образа одной полости двуполостного гиперболоида меньше 2π .

22.19. Исследовать сферические образы следующих выпуклых поверхностей:

а) овалоид, т. е. гладкая замкнутая выпуклая поверхность. Доказать, что его сферический образ покрывает всю сферу и что, если овалоид строго выпуклый, то сферическое отображение взаимно-однозначно;

б) параболоид $z = x^2 + y^2$;

в) поверхность, полученная вращением вокруг оси Oz кривой $z = x^2$, $z \leq a$, гладко продолженной до бесконечности касательной. Показать, что за счет выбора $a > 0$ сферический образ такой поверхности может заполнять область на сфере с любой площадью $S < 2\pi$.

22.20. Построить пример полной поверхности строго положительной кривизны, сферический образ которой имеет площадь меньше 2π .

22.21. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы и параллели поверхности переходят в прямые линии плоскости.

22.22. Доказать, что существует конформное отображение поверхности вращения на плоскость, при котором меридианы переходят в прямые, проходящие через начало координат, а параллели — в окружности с центром в начале координат.

22.23. Вычислить интеграл $\iint_M |K| dS$, где K — гауссова

кривизна поверхности M , если M :

а) эллипсоид; б) эллиптический параболоид; в) тор.

22.24. На сфере вырезан прямоугольник P , ограниченный двумя параллелями и двумя меридианами. Края, соответствующие меридианам, отождествлены по равенству длин склеиваемых отрезков, так что получается многообразие M , гомеоморфное кольцу. Проверить, что метрика на M является аналитической, и получить вложение M в \mathbb{R}^3 в виде поверхности вращения.

22.25. В условиях предыдущей задачи отождествление дуг меридианов проводится так, что топологически получается лист Мёбиуса. Показать, что полученная метрика постоянной положительной кривизны на листе Мёбиуса будет гладкой.

22.26. Найти все поверхности вращения постоянной отрицательной гауссовой кривизны $K = -1$. Они называются поверхностями Миндинга. Указать в единичном круге с метрикой Лобачевского (модель Пуанкаре) области, изометричные поверхностям Миндинга (после разреза по меридиану) и их универсальным покрывающим.

22.27. Найти все поверхности вращения постоянной средней кривизны.

§ 23. Топология двумерных поверхностей

В этом параграфе мы будем рассматривать разбиения поверхности на конечное число замкнутых многоугольников, которые пересекаются по общим ребрам и вершинам. Разбиение, в котором любые два многоугольника либо не пересекаются, либо пересекаются по *одному* общему ребру, либо по *одной* общей вершине, называется *правильным*. Разбиение поверхности на треугольники будем называть *триангуляцией*. Далее в этом параграфе через V обозначается число вершин, через E — число ребер, а через F — число граней (многоугольников) разбиения поверхности. Число $V - E + F$ называется *эйлеровой характеристикой* $\chi(M)$ поверхности M . Это число не зависит от выбора разбиения поверхности и, следовательно, является топологическим инвариантом поверхности.

23.1. Построить какие-нибудь триангуляции сферы, тора, проективной плоскости и найти эйлеровы характеристики этих поверхностей.

23.2. Из того факта, что эйлерова характеристика сферы $\chi(S^2) = 2$, вывести существование ровно 5 комбинаторно правильных многогранников (см. рис. 97). Напомним, что разбиение

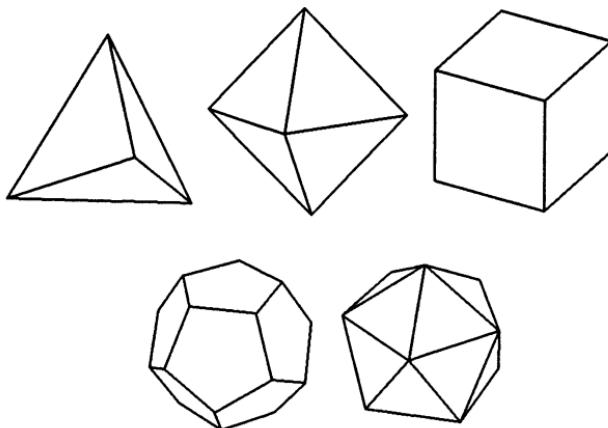


Рис. 97. Тетраэдр, октаэдр, куб, додекаэдр, икосаэдр

поверхности называется комбинаторно правильным, если у всех граней одинаковое число ребер и в каждой вершине сходится одно и то же число ребер.

23.3. Доказать, что число вершин правильной триангуляции двумерной замкнутой поверхности удовлетворяет оценке

$$V \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}.$$

В частности, правильная триангуляция тора содержит не менее 7 вершин, а правильная триангуляция \mathbb{RP}^2 — не менее 6.

23.4. Привести пример правильной триангуляции:

- тора с 7-ю вершинами;
- проективной плоскости с 6-ю вершинами.

23.5. Доказать, что минимальное число треугольников правильной триангуляции тора равно 14. Построить пример такой минимальной триангуляции. Сравнить с примером из предыдущей задачи.

23.6. а) Выяснить, сколько существует правильных триангуляций тора с минимальным числом вершин. Сколько существует правильных триангуляций тора с наименьшим числом треугольников? Существуют ли правильные триангуляции тора, минимальные в одном смысле, но не минимальные в другом?

б) Ответить на все эти вопросы для проективной плоскости.

23.7. Доказать неравенство Хивуда

$$\text{col}(M) \leqslant \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)}}{2}$$

для всех замкнутых двумерных поверхностей за исключением сферы и бутылки Клейна. Здесь через $\text{col}(M)$ обозначено хроматическое число поверхности M , т. е. минимальное число красок, необходимое для раскраски разбиения поверхности таким образом, чтобы многоугольники с общим ребром имели разные цвета. Что можно сказать об этом неравенстве для бутылки Клейна и для сферы?

23.8. Доказать, что $\text{col}(M_g) = \text{col}(M_g^k)$, $\text{col}(N_\alpha) = \text{col}(N_\alpha^k)$. Здесь M_g — сфера с g ручками, N_α — сфера с α пленками Мёбиуса, M_g^k — сфера с g ручками, из которой выброшено k непересекающихся дисков, а N_α^k — сфера с α пленками Мёбиуса, из которой выброшено k непересекающихся дисков (см. рис. 98).

23.9. Привести пример карты на проективной плоскости, которая не допускает раскраски в 5 цветов.

23.10. Доказать, что операция связной суммы поверхностей не зависит от способа склейки граничных окружностей, т. е. от выбора их ориентации при склейке.

23.11. Доказать, что $T^2 \# \mathbb{RP}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Здесь через $X \# Y$ обозначена связная сумма поверхностей X и Y .

23.12. Разрезать бутылку Клейна на два листа Мёбиуса.

23.13. Разрезать крендель (сферу с двумя ручками) так, чтобы получился плоский связный восьмиугольник.

23.14. Разрезать сферу с тремя ручками так, чтобы получился плоский связный двенадцатиугольник, все вершины которого представляют одну точку поверхности.

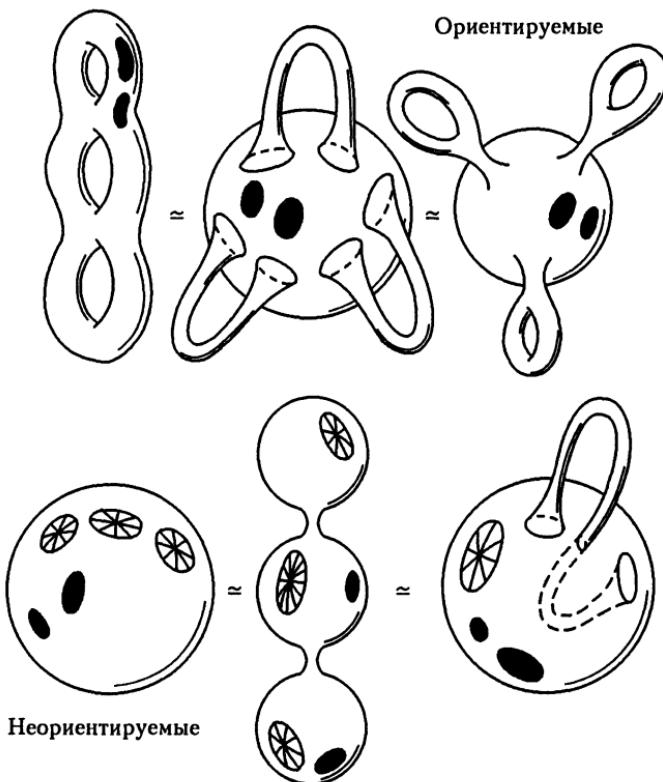


Рис. 98. Двумерные поверхности с краем

23.15. Доказать, что связная сумма $X \# Y$ поверхностей X и Y ориентируема тогда и только тогда, когда обе поверхности ориентируемы.

23.16. Доказать, что

$$\chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2.$$

23.17. Доказать, что

$$\chi(M_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_\alpha) = 2 - \alpha.$$

23.18. Доказать, что

$$\chi(S^2 \setminus kD^2) = 2 - k.$$

Здесь из сферы выброшено k непересекающихся дисков.

23.19. Если сфера разбита на n -угольники и в каждой вершине встречаются ровно k ребер, то

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}.$$

Графом « n домиков и m колодцев» будем называть граф, у которого $n+m$ вершин разбиты на две непересекающиеся группы из n и m элементов соответственно, причем каждая вершина из одной группы соединена единственным ребром с каждой вершиной другой группы. Других ребер у графа нет.

23.20. Доказать, что на сфере (плоскости) нельзя разместить следующие графы так, чтобы любые два различных ребра пересекались самое большое по общей вершине:

а) граф «3 домика и 3 колодца»;

б) граф с пятью вершинами, у которого каждая пара различных вершин соединяется единственным ребром.

23.21. Доказать, что граф «3 домика и 3 колодца» можно без самопересечений разместить на проективной плоскости (листе Мёбиуса).

23.22. Доказать, что комбинаторно правильное разбиение тора состоит из треугольников, четырехугольников или шестиугольников (определение комбинаторно правильного разбиения см. в задаче 23.2).

23.23. Пусть замкнутая поверхность Q комбинаторно правильно разбита на шестиугольники, причем в каждой вершине сходятся четыре грани. Доказать, что если число вершин нечетно, то Q неориентируема.

23.24. Пусть на замкнутой поверхности проведены три линии p , q и r с общими концами и не имеющие попарно общих внутренних точек. Если разрез по одной из линий $p \cup q$, $q \cup r$ или $r \cup p$ оставляет поверхность Q связной, то таким же свойством обладает по крайней мере одна из двух оставшихся линий.

23.25. Показать, что если в замкнутой неориентируемой поверхности N_α вырезать дырку, то полученная поверхность может быть расположена в пространстве \mathbb{R}^3 без самопересечений.

23.26. Доказать, что граф «4 домика и 4 колодца» нельзя расположить на проективной плоскости без самопересечений, но можно расположить на торе.

23.27. Доказать, что если граф « m домиков и n колодцев» можно без самопересечений расположить на поверхности Q , то

$$\chi(Q) \leq m + n - \frac{mn}{2}.$$

§ 24. Линии на поверхностях

Рассмотрим в \mathbb{R}^3 двумерную поверхность M^2 с параметризацией $\mathbf{r}(u, v)$ и второй квадратичной формой $L du^2 + 2M du dv + N dv^2$. Рассмотрим на M^2 два семейства линий. Эти семейства называются *сопряженными*, если в каждой точке P направление линий первого и второго семейства, проходящих через точку P , сопряжены друг другу относительно второй формы поверхности. Точнее, пусть в точке P линия перв-

вого семейства имеет направление (ξ_1, η_1) , а линия второго семейства — (ξ_2, η_2) . Тогда условие сопряженности можно записать в виде

$$L\xi_1\xi_2 + M(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + N\eta_1\eta_2 = 0.$$

Если линии одного семейства известны, то это условие дает дифференциальное уравнение линий сопряженного семейства.

Кривая $(u(t), v(t))$ на поверхности M^2 называется *асимптотической*, если в каждой точке вектор скорости кривой имеет асимптотическое направление относительно второй формы поверхности. Соответствующее дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2 = 0.$$

Асимптотическая линия определяется условием, что нормальная кривизна поверхности вдоль асимптотической кривой равна нулю.

Кривая $(u(t), v(t))$ называется *линией кривизны* поверхности M^2 , если в каждой ее точке вектор скорости имеет главное направление. В каждой точке поверхности, не являющейся омбилической, имеется два главных направления, они сопряжены и ортогональны. Если (ξ_1, η_1) и (ξ_2, η_2) — векторы, имеющие главные направления, то они удовлетворяют двум уравнениям:

$$\begin{aligned} E\xi_1\xi_2 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\eta_1\eta_2 &= 0, \\ L\xi_1\xi_2 + M(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + N\eta_1\eta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & -\xi_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

В частности, кривая $(u(t), v(t))$ является линией кривизны тогда и только тогда, когда она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{vmatrix} (u')^2 & -u'v' & (v')^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

24.1. Данна поверхность

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = 2uv$$

и семейство линий на ней $u^2 - cv^2 = c$. Найти дифференциальное уравнение сопряженного ему семейства.

24.2. Пусть σ — поверхность, l — прямая, $\{\gamma_1\}$ — семейство сечений поверхности плоскостями, проходящими через прямую линию l , а $\{\gamma_2\}$ — семейство линий, в которых конусы, имеющие вершины на l , касаются поверхности. Показать, что семейства $\{\gamma_1\}$ и $\{\gamma_2\}$ образуют сопряженную сеть.

24.3. На поверхности

$$x = u \cos v, \quad y = u^2 \sin v, \quad z = hv$$

задано семейство линий v . Найти сопряженное семейство.

24.4. Найти поверхности $z = f(x, y)$ с такой сопряженной сетью, которая проектируется в сеть координатных линий прямоугольной декартовой координатной системы на плоскости xOy .

24.5. Показать, что отображение двух поверхностей друг на друга, при котором каждая сопряженная сеть одной поверхности переходит в ортогональную сеть другой, переводит вторую квадратичную форму одной поверхности в форму, пропорциональную первой квадратичной форме первой поверхности.

24.6. Найти асимптотические линии однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

24.7. Найти асимптотические линии поверхности

$$z = f(x) - f(y)$$

и определить функцию f таким образом, чтобы линии одного асимптотического семейства были ортогональны асимптотическим линиям другого семейства.

24.8. Найти асимптотические линии поверхности $z = xy^3 - yx^3$, которые проходят через точку $(1, 2, 6)$.

24.9. Найти асимптотические линии катеноида.

24.10. Показать, что на прямом геликоиде одно семейство асимптотических линий состоит из прямых, а другое — из винтовых линий.

24.11. Доказать, что:

а) координатные линии $u = \text{const}$ являются асимптотическими тогда и только тогда, когда коэффициент N второй квадратичной формы равен 0;

б) для того чтобы координатная сеть состояла из асимптотических линий, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты L и N второй квадратичной формы были равны 0.

24.12. Доказать, что если поверхность минимальна, то асимптотические линии на ней ортогональны.

24.13. Доказать, что на плоскости любая линия является асимптотической, и наоборот, поверхность, на которой любая линия является асимптотической, является частью плоскости.

24.14. Доказать, что если асимптотическая линия на поверхности плоская, то она является или параболической, или прямой линией.

24.15. Найти асимптотические линии поверхности, которая составлена из точек, являющихся серединами хорд винтовой линии.

24.16. Пусть кривизна поверхности вращения строго меньше 0. Доказать, что на ней не существует замкнутых асимптотических линий.

24.17. Пусть поверхность образована главными нормалями линии γ . Доказать, что линия γ является асимптотической линией этой поверхности.

24.18. Доказать, что если асимптотические линии поверхности пересекаются под постоянным углом, то гауссова кривизна поверхности пропорциональна квадрату средней кривизны.

24.19. Найти асимптотические линии поверхности

$$(u \cos v, u \sin v, a \cos \lambda v),$$

где a и λ — постоянные.

24.20. Найти асимптотические линии поверхности

$$(3u + 3v, 3u^2 + 3v^2, 2u^3 + 2v^3).$$

24.21. Найти асимптотические линии поверхности $z = y \cos x$.

24.22. Параметризовать гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

так, чтобы координатные линии были асимптотическими.

24.23. Показать, что линии

$$\gamma_1(t) = (t, a, a^2 t) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t) = \left(t, \frac{b}{t^2}, \frac{b^2}{t^3} \right)$$

являются асимптотическими на поверхности $z = xy^2$.

24.24. Доказать, что если координатная сеть на поверхности асимптотическая, то имеют место равенства

$$\frac{\partial \ln |K|}{\partial u} = 2 \frac{FE_v - EG_u}{EG - F^2}, \quad \frac{\partial \ln |K|}{\partial v} = 2 \frac{FG_u - GE_v}{EG - F^2},$$

где K — гауссова кривизна поверхности.

24.25. Доказать, что асимптотические линии на поверхности постоянной отрицательной кривизны образуют сеть Чебышева, и обратно, если асимптотическая сеть на поверхности чебышевская, то гауссова кривизна поверхности постоянна. Сеть называется чебышевской, если у любого четырехугольника, образованного линиями сети, длины противоположных сторон равны.

24.26. Теорема Бельтрами-Эннепера. Доказать, что если асимптотические линии различных семейств имеют в их общей точке отличные от нуля кривизны, то они имеют равные по модулю, но противоположные по знаку кручения. Кроме того, квадрат кручения асимптотической линии равен модулю гауссовой кривизны в этой точке.

24.27. Две поверхности пересекаются под прямым углом. Доказать, что если на одной поверхности линия пересечения является асимптотической, то она является геодезической на другой, и наоборот.

24.28. Найти линии кривизны прямого геликоида.

24.29. Найти линии кривизны на произвольной цилиндрической поверхности.

24.30. Найти линии кривизны на произвольной конической поверхности.

24.31. Доказать, что на плоскости и на сфере любая линия является линией кривизны. Наоборот, если на поверхности любая линия является линией кривизны, то такая поверхность является плоскостью или сферой (или их частью).

24.32. Теорема Лиувилля. Доказать, что при конформном отображении пространства на себя сфера (плоскость) переходит в сферу или плоскость.

24.33. Доказать, что если координатная сеть состоит из линий кривизны, то главные кривизны поверхности задаются формулами

$$k_1 = \frac{L}{E}, \quad k_2 = \frac{N}{G}.$$

24.34. Теорема Родрига. Доказать, что для того чтобы линия γ на поверхности $r = r(u, v)$ была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой выполнялось равенство

$$dm = -k dr,$$

где m — единичный вектор нормали к поверхности, а k — нормальная кривизна поверхности вдоль кривой γ .

24.35. Доказать, что:

а) если две поверхности пересекаются вдоль некоторой линии под постоянным углом и эта линия является линией кривизны на одной поверхности, то она является линией кривизны и на другой поверхности;

б) если две поверхности пересекаются по линии, являющейся линией кривизны на каждой из поверхностей, то поверхности пересекаются под постоянным углом.

24.36. Теорема Дюпена. Даны три семейства поверхностей

$$f_1(x, y, z) = \text{const}, \quad f_2(x, y, z) = \text{const}, \quad f_3(x, y, z) = \text{const},$$

причем якобиан

$$\frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(x, y, z)} \neq 0.$$

Пусть поверхности пересекаются попарно под прямым углом. Это — так называемая триортогональная система поверхностей.

Доказать, что линии пересечения поверхностей из различных семейств являются линиями кривизны на каждой поверхности.

24.37. Доказать, что каждую поверхность в \mathbb{R}^3 можно включить в триортогональное семейство поверхностей.

24.38. Пусть заданы два семейства поверхностей, пересекающихся ортогонально по кривым, являющимся для поверхностей обоих семейств линиями кривизны. Доказать, что существует третье семейство поверхностей, образующее с данными триортогональную систему поверхностей.

24.39. Поверхности M_1 и M_2 называются параллельными, если нормали одной поверхности, как аффинные прямые, являются нормальями другой поверхности. Точки поверхностей M_1 и M_2 , лежащие на общих нормальях, назовем соответствующими. Доказать, что при таком соответствии линии кривизны переходят в линии кривизны.

24.40. Доказать, что при конформном отображении пространства на себя линии кривизны исходной поверхности преобразуются в линии кривизны преобразованной поверхности.

24.41. Пусть γ — линия кривизны поверхности M , причем нормальная кривизна k_n линии γ постоянна и отлична от нуля. Доказать, что поверхность M касается по линии γ некоторой сферы радиуса $1/k_n$.

24.42. Доказать, что при локально изометрическом наложении геликоида на катеноид (см. задачу 5.27) его асимптотические линии переходят в линии кривизны, а линии кривизны — в асимптотические линии.

24.43. Доказать, что геодезическая линия на поверхности является линией кривизны тогда и только тогда, когда эта линия плоская.

24.44. Доказать, что если на поверхности все геодезические являются плоскими линиями, то поверхность или плоскость, или сфера.

24.45. а) Пусть области на двух поверхностях 2-го порядка склеены вдоль общей дуги границы так, что в целом получилась C^1 -гладкая поверхность. Показать, что тогда линия склеивания является плоской кривой. Всякие ли две поверхности 2-го порядка допускают такое склеивание?

б) Пусть области на двух поверхностях 2-го порядка S_1 и S_2 склеены вдоль общей дуги границы, образуя в целом C^2 -гладкую поверхность S . Тогда S_1 и S_2 как поверхности 2-го порядка совпадают. Другими словами, склеиваемые области являются смежными областями на одной и той же поверхности 2-го порядка, так что S на самом деле будет аналитической.

24.46. Если неразвертывающаяся линейчатая поверхность имеет гладкость класса C^n , $n \geq 2$, то на ней можно ввести асимптотическую параметризацию (когда образующие являются одним

из семейств координатных линий), в которой поверхность имеет гладкость класса C^{n-1} .

24.47. Пусть линейчатая поверхность является C^1 -гладкой в некоторой асимптотической параметризации. Показать, что на ней можно ввести C^1 -гладкую асимптотическую параметризацию, в которой направляющая линия ортогональна к пересекающим ее образующим.

24.48. Описать метрики поверхностей, на которых внутренние координаты u и v являются натуральными параметрами на координатных линиях.

24.49. Описать поверхности, на которых координаты в линиях кривизны одновременно являются натуральными параметрами линий кривизны.

24.50. Описать поверхности, на которых линии кривизны являются геодезическими.

24.51. Если на гладкой регулярной неразвертывающейся линейчатой поверхности M есть прямолинейный отрезок, пересекающий все образующие, то на M можно ввести внутренние координаты, в которых асимптотические линии можно найти в квадратурах.

24.52. Доказать, что неразвертывающаяся линейчатая гладкая регулярная поверхность не может иметь постоянную гауссову кривизну.

24.53. Показать, что среди линейчатых поверхностей минимальной поверхностью, кроме плоскости, является только прямой геликоид.

24.54. Показать, что линейчатые поверхности, за исключением плоскости и геликоида, не могут иметь постоянную среднюю кривизну.

24.55. Показать, что единственной минимальной поверхностью с постоянной гауссовой кривизной является плоскость.

24.56. Будем говорить, что поверхность в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, имеет *постоянную внешнюю геометрию*, если любые две ее точки имеют конгруэнтные в \mathbb{R}^n окрестности.

а) Показать, что в \mathbb{R}^3 поверхностями с постоянной внешней геометрией являются только плоскость, сфера и прямой круговой цилиндр (или области на них).

б) Показать, что поверхность в \mathbb{R}^4

$$x_1 = R_1 \cos u, \quad x_2 = R_1 \sin u, \quad x_3 = R_2 \cos v, \quad x_4 = R_2 \sin v,$$

где $0 \leq u, v \leq 2\pi$, а R_1 и R_2 — постоянные числа, гомеоморфна тору, имеет нулевую гауссову кривизну и ее внешняя геометрия в \mathbb{R}^4 постоянна. Эта поверхность называется *обобщенным тором Клиффорда*. Ее можно задать еще одним способом. Отождествим \mathbb{R}^4 с комплексным пространством \mathbb{C}^2 с координатами z, w .

Тогда тор Клиффорда получается как пересечение трехмерной сферы $|z|^2 + |w|^2 = 1$ с конусом $|z| = |w|$. Отметим, что индуцированная метрика на торе Клиффорда является плоской.

в) Показать, что поверхность в \mathbb{R}^5

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{xy}{\sqrt{3}}, & x_2 &= \frac{yz}{\sqrt{3}}, & x_3 &= \frac{xz}{\sqrt{3}}, \\x_4 &= \frac{x^2 - y^2}{2\sqrt{3}}, & x_5 &= \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{6}\end{aligned}$$

с условием $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ является гомеоморфным вложением в \mathbb{R}^5 проективной плоскости, имеющим постоянную внешнюю геометрию. Эта поверхность называется *поверхностью Веронезе*.

24.57. Доказать, что если асимптотическая линия на поверхности одновременно является геодезической, то она будет прямой.

24.58. Доказать, что свойство линии на поверхности быть асимптотической инвариантно при проективных преобразованиях объемлющего пространства.

24.59. Доказать, что если поверхность содержит прямую линию, то эта линия будет асимптотической линией поверхности.

24.60. Доказать, что асимптотические линии поверхности составляют ортогональную сеть тогда и только тогда, когда поверхность минимальная.

24.61. Доказать, что если асимптотическая кривая на поверхности состоит из параболических точек, то эта кривая плоская и ее плоскость является касательной плоскостью к поверхности во всех точках кривой. Верно и обратное, — если плоскость плоской кривой на поверхности является касательной к поверхности во всех точках кривой, то эта кривая асимптотическая, состоящая из параболических точек.

24.62. Доказать, что если линия кривизны L является асимптотической, то гауссова кривизна поверхности вдоль L равна нулю и кривая L — плоская.

24.63. Показать, что на поверхности отрицательной кривизны бинормаль к асимптотической линии совпадает с нормалью к поверхности.

24.64. Доказать, что если при изгибании поверхности, отличной от линейчатой, все асимптотические линии одного семейства переходят снова в асимптотические линии, то поверхность остается конгруентной самой себе.

24.65. Показать, что неразвертывающаяся линейчатая поверхность не допускает изометрических преобразований, при которых все асимптотические линии исходной поверхности переходят в асимптотические линии преобразованной поверхности.

24.66. Доказать, что если на поверхности постоянной гауссовой кривизны $K = -1$ координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$

являются асимптотическими линиями поверхности, то в этих координатах первая форма имеет вид $ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2$, где ω — угол между асимптотическими линиями.

24.67. Показать, что в условиях предыдущей задачи угол $\omega(u, v)$ удовлетворяет уравнению «sin-Гордона» $\omega''_{uv} = \sin \omega$.

24.68. Показать, что если на поверхности отрицательной кривизны изометрические координаты (u, v) являются одновременно асимптотическими, то поверхность является минимальной с условием $M = \text{const}$.

24.69. Доказать, что на односвязной поверхности отрицательной кривизны нет замкнутой асимптотической линии.

§ 25. Многообразия (дополнительные задачи)

Напомним, что многообразие называется *замкнутым*, если оно компактно и не имеет края.

25.1. Доказать, что группы $SL(n, \mathbb{R})$ и $SL(n, \mathbb{C})$ являются гладкими подмногообразиями в пространствах соответственно вещественных и комплексных квадратных матриц порядка n . Найти их размерности. Найти количество компонент связности этих матричных групп.

25.2. Доказать, что группа $SO(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве \mathbb{R}^{n^2} всех квадратных матриц порядка n . Найти размерность и число компонент связности этой группы.

25.3. Доказать, что группы $U(n)$, $SU(n)$ являются гладкими подмногообразиями в пространстве \mathbb{C}^{n^2} комплексных квадратных матриц порядка n . Найти размерность и число компонент связности этих групп.

25.4. Показать, что отображение матриц $A \mapsto e^A$ является гладким гомеоморфизмом в окрестности нулевой матрицы в прообразе и окрестности единичной матрицы в образе. Показать, что обратное отображение задается соотношением $B \rightarrow \ln(B)$.

25.5. Доказать, что на каждой из групп, перечисленных в задачах 25.1–25.3, в качестве локальных систем координат в окрестности U_A матрицы A можно взять некоторые из декартовых координат матрицы $\ln(A^{-1}X)$. Показать, что в указанных координатах функции замены координат являются гладкими функциями класса C^∞ .

25.6. Показать, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ является фактор-пространством S^n/\mathbb{Z}_2 при некотором действии группы \mathbb{Z}_2 на сфере S^n . Найти это действие.

25.7. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является фактор-пространством S^{2n+1}/S^1 при некотором действии группы S^1 на сфере S^{2n+1} . Найти это действие.

25.8. Построить в \mathbb{R}^n гладкую (класса C^∞) функцию f , такую, что $f = 1$ на шаре радиуса 1, $f = 0$ вне шара радиуса 2 и $0 \leq f \leq 1$.

25.9. Пусть M — многообразие, $p \in U \subset M$ — окрестность точки p . Доказать, что существует такая гладкая функция f , что $0 \leq f \leq 1$, $f(p) = 1$ и $f(x) = 0$ на $M \setminus U$.

25.10. Пусть M — многообразие, $A = \overline{A}$ — замкнутое множество, $U \supset A$ — открытая область. Доказать, что существует такая гладкая функция f , что $0 \leq f \leq 1$, $f|_A = 1$ и $f|_{M \setminus U} = 0$.

25.11. (Слабый вариант теоремы Уитни.) Доказать, что компактное гладкое многообразие M^n вкладывается в евклидово пространство \mathbb{R}^N для подходящей размерности $N < \infty$.

25.12. Доказать, что гладкая функция на гладком компактном многообразии M может быть представлена как координата при некотором вложении $M \subset \mathbb{R}^N$.

25.13. Доказать, что произведение сфер вкладывается в \mathbb{R}^N как подмногообразие коразмерности один.

25.14. Доказать, что если $\dim X < \dim Y$, а $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение, то образ отображения f не совпадает с Y .

25.15. а) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое многообразие погружается в \mathbb{R}^3 .

б) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое ориентируемое многообразие вкладывается в \mathbb{R}^3 .

в) Доказать, что 2-мерное гладкое замкнутое неориентируемое многообразие вкладывается в \mathbb{R}^4 и не вкладывается в \mathbb{R}^3 .

25.16. Теорема Уитни. Доказать, что гладкое замкнутое многообразие M^n можно вложить в евклидово пространство \mathbb{R}^{2n+1} и погрузить в \mathbb{R}^{2n} .

П р и м е ч а н и е. Воспользоваться задачей 25.11. После этого подобрать направление проектирования таким образом, чтобы избежать появления самопересечений и особых точек на проекции. См. рис. 99.

25.17. Привести пример погружения многообразия в \mathbb{R}^n , взаимно однозначного с образом, но не являющегося вложением.

25.18. Доказать, что для компактных многообразий вложение всегда является гомеоморфизмом на образ.

25.19. Привести пример такого вложения, что образ не является подмногообразием.

25.20. Пусть M — многообразие с границей ∂M . Доказать, что многообразие M можно так вложить в полупространство ($x_{n+1} \geq 0$) евклидова пространства \mathbb{R}^{n+1} , что ∂M лежит в подпространстве ($x_{n+1} = 0$).

25.21. Пусть граница ∂M состоит из двух компонент связности $\partial M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Доказать, что многообразие M можно вложить в $\mathbb{R}^N \times [0, 1]$, причем M_1 лежит в $\mathbb{R}^N \times 0$, а M_2 лежит в $\mathbb{R}^N \times 1$.

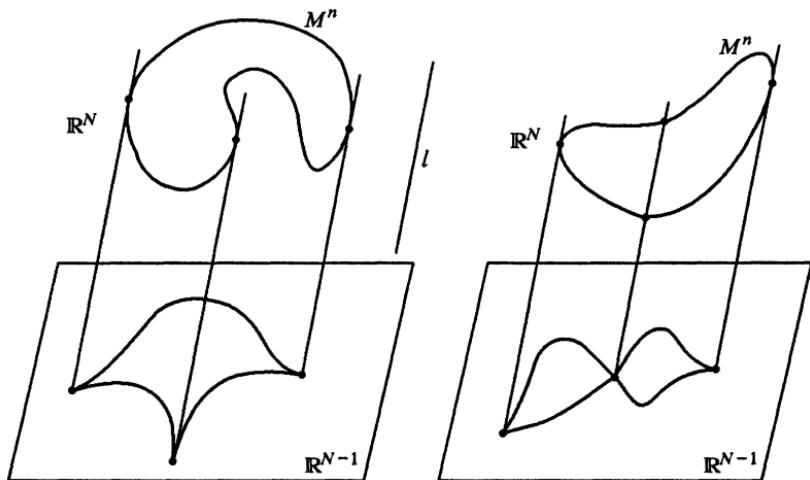


Рис. 99

25.22. Доказать, что некомпактное гладкое многообразие M^n (без края) можно вложить в евклидово пространство \mathbb{R}^{2n+1} и погрузить в \mathbb{R}^{2n} .

25.23. Рассмотрим половинку бутылки Клейна, изображенную на рис. 161 (см. ответы). Будем поднимать плоскость, содержащую край Γ этой поверхности, одновременно с этим деформируя Γ так, как показано на рис. 100. Полученную в результате плоскую

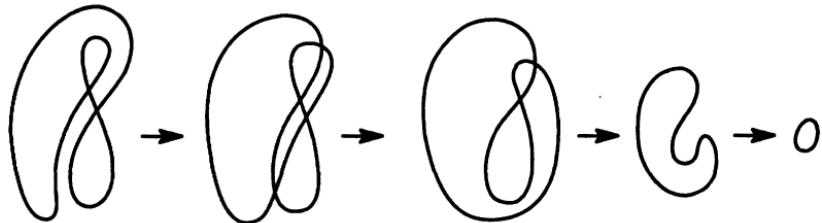


Рис. 100

окружность заклеим диском. Доказать, что получившаяся поверхность M (состоящая из исходной части бутылки Клейна, следа деформации Γ и диска) является погружением \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^3 . Доказать, что M является поверхностью Боя (см. задачу 21.2).

25.24. Описать множество точек самопересечения построенного в предыдущей задаче погружения \mathbb{RP}^2 в \mathbb{R}^3 . Указать кратности этих точек, т. е. указать, сколько листов поверхности пересекается в этой точке самопересечения поверхности.

25.25. Рассмотрим описанное в двух предыдущих задачах погружение $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^3 . Обозначим через $i(\mathbb{R}P^2)$ образ $\mathbb{R}P^2$ в \mathbb{R}^3 . Рассмотрим в каждой точке $x \in i(\mathbb{R}P^2)$, не являющейся точкой самопересечения поверхности, отрезок длины 2ϵ , ортогональный $i(\mathbb{R}P^2)$ с центром в точке x , где ϵ — достаточно мало. Поскольку i — гладкое отображение, то полученный пучок ортогональных отрезков можно доопределить и в каждой точке самопересечения. При этом в каждой точке получится ровно столько отрезков, сколько кратность точки. Рассмотрим в \mathbb{R}^3 множество, состоящее из концов всех ортогональных отрезков. Доказать, что это — образ двумерной сферы при некотором гладком погружении в \mathbb{R}^3 .

Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение гладких многообразий, $M \subset Y$ — гладкое подмногообразие. Отображение f называется трансверсальным вдоль подмногообразия M , если для любой точки $x \in f^{-1}(M)$ касательное пространство $T_{f(x)}(Y)$ к многообразию Y есть сумма (вообще говоря, не прямая) касательного пространства $T_{f(x)}(M)$ к

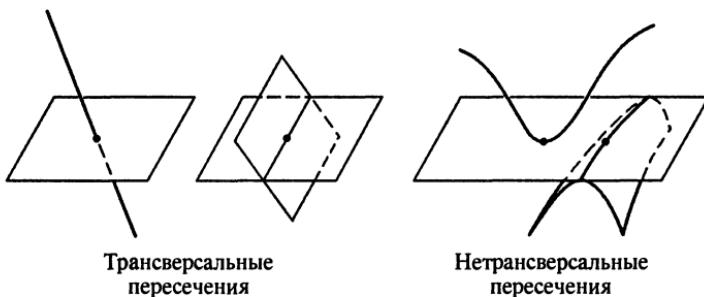


Рис. 101

многообразию M и образа $df(T_x(X))$ касательного пространства к многообразию X . Два подмногообразия M_1 и M_2 в многообразии X пересекаются трансверсально, если вложение одного из них является трансверсальным вдоль другого подмногообразия (см. рис. 101).

25.26. Пусть $f: X^n \rightarrow Y^n$ — гладкое отображение компактного замкнутого многообразия X в многообразие Y той же самой размерности n . Пусть y_0 — регулярное значение отображения f . Доказать, что $f^{-1}(y_0)$ состоит из конечного числа точек.

25.27. Доказать, что если $y \in Y$ — регулярная точка отображения $f: X \rightarrow Y$, то f — трансверсальное вдоль y отображение.

25.28. Доказать, что определение трансверсального пересечения не зависит от выбора порядка в паре M_1 и M_2 .

25.29. Доказать, что если $f: X \rightarrow Y$ — трансверсальное отображение вдоль подмногообразия $M \subset Y$, то прообраз $f^{-1}(M)$ является подмногообразием в многообразии X . Вычислить размерность $f^{-1}(M)$.

25.30. Доказать, что любая простая замкнутая дуга с самопересечениями в \mathbb{R}^2 малым движением превращается в простую замкнутую дугу в \mathbb{R}^3 без самопересечений.

25.31. Выяснить, трансверсально ли пересекаются следующие подмногообразия:

- плоскость xy и ось z в \mathbb{R}^3 ;
- плоскость xy и плоскость, натянутая на векторы $(3, 2, 0)$ и $(0, 4, -1)$ в \mathbb{R}^3 ;
- подпространство $V \times \{0\}$ и диагональ в произведении $V \times V$;
- пространства симметрических и кососимметрических матриц в пространстве всех матриц.

25.32. Выяснить, для каких значений a поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 = a$ пересекаются трансверсально.

25.33. Показать, что множество $V_{n,k}$ всех ортонормированных систем из k векторов в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n допускает структуру гладкого многообразия. Найти его размерность. Показать, что $V_{n,1} = S^{n-1}$, $V_{n,n} = O(n)$.

25.34. Показать, что множество $G_{n,k}$ всех k -мерных подпространств в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n допускает структуру гладкого многообразия. Найти его размерность. Показать, что $G_{n,1} = \mathbb{RP}^{n-1}$.

25.35. Пусть $f: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ — отображение, сопоставляющее точке $x \in S^n$ прямую, проходящую через точку x и начало координат в \mathbb{R}^{n+1} . Доказать, что f гладкое и что у него все точки регулярны.

25.36. Пусть $f: SO(n) \rightarrow S^{n-1}$ сопоставляет каждой ортогональной матрице ее первый столбец. Доказать, что отображение f гладкое и что у него все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$.

25.37. Пусть $f: U(n) \rightarrow S^{2n-1}$ сопоставляет каждой унитарной матрице ее первый столбец. Доказать, что отображение f гладкое и что у f все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$.

25.38. Пусть $f: V_{n,k} \rightarrow V_{n,s}$, $s \leq k$, — отображение, сопоставляющее ортонормированной системе из k векторов первые s ее векторов. Показать, что каждая точка является регулярной для отображения f . Показать, что прообраз $f^{-1}(y)$ гомеоморфен многообразию $V_{n-s, k-s}$.

25.39. Пусть $f: O(n) \rightarrow G_{n,k}$ — отображение, сопоставляющее каждой ортогональной матрице подпространство, порожденное первыми k столбцами. Показать, что у отображения f все точки регулярны. Показать, что прообраз $f^{-1}(y)$ гомеоморфен многообразию $O(n-k) \times O(k)$.

25.40. Пусть $f: X \times Y \rightarrow M$ — гладкое отображение, $m_0 \in M$ — регулярная точка. Рассмотрим семейство отображений $f_y: X \rightarrow$

$\rightarrow M$, $f_y(x) = f(x, y)$. Доказать, что точка m_0 регулярна для отображений f_y почти для всех значений параметра y , т. е. когда y пробегает открытое всюду плотное подмножество в Y .

25.41. Решить задачу 25.40 с заменой точки m_0 на подмногообразие $N \subset M$ и условия регулярности на условие трансверсальности отображений вдоль подмногообразия N .

25.42. Пусть поверхность M в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ (например, $n = 3$), задана уравнением $f(x_1, \dots, x_n) = c$, где c является регулярным значением гладкой функции f . Доказать, что тогда M является ориентируемой поверхностью.

25.43. Проверить, ориентируемы ли следующие многообразия: а) группа $GL(n, \mathbb{R})$; б) группа $U(n)$; в) группа $SO(n)$.

25.44. Доказать, что проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ ориентируемо в точности для нечетных n .

25.45. Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ ориентируемо.

25.46. Доказать, что произвольное комплексно-аналитическое многообразие ориентируемо.

25.47. Доказать, что пространство касательного расслоения многообразия является многообразием, причем всегда ориентируемым.

25.48. Доказать, что T^*M является многообразием. Ориентируемо ли оно?

25.49. Доказать, что объединение единичных сфер слоев касательного расслоения риманова n -мерного многообразия M является гладким многообразием размерности $(2n - 1)$. Доказать, что это многообразие расслаивается над M со слоем S^{n-1} .

25.50. Доказать, что плоское кольцо, бутылка Клейна и тор являются расслоенными пространствами.

25.51. Доказать, что расслоение над стягиваемой базой тривиально, т. е. является прямым произведением базы на слой.

25.52. Показать, что окружность, евклидово пространство и тор — параллелизуемые многообразия.

25.53. Доказать, что параллелизуемые многообразия ориентируемы. В частности, касательные расслоения проективной плоскости и бутылки Клейна нетривиальны.

25.54. Доказать, что если из двумерной замкнутой ориентированной поверхности выколоть точку, то полученное многообразие является параллелизуемым.

25.55. Доказать, что многообразие размерности n тогда и только тогда параллелизуемо, когда на нем имеется n линейно независимых гладких векторных полей.

25.56. Доказать, что многообразие, на котором определена структура группы Ли, параллелизуемо.

25.57. Доказать, что сфера S^2 не параллелизуема.

25.58. Привести пример гладкого отображения многообразий, при котором образ гладкой регулярной кривой перестает быть регулярным в некоторых точках.

25.59. Доказать, что линейно независимые векторы $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ в точке $A \in M^n$, $k \leq n$, можно считать базисными векторами некоторой карты многообразия, т. е. существуют координаты (x^1, \dots, x^n) в окрестности точки A такие, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_A = \mathbf{a}_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

25.60. Доказать, что векторное поле \mathbf{a} на многообразии, не обращающееся в нуль в точке A , является базисным для некоторой карты, содержащей точку A .

25.61. Рассмотрим векторные поля $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ на многообразии M^n , где $k \leq n$, линейно независимые в окрестности некоторой точки $A \in M^n$ и такие, что $[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] = 0$ для всех i и j . Доказать, что в некоторой окрестности точки A можно задать координаты (x^1, \dots, x^n) такие, что

$$\mathbf{a}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

25.62. Доказать, что ориентируемая 2-мерная поверхность имеет комплексную структуру.

25.63. Доказать, что многообразия $S^1 \times S^{2n-1}$, $S^{2n-1} \times S^{2n-1}$ имеют комплексную структуру.

25.64. Доказать, что замкнутое нечетномерное риманово многообразие положительной кривизны ориентируемо.

25.65. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — гладкое отображение замкнутых многообразий. Пусть f — наложение, причем все точки Y регулярны. Доказать, что для любой точки $y \in Y$ прообраз ее достаточно малой окрестности $U(y)$ гомеоморфен прямому произведению $U(y) \times f^{-1}(y)$, тем самым, f — расслоение. В частности, если Y — связное многообразие, то слои $f^{-1}(y)$ попарно диффеоморфны.

Функция $w = f(z^1, \dots, z^n)$, $z^k = x^k + iy^k$ называется *голоморфной*, если она непрерывно дифференцируема, а ее дифференциал является комплексной линейной формой в каждой точке (z^1, \dots, z^n) .

25.66. Показать, что если $f(z^1, \dots, z^n)$ — голоморфная функция, то

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x^k} = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x^k} = -\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y^k}.$$

25.67. Пусть $w^j = f^j(z^1, \dots, z^n)$ — голоморфная вектор-функция, отображающая \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Найти соотношение между вещественной матрицей Якоби этого отображения и его комплексной матрицей Якоби.

25.68. Доказать, что голоморфная вектор-функция $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ образует локальную систему координат тогда и только тогда, когда ее комплексный якобиан отличен от нуля.

25.69. Показать, что S^2 допускает комплексно-аналитическую структуру. Описать в явном виде простейший атлас карт.

25.70. Показать, что комплексные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$ допускают комплексно-аналитическую структуру. Описать в явном виде простейший атлас карт.

§ 26. Тензорный анализ

26.1. Пусть V_1 и V_2 — линейные пространства. Доказать изоморфизмы

$$\Lambda^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i(V_1) \otimes \Lambda^j(V_2),$$

$$S^k(V_1 \oplus V_2) = \bigoplus_{i+j=k} S^i(V_1) \otimes S^j(V_2).$$

26.2. Доказать, что

$$T_{j_1}^{[i_1} \dots T_{j_p]}^{i_p]} = T_{[j_1}^{[i_1} \dots T_{j_p]}^{i_p]} = T_{[j_1}^{i_1} \dots T_{j_p]}^{i_p]}.$$

26.3. Доказать, что если $v^{[i_1 i_2 i_3} v^{j_1 j_2] j_3} = 0$, то $v^{[i_1 i_2 i_3} v^{j_1] j_2 j_3} = 0$.

26.4. Верно ли, что если трехвалентный ковариантный тензор удовлетворяет условиям

$$T_{ijk} = T_{jik}, \quad T_{ijk} u^i u^j u^k = 0$$

при любом выборе контравариантного вектора u , то компоненты тензора удовлетворяют условию

$$T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij} = 0.$$

26.5. Доказать, что если соотношение

$$u_{\alpha\beta}^\gamma v^\alpha v^\beta w_\gamma = 0$$

справедливо при любом выборе тензоров v^α , w_α , удовлетворяющих условию $v^\alpha w_\alpha = 0$, то

$$u_{(\alpha\beta)}^\gamma = s_{(\alpha} \delta_{\beta)}^\gamma,$$

где s_α — некоторый тензор.

26.6. Доказать, что если размерность пространства V больше 2, то $\Lambda^2(\Lambda^2 V) \not\cong \Lambda^4 V$.

26.7. Доказать, что если $\text{tr } \Lambda^q A = 0$ для всех $q > 0$, то оператор A нильпотентен.

26.8. Пусть в пространстве V размерности n задан линейный оператор A . Если оператор $\Lambda^{n-1}A$ в пространстве $\Lambda^{n-1}V$ ненулевой, то он либо невырожден, либо имеет ранг 1.

26.9. Доказать, что если оператор A диагонализуем, то оператор $A^{\otimes k}$ также диагонализуем.

26.10. Доказать, что ранг тензора $A_{ij} = a_i b_j$ равен единице, а ранг тензора $a_i b_j + a_j b_i$ равен 2.

26.11. Какому условию должен удовлетворять тензор A_{ij} , чтобы он имел вид $A_{ij} = a_i b_j$?

26.12. Доказать, что если тензор T_{ijk} симметричен по первым двум индексам, то

$$T_{(ijk)} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

26.13. Доказать, что если тензор T_{ijk} кососимметричен по первым двум индексам, то

$$T_{[ijk]} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}).$$

26.14. Даны тензоры a_{ij} и b^{klm} . Построить из них путем одного умножения и свертывания тензоры первой, третьей и пятой валентностей. Сколько их будет?

26.15. Пусть тензор T_{ijkl} обладает свойствами

$$T_{hijk} + T_{hikj} = 0, \quad T_{hijk} + T_{hjki} + T_{hkij} = 0.$$

а) Доказать, что если $T_{hijk} - T_{hjik} = 0$, то $T_{hijk} = 0$.

б) Доказать, что если $T_{hijk} + T_{hjik} = 0$, то $T_{hijk} = 0$.

26.16. Показать, что если трехвалентный тензор T_{ij}^h удовлетворяет условиям

$$T_{ij}^h = T_{ji}^h, \quad T_{ij}^h u^i u^j = 0$$

для любого тензора (вектора) u^j , то тензор T_{ij}^h нулевой.

26.17. Показать, что если тензор $T_{i_1 \dots i_m}$ удовлетворяет условиям

$$T_{i_1 \dots i_m} u^{i_1} \dots u^{i_m} = 0$$

при любом выборе тензора (вектора) u^i , то $T_{(i_1 \dots i_m)} = 0$.

Пусть $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм областей евклидова пространства. Пусть тензорное поле T типа (p, q) на V имеет в координатах $(x) = (x^1, \dots, x^n)$ компоненты $T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$. Ясно, что композиция $(x \circ \varphi)$

определяет криволинейные координаты на U . Определим тензорное поле φ^*T на U в этой системе координат следующей формулой:

$$(\varphi^*T)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \circ \varphi.$$

Пусть \mathbf{X} — гладкое векторное поле, а T — некоторое гладкое тензорное поле. Поле \mathbf{X} определяет однопараметрическую группу φ_t (напомним, что φ_t определяется из дифференциального уравнения $\frac{d}{dt}\varphi_t(P)\Big|_{t=0} = = \mathbf{X}(P)$). Определим производную Ли тензорного поля T вдоль векторного поля \mathbf{X} формулой

$$L_{\mathbf{X}}T(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^*T)(P) - T(P)}{t}.$$

26.18. Доказать, что если тензорное поле T имеет тип $(0, 0)$, т. е. является гладкой функцией, то $\varphi^*T = T \circ \varphi$.

26.19. Доказать, что если тензорное поле T имеет тип $(1, 0)$, т. е. является векторным, то

$$(\varphi^*T)(P) = (d\varphi|_P)^{-1}T(\varphi(P)).$$

26.20. Доказать, что если тензорное поле ξ имеет тип $(0, 1)$, т. е. является ковекторным, то

$$(\varphi^*\xi)(P) = (d\varphi|_P)^*\xi(\varphi(P)).$$

Здесь $d\varphi|_P: T_P U \rightarrow T_{\varphi(P)} V$ — дифференциал отображения φ в точке $P \in U$, а $(d\varphi|_P)^*: T_{\varphi(P)}^* V \rightarrow T_P^* U$ — сопряженное отображение кокасательных пространств.

26.21. Показать, что операция $T \mapsto \varphi^*T$ сохраняет алгебраические операции с тензорными полями: сумму, умножение на функцию, тензорное произведение, свертку.

26.22. Пусть \mathbf{X} и \mathbf{Y} — векторные поля в области V , а $\varphi: U \rightarrow V$ — диффеоморфизм. Доказать, что $[\varphi^*\mathbf{X}, \varphi^*\mathbf{Y}] = \varphi^*[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$.

26.23. Доказать, что производная Ли — линейная операция.

26.24. Доказать, что если T и S — тензорные поля, а \mathbf{X} — векторное поле, то

$$L_{\mathbf{X}}(T \otimes S) = L_{\mathbf{X}}T \otimes S + T \otimes L_{\mathbf{X}}S.$$

26.25. Доказать, что производная Ли перестановочна со сверткой.

26.26. Доказать, что если \mathbf{X} — векторное поле, а f — гладкая функция, то $L_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}f$.

26.27. а) Пусть (x^1, \dots, x^n) — локальные координаты в области U , а \mathbf{X} — векторное поле с компонентами (X^1, \dots, X^n) в координатах (x) . Доказать, что

$$(L_{\mathbf{X}} dx)^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} dx^k.$$

б) Доказать, что для ковектора $\xi = \xi_i dx^i$ имеет место формула

$$L_{\mathbf{X}} \xi = \left(X^k \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} + \xi_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i.$$

26.28. Доказать, что если \mathbf{X} и \mathbf{Y} — векторные поля, то $L_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = [X, Y]$.

26.29. Получить формулу для производной Ли тензорного поля типа (p, q) .

26.30. Доказать, что для дифференциальной формы ω и векторного поля \mathbf{X} имеет место равенство $dL_{\mathbf{X}} \omega = L_{\mathbf{X}} d\omega$.

26.31. Доказать, что

$$L_{\mathbf{X}} \omega = i_{\mathbf{X}} d\omega + di_{\mathbf{X}} \omega,$$

где ω — дифференциальная форма, а \mathbf{X} — векторное поле.

26.32. Для векторных полей \mathbf{X} и \mathbf{Y} доказать формулу:

$$a) [L_{\mathbf{X}}, i_{\mathbf{Y}}] = i_{[X, Y]}; \quad b) [L_{\mathbf{X}}, L_{\mathbf{Y}}] = L_{[X, Y]}.$$

§ 27. Геодезические на многообразиях

27.1. Доказать, что геодезическое кручение линии $u = u(s)$, $v = v(s)$, расположенной на поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, вычисляется по формуле

$$\varkappa_g = (\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{m}, \mathbf{m}),$$

где \mathbf{m} — единичный вектор нормали поверхности.

27.2. Доказать следующее утверждение: для того чтобы линия на поверхности была линией кривизны, необходимо и достаточно, чтобы в каждой ее точке геодезическое кручение равнялось нулю.

27.3. Найти геодезические линии развертывающейся поверхности.

27.4. Доказать, что кручение геодезической линии, касающейся линии кривизны поверхности, равно нулю.

27.5. Доказать, что каждая плоская геодезическая линия, отличная от прямой, есть линия кривизны поверхности.

27.6. Доказать, что уравнения геодезических на многообразии M с метрикой (g_{ij}) можно записать в кокасательном расслоении T^*M в гамильтоновой форме:

$$\frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},$$

где $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ — стандартные координаты на косательном расслоении, $H(p, x) = \frac{1}{2}g^{ij}(x)p_i p_j$. Кроме того, $p_i = g_{ij}\dot{x}^j$, где \dot{x}^j — вектор скорости геодезической.

27.7. Рассмотрим поверхность с римановой метрикой. На ней имеются два типа кривых: окружности Дарбу и окружности Гаусса. *Окружностью Дарбу* называется линия на поверхности, имеющая постоянную геодезическую кривизну. *Окружностью Гаусса* (геодезической окружностью) называется множество точек, отстоящих от одной фиксированной точки на одно и то же расстояние, измеренное вдоль геодезических радиусов. Доказать, что множество окружностей Дарбу совпадает с множеством окружностей Гаусса тогда и только тогда, когда поверхность является поверхностью постоянной кривизны.

27.8. Доказать, что двумерная поверхность, на которой длина любой окружности Гаусса равна $2\pi R$, где R — радиус, отложенный вдоль геодезических, локально изометрична плоскости.

27.9. а) Доказать, что на компактном односвязном многообразии M^n всегда существует пара сопряженных точек.

б) Что будет, если M^n неодносвязно?

в) Рассмотрим на многообразии пучок геодезических, исходящих из одной точки. На каждой ли из них найдется сопряженная точка?

27.10. Описать все поверхности вращения, на которых все геодезические замкнуты.

27.11. а) Доказать, что на линейчатой поверхности любой отрезок образующей является кратчайшей между его конечными точками.

б) Доказать более общий факт: на полной односвязной поверхности отрицательной кривизны дуга любой геодезической является кратчайшей между своими концевыми точками.

27.12. Дать пример двух неизометрических римановых многообразий с общими геодезическими. Многообразия считаются имеющими общие геодезические, если существует диффеоморфизм одного многообразия на другое, переводящий геодезические в геодезические.

27.13. Доказать, что все компактные замкнутые поверхности геодезически полные.

Следующие задачи посвящены матричным группам Ли. В дальнейшем, в одном из следующих параграфов, группы Ли будут рассматриваться в полной общине, т. е. как гладкие многообразия, снабженные структурой группы в гладкой категории.

В этом параграфе в целях упрощения изложения мы ограничимся рассмотрением лишь тех групп Ли, которые реализуются в виде тех или иных групп матриц. Такие группы Ли называются *матричными*. Рассмотрим полную линейную группу $GL(n, \mathbb{R})$ — группу невырожденных

матриц размера $n \times n$ с вещественными элементами. Она является открытой областью в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n^2} всех вещественных матриц размера $n \times n$. Рассмотрим на \mathbb{R}^{n^2} обычную евклидову метрику, заданную в следующем виде:

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{tr} X \cdot Y^\top,$$

где Y^\top — транспонированная матрица. Эта метрика индуцирует на группе $GL(n, \mathbb{R})$ и на всех ее подгруппах риманову метрику. Такая метрика на матричной группе G называется *метрикой Киллинга*. Можно также рассматривать случай $GL(n, \mathbb{C})$, где риманова метрика задается формулой

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{tr} X \cdot \bar{Y}^\top.$$

Однопараметрическими (одномерными) подгруппами матричной группы G являются в точности подгруппы вида $\{e^{tX} : t \in \mathbb{R}\}$, где X — произвольная матрица из касательного пространства к группе G в ее единице E .

Напомним, что касательное пространство L к матричной группе G в единице, снабженное билинейной кососимметрической операцией $[X, Y] = XY - YX$, является алгеброй Ли, в частности, выполняется тождество Яаки

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

Здесь XY — обычное произведение матриц. Операция $[X, Y]$ называется *коммутатором*. На алгебре Ли L матричной группы G определены линейные операторы Ad_g и ad_X , задаваемые формулами

$$\operatorname{Ad}_g(X) = gXg^{-1}, \quad \operatorname{ad}_X(Y) = [X, Y],$$

где $g \in G$, $X, Y \in L$.

Векторное поле V на группе G называется левоинвариантным (правоинвариантным), если оно переходит в себя при всех левых (правых) сдвигах группы. Такое поле однозначно определяется своим значением в единице группы, т. е. некоторым вектором X из алгебры Ли L . Такое поле обозначается L_X (соответственно R_X).

27.14. а) Доказать, что оператор ad_X является дифференцированием алгебры Ли L , т. е.

$$\operatorname{ad}_X([Y, Z]) = [\operatorname{ad}_X(Y), Z] + [Y, \operatorname{ad}_X(Z)].$$

Показать, что эта формула эквивалентна тождеству Яаки.

б) Доказать, что определенная выше риманова метрика на произвольной подгруппе G группы $GL(n, \mathbb{R})$ является биинвариантной, т. е. правые и левые сдвиги на G являются ее изометриями.

в) Доказать аналогичное предыдущему пункту утверждение для подгрупп группы $GL(n, \mathbb{C})$.

г) Доказать, что для любого $X \in L$ оператор ad_X кососимметричен относительно метрики Киллинга:

$$\langle \operatorname{ad}_X(Y), Z \rangle = -\langle Y, \operatorname{ad}_X(Z) \rangle.$$

д) Доказать, что для любого $g \in G$ оператор Ad_g сохраняет метрику Киллинга, т. е. $\langle \text{Ad}_g(X), \text{Ad}_g(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$.

27.15. Пусть G — матричная группа, L — ее алгебра Ли. Введем связность ∇ на группе G , полагая для левоинвариантных полей L_X, L_Y

$$\nabla_{L_X} L_Y = \frac{1}{2} L_{[X, Y]} = \frac{1}{2} [L_X, L_Y].$$

Отметим, что эта формула, как следует из пункта а) этой задачи, однозначно определяет связность не только на левоинвариантных, но и на произвольных векторных полях на группе G .

а) Показать, что приведенная выше формула однозначно определяет символы Кристоффеля Γ_{jk}^i .

б) Доказать, что эта связность на группе G симметрична и согласована с метрикой Киллинга.

в) Доказать, что геодезическими матричной группы G с описанной выше римановой метрикой, проходящими через единицу, являются все ее однопараметрические подгруппы и только они. Доказать, что все остальные геодезические на G получаются правыми (левыми) сдвигами однопараметрических подгрупп.

г) Доказать, что тензор кривизны R описанной в этой задаче связности на матричной группе G задается на левоинвариантных векторных полях L_X, L_Y и L_Z формулами

$$R(L_X, L_Y)L_Z = -\frac{1}{4}L_{[[X, Y], Z]},$$

$$\langle R(L_X, L_Y)L_Z, L_W \rangle = -\frac{1}{4}\langle [X, Y], [Z, W] \rangle.$$

Отметим, что этих формул достаточно для задания тензора кривизны R на произвольных векторных полях на группе G .

д) Показать, что из указанных соотношений однозначно восстанавливаются компоненты тензора кривизны R_{jkl}^i .

27.16. Доказать, что экспоненциальное отображение $\exp : L \rightarrow \rightarrow G$ является диффеоморфизмом некоторой окрестности нулевой матрицы в алгебре Ли L на некоторую окрестность единичной матрицы в группе G .

27.17. а) Вывести для группы $SL(2, \mathbb{R})$ явную формулу для экспоненциального отображения.

б) Показать, что для группы $SL(2, \mathbb{R})$ экспоненциальное отображение не является отображением «на».

в) Исследовать случай группы $SL(2, \mathbb{C})$.

г) Доказать, что экспоненциальное отображение для связной компактной группы G всегда является отображением «на».

§ 28. Тензор кривизны

28.1. Вычислить скалярную кривизну группы $SO(n)$ с двусторонней инвариантной метрикой.

28.2. Пусть в n -мерном римановом пространстве выбраны линейно независимые векторные поля $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$. Пусть $g_{ij} = \langle \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \rangle$ и $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = c_{ij}^k \mathbf{X}_k$. Выразить Γ_{ij}^k через g_{ij} и c_{ij}^k , если $\nabla_{\mathbf{X}_j} \mathbf{X}_i = \Gamma_{ij}^k \mathbf{X}_k$.

28.3. Доказать, что тензор кривизны n -мерного многообразия имеет $\frac{n^2(n^2 - 1)}{12}$ алгебраически независимых компонент. Иными словами, у тензора кривизны общего вида нет других симметрий, кроме «известных».

28.4. При каком условии симметрическая связность ∇ является римановой, т. е. существует риманова метрика g_{ij} такая, что $\nabla_k g_{ij} \equiv 0$?

28.5. а) Доказать, что на N -мерном многообразии набор величин

$$\begin{aligned} C_{lmnk} &= R_{lmnk} - \frac{1}{N-2}(g_{ln}R_{mk} - g_{lk}R_{mn} - g_{mn}R_{lk} + g_{mk}R_{ln}) + \\ &\quad + \frac{R}{(N-1)(N-2)}(g_{ln}g_{mk} - g_{lk}g_{mn}) \end{aligned}$$

является тензором. Тензор C_{mlk}^n называется *тензором Вейля*.

б) Доказать, что он имеет те же алгебраические свойства, что и тензор кривизны, и, кроме того, удовлетворяет $\frac{N(N+1)}{2}$ условиям $C_{mlk}^l = 0$.

в) Доказать, что две римановы метрики с одинаковыми тензорами Вейля конформно эквивалентны.

28.6. а) Показать, что на n -мерном многообразии ($n \geq 3$) из метрического тензора g_{ij} и его тензора кривизны R_{ijkl} можно построить $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}$ алгебраически независимых скалярных.

б) Показать, что для $n = 3$ такими величинами являются скалярная кривизна R , свертка $R_{ij}R^{ij}$ и $\frac{\det R_{ij}}{\det g_{ij}}$, где R_{ij} — тензор Риччи.

28.7. Доказать, что если тензор кривизны риманова многообразия тождественно равен 0, то результат параллельного перенесения вдоль кривой γ не зависит от гомотопии пути γ при условии, что концы пути неподвижны.

28.8. а) Если у риманова односвязного многообразия $R^i_{jkl} = 0$, то $TM^n = M^n \times \mathbb{R}^n$, где TM — касательное расслоение многообразия M . Иными словами, в этом случае касательное расслоение тривиально, а само многообразие параллелизуемо.

б) Выяснить, что происходит в неодносвязном случае.

28.9. Доказать, что любое направление в $T_x M$ в произвольной точке риманова многообразия M является главным направлением тензора Риччи в том и только в том случае, когда M является пространством Эйнштейна.

28.10. Показать, что следующие метрики имеют постоянную кривизну. Найти эту кривизну:

а) $ds^2 = du^2 + dv^2$;

б) $ds^2 = du^2 + \cos^2 \frac{u}{a} dv^2$;

в) $ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2$, $a = \text{const} \neq 0$.

28.11. Доказать, что аффинная связность общего вида удовлетворяет тождеству Бьянки $\nabla_{[l} R^i_{km]j} = S^p_{[lk} R^i_{m]pj}$.

28.12. Пусть $\omega_j^i = \Gamma_{kj}^i du^k$ — формы связности,

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R^i_{kmj} du^k \wedge du^m$$

— формы кривизны связности. Доказать, что выполняются структурные уравнения Картана

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

28.13. Показать, что формулу Бьянки можно записать в виде

$$d\Omega_j^i = \Omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_k^i \wedge \Omega_j^k.$$

28.14. Пусть фиксирована произвольная аффинная связность без кручения. Пусть в окрестности U некоторой точки O выбраны координаты (x^1, \dots, x^n) , причем координаты точки O равны (x_0^1, \dots, x_0^n) . Введем новые координаты $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$ в U , полагая

$$x^{k'} = (x^k - x_0^k) + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j).$$

Доказать, что в новой системе координат точка O имеет нулевые координаты и что символы Кристоффеля обращаются в точке O в нуль. Такая система координат называется геодезической.

28.15. Проверить, что в геодезической системе координат в точке O значения компонент тензора кривизны и его ковариант-

ных производных задаются формулами

$$R_{ij\cdot k}^h(O) = \frac{\partial \Gamma_{ki}^h(O)}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^h(O)}{\partial x^k},$$

$$\nabla_l R_{ij\cdot k}^h = \frac{\partial^2 \Gamma_{ki}^h(O)}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ji}^h(O)}{\partial x^k \partial x^l}.$$

28.16. а) Учитывая предыдущую задачу, проверить справедливость формулы Бьянки

$$\nabla_m R_{ikl}^n + \nabla_l R_{imk}^n + \nabla_k R_{ilm}^n = 0.$$

б) Доказать для тензора Риччи R_m^l и скалярной кривизны R равенство

$$\nabla_l R_m^l = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x_m}.$$

28.17. Пусть H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе некоторой криволинейной системы координат в \mathbb{R}^3 . Доказать соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial s} q^1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 \right) + \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} q^2 \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^3 \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 \right) + \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial s} q^3 \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \right) + \frac{\partial}{\partial s} q^1 \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 \right) + \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 = 0;$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial q^2 \partial q^3} = \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3;$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial q^3 \partial q^1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^3 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1;$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial q^1 \partial q^2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_3}{\partial s} q^2 + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial s} q^1 \frac{\partial H_1}{\partial s} q^2.$$

28.18. Доказать, что гладкие функции

$$H_1(q^1, q^2, q^3), \quad H_2(q^1, q^2, q^3), \quad H_3(q^1, q^2, q^3),$$

удовлетворяющие соотношениям предыдущей задачи, являются коэффициентами Ламе для некоторого преобразования

$$x_s = x_s(q^1, q^2, q^3), \quad s = 1, 2, 3.$$

28.19. Доказать, что фундаментальная группа полного риманова многообразия неположительной кривизны не содержит эле-

ментов конечного порядка. Доказать, что $\pi_1(M)$, где M — полное риманово многообразие строго отрицательной кривизны, обладает следующим свойством: если два элемента коммутируют (т. е. $ab = ba$, где $a, b \in \pi_1(M)$), то a и b принадлежат одной циклической подгруппе.

28.20. Доказать, что замкнутое ориентируемое риманово многообразие M^n строго положительной кривизны и четной размерности односвязно.

28.21. а) Доказать, что любое компактное замкнутое риманово многообразие постоянной положительной кривизны γ изометрично либо сфере S^n , либо $\mathbb{R}P^n$ (радиуса $1/\sqrt{\gamma}$).

б) Пусть M^n — компактное замкнутое односвязное полное риманово многообразие и пусть $C(l)$ — множество первых сопряженных точек для некоторой точки $l \in M^n$. Доказать, что если M^n — симметрическое пространство, то дополнение $M^n \setminus C(l)$ гомеоморфно открытому диску.

28.22. Доказать, что полное некомпактное риманово многообразия положительной кривизны и размерности m , где либо $m = 2$, либо $m \geq 5$, диффеоморфно \mathbb{R}^m .

28.23. Пусть x, y — две близкие точки на стандартной сфере S^2 и пусть функция $f(z)$ — площадь геодезического треугольника с вершинами в точках x, y, z .

а) Является ли функция $f(z)$ гармонической функцией на сфере S^2 ?

б) Исследовать случай n -мерной сферы (здесь $f(z)$ — объем геодезического симплекса, одна грань которого фиксирована, а z — свободная вершина).

в) Исследовать тот же самый вопрос на плоскости Лобачевского.

28.24. Доказать, что если M^n — полное односвязное риманово многообразие, такое, что n — нечетно и на M^n существует точка p , такая, что множество первых сопряженных с p точек регулярно и имеет постоянный порядок k , то $k = n - 1$ и M^n гомеоморфно сфере S^n (под порядком точки понимается ее кратность).

§ 29. Векторные поля

29.1. Найти производную функции $f = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $P = (1, 2)$ по направлению кривой $y^2 = 4x$.

29.2. Найти производную функции $f = \operatorname{arctg}(y/x)$ в точке $P = (2, -2)$ по направлению кривой $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

29.3. Найти производную функции f в точке P по направлению кривой γ :

а) $f = x^2 + y^2$, $P = (1, 2)$, $\gamma: x^2 + y^2 = 5$;

б) $f = 2xy + y^2$, $P = (\sqrt{2}, 1)$, $\gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$;

в) $f = x^2 - y^2$, $P = (5, 4)$, $\gamma: x^2 - y^2 = 9$;

г) $f = \ln(xy + yz + xz)$, $P = (0, 1, 1)$, $\gamma: x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 1$;

д) $f = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $P = \left(0, R, \frac{\pi a}{2}\right)$, $\gamma: x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $z = at$.

29.4. Найти производную функции $f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в произвольной точке $P = (x, y, z)$ по направлению радиус-вектора этой точки.

29.5. Найти производную функции $f = f(x, y, z)$ по направлению градиента функции g .

29.6. Пусть $\mathbf{v}(x, y, z)$ — поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси. Показать, что:

а) $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$;

б) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = 2\mathbf{w}$, где \mathbf{w} — вектор угловой скорости.

29.7. Пусть $\mathbf{X} = (x, y, z)$, \mathbf{Y} — постоянное векторное поле. Показать, что $\operatorname{rot}(\mathbf{Y} \times \mathbf{X}) = 2\mathbf{Y}$.

29.8. Показать, что $\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = 0$.

29.9. Доказать формулу

$$\Delta(FG) = F\Delta G + G\Delta F + 2\langle \operatorname{grad} F, \operatorname{grad} G \rangle.$$

29.10. Решить уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{X} = \mathbf{Y}$:

а) $\mathbf{Y} = (1, 1, 1)$; б) $\mathbf{Y} = (2y, 2z, 0)$;

в) $\mathbf{Y} = (0, 0, e^x - e^y)$; г) $\mathbf{Y} = (6y^2, 6z, 6x)$;

д) $\mathbf{Y} = (3y^2, -3x^2, -(y^2 + 2x))$;

е) $\mathbf{Y} = (0, 2 \cos xz, 0)$;

ж) $\mathbf{Y} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$;

з) $\mathbf{Y} = (ye^{x^2}, 2yz, -(2xyze^{x^2} + z^2))$.

29.11. Доказать, что каждому гладкому векторному полю на компактном многообразии соответствует однопараметрическая группа диффеоморфизмов φ_t , траектории которой касаются данного векторного поля.

29.12. Пусть V — линейное конечномерное пространство векторных полей, замкнутое относительно коммутатора, т. е. $[\xi, \eta] \in V$ при $\xi, \eta \in V$. Показать, что V является алгеброй Ли.

29.13. В предыдущей задаче показать, что соответствующая алгебре V односвязная группа Ли G действует на компактном многообразии, причем каждое поле $\xi \in V$ задает одномерную подгруппу в группе G , орбиты действия которой касаются векторного поля ξ .

29.14. Пусть P, Q — две произвольные точки в диске $D^n \subset \mathbb{R}^n$. Найти такой диффеоморфизм φ пространства \mathbb{R}^n , чтобы $\varphi(P) = Q$, $\varphi(x) = x$, если $x \notin D^n$.

29.15. а) Построить на стандартной сфере S^3 три линейно независимых в каждой точке гладких векторных поля.

б) Найти в явном виде интегральные траектории полей, получающихся умножением радиус-вектора точки сферы на мнимые кватернионы i, j, k . Здесь сфера S^3 реализована как множество кватернионов единичной длины.

29.16. Доказать, что на многообразии каждой однопараметрической группе гладких гомеоморфизмов соответствует гладкое векторное поле скоростей траекторий точек.

29.17. Привести пример векторного поля на некомпактном многообразии, траектории которого не порождаются действием какой-либо однопараметрической группы преобразований.

29.18. а) Доказать, что для любых двух точек x_1 и x_2 открытого шара $\overset{\circ}{D^n}$ существует диффеоморфизм φ шара на себя, который меняет точки x_1 и x_2 , т. е. $\varphi(x_1) = x_2$ и $\varphi(x_2) = x_1$.

б) Доказать, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in \overset{\circ}{D^n}$ существует однопараметрическая группа диффеоморфизмов φ_t такая, что φ_0 — тождественное отображение и $\varphi_1(x_1) = x_2$.

в) Пусть X — гладкое связное многообразие, x_0, x_1 — две произвольные точки. Найти такую однопараметрическую группу диффеоморфизмов φ_t , чтобы φ_0 было тождественным отображением и $\varphi_1(x_0) = x_1$. Показать, что без ограничения общности можно считать, что все преобразования φ_t тождественны вне некоторого компакта.

29.19. Пусть конечная группа G гладко действует на гладком многообразии X . Доказать, что если действие группы G свободно (т. е. каждая точка $x \in X$ остается на месте только при действии единицы группы G), то фактор-пространство X/G является многообразием.

29.20. Пусть $f(z)$ — комплексно-аналитическая функция одной переменной. Доказать, что особые точки (нули) векторных полей $\text{grad } \operatorname{Re} f(z)$, $\text{grad } \operatorname{Im} f(z)$ совпадают с нулями производной $f'(z)$.

29.21. Найти интегральные траектории потока $\mathbf{v}_1(x)$, ортогонального потоку $\mathbf{v}_2(x)$, где $\mathbf{v}_2(x) = \text{grad } f(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, $f(x)$ — значение угла AxB . Здесь A, B — фиксированные точки плоскости \mathbb{R}^2 , x — переменная точка.

29.22. Доказать, что безвихревой поток $\mathbf{v} = (P, Q)$, где P, Q — компоненты потока на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, потенциален, т. е. $\mathbf{v} = -\text{grad } f(x, y)$ для некоторой гладкой функции f . Что можно сказать о потенциале f , если поток еще и несжимаем, т. е. $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$?

29.23. Пусть векторное поле ξ удовлетворяет условию $\operatorname{div}(\xi) = 0$. Показать, что оператор сдвига вдоль интегральных траекторий унитарен.

29.24. Найти все гомотопические классы векторных полей без особенностей на торе T^2 . Гомотопия должна проходить в классе векторных полей без особых точек.

29.25. Доказать, что если векторное поле X на 2-мерном торе гомотопно в классе векторных полей без особых точек полю $\frac{\partial}{\partial \varphi_1}$, то оно имеет периодическую траекторию.

29.26. Найти наибольшее число линейно независимых касательных векторных полей на гладкой замкнутой поверхности M^2 .

29.27. Пусть m, n — числа вращений векторного поля на торе T^2 , $\lambda = (m, n)$. Доказать, что у этого поля существует λ периодических решений (замкнутых траекторий).

29.28. Теорема Пуанкаре–Бендиксона. Пусть в некоторой области на плоскости задано векторное поле. Зафиксируем в этой области некоторое компактное множество K , не содержащее особых точек векторного поля. Если в K существует точка такая, что интегральная траектория векторного поля, выходящая из этой точки, не покидает K , то в K обязательно существует периодическая траектория векторного поля.

29.29. Пусть точка P на плоскости является предельной для некоторой траектории векторного поля, т.е. она принадлежит замыканию этой траектории. Доказать, что траектория, проходящая через P , является предельной для исходной траектории.

29.30. Доказать, что множество векторных полей, обладающих только изолированными особенностями, линейно связано.

29.31. Доказать, что сумма индексов особенностей векторного поля на замкнутом многообразии не меняется при гладких деформациях.

29.32. Доказать, что множество всех интегральных траекторий векторного поля $v(x) = (x^1, -x^0, x^3, -x^2)$, где

$$x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in S^3 : (|x| = 1) \subset \mathbb{R}^4,$$

гомеоморфно сфере S^2 . Найти связь с расслоением Хопфа $S^3 \rightarrow S^2$. Как связано это векторное поле с кватернионами?

29.33. Положим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Показать, что функция f голоморфна тогда и только тогда, когда $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}(f) \equiv 0$ для всех k (см. также задачу 25.66).

29.34. а) Доказать, что произвольное двумерное ориентированное многообразие после выбрасывания одной точки становится параллелизуемым.

б) Верно ли это утверждение для неориентируемых поверхностей?

в) Можно ли сделать неориентируемую поверхность (с краем или без) параллелизуемой, выбрасывая из нее точки и вложенные окружности?

29.35. а) Построить на замкнутой двумерной поверхности гладкую функцию ровно с тремя критическими точками.

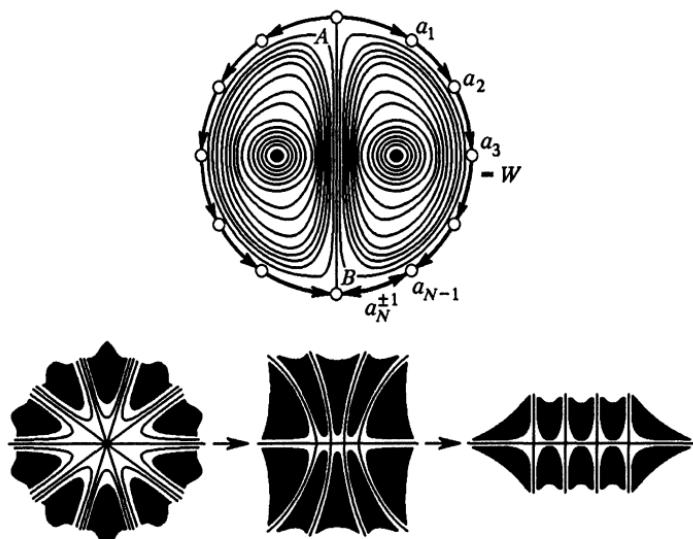


Рис. 102

б) Для какой поверхности такая функция может являться функцией Морса (это означает, что все ее критические точки невырождены) (см. рис. 102)?

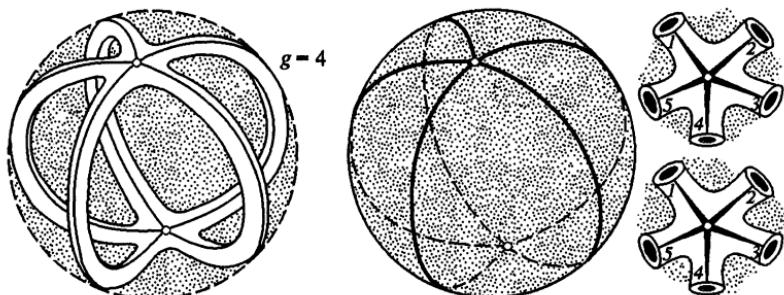


Рис. 103

29.36. а) Построить на замкнутой двумерной поверхности гладкую функцию ровно с четырьмя критическими точками.

б) Для какой поверхности такая функция может являться функцией Морса (это означает, что все ее критические точки невырождены) (см. рис. 103)?

§ 30. Группы преобразований

30.1 Пусть конечная группа G гладко действует на многообразии X и $x_0 \in X$ — неподвижная точка для действия любого элемента группы G . Доказать, что в окрестности точки x_0 находится локальная система координат, в которой действие группы G линейно.

30.2. Обобщить предыдущую задачу на случай произвольной компактной группы Ли.

30.3. Доказать, что множество всех неподвижных точек действия конечной группы G на гладком многообразии является объединением гладких подмногообразий (вообще говоря, различных размерностей).

30.4. Пусть G — группа Ли. Показать, что действие группы G на себе с помощью левых (правых) сдвигов является гладким.

30.5. Пусть группа Ли G действует на себе с помощью внутренних автоморфизмов. Доказать, что множество неподвижных точек совпадает с центром группы G .

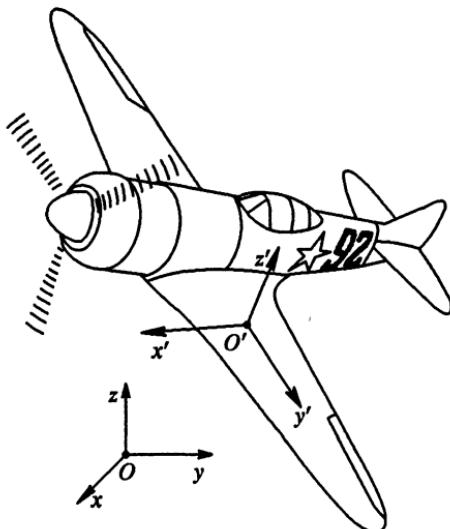


Рис. 104

30.6. Доказать, что группа изометрий евклидового пространства порождается ортогональными преобразованиями и параллельными переносами (см. рис. 104). На этом рисунке репер $Oxyz$ —

фиксированный, а репер $O'x'y'z'$, жестко связанный с самолетом, получается из репера $Oxyz$ с помощью изометрии евклидова пространства.

30.7. Доказать, что группа изометрий стандартной n -мерной сферы изоморфна группе ортогональных преобразований $(n+1)$ -мерного евклидового пространства.

30.8. Доказать, что группы Ли $Sp(1)$ и $SU(2)$ изоморфны. Доказать, что они диффеоморфны сфере S^3 . Установить связь с кватернионами.

30.9. а) В пространстве кватернионов \mathbb{H} зададим линейное преобразование L_A формулой $L_A: x \mapsto Ax$, где $x, A \in \mathbb{H}$ и модуль A равен 1. Доказать, что множество всех линейных преобразований вида L_A образует группу, изоморфную $SU(2)$.

б) В пространстве кватернионов \mathbb{H} рассмотрим линейные преобразования, заданные формулой $L_{A,B}: x \mapsto AxB$, где $x, A, B \in \mathbb{H}$ и модули A и B равны 1. Доказать, что множество всех таких преобразований образует группу, изоморфную $SO(4)$.

в) Доказать, что $SO(4)$ изоморфна фактор-группе $S^3 \times S^3 / \mathbb{Z}_2$, где S^3 снабжена структурой группы $SU(2) \cong Sp(1)$.

г) Найти фундаментальную группу $SO(n)$ для любого n . Рассмотреть вначале случаи $n = 3$ и $n = 4$.

30.10. Обозначим через $A_z(\varphi)$, $A_y(\varphi)$, $A_x(\varphi)$ соответственно следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Ясно, что это матрицы поворотов относительно соответствующих осей координат. Любую матрицу $A \in SO(3)$ можно представить в виде

$$A = A_i(\varphi)A_j(\theta)A_i(\psi)$$

трех вращений относительно двух осей координат. Здесь индексы i и j принимают значения в множестве $\{x, y, z\}$, причем $i \neq j$. Рисунок 105 соответствует представлению матрицы A в виде произведения $A_z(\varphi)A_x(\theta)A_z(\psi)$.

Углы φ, θ, ψ называются углами Эйлера.

а) Сколько различных вариантов имеется для выбора углов Эйлера?

б) Доказать, что углы Эйлера являются локальными регулярными координатами почти на всей группе $SO(3)$. Найти мно-

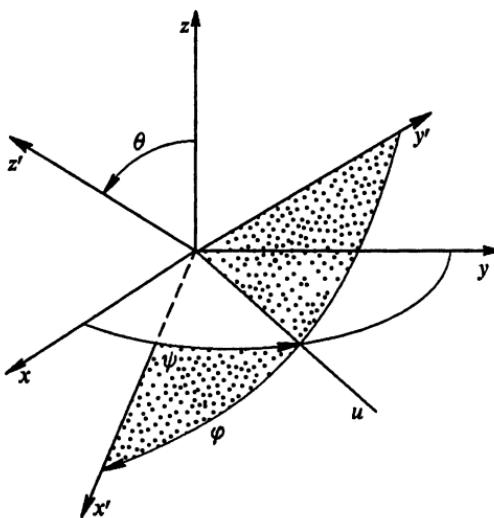


Рис. 105. Углы Эйлера, ось u является пересечением плоскостей Oxy и $Ox'y'$

жество матриц из $SO(3)$, для которых углы Эйлера не являются регулярными координатами.

в) Найти выражение для метрики Киллинга на $SO(3)$ в углах Эйлера.

г) Найти объем группы $SO(3)$.

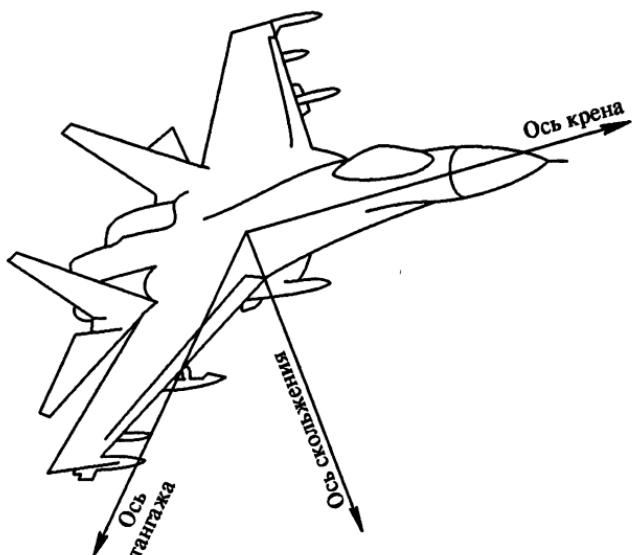


Рис. 106. Навигационные углы — углы поворотов относительно указанных осей

30.11. Не только углы Эйлера могут служить координатами на группе $SO(3)$. В самом деле, произвольная матрица $A \in SO(3)$ представляется в виде

$$A = A_i(\varphi)A_j(\theta)A_k(\psi),$$

где индексы i, j, k принимают различные значения в множестве $\{x, y, z\}$. В этом случае углы φ, θ и ψ называются *навигационными углами* (см. рис. 106).

а) Сколько различных вариантов имеется для выбора навигационных углов?

б) Доказать, что навигационные углы являются локальными регулярными координатами почти на всей группе $SO(3)$. Найти множество матриц из $SO(3)$, для которых навигационные углы не являются регулярными координатами.

в) Найти выражение для метрики Киллинга на $SO(3)$ в навигационных углах.

30.12. Доказать, что $O = \frac{1+A}{1-A}$ является ортогональным преобразованием \mathbb{R}^3 . Найти его ось вращения, угол поворота и углы Эйлера, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

30.13. Найти ось вращения и угол поворота, если все углы Эйлера ортогонального преобразования равны:

а) $\pi/3$, б) $\pi/4$.

30.14. а) Доказать, что группы Ли $SO(n)$, $SU(n)$, $U(n)$, $Sp(n)$ связны.

б) Доказать, что в группе $O(n)$ две связные компоненты.

в) Найти число связных компонент группы движений псевдоевклидова пространства \mathbb{R}_1^n .

г) Доказать, что группа $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm E\}$ связна.

30.15. Реализуем группу $U(n)$ и ее алгебру Ли $u(n)$ подмногообразиями в евклидовом пространстве всех квадратных комплексных матриц размера $n \times n$ (естественное вложение унитарных и косоэрмитовых матриц в это пространство).

а) Доказать, что $U(n) \subset S^{2n^2-1}$, где сфера S^{2n^2-1} вложена стандартно в $\mathbb{R}^{2n^2} = \mathbb{C}^{n^2}$ и имеет радиус \sqrt{n} .

б) Доказать, что риманова метрика, индуцированная на группе $SU(n)$, рассматриваемой как подмногообразие в S^{2n^2-1} , совпадает с двусторонне инвариантной метрикой Киллинга на группе $SU(n)$.

в) Найти пересечение $U(n) \cap U(n)$ как подмногообразие в пространстве \mathbb{C}^{n^2} .

30.16. Сформулировать и решить аналогичные задачи для групп $O(n)$ и $Sp(n)$.

30.17. Доказать, что группа всех изометрий риманового многообразия является гладким многообразием, т. е. является группой Ли. Оценить сверху ее размерность через размерность риманова многообразия.

30.18. Перечислить все конечномерные группы Ли преобразований прямой \mathbb{R}^1 .

30.19. Найти группу всех дробно-линейных преобразований, сохраняющих диск $|z| \leq 1$ в комплексной плоскости. Доказать, что эта группа изоморфна группе $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$, а также группе всех преобразований, сохраняющих форму $dx^2 + dy^2 - dt^2$ в $\mathbb{R}^3(x, y, t)$. Установить связь с геометрией Лобачевского.

30.20. Доказать, что связная компонента единицы группы изометрий плоскости Лобачевского (в стандартной метрике постоянной кривизны) изоморфна $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$. Найти полное число компонент в группе движений плоскости Лобачевского.

30.21. Доказать, что фазовое пространство системы, состоящей из одной материальной точки, скользящей по двумерной сфере с постоянной по модулю скоростью, диффеоморфно \mathbb{RP}^3 .

30.22. Материальный шар зажат между двумя параллельными плоскостями, касательными к нему. При движении плоскостей, сохраняющем параллельность плоскостей и расстояние между ними, шар вращается без скольжения в точках контакта. Рассмотрим все такие перемещения шара, индуцированные движением верхней плоскости, при которых нижняя точка контакта шара описывает замкнутую траекторию на нижней плоскости, т. е. точка контакта возвращается на прежнее место. Какая часть группы $SO(3)$ может быть получена такими вращениями шара (фиксируются повороты шара после возвращения в исходную точку)?

30.23. Найти фактор-группу G/G_0 , где G — группа движений плоскости Лобачевского со стандартной метрикой, G_0 — связная компонента единицы. Указать все конформные преобразования этой стандартной метрики.

30.24. Найти все дискретные подгруппы в группе G аффинных преобразований прямой \mathbb{R}^1 .

30.25. Доказать, что левоинвариантные векторные поля на группе Ли G находятся во взаимно-однозначном соответствии с векторами касательного пространства $T_e(G)$ в единице группы G .

30.26. Доказать, что коммутатор двух левоинвариантных векторных полей на группе Ли G снова является левоинвариантным векторным полем, т. е. операция коммутирования превращает пространство $T_e(G)$ в алгебру Ли.

30.27. Пусть ξ — левоинвариантное векторное поле, φ_t — соответствующая ему однопараметрическая группа преобразований. Доказать, что φ_t является правым сдвигом при любом t , т. е. $\varphi_t(g) = gh_t$, где h_t — некоторый элемент группы G .

Пусть G — группа Ли, x^1, \dots, x^n — локальная система координат в окрестности единицы (координаты которой будем считать нулевыми). Тогда операция умножения индуцирует векторнозначную функцию $q = q(x, y) = x y x^{-1} y^{-1}$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$. Разложение функции $q = q(x, y)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$q^i = \sum_{j,k} c_{jk}^i x^j y^k + \varepsilon_3^i,$$

где ε_3^i — величина третьего порядка малости относительно координат x^i, y^i . Билинейное выражение

$$\zeta^i = \sum_{j,k} c_{jk}^i \xi^j \eta^k$$

определяет некоторую операцию над касательными векторами в единице группы G . Эта операция обозначается $\zeta = [\xi, \eta]$, а ζ называется *коммутатором векторов* ξ и η . Таким образом, касательное пространство $T_e(G)$ превращается в алгебру, которая называется *алгеброй Ли группы Ли* G .

30.28. Показать, что в алгебре Ли L выполнены следующие свойства:

- а) $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$;
- б) тождество Якоби

$$[[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta] = 0.$$

30.29. Проверить, что операция в алгебре Ли L переходит в коммутатор векторных полей на группе Ли G , если вектору ξ сопоставляется (право-) левоинвариантное векторное поле.

30.30. Пусть $x(t), y(t)$ — две кривые, проходящие через единицу группы G , причем $\xi = \frac{dx}{dt}(0)$, $\eta = \frac{dy}{dt}(0)$. Показать, что

$$[\xi, \eta] = \frac{d}{dt} \left(x(\sqrt{t}) y(\sqrt{t}) x^{-1}(\sqrt{t}) y^{-1}(\sqrt{t}) \right) \Big|_{t=0}.$$

30.31. Пусть $\gamma(t)$ — однопараметрическая подгруппа группы Ли. Предположим, что γ пересекает сама себя. Показать, что существует такое число $L > 0$, что $\gamma(t+L) = \gamma(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Отсюда, в частности, следует, что любая однопараметрическая подгруппа группы Ли, рассматриваемая как одномерная группа Ли, гомеоморфна либо прямой, либо окружности.

Примечание. Некомпактная однопараметрическая подгруппа может быть вложена в группу Ли довольно сложно, например, в виде так называемой иррациональной или плотной обмотки тора некоторой размерности.

30.32. Пусть G — компактная связная группа Ли. Показать, что каждая точка $x \in G$ принадлежит некоторой однопараметрической подгруппе.

30.33. Пусть G — компактная группа, гладко действующая на многообразии M . Показать, что на M имеется такая риманова метрика, для которой G — группа изометрий.

30.34. Показать, что коммутативная связная группа Ли локально изоморфна конечномерному векторному пространству.

30.35. Показать, что компактная коммутативная связная группа Ли изоморфна тору.

30.36. Показать, что коммутативная связная группа Ли изоморфна произведению тора на векторное пространство.

30.37. Пусть группа Ли G — подгруппа в группе матриц $GL(n, \mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2} = \text{End}(n, \mathbb{C})$. Показать, что в алгебре Ли L группы G , понимаемой как подпространство в $\text{End}(n, \mathbb{C})$, операция коммутирования совпадает с обычным коммутатором матриц, т. е. $[\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi$, где $\xi, \eta \in L$.

30.38. Описать алгебры Ли следующих матричных групп Ли:

$SL(n, \mathbb{C}), SL(n, \mathbb{R}), U(n), O(n), O(n, m), Sp(n)$.

30.39. Доказать, что конечная группа не может эффективно действовать на \mathbb{R}^n .

§ 31. Дифференциальные формы

31.1. Вычислить геодезическую кривизну k_g кривой $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, расположенной на сфере радиуса R , и вывести отсюда следующую формулу для нахождения площади S области на сфере, ограниченной замкнутой линией L :

$$S = \left(2\pi \pm \oint_L \sqrt{k^2 - \frac{1}{R^2}} ds \right) R^2.$$

Здесь k — кривизна кривой. Обратим внимание, что при интегрировании следует учитывать знак геодезической кривизны $k_g = \sqrt{k^2 - \frac{1}{R^2}}$. А именно, если вектор геодезической кривизны направлен внутрь области, то берется знак «+»; в противном случае

берется знак «+». Впрочем, это правило автоматически учитывается формулой для геодезической кривизны $k_g = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{n})}{|\mathbf{r}'|^3}$ (см. задачу 11.7).

31.2. Найти $\int_M \omega$ в следующих случаях:

а) $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$, $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) $\omega = (2a - y) dx + x dy$, $M: x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

в) $\omega = (y^2 - z^2) dx + 2yz dy - x^2 dz$, $M: x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$;

г) $\omega = y dx + z dy + x dz$, $M: x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

д) $\omega = (y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$, $M: x = a \sin^2 t$, $y = 2a \cos t \sin t$, $z = a \cos^2 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$;

е) $\omega = (y - z) dx + (z - x) dy + (x - y) dz$, $M: x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$;

ж) $\omega = (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (x^2 + y^2) dz$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = Rx$;

з) $\omega = (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dz \wedge dx + (x - y) dx \wedge dy$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

и) $\omega = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$, $M: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

к) $\omega = \frac{dy \wedge dz}{x} + \frac{dz \wedge dx}{y} + \frac{dx \wedge dy}{z}$, $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Поверхности ориентировать внешней нормалью. В пункте а) кривая ориентирована против часовой стрелки, в е) и ж) — против часовой стрелки, если смотреть с положительного направления оси Ox .

31.3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma$ для следующих замкнутых поверхностей Σ :

а) для $\varphi = z^2$, $\psi = x^2 + y^2 - z^2$, если Σ ограничивает область $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ и $y \geq 0$;

б) для $\varphi = 2x^2$, $\psi = x^2 + z^2$, если Σ ограничивает область $x^2 + y^2 \leq 1$ и $0 \leq z \leq 1$;

в) для $\varphi = \psi = \frac{x + y + z}{\sqrt{3}}$, если Σ есть сфера $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$;

г) для $\varphi = 1$, $\psi = e^x \sin y + e^y \sin x + z$, если Σ есть трехосный эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Здесь через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначена производная в направлении внешней нормали к поверхности.

31.4. Найти градиенты следующих функций в цилиндрических координатах:

а) $u = \rho^2 + 2\rho \cos \varphi - e^z \sin \varphi$;

б) $u = \rho \cos \varphi + z \sin^2 \varphi - e^\rho$.

31.5. Найти $\operatorname{div} \mathbf{X}$ в цилиндрических координатах для следующих векторных полей:

а) $\mathbf{X} = (\rho, z \sin \varphi, e\varphi \cos z)$;

б) $\mathbf{X} = (\varphi \operatorname{arctg} \rho, 2, -z^2 e^z)$.

31.6. Найти дивергенцию векторного поля

$$\mathbf{X} = \left(r^2, -2 \cos^2 \varphi, \frac{\varphi}{r^2 + 1} \right)$$

в сферических координатах.

31.7. Найти ротор следующих векторных полей в сферических координатах:

а) $\mathbf{X} = (2r + \alpha \cos \varphi, -\alpha \sin \theta, r \cos \theta)$, $\alpha = \text{const}$;

б) $\mathbf{X} = (r^2, 2 \cos \theta, -\varphi)$.

31.8. Проверить, что следующие векторные поля в сферических координатах (r, θ, φ) являются потенциальными:

а) $\mathbf{X} = (2 \cos \theta / r^3, \sin \theta / r^3, 0)$;

б) $\mathbf{X} = (f(r), 0, 0)$.

31.9. Найти потенциалы следующих векторных полей в цилиндрических координатах (ρ, φ, z) :

а) $\mathbf{X} = \left(1, \frac{1}{\rho}, 1 \right)$; б) $\mathbf{X} = \left(\rho, \frac{\varphi}{\rho}, z \right)$; в) $\mathbf{X} = (\varphi z, z, \rho \varphi)$;

г) $\mathbf{X} = \left(e^\rho \sin \varphi, \frac{e^\rho \cos \varphi}{\rho}, 2z \right)$;

д) $\mathbf{X} = (\varphi \cos z, \cos z, -\rho \varphi \sin z)$.

31.10. Найти потенциалы следующих векторных полей в сферических координатах (r, θ, φ) :

а) $\mathbf{X} = (\theta, 1, 0)$; б) $\mathbf{X} = \left(2r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r} \sin \theta \right)$;

в) $\mathbf{X} = \left(\frac{\varphi^2}{2}, \frac{\theta}{r}, \frac{\varphi}{\sin \theta} \right)$;