3 Successioni

Chiamiamo *semiretta di naturali* ogni insieme del tipo

$$S := \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}, \qquad n_0 \in \mathbb{N}.$$

Definizione 3.1 Si dice *successione* una qualsiasi applicazione (o funzione) definita su una semiretta S di $\mathbb{N}$; se il suo codominio è un insieme A, si parla di successione di elementi di A (o a valori in A). Per una successione $f : S \to A$ si usa poi la notazione $\{a_n\}_n$, dove $a_n \in A$ è dato dalla legge $n \mapsto f(n) = a_n$.

Esempio 3.2 La funzione fattoriale $n \mapsto n!$, cf. definizione 2.60, è un esempio di successione di naturali. Le applicazioni $n \mapsto n^2$ e $n \mapsto (-1)^n$ sono successioni di naturali e interi relativi. Le applicazioni $n \mapsto \sqrt{n^2 - 9}$ e $n \mapsto 1/(n-3)$ sono successioni di reali non negativi, definite nelle semiretta di naturali con punto iniziale $n_0 = 3, 4$, rispettivamente. Analogamente, per ogni ragione q, l'applicazione $n \mapsto \sum_{k=0}^n q^k$ definisce la successione che associa ad ogni naturale la somma delle potenze di q con esponente intero da zero ad n, o somma geometrica di ragione q (detta, come vedremo, somma parziale n-esima di q^k). Invece, l'applicazione $n \mapsto (1 + (-1)^n)^{-1}$ non è una successione, in quanto $1 + (-1)^n$ vale zero per ogni n dispari.

Osservazione 3.3 Se non è specificato altrimenti, in generale tratteremo per semplicità *successioni di numeri reali definite su tutto* $\mathbb{N}$. Quindi scrivendo ad esempio "per ogni n", si sottintende $n \in \mathbb{N}$.

Successioni monotone

Posto dunque $a_n = f(n)$, la successione $\{a_n\}_n$ è ad esempio crescente se per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, con $n < m$, risulta $a_n \leq a_m$. Grazie al principio del minimo intero, si può caratterizzare la monotonia di successioni confrontando solo termini consecutivi.

Proposizione 3.4 *Una successione $\{a_n\}_n$ di numeri reali risulta:*

1. *crescente se e solo se $\forall\, n$, $a_n \leq a_{n+1}$*
2. *strettamente crescente se e solo se $\forall\, n$, $a_n < a_{n+1}$*
3. *decrescente se e solo se $\forall\, n$, $a_n \geq a_{n+1}$*
4. *strettamente decrescente se e solo se $\forall\, n$, $a_n > a_{n+1}$.*

Esempio 3.5 Verifichiamo l'eventuale tipo di monotonia delle successioni dell'esempio precedente.

La successione fattoriale $a_n = n!$ è debolmente crescente, in quanto $a_0 = a_1$, mentre essendo sempre $a_n > 0$, allora $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n > a_n$ per ogni $n \geq 1$.

La successione $a_n = n^2$ è strettamente crescente in quanto $\forall\, n$, $n^2 < (n+1)^2$.

La successione $a_n = (-1)^n$ non è monotona, in quanto $a_0 > a_1$ e $a_1 < a_2$.

La successione $a_n = \sqrt{n^2 - 9}$ è strettamente crescente. Infatti la funzione radice è strettamente crescente, quindi $\forall\, n \geq 3$, $a_n < a_{n+1} \iff (a_n)^2 < (a_{n+1})^2 \iff n^2 - 9 < (n+1)^2 - 9 \iff n^2 < (n+1)^2$.

La successione $a_n = 1/(n-3)$ è strettamente decrescente. Infatti, per ogni $n \geq 4$, $a_n > a_{n+1} \iff 1/(n-3) > 1/(n+1-3) \iff (n-2) > (n-3) \iff -2 > -3$, che è vero.

Infine, osserviamo che la successione delle somme geometriche $a_n = \sum_{k=0}^n q^k$ è strettamente crescente se $q > 0$ e non è monotona se $q < 0$. Infatti, abbiamo $a_{n+1} = a_n + q^{n+1}$, dove q^{n+1} è sempre positivo se $q > 0$, mentre cambia segno a seconda della parità di n se $q < 0$. Quindi, se $q > 0$ risulta $a_{n+1} > a_n$ per ogni n, mentre se $q < 0$ abbiamo $a_{n+1} > a_n$ se n è dispari mentre $a_{n+1} < a_n$ se n è pari.

Esempio 3.6 Mostriamo che la successione $n \mapsto n/(n+1)$ è strettamente crescente.

Sempre per la caratterizzazione precedente, posto $a_n = n/(n+1)$, basta mostrare che $\forall\, n$, $a_n < a_{n+1}$. Ricordando che $a_n = 1 - 1/(n+1)$, risulta $a_{n+1} = 1 - 1/(n+2)$, dunque

$$a_n < a_{n+1} \iff 1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} \iff -\frac{1}{n+1} < -\frac{1}{n+2} \iff \frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} \iff n+2 > n+1$$

che è vera per ogni n, come volevamo dimostrare.

Estremi di successioni

Riscrivendo la notazione di estremi di funzioni per le successioni $\{a_n\}_n$ di numeri reali, si deduce che l'estremo superiore e inferiore di una successione, denotati $\sup_n a_n$ e $\inf_n a_n$, sono rispettivamente l'estremo superiore e inferiore dell'*insieme* $\{a_n \mid n \in S\}$ *dei punti della successione.* Analogamente per il massimo e minimo, denotati $\max_n a_n$ e $\min_n a_n$. Quindi, una successione è

1. limitata superiormente se $\exists\, M \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, n\,,\ a_n \leq M\,;$
   in tal caso $L = \sup_n a_n \iff (\forall\, n,\, a_n \leq L$ **e** $\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \overline{n} \,:\, a_{\overline{n}} > L - \varepsilon)\,;$
2. limitata inferiormente se $\exists\, m \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, n\,,\ a_n \geq m\,;$
   in tal caso $l = \inf_n a_n \iff (\forall\, n,\, a_n \geq l$ **e** $\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, \overline{n} \,:\, a_{\overline{n}} < l + \varepsilon)\,;$
3. limitata se e solo se $\exists\, \widetilde{M} \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, n\,,\ |a_n| \leq \widetilde{M}\,;$
4. non limitata superiormente se $\forall\, M \in \mathbb{R},\, \exists\, \overline{n} \,:\, a_{\overline{n}} > M$, da cui la notazione $\sup_n a_n = +\infty\,;$
5. non limitata inferiormente se $\forall\, m \in \mathbb{R},\, \exists\, \overline{n} \,:\, a_{\overline{n}} < m$, da cui la notazione $\inf_n a_n = -\infty\,.$

Inoltre, per successioni monotone (definite su una semiretta S di punto iniziale n_0) si ha ovviamente:

Proposizione 3.7 *Se* $\{a_n\}_n$ *è debolmente crescente, allora* $\inf_n a_n = \min_n a_n = a_{n_0}$. *Se invece* $\{a_n\}_n$ *è debolmente decrescente, allora* $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_{n_0}$.

Esempio 3.8 Troviamo gli estremi di alcune delle successioni degli esempi precedenti.

Per la successione fattoriale $a_n = n!$ si ottiene che $\inf_n a_n = \min_n a_n = 1$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = n^2$ si ottiene che $\inf_n a_n = \min_n a_n = 0$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = (-1)^n$ ovviamente $\inf_n a_n = \min_n a_n = -1$ e $\sup a_n = 1 = \max_n a_n = 1$.

Per la successione $a_n = \sqrt{n^2 - 9}$ abbiamo $\inf_n a_n = \min_n a_n = 0$ e $\sup a_n = +\infty$, in quanto l'insieme $\{\sqrt{n^2 - 9} \mid n \geq 3\}$ non è limitato superiormente.

Per la successione $a_n = 1/(n-3)$, che sappiamo essere decrescente, abbiamo $\sup_n a_n = \max_n a_n = a_4 = 1$. Proviamo ora che l'estremo inferiore dell'insieme $A = \{1/(n-3) \mid n \geq 4\}$ è uguale a zero, ma non è minimo. Da ciò segue che $\inf_n a_n = 0$. Infatti, ovviamente $1/(n-3) > 0$ per ogni $n \geq 4$. Proviamo allora che ogni numero $\varepsilon > 0$ non è minorante di A, i.e. $\forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n \geq 4 \,:\, 1/(n-3) < \varepsilon$. Ma $1/(n-3) < \varepsilon \iff (n-3) > 1/\varepsilon \iff n > 3 + 1/\varepsilon$, per cui l'asserto segue dalla proprietà di Archimede.

Infine, per la successione $a_n = n/(n+1)$, abbiamo di fatto già provato nell'esempio 2.31 che $\inf a_n = \min a_n = a_0 = 1$ mentre $\sup_n a_n = 1$, che non è massimo.

Osservazione 3.9 L'insieme dei punti di una successione di numeri reali non va confuso con il grafico della successione (come funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$).

Limite di successioni

Il concetto di *limite di successione* risponde analiticamente alla domanda: "dove si avvicinano i punti di una successione quando l'indice n è sempre più grande". Per parlare di "vicinanza" occorre introdurre la nozione di *intorno* di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Intorni

Definizione 3.10 Intorno di un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi intervallo aperto $]H, K[$ che contiene x_0. Invece, intorno di $x_0 = +\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]M, +\infty[$, mentre intorno di $x_0 = -\infty$ è una qualsiasi semiretta aperta $]-\infty, N[$, dove $M, N \in \mathbb{R}$. Infine, denotiamo con il simbolo $\mathcal{I}_{x_0}$ l'insieme (o famiglia) degli intorni di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Proposizione 3.11 *Le famiglie di intorni verificano le seguenti proprietà:*

1. *se* $x_0, x_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ *sono distinti, allora* $\exists\, V_0 \in \mathcal{I}_{x_0}$ **e** $\exists\, V_1 \in \mathcal{I}_{x_1} \,:\, V_0 \cap V_1 = \emptyset$
2. *se* $V_0, V_1 \in \mathcal{I}_{x_0}$, *allora* $V_0 \cap V_1 \in \mathcal{I}_{x_0}$

3. *se $x_0 \in \mathbb{R}$, tra gli intorni di x_0 ci sono gli intervalli aperti centrati in x_0, definiti da $I_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$, con $\varepsilon > 0$*

4. *se $x_0 \in \mathbb{R}$, allora per ogni $V \in \mathcal{I}_{x_0}$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(x_0) \subset V$.*

Limite di successioni

Definizione 3.12 Una successione $\{a_n\}_n$ *ha limite* $l \in \overline{\mathbb{R}}$, e scriviamo $\lim_n a_n = l$, o anche $a_n \to l$, che si legge "a_n tende ad l", se risulta:

$$\forall\, V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n},\ a_n \in V\ .$$

Una successione si dice *infinitesima* se ha limite $l = 0$, si dice *convergente* se ha limite $l \in \mathbb{R}$, si dice che *diverge positivamente [[negativamente]]* se ha limite $l = +\infty$ [[$l = -\infty$]].

Osservazione 3.13 Una successione può non avere limite. Ad esempio, $a_n = (-1)^n$ non ha limite, cf. esempio 3.21.

Proposizione 3.14 *Se esiste, il limite di una successione è unico.*

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che una successione $\{a_n\}_n$ abbia due limiti diversi, $l_0 \neq l_1$. Fissiamo due intorni $V_0 \in \mathcal{I}_{l_0}$ e $V_1 \in \mathcal{I}_{l_1}$ tali che $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Dalla definizione, esiste n_0 tale che $a_n \in V_0$ per ogni $n \geq n_0$, ed esiste n_1 tale che $a_n \in V_1$ per ogni $n \geq n_1$. Posto allora $\overline{n} = \max\{n_0, n_1\}$, avremmo che $a_n \in V_0 \cap V_1$ per ogni $n \geq \overline{n}$, che non può succedere in quanto $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. □

Esplicitando la nozione di intorno, otteniamo le seguenti definizioni equivalenti di limite.

Proposizione 3.15 *Una successione $\{a_n\}_n$ diverge positivamente, $a_n \to +\infty$, se e solo se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n > M\ . \tag{3.1}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ diverge negativamente, $a_n \to -\infty$, se e solo se

$$\forall\, N \in \mathbb{R}\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ a_n < N\ . \tag{3.2}$$

Una successione $\{a_n\}_n$ converge ad un limite l reale, $a_n \to l \in \mathbb{R}$, se e solo se

$$\forall\, H, K \in \mathbb{R}\ :\ H < l < K\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ H < a_n < K \tag{3.3}$$

o, equivalentemente, se e solo se

$$\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n}\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |a_n - l| < \varepsilon\ . \tag{3.4}$$

DIMOSTRAZIONE: Le prime tre seguono immediatamente dalla definizione di intorni di $\pm\infty$ e di $l \in \mathbb{R}$. Riguardo la (3.4), osserviamo che per ogni $\varepsilon > 0$

$$|a_n - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \iff a_n \in I_\varepsilon(l)\ .$$

Quindi, se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, scegliendo $V = I_\varepsilon(l) \in \mathcal{I}_l$ per ogni $\varepsilon > 0$ si ottiene la (3.4). Viceversa, se vale la (3.4), ricordiamo che per ogni intorno $V \in \mathcal{I}_l$ troviamo un numero $\varepsilon > 0$ tale che $I_\varepsilon(l) \subset V$ e osserviamo che di conseguenza $|a_n - l| < \varepsilon \Rightarrow a_n \in I_l(\varepsilon) \Rightarrow a_n \in V$. □

Osservazione 3.16 Dalla (3.4) con $l = 0$ otteniamo immediatamente che per successioni infinitesime

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$$

quindi anche che $\{a_n\}_n$ converge ad $l \in \mathbb{R}$ se e solo se $|a_n - l| \to 0$.

Esempio 3.17 Proviamo che la successione $a_n = (-1)^n/n$ è infinitesima. Per la caratterizzazione (3.4), basta mostrare che $\forall\, \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \overline{n} \geq 1\ :\ \forall\, n \geq \overline{n}\,,\ |(-1)^n/n - 0| < \varepsilon$. Ma $|(-1)^n/n - 0| = 1/n$, mentre $1/n < \varepsilon \iff n > 1/\varepsilon$. La tesi segue scegliendo ad esempio $\overline{n} = \overline{n}(\varepsilon) = \lfloor \varepsilon^{-1} \rfloor + 1$.

Sottosuccessioni di posto pari o dispari

Data una successione $\{a_n\}_n$, definiamo due nuove successioni ponendo $b_n := a_{2n}$ e $c_n := a_{2n+1}$, dette *sottosuccessioni (dei termini) di posto pari e dispari*, rispettivamente.

Osservazione 3.18 Sono due nuove successioni ottenute componendo la funzione $f(n) = a_n$ a destra con le *applicazioni strettamente crescenti da* $\mathbb{N}$ *in* $\mathbb{N}$ definite da $k_1(n) = 2n$ e $k_2(n) = 2n+1$, rispettivamente. Vedremo questo nella definizione 3.120 di sottosuccessione.

Proposizione 3.19 *Se una successione* $\{a_n\}_n$ *ha limite* l*, allora anche le sottosuccessioni di posto pari e dispari hanno lo stesso limite, i.e.* $b_n := a_{2n} \to l$ *e* $c_n := a_{2n+1} \to l$.

Dimostrazione: Sappiamo che $a_n \to l$ significa che $\forall\, V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\, \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq \overline{n},\ a_n \in V$. Allora, poiché $k_1(n) = 2n \geq \overline{n}$ e $k_2(n) = 2n+1 \geq \overline{n}$ se $n \geq \overline{n}$, otteniamo che $\forall\, n \geq \overline{n},\ b_n = a_{2n} \in V$ **e** $c_n = a_{2n+1} \in V$, come volevamo dimostrare. □

Tali sottosuccessioni possono essere usate per dimostrare la non esistenza del limite di una successione. Infatti, dalla contronominale si ottiene:

Corollario 3.20 *Data una successione* $\{a_n\}_n$*, se le sottosuccessioni di posto pari e dispari hanno limiti diversi, i.e.* $b_n := a_{2n} \to l_1$ *e* $c_n := a_{2n+1} \to l_2$*, con* $l_1 \neq l_2$*, allora la successione* $\{a_n\}$ *non ha limite.*

Esempio 3.21 La successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite, in quanto $b_n := a_{2n} \equiv 1$ e $c_n := a_{2n+1} \equiv -1$, dunque b_n e c_n hanno limiti diversi.

Predicati definitivamente veri o frequentemente veri

Nella definizione di limite $a_n \to l$, se consideriamo il predicato $\mathcal{P}(n) := (a_n \in V)$, abbiamo scritto che "per ogni $V \in \mathcal{I}_l$ la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera da un certo $\overline{n}$ in poi". Introduciamo quindi la seguente:

Definizione 3.22 Sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato dipendente da $n \in \mathbb{N}$. Diciamo che $\mathcal{P}(n)$ *è definitivamente vero* se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che la proposizione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq \overline{n}$.

Esempio 3.23 Quindi $a_n \to l$ se per ogni $V \in \mathcal{I}_l$ definitivamente $a_n \in V$.

Se due (o più) predicati sono definitivamente veri, allora lo è anche la loro intersezione logica.

Proposizione 3.24 *Dati due predicati* $\mathcal{P}_1(n)$ *e* $\mathcal{P}_2(n)$ *dipendenti da* n*, se* $\mathcal{P}_1(n)$ *e* $\mathcal{P}_2(n)$ *sono entrambi definitivamente veri, allora anche* $\mathcal{P}_1(n)$ **e** $\mathcal{P}_2(n)$ *è definitivamente vero.*

Dimostrazione: Abbiamo: $\exists\, n_1 : \forall\, n \geq n_1,\ \mathcal{P}_1(n)$ ed inoltre $\exists\, n_2 : \forall\, n \geq n_2,\ \mathcal{P}_2(n)$. Posto $\overline{n} = \max\{n_1, n_2\}$, allora $\forall\, n \geq \overline{n}$, $[\mathcal{P}_1(n)$ **e** $\mathcal{P}_2(n)]$. □

Osservazione 3.25 Neghiamo ora l'affermazione $\mathcal{P}(n)$ è definitivamente vero: abbiamo

$$\mathbf{non}\,[\exists\, \overline{n} : \forall\, n \geq \overline{n},\ \mathcal{P}(n)] \iff [\forall\, \overline{n},\ \exists\, n \geq \overline{n} : \mathbf{non}\,\mathcal{P}(n)]\,. \tag{3.5}$$

Un predicato $\mathcal{Q}(n)$ su $n \in \mathbb{N}$ si dice *frequentemente vero* se per ogni $\overline{n} \in \mathbb{N}$ esiste un numero $n \geq \overline{n}$ per il quale la proposizione $\mathcal{Q}(n)$ è vera. Quindi, posto $\mathcal{Q}(n) = \mathbf{non}\,\mathcal{P}(n)$, abbiamo osservato sopra che

$$\mathbf{non}\,[\,\mathcal{P}(n) \text{ è definitivamente vero}\,] \iff [\,\mathbf{non}\,\mathcal{P}(n) \text{ è frequentemente vero}\,]\,.$$

Esempio 3.26 Una successione $\{a_n\}_n$ si dice *definitivamente crescente* se esiste n_0 tale che $\forall\, n,\ m \geq n_0$ abbiamo che $n < m \Rightarrow a_n \leq a_m$. Equivalentemente, la successione è definitivamente crescente se e solo se esiste n_0 tale che $\forall\, n \geq n_0$ risulta $a_n \leq a_{n+1}$.

Osservazione 3.27 Da quanto visto deduciamo che il limite di una successione non dipende dai primi termini. In maniera equivalente, abbiamo:

Proposizione 3.28 *Siano* $\{a_n\}_n$ *e* $\{b_n\}_n$ *due successioni tali che definitivamente* $a_n = b_n$*. Allora* $a_n \to l \iff b_n \to l$.

Esempio 3.29 Una successione $\{a_n\}_n$ si dice ad esempio *definitivamente limitata* se esiste n_0 tale che $\exists\, \widetilde{M} \in \mathbb{R} : \forall\, n \geq n_0\,,\ |a_n| \leq \widetilde{M}$. Allora si vede facilmente che:

Proposizione 3.30 *Ogni successione definitivamente limitata [[l. superiormente, l. inferiormente]] è anche limitata [[l. superiormente, l. inferiormente]].*

Dimostrazione: Se $\{a_n\}_n$ è definitivamente limitata, posto $\overline{M} := \max\{\widetilde{M}, |a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n_0}|\}$, si ottiene che $|a_n| \leq \overline{M}$ per ogni n. □

Osservazione 3.31 Abbiamo usato il fatto che *ogni insieme* finito *di numeri reali è limitato ed ha massimo e minimo*, la cui dimostrazione è una facile applicazione del principio di induzione sul numero n di elementi dell'insieme. Si noti però che un insieme limitato in generale non è finito (ad es., $\mathbb{Q} \cap [0,1]$).

Teorema sul limite di successioni monotone

Abbiamo visto che una successione può non avere limite. Questa patologia non accade per le successioni monotone.

Teorema 3.32 *Ogni successione monotona ha limite. Inoltre, se $\{a_n\}_n$ è crescente, il suo limite è uguale all'estremo superiore* $\sup_n a_n$*. Se invece è decrescente, il suo limite è uguale all'estremo inferiore* $\inf_n a_n$*.*

Dimostrazione: Facciamo prima il caso di successioni crescenti. Sia $l = \sup_n a_n$. Se $l \in \mathbb{R}$, allora abbiamo che $a_n \leq l$ per ogni n, mentre per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo che esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > l - \varepsilon$. Quindi, essendo $\{a_n\}_n$ crescente, per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $a_n \geq a_{\overline{n}}$. In definitiva, abbiamo ottenuto che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha $l - \varepsilon < a_{\overline{n}} \leq a_n \leq l < l + \varepsilon$ e dunque $|a_n - l| < \varepsilon$. La tesi segue dalla caratterizzazione (3.4). Se invece $\sup a_n = +\infty$, i.e. la successione non è limitata superiormente, allora per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\overline{n}$ tale che $a_{\overline{n}} > M$. Dalla monotonia si ottiene analogamente la (3.1).

Il caso $\{a_n\}_n$ decrescente si dimostra osservando che posto $b_n = -a_n$, allora $\{b_n\}_n$ è crescente, e che $\sup_n b_n = -\inf_n a_n$. Basta quindi ricordare la caratterizzazione del limite $\pm\infty$ (con $N = -M$) e osservare invece che $|a_n - l| = |b_n - (-l)|$ nel caso $l \in \mathbb{R}$. □

Esempio 3.33 Da quanto visto, otteniamo immediatamente che $n! \to +\infty$, $n^2 \to +\infty$, $\sqrt{n^2 - 9} \to +\infty$, $1/(n-3) \to 0$, ed infine $n/(n+1) \to 1$.

Inoltre, dalla dimostrazione del teorema 3.32, usando l'argomento della proposizione 3.24, si deduce il seguente

Corollario 3.34 *Ogni successione definitivamente monotona ha limite.*

Teoremi di confronto e teoremi algebrici

Limitatezza e permanenza del segno

Dalla caratterizzazione (3.3) si deduce che una successione convergente è definitivamente limitata e quindi per la proposizione 3.30 otteniamo:

Proposizione 3.35 *Ogni successione convergente è limitata.*

Analogamente, dalle caratterizzazioni (3.1) e (3.2) e dalla proposizione 3.30 si ottiene:

Proposizione 3.36 *Ogni successione che diverge positivamente [[negativamente]] è limitata inferiormente [[superiormente]].*

Il teorema di permanenza del segno afferma:

Teorema 3.37 *Se una successione $\{a_n\}_n$ ha limite l diverso da zero, allora $\{a_n\}_n$ ha definitivamente segno costante.*

Dimostrazione: Supponiamo $l > 0$. Se $l \in \mathbb{R}$, si sceglie $H > 0$ nella caratterizzazione (3.3), se invece $l = +\infty$, si sceglie $M > 0$ nella (3.1). Analogamente, se $l < 0$ è reale si sceglie $K < 0$ nella (3.3), mentre se $l = -\infty$ si sceglie $N < 0$ nella (3.2). □

Confronto e teorema dei carabinieri

Il *teorema del confronto* afferma:

Teorema 3.38 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che definitivamente $a_n \le b_n$; allora*

1. $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$
2. $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$.

Dimostrazione: Proviamo solo la prima. Fissato $M \in \mathbb{R}$, dalla (3.1) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}_1$ risulta $a_n > M$. Ma esiste $\overline{n}_2$ tale che $a_n \le b_n$ per ogni $n \ge \overline{n}_2$, dunque $b_n \ge a_n > M$ per ogni $n \ge \overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 3.39 Posto $a_n = (-1)^n - n$ e $b_n = 1 - n$, dalla definizione di limite abbiamo che $b_n \to -\infty$, mentre $a_n \le b_n$ per ogni n, dunque $a_n \to -\infty$.

Per successioni convergenti, si utilizza il cosiddetto *teorema dei carabinieri.*

Teorema 3.40 *Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ e $\{c_n\}_n$ tre successioni e $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che:*

1. *definitivamente* $b_n \le a_n \le c_n$
2. $b_n \to l$
3. $c_n \to l$.

Allora anche $\{a_n\}_n$ ha limite e $a_n \to l$.

Dimostrazione: Supponiamo $l \in \mathbb{R}$, altrimenti la tesi segue (in ipotesi più generali) dal teorema di confronto 3.38. Fissato $\varepsilon > 0$, dalla (3.4) esiste $\overline{n}_1$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}_1$ risulta $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ ed esiste $\overline{n}_2$ tale che per ogni $n \ge \overline{n}_2$ risulta $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. Inoltre esiste $\overline{n}_3$ tale che $b_n \le a_n \le c_n$ per ogni $n \ge \overline{n}_3$. Posto $\overline{n} := \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2, \overline{n}_3\}$, abbiamo che $l - \varepsilon < b_n \le a_n \le c_n < l + \varepsilon$ per ogni $n \ge \overline{n}$, dunque $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \ge \overline{n}$, come volevamo dimostrare. □

Esempio 3.41 Calcoliamo il limite di $a_n = (1 + 2(-1)^n)/n$. Posto $b_n = -1/n$ e $c_n = 3/n$, abbiamo che $b_n \le a_n \le c_n$ per ogni $n \ge 1$, mentre per verifica diretta deduciamo che $b_n \to 0$ e $c_n \to 0$. Dunque, anche $a_n \to 0$.

Corollario 3.42 *Data $\{a_n\}_n$, se esistono un numero $l \in \mathbb{R}$ ed una successione $\{b_n\}_n$ tali che*

1. *definitivamente* $|a_n - l| \le b_n$
2. $b_n \to 0$

allora anche $\{a_n\}_n$ ha limite e $a_n \to l$.

Infatti dal teorema dei carabinieri segue ovviamente che $|a_n - l| \to 0$, dunque per l'osservazione 3.16 anche $(a_n - l) \to 0$ ed in definitiva $a_n \to l$.

Esempio 3.43 Proviamo che la successione $a_n = (2n + 3)/(n + 1)$ converge a 2. Infatti, scriviamo $a_n = 2 + 1/(n + 1)$, dunque con $l = 2$ abbiamo $|a_n - 2| = |1/(n + 1)| = 1/(n + 1)$, dove la successione $b_n = 1/(n + 1)$ è infinitesima.

Limite e valore assoluto

Possiamo ora estendere l'osservazione 3.16 sulla successione dei valori assoluti in una direzione. Poniamo ovviamente $|-\infty| := +\infty$ e $|+\infty| := +\infty$.

Proposizione 3.44 *Se $a_n \to l$ allora $|a_n| \to |l|$.*

Dimostrazione: Se $l \in \mathbb{R}$, dalla definizione di limite si ha che $a_n \to l \iff (a_n - l) \to 0$, quindi dall'osservazione 3.16 segue che $|a_n - l| \to 0$. Ma per la seconda diseguaglianza triangolare, proposizione 1.16, risulta $||a_n| - |l|| \le |a_n - l|$. Per il corollario 3.42, otteniamo dunque che $|a_n| \to |l|$. Il caso $l = \pm\infty$ segue per verifica diretta, dalle caratterizzazioni (3.1) e (3.2). □

Osservazione 3.45 Il viceversa è falso: se $|a_n| \to |l|$ non è detto neppure che $\{a_n\}_n$ abbia limite, come si vede con $a_n = (-1)^n$.

Operazioni algebriche con i limiti

Ricordiamo che in $\overline{\mathbb{R}}$ non hanno senso le operazioni $+\infty-\infty$ e $0\cdot(\pm\infty)$. Il *teorema sul limite della somma e del prodotto* afferma:

Teorema 3.46 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che $a_n \to l_a$ e $b_n \to l_b$, con $l_a, l_b \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora:*

1. *se la somma dei limiti $l_a + l_b$ ha senso, anche la successione somma $\{a_n + b_n\}_n$ ha limite e risulta $(a_n + b_n) \to l_a + l_b$;*

2. *se il prodotto dei limiti $l_a \cdot l_b$ ha senso, anche la successione prodotto $\{a_n \cdot b_n\}_n$ ha limite e risulta $a_n \cdot b_n \to l_a \cdot l_b$.*

Dimostrazione: Consideriamo prima la somma.
Primo caso: $l_a, l_b \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$ si ha che definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon/2$ e definitivamente $|b_n - l_b| < \varepsilon/2$, dunque definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon/2$ **e** $|b_n - l_b| < \varepsilon/2$. Ma per la prima diseguaglianza triangolare, cf. proposizione 1.16, stimiamo

$$|(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| = |(a_n - l_a) + (b_n - l_b)| \le |a_n - l_a| + |b_n - l_b| \,,$$

da cui otteniamo che definitivamente $|(a_n + b_n) - (l_a + l_b)| < \varepsilon$, come volevamo dimostrare.
Secondo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Per il teorema di limitatezza 3.35 (o dalla definizione di limite nel caso $l_b = +\infty$) esiste $K \in \mathbb{R}$ tale che $b_n \ge K$ per ogni n. Inoltre, per ogni $M \in \mathbb{R}$ si ha che definitivamente $a_n > M$. Quindi definitivamente risulta $(a_n + b_n) > M + K$. Dato che K è una costante che non dipende dalla scelta di M, quanto provato è equivalente alla proprietà $(a_n + b_n) \to +\infty$.
Terzo caso: $l_a = -\infty$ e $l_b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Si dimostra in maniera analoga al caso precedente.

Consideriamo ora il prodotto, distinguendo ancora tra vari casi.
Primo caso: $l_a, l_b \in \mathbb{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, come sopra si ha che definitivamente $|a_n - l_a| < \varepsilon$ **e** $|b_n - l_b| < \varepsilon$, mentre per il teorema di limitatezza 3.35 esiste $M > 0$ tale che $|b_n| \le M$ per ogni n. Usando la prima diseguaglianza triangolare e le proprietà del valore assoluto questa volta stimiamo

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b| &= |(a_n \cdot b_n - l_a \cdot b_n) + (l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b)| \le |a_n \cdot b_n - l_a \cdot b_n| + |l_a \cdot b_n - l_a \cdot l_b| \\ &= |(a_n - l_a) \cdot b_n| + |l_a \cdot (b_n - l_b)| = |b_n||(a_n - l_a)| + |l_a||b_n - l_b| \,. \end{aligned}$$

Da quanto scritto sopra otteniamo che definitivamente

$$|a_n \cdot b_n - l_a \cdot l_b| \le |b_n||(a_n - l_a)| + |l_a||b_n - l_b| < M\,\varepsilon + |l_a|\,\varepsilon = (M + |l_a|)\,\varepsilon \,.$$

Dato che $K = M + |l_a|$ è una costante che non dipende dalla scelta di ε, quanto provato è equivalente alla proprietà $a_n \cdot b_n \to l_a \cdot l_b$.
Secondo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b > 0$. Osserviamo che esiste $H > 0$ reale tale che definitivamente $b_n > H$. Questo segue dalla definizione di limite se $l_b = +\infty$, mentre se $l_b > 0$ è reale, segue dalla (3.3) con $0 < H < l_b$, ad esempio scegliendo $H = l_b/2$. Inoltre, per ogni $M > 0$ reale, definitivamente $a_n > M$. Dunque, definitivamente $a_n \cdot b_n > H \cdot a_n > H \cdot M$. Dato che $H > 0$ è una costante che non dipende dalla scelta di M, quanto provato è equivalente alla proprietà $a_n \cdot b_n \to +\infty$.
Terzo caso: $l_a = +\infty$ e $l_b < 0$. Prima osserviamo come sopra che esiste $K < 0$ reale tale che definitivamente $b_n < K$. Inoltre, per ogni $M > 0$ reale, definitivamente $a_n > M$. Dunque, definitivamente $a_n \cdot b_n < K \cdot a_n < K \cdot M$. Dato che $K < 0$ è una costante che non dipende dalla scelta di M, quanto provato è equivalente alla proprietà $a_n \cdot b_n \to -\infty$.
Quarto caso: $l_a = -\infty$ e $l_b < 0$. Basta applicare il secondo caso alle successioni degli opposti, definite da $\widetilde{a}_n = -a_n$ e $\widetilde{b}_n = -b_n$.
Quinto caso: $l_a = -\infty$ e $l_b > 0$. Basta applicare il terzo caso alle successioni degli opposti. □

Nella dimostrazione del teorema 3.46 abbiamo di fatto provato anche le seguenti proprietà, in cui non si richiede l'esistenza del limite della successione $\{b_n\}_n$ ma si deduce comunque la divergenza della successione somma o prodotto.

Proposizione 3.47 *Siano date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$.*

1. *Se $a_n \to +\infty$ e $\{b_n\}_n$ è limitata inferiormente, allora $(a_n + b_n) \to +\infty$.*

2. *Se $a_n \to -\infty$ e $\{b_n\}_n$ è limitata superiormente, allora $(a_n + b_n) \to -\infty$.*

3. *Se $a_n \to +\infty$ ed esiste $H > 0$ tale che definitivamente $b_n > H$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*

4. *Se $a_n \to +\infty$ ed esiste $K < 0$ tale che definitivamente $b_n < K$, allora $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*

5. *Se $a_n \to -\infty$ ed esiste $H > 0$ tale che definitivamente $b_n > H$, allora $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*

6. *Se $a_n \to -\infty$ ed esiste $K < 0$ tale che definitivamente $b_n < K$, allora $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*

Nel limite del prodotto, se un fattore è una successione infinitesima e l'altro una successione limitata, abbiamo anche:

Proposizione 3.48 *Date $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$, se $a_n \to 0$ e $\{b_n\}_n$ è limitata, allora $a_n \cdot b_n \to 0$.*

Dimostrazione: Esiste $K > 0$ reale tale che $|b_n| \leq K$ per ogni n. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$, definitivamente $|a_n| < \varepsilon$. Dunque definitivamente si ha $|a_n \cdot b_n| = |a_n||b_n| \leq K\,|a_n| < K\varepsilon$, da cui segue la tesi, dato che K non dipende da ε. □

Vediamo qualche esempio sul teorema del limite della somma e del prodotto.

Esempio 3.49 Per ogni naturale $k \in \mathbb{N}^+$ si ha che $n^k \to +\infty$ e $n^{-k} = (1/n)^k \to 0$. Infatti sappiamo che tale proprietà è vera per $k = 1$, mentre per $k = 2$ segue dal teorema sul limite del prodotto. Sapendo che è vera per un intero k, si ottiene dunque che è vera anche per l'intero successivo $k + 1$. Per il principio di induzione è dunque vera per ogni k.

Osservazione 3.50 Analogamente, otteniamo che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ la successione $(1+1/n)^k$ ha limite 1, essendo prodotto di k fattori tutti convergenti ad 1. Questo non significa che la successione $\mathsf{e}_n = (1+1/n)^n$ ha limite 1. Infatti, vedremo nella Proposizione 3.93 che $\{\mathsf{e}_n\}_n$ converge al numero di Nepero e.

Esempio 3.51 Vediamo che la successione $n^2 + n(-1)^n/(n + 1)$ diverge positivamente. Infatti si scrive come somma $a_n + b_n$, dove $a_n = n^2$ e $b_n = n(-1)^n/(n + 1)$. Sappiamo inoltre che $a_n \to +\infty$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ è limitata, in quanto $|b_n| = n/(n+1) \leq 1$ per ogni n. Si noti che $\{b_n\}_n$ non ha limite, in quanto le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari convergono a 1 e -1, rispettivamente.

Esempio 3.52 La successione $n^2[2 + (-1)^n]$ diverge positivamente. Infatti si scrive come prodotto $a_n \cdot b_n$, con $a_n = n^2$ e $b_n = 2 + (-1)^n$. Sappiamo che $a_n \to +\infty$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ è limitata inferiormente da una costante positiva, in quanto $b_n \geq 1$ per ogni n. Si noti ancora che $\{b_n\}_n$ non ha limite, in quanto le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari valgono identicamente 3 e -1.

Esempio 3.53 La successione $[2 + (-1)^n]/n$ è infinitesima. Infatti si scrive come prodotto $a_n \cdot b_n$, con $a_n = 1/n$ e $b_n = 2 + (-1)^n$. Sappiamo che $a_n \to 0$, mentre la successione $\{b_n\}_n$ pur non avendo limite è limitata, in quanto $|b_n| \leq 3$ per ogni n.

Forme indeterminate

Il teorema 3.46 non tratta il caso in cui $l_a + l_b = +\infty - \infty$ o in cui $l_a \cdot l_b = 0 \cdot (\pm\infty)$. Infatti, in tali casi il limite della somma o del prodotto può essere un qualsiasi numero reale o può non esistere. Per questo si parla di *forme indeterminate*.

Esempio 3.54 Scegliamo $a_n = n$, per cui $a_n \to +\infty$, e troviamo delle successioni b_n divergenti a $-\infty$ tali che la successione somma $\{a_n + b_n\}_n$ ha i diversi comportamenti sopra descritti. Infatti, se $b_n = -n/2$, allora $(a_n + b_n) = n/2 \to +\infty$, se $b_n = c - n$, allora $(a_n + b_n) \equiv c \to c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, se $b_n = -2n$, allora $(a_n + b_n) = -n \to -\infty$ ed infine, se $b_n = (-1)^n - n$, allora $(a_n + b_n) = (-1)^n$ non ha limite.

Esempio 3.55 Analogamente, scegliamo $a_n = 1/n^2$, per cui $a_n \to 0$, e troviamo diverse successioni b_n divergenti in modo tale che la successione prodotto $\{a_n \cdot b_n\}_n$ ha i diversi comportamenti sopra descritti. Infatti, se $b_n = n$, allora $a_n \cdot b_n = 1/n \to 0$, se $b_n = c\,n^2$, allora $a_n \cdot b_n \equiv c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, se $b_n = \pm n^3$, allora $a_n \cdot b_n = \pm n \to \pm\infty$. Infine, se $b_n = n^2\,[2 + (-1)^n]$, allora $a_n \cdot b_n = 2 + (-1)^n$ non ha limite.

Limite del reciproco e del quoziente

Ci si aspetta che se una successione $\{b_n\}_n$ ha limite l reale non nullo, allora la successione dei reciproci $\{1/b_n\}_n$ ha limite dato dal reciproco di l. Inoltre, se $l = \pm\infty$, ci si aspetta che $\{1/b_n\}_n$ sia infinitesima. Il caso delicato è infatti $l = 0$, come illustrato qui sotto.

Esempio 3.56 Se $b_n = (-1)^n/n$, allora $b_n \to 0$, ma $1/b_n = n\,(-1)^n$ e dunque $1/b_n$ non ha limite. Se invece $b_n = 1/n$, allora $1/b_n = n$ e dunque $1/b_n$ ha limite $+\infty$. Analogamente, se $b_n = -1/n$, allora $1/b_n = -n$ e dunque $1/b_n$ ha limite $-\infty$. La successione del primo esempio non ha limite perché assume frequentemente sia valori negativi che valori positivi, i.e. non è definitivamente di segno costante.

Per dimostrare i *teoremi del reciproco e del quoziente*, introduciamo allora la notazione di *limite da sopra o da sotto.*

Definizione 3.57 Se una successione $\{a_n\}_n$ ha limite l reale e definitivamente $a_n > l$ $[[\, a_n < l\,]]$ allora scriviamo $a_n \to l^+$ $[[\, a_n \to l^-\,]]$.

Esempio 3.58 Quindi abbiamo $1/n \to 0^+$ e $-1/n \to 0^-$, mentre la successione infinitesima $(-1)^n/n$ non è definitivamente positiva né definitivamente negativa.

Teorema 3.59 *Sia $\{b_n\}_n$ una successione tale che $b_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$. Abbiamo:*

1. *se $l = +\infty$ $[[\, l = -\infty\,]]$ allora $1/b_n \to 0^+$ $[[\, 1/b_n \to 0^-\,]]$;*
2. *se $l = 0^+$ $[[\, l = 0^-\,]]$ allora $1/b_n \to +\infty$ $[[\, 1/b_n \to -\infty\,]]$;*
3. *se $l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora $1/b_n \to 1/l$.*

Dimostrazione: Consideriamo solo i casi $l = +\infty$, $l = 0^+$ e $l > 0$ reale, gli altri casi essendo ottenuti grazie al teorema sul limite del prodotto, moltiplicando per -1.
1. Se $l = +\infty$, fissato $\varepsilon > 0$ e posto $M_\varepsilon = 1/\varepsilon$, definitivamente risulta $b_n > M_\varepsilon > 0$, da cui $0 < 1/b_n < \varepsilon$.
2. Se $l = 0^+$, fissato $M > 0$ e posto $\varepsilon = 1/M$, definitivamente $0 < b_n < \varepsilon$, da cui $1/b_n > M$.
3. Infine, nel caso $l > 0$ reale, mostriamo che per ogni H, K tali che $H < 1/l < K$, allora definitivamente $1/b_n \in]H, K[$. Scegliamo quindi due numeri $H' \geq H$ e tale che $0 < H' < 1/l$ e $K' \in \mathbb{R}$ tale che $1/l < K' < K$, potendo essere $H \leq 0$ o $K = +\infty$. Allora $1/K' < l < 1/H'$, i.e. $]1/K', 1/H'[$ è un intorno di l. Dunque definitivamente sappiamo che $1/K' < b_n < 1/H'$, i.e. definitivamente $H' < 1/b_n < K'$, il che implica $1/b_n \in]H', K'[\subset]H, K[$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 3.60 Se $b_n \to 0$ ma $\{b_n\}_n$ non ha definitivamente segno costante, cf. Esempio 3.56, allora si dimostra che la successione $\{1/b_n\}_n$ non ha limite.

Il teorema sul limite del quoziente a_n/b_n di due successioni segue applicando prima il teorema del reciproco alla successione $\{b_n\}_n$ e poi il teorema del prodotto, osservando che $a_n/b_n = a_n \cdot (1/b_n)$. Lo enunciamo solo nel caso in cui il limite di $\{b_n\}_n$ è positivo o $l_b = 0^+$, gli altri casi essendo ottenuti ovviamente moltiplicando per -1.

Teorema 3.61 *Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che $a_n \to l_a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $b_n \to l_b \in \overline{\mathbb{R}}$. Abbiamo:*

1. *se $l_a \in \mathbb{R}$ e $l_b \in \mathbb{R}^+$, allora $a_n/b_n \to l_a/l_b$;*
2. *se $l_a \in \mathbb{R}$ e $l_b = +\infty$, allora $a_n/b_n \to 0$;*
3. *se $l_a \in \mathbb{R}^+$ e $l_b = 0^+$, allora $a_n/b_n \to +\infty$;*
4. *se $l_a \in \mathbb{R}^-$ e $l_b = 0^+$, allora $a_n/b_n \to -\infty$;*
5. *se $l_a = \pm\infty$ e $l_b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0^+\}$, allora $a_n/b_n \to \pm\infty$.*

Osservazione 3.62 Se $l_a \neq 0$ e $l_b = 0$, ma $\{b_n\}_n$ non ha definitivamente segno costante, allora si dimostra che la successione $\{a_n/b_n\}_n$ non ha limite.

Osservazione 3.63 Come conseguenza, modificando l'esempio 3.55 si deduce che $0/0$ e ∞/∞ sono *forme indeterminate* per il limite del quoziente di successioni.

Esempio 3.64 Se $a_n = P_m(n)$, dove $P_m(x)$ è un polinomio di grado positivo m, il limite è $\pm\infty$ a seconda del segno del coefficiente del monomio di grado massimo. Infatti, se $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$, con $c_m \neq 0$, posto $\text{sgn}(c_m) = c_m/|c_m|$, abbiamo

$$a_n = \sum_{k=0}^m c_k n^k = n^m \cdot \sum_{k=0}^m c_k n^{k-m} .$$

Per $k < m$ abbiamo $n^{k-m} \to 0$, dunque $\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m} \to c_m$ ed in definitiva $a_n \to \text{sgn}(c_m) \cdot (+\infty)$.

Esempio 3.65 Se invece $a_n = P_m(n)/Q_p(n)$, dove $P_m(x)$ e $Q_p(x)$ sono polinomi di grado positivo, il limite dipende dal grado dei due polinomi. Infatti, se $P_m(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$, con $c_m \neq 0$, e $Q_p(x) = \sum_{h=0}^p d_h x^h$, con $d_p \neq 0$, abbiamo

$$a_n = \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^k}{\sum_{h=0}^p d_h n^h} = \frac{n^m \cdot \sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{n^p \cdot \sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} = n^{m-p} \cdot \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} .$$

Abbiamo ancora $\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m} \to c_m$ e $\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p} \to d_p$, per cui il quoziente a destra ha limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^m c_k n^{k-m}}{\sum_{h=0}^p d_h n^{h-p}} = \frac{c_m}{d_p} \neq 0 .$$

Allora, se $m < p$, risulta $n^{m-p} \to 0$ e dunque $a_n \to 0$. Se invece $m = p$, allora $n^{m-p} \equiv 1$ e dunque $a_n \to c_m/d_p$. Infine, se $m > p$, risulta $n^{m-p} \to +\infty$ e dunque $a_n \to \text{sgn}(c_m/d_p) \cdot (+\infty)$.

Per il calcolo dei limiti di forme indeterminate è utile la seguente:

Definizione 3.66 Date due successioni $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ che hanno entrambe limite, con $\{b_n\}_n$ definitivamente diversa da zero, diciamo che "a_n va come b_n", e scriviamo $a_n \sim b_n$, se il limite del quoziente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Osservazione 3.67 Questa notazione è utile negli argomenti basati sul principio di sostituzione. Se ad esempio $\{c_n\}_n$ è una terza successione (definitivamente non nulla) allora abbiamo che

$$\frac{a_n + b_n}{c_n} = \frac{b_n}{c_n} \cdot (a_n/b_n + 1)$$

e $(a_n/b_n + 1) \to 2$ se $a_n \sim b_n$. Quindi il limite della successione a primo membro si riconduce al calcolo del limite di $2 \cdot (b_n/c_n)$. Con un argomento simile, moltiplicando e dividendo per b_n, il calcolo del limite di a_n/c_n si riconduce a quello di b_n/c_n.

Continuità

Introduciamo una definizione di *continuità* per funzioni che fa uso del limite di successioni.

Definizione 3.68 Sia $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale e sia $\overline{x} \in A$. Diciamo che f è *continua* in $\overline{x}$ se per *ogni* successione di punti di A che converge a $\overline{x}$, la successione dei punti ottenuti dai corrispondenti valori di f converge al valore di f in $\overline{x}$, i.e.

$$\forall \{x_n\}_n \subset A , \quad [x_n \to \overline{x} \Rightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})] . \tag{3.6}$$

Dato un insieme $B \subset A$, la funzione f si dice continua su B se è continua in ogni punto $\overline{x} \in B$, e si dice continua se è continua su tutto $A = \text{dom} f$.

Continuità di alcune funzioni elementari

Esempio 3.69 *La funzione valore assoluto è continua.*

Infatti, per la seconda diseguaglianza triangolare abbiamo $||x_n| - |\overline{x}|| \le |x_n - \overline{x}|$ per ogni n. Quindi se $\{x_n\}_n$ è una successione convergente ad un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}$, allora $(x_n - \overline{x}) \to 0$, dunque $|x_n - \overline{x}| \to 0$ ed infine $|x_n| \to |\overline{x}|$, per il corollario al teorema dei carabinieri.

Esempio 3.70 *Le funzioni seno e coseno sono continue.*

Proviamo prima la continuità in $\overline{x}=0$. Dalla trigonometria[1] sappiamo che

$$\forall\, x\,,\quad 0\le|\operatorname{sen}x|\le|x|\,,\quad 1-|x|\le\cos x\le 1\,.$$

Quindi, se $x_n\to 0$, allora $|x_n|\to 0$ e $|\operatorname{sen}x_n|\to 0$, da cui $\operatorname{sen}x_n\to 0=\operatorname{sen}0$. Analogamente, poiché $1-|x_n|\le\cos x_n\le 1$, per il teorema dei carabinieri otteniamo che $\cos x_n\to 1=\cos 0$.

Fissato ora $\overline{x}\neq 0$, e posto $d_n=x_n-\overline{x}$, abbiamo $d_n\to 0 \iff x_n\to\overline{x}$. Inoltre, usando il caso precedente e le formule sul seno e coseno della somma di due argomenti, otteniamo

$$\operatorname{sen}x_n=\operatorname{sen}(\overline{x}+d_n)=(\operatorname{sen}\overline{x}\cos d_n+\cos\overline{x}\operatorname{sen}d_n)\to(\operatorname{sen}\overline{x}\cos 0+\cos\overline{x}\operatorname{sen}0)=\operatorname{sen}\overline{x}$$

$$\cos x_n=\cos(\overline{x}+d_n)=(\cos\overline{x}\cos d_n-\operatorname{sen}\overline{x}\operatorname{sen}d_n)\to(\cos\overline{x}\cos 0-\operatorname{sen}\overline{x}\operatorname{sen}0)=\cos\overline{x}\,.$$

Esempio 3.71 *Le funzioni polinomiali e razionali sono continue.* Infatti, dai teoremi sul limite di somma e prodotto, se $x_n\to\overline{x}\in\mathbb{R}$ allora $P(x_n)\to P(\overline{x})$ per ogni polinomio $P(x)$ ed ogni $\overline{x}\in\mathbb{R}$.

Se ora $f(x)=P(x)/Q(x)$, il suo dominio è naturale è $A=\{x\in\mathbb{R}\mid Q(x)\neq 0\}$, dunque per ogni $\overline{x}\in A$ e per ogni successione $\{x_n\}_n$ di punti di A tale che $x_n\to\overline{x}$, abbiamo $P(x_n)\to P(\overline{x})$ e $Q(x_n)\to Q(\overline{x})\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, dunque $f(x_n)\to f(\overline{x})$ per il teorema sul limite del quoziente.

Ragionando come negli esempi precedenti, si dimostra facilmente la seguente

Proposizione 3.72 *Se due funzioni f e g sono continue su A, allora lo sono anche le funzioni valore assoluto $|f|$, somma $f+g$, prodotto fg e quoziente f/g (quest'ultima su $\{x\in A\mid g(x)\neq 0\}$).*

Esempio 3.73 La funzione tangente è continua essendo $\tan x=\operatorname{sen}x/\cos x$.

Corollario 3.74 *Per ogni $k\in\mathbb{Z}$, la funzione potenza x^k è continua. Inoltre, se $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, abbiamo*

$$\forall\,\{x_n\}_n\,,\quad x_n\to+\infty\Rightarrow\begin{cases}(x_n)^k\to+\infty & \textit{se}\quad k>0\\ (x_n)^k\to 0^+ & \textit{se}\quad k<0\,.\end{cases}$$

Dimostrazione: La continuità è già stata provata. La seconda affermazione segue per $k>0$ con un argomento di induzione su k, sapendo che è vera per $k=1$ e osservando che $(x_n)^{k+1}=x_n\cdot(x_n)^k$. Se $k<0$ si osserva che $(x_n)^k=1/(x_n)^{-k}$ e si passa ai reciproci. □

Composizione

Anche la composizione di funzioni continue è continua:

Proposizione 3.75 *Se f è continua in $\overline{x}$ e g è continua in $\overline{y}=f(\overline{x})$, allora $g\circ f$ è continua in $\overline{x}$. In particolare, $g\circ f$ è continua se lo sono f e g.*

Dimostrazione: Presa $\{x_n\}_n\subset\operatorname{dom}(g\circ f)$ tale che $x_n\to\overline{x}$, allora $f(x_n)\to f(\overline{x})$ e dunque, posto $y_n=f(x_n)$, abbiamo $g(y_n)\to g(\overline{y})$, i.e. $(g\circ f)(x_n)\to(g\circ f)(\overline{x})$, come volevamo dimostrare. □

Continuità e andamento di funzioni tipo radice

Proposizione 3.76 *Per ogni $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, la funzione $x^{1/k}$ è continua.*

Vedremo che la continuità delle funzioni radice $x^{1/k}$ su $[0,+\infty[$ è una conseguenza del fatto $x^{1/k}$ è l'inversa della funzione potenza $x^k:[0,+\infty[\to[0,+\infty[$, che è una funzione continua definita su un intervallo, cf. proposizione 5.48.

Proposizione 3.77 *Per ogni $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ abbiamo*

$$\forall\,\{x_n\}_n\,,\quad x_n\to+\infty\Rightarrow\begin{cases}(x_n)^{1/k}\to+\infty & \textit{se}\quad k>0\\ (x_n)^{1/k}\to 0^+ & \textit{se}\quad k<0\end{cases}$$

$$\forall\,\{x_n\}_n\,,\quad x_n\to 0^+\Rightarrow\begin{cases}(x_n)^{1/k}\to 0^+ & \textit{se}\quad k>0\\ (x_n)^{1/k}\to+\infty & \textit{se}\quad k<0\,.\end{cases}$$

[1] Per ogni $x>0$ abbiamo $0<\operatorname{sen}x<x$ e $0>\operatorname{sen}(-x)>-x$, per cui dalla simmetria della funzione seno otteniamo la prima diseguaglianza. Inoltre per ogni $x>0$ abbiamo $1-x<\cos x<1$ e dunque, facendo l'estensione pari, vale la seconda.

Dimostrazione: Se $k > 0$ e $x_n \to +\infty$ allora definitivamente $x_n > 0$, dunque $1/x_n \to 0^+$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, definitivamente $0 < 1/x_n < \varepsilon^k$ e quindi per la monotonia della radice $0 < 1/(x_n)^{1/k} < \varepsilon$, da cui deduciamo che $1/(x_n)^{1/k} \to 0^+$ e dunque che $(x_n)^{1/k} \to +\infty$. Se $k < 0$ si passa ai reciproci. Il caso $x_n \to 0^+$ si riconduce al precedente, ponendo $y_n = 1/x_n$ e osservando che $(x_n)^{1/k} = 1/(y_n)^{1/k}$ e che $y_n \to +\infty$. □

Osservazione 3.78 Grazie alla continuità della composizione di funzioni continue ed alle proposizioni precedenti, deduciamo quindi la continuità delle funzioni potenze ad esponente razionale, $f(x) = x^{m/n}$, nonché l'andamento delle successioni tipo $f(x_n)$ quando $x_n \to +\infty$ o $x_n \to 0^+$ a seconda del segno dell'esponente.

Limiti di successioni fondamentali

Limiti tipo seno e coseno

Proposizione 3.79 *Se* $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} \to 1$.

Dimostrazione: Ricordiamo[2] che per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $0 < |x| < \pi/2$ risulta $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Quindi, poiché definitivamente $0 < |x_n| < \pi/2$, allora definitivamente $\cos x_n < \dfrac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} < 1$. Essendo $\cos x_n \to 1$, basta applicare il teorema dei carabinieri. □

Proposizione 3.80 *Se* $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{1 - \cos x_n}{{x_n}^2} \to \dfrac{1}{2}$.

Dimostrazione: Infatti, moltiplicando e dividendo per $(1 + \cos x_n)$, che è definitivamente diversa da zero in quanto definitivamente $0 < |x_n| < \pi/2$, abbiamo

$$\frac{1-\cos x_n}{{x_n}^2} = \frac{1-\cos^2 x_n}{(1+\cos x_n)\,{x_n}^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 x_n}{{x_n}^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x_n} = \Big(\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}\Big)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x_n} \; .$$

Poiché $\operatorname{sen} x_n/x_n \to 1$ e $(1 + \cos x_n) \to 1 + 1 = 2$, l'asserto segue dalle proprietà algebriche del limite. □

Successioni potenze ed esponenziali

Osservazione 3.81 Abbiamo già visto che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ le funzioni potenze x^k e $x^{1/k}$ (se $k \neq 0$) sono continue, quindi lo sono anche le funzioni x^q con $q \in \mathbb{Q}$. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} n^q = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 0 \\ 1 & \text{se } q = 0 \\ 0^+ & \text{se } q < 0 \; . \end{cases}$$

Proposizione 3.82 *Per le* successioni di tipo esponenziale $n \mapsto q^n$ *abbiamo:*

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } q > 1 \\ 1 & \textit{se } q = 1 \\ 0 & \textit{se } -1 < q < 1 \\ \textit{non esiste} & \textit{se } q \leq -1 \; . \end{cases}$$

Dimostrazione: Infatti, se $q > 1$, usando la diseguaglianza di Bernoulli (2.5) con $a = q-1$, maggioriamo

$$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na = 1 + n(q-1) \to +\infty \; .$$

[2]Se $0 < x < \pi/2$, sappiamo che $0 < \operatorname{sen} x < x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$. Dividendo per $\operatorname{sen} x > 0$ abbiamo anche $1 < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x}$ e passando ai reciproci $\cos x < \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$. Poiché $\cos x$ è pari, ed essendo $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ se $-\pi/2 < x < 0$, otteniamo le diseguaglianze di cui sopra.

Se $q = 1$ o $q = 0$ è ovvio. Se $0 < |q| < 1$, allora

$$0 \leq |q|^n = \frac{1}{(1/|q|)^n} \to 0$$

per il teorema sul limite del reciproco, essendo $(1/|q|) > 1$. Se $q = -1$ abbiamo $q^n = (-1)^n$, che non ha limite. Infine, se $q < -1$, allora $q^{2n} = (-|q|)^{2n} = |q|^{2n} = (|q|^2)^n \to +\infty$, mentre $q^{2n+1} = (-|q|)^{2n+1} = -|q|^{2n+1} = -|q| \cdot (|q|^2)^n \to -\infty$, quindi la successione non ha limite perché le sue sottosuccessioni di posto pari e dispari divergono positivamente e negativamente, rispettivamente. □

Esempio 3.83 Ricordando la formula (2.4) sulla somma di una progressione geometrica, e applicando le proprietà algebriche dei limiti, otteniamo immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1\ . \end{cases}$$

Osservazione 3.84 Grazie a questa formula si prova ad esempio che $0,\overline{9} = 1$, cf. l'osservazione 2.18.

Criterio del rapporto per successioni

Proposizione 3.85 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che definitivamente $a_n > 0$ e*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\ .$$

Allora $a_n \to 0$ se $0 \leq l < 1$ e $a_n \to +\infty$ se $l > 1$.

Osservazione 3.86 Nel caso in cui $l = 1$, il criterio non dice nulla sul limite: infatti, se $a_n = n$ abbiamo che $a_{n+1}/a_n = (n+1)/n = (1 + 1/n) \to 1$ e $a_n \to +\infty$, mentre se $b_n = 1/n$ abbiamo che $b_{n+1}/b_n = n/(n+1) \to 1$ e $b_n \to 0$.

Osserviamo che nel caso $0 \leq l < 1$, scegliendo una costante $q < 1$ tale che $l < q$, ad esempio $q = (l+1)/2$, dalla definizione di limite deduciamo che definitivamente $a_{n+1}/a_n \leq q$. Analogamente, nel caso $l > 1$, scegliendo questa volta una costante $q > 1$ tale che $l > q$ (ad esempio ancora $q = (l+1)/2$ se $l \in \mathbb{R}$) deduciamo che definitivamente $a_{n+1}/a_n \geq q$. Quindi la dimostrazione del criterio del rapporto si riconduce a quella del seguente criterio più generale:

Proposizione 3.87 *Sia $\{a_n\}_n$ una successione definitivamente positiva. Se esiste $0 < q < 1$ tale che definitivamente $a_{n+1}/a_n \leq q$, allora $a_n \to 0$. Se invece esiste $q > 1$ tale che definitivamente $a_{n+1}/a_n \geq q$, allora $a_n \to +\infty$.*

Dimostrazione: Nel primo caso, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $0 < a_{n+1} \leq q\, a_n$, con $0 < q < 1$. Allora $0 < a_{\overline{n}+1} \leq q\, a_{\overline{n}}$ ed anche $0 < a_{\overline{n}+2} \leq q\, a_{\overline{n}+1} \leq q^2 a_{\overline{n}}$. Iterando l'argomento, per induzione segue facilmente che

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\,, \quad 0 < a_{\overline{n}+m} \leq q^m a_{\overline{n}}\ .$$

Posto quindi $\overline{n} + m = n$, in maniera equivalente scriviamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq \overline{n}\,, \quad 0 < a_n \leq q^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = \frac{a_{\overline{n}}}{q^{\overline{n}}} \cdot q^n\ . \tag{3.7}$$

Poiché $q^n \to 0$ e $a_{\overline{n}}/q^{\overline{n}}$ è una costante positiva, per il teorema dei carabinieri otteniamo che $a_n \to 0$.

In maniera analoga, nel secondo caso esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta $a_{n+1} \geq q\, a_n > 0$, con $q > 1$. Quindi, come sopra otteniamo che

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq \overline{n}\,, \quad a_n \geq \frac{a_{\overline{n}}}{q^{\overline{n}}} \cdot q^n\ . \tag{3.8}$$

Poiché $q^n \to +\infty$ e $a_{\overline{n}}/q^{\overline{n}}$ è una costante positiva, dal teorema del confronto segue che $a_n \to +\infty$. □

Esempio 3.88 Abbiamo che $n! \to +\infty$, in quanto $(n+1)!/n! = (n+1) \to +\infty$. Questo limite segue anche confrontando $n! \geq n$ per ogni n positivo. In maniera analoga, essendo $n^n \geq n$ per n positivo, deduciamo che anche $n^n \to +\infty$.

Confronto fra successioni divergenti

Abbiamo visto che le successioni potenze n^k, con $k \in \mathbb{N}$, esponenziali q^n, con base $q > 1$, ed anche $n!$ e n^n hanno tutte limite $+\infty$. Nel calcolo di limiti occorre però talvolta sapere anche quali sono più veloci. Vediamo adesso che le successioni scritte sopra sono in ordine crescente di velocità, i.e. le esponenziali dominano sulle potenze, il fattoriale sulle esponenziali ed infine n^n sul fattoriale.

Proposizione 3.89 *Abbiamo:*

1. *per ogni* $k \in \mathbb{Q}$ *risulta* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^k} = +\infty$ *se* $q > 1$ *ed invece* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n^k} = 0$ *se* $0 < |q| < 1$
2. *per ogni* $q \in \mathbb{R}$ *risulta* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$
3. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0^+$.

Dimostrazione: i) Se $q > 1$ e $k \in \mathbb{Q}$, posto $a_n = q^n/n^k$ abbiamo $a_n > 0$ e $a_{n+1} = q^{n+1}/(n+1)^k$ e dunque $a_{n+1}/a_n = q/(1+1/n)^k \to q$. Quindi $a_n \to +\infty$ per il criterio del rapporto.

Se invece $0 < |q| < 1$, essendo $(1/|q|) > 1$, allora

$$0 \le \left|\frac{q^n}{n^k}\right| = \Big(\frac{(1/|q|)^n}{n^{-k}}\Big)^{-1} \to 0$$

per il teorema sul limite del reciproco, da cui segue l'asserto per confronto.

ii) Posto invece $a_n = q^n/n!$, se $q > 0$ abbiamo $a_n > 0$ e $a_{n+1}/a_n = q/(n+1) \to 0$, quindi per il criterio del rapporto $a_n \to 0$. Per $q = 0$ è ovvio, mentre per $q < 0$ abbiamo $0 \le |q^n/n!| = |q|^n/n! \to 0$.

iii) Osserviamo infine che per n positivo $0 < \dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2\cdot 3 \cdots n}{n^{n-1}} \le \dfrac{1}{n}$ con $\dfrac{1}{n} \to 0$. □

Criterio della radice per successioni

Consideriamo prima le successioni di tipo radice, come $a_n = 2^{1/n} = \sqrt[n]{2}$.

Proposizione 3.90 *Per ogni* $q > 0$ *abbiamo che* $q^{1/n} \to 1$.

Dimostrazione: Se $q > 1$, allora $q^{1/n} > 1$. Per la diseguaglianza di Bernoulli (2.5), con $a_n = q^{1/n} - 1 > 0$, stimiamo

$$q = (1 + a_n)^n \ge 1 + na_n \quad \Rightarrow \quad 0 < a_n \le \frac{q-1}{n} \to 0$$

da cui otteniamo $a_n \to 0$ e dunque $q^{1/n} \to 1$, Se $q = 1$ la tesi è ovvia, mentre se $0 < q < 1$ scriviamo $q^{1/n} = 1/(1/q)^{1/n}$ e il limite è ancora 1 per il teorema del limite del reciproco, in quanto $(1/q) > 1$. □

Usando questa proposizione si dimostra, in maniera non banale, il *criterio della radice per successioni.*

Proposizione 3.91 *Sia* $\{a_n\}_n$ *una successione di reali positivi. Se* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to l$ *allora anche* $\sqrt[n]{a_n} \to l$.

Esempio 3.92 Grazie al criterio della radice, studiamo il comportamento di successioni del tipo $\sqrt[n]{a_n}$, dove $a_n \to +\infty$ con diverse velocità.
Per ogni $q \in \mathbb{Q}^+$ abbiamo $\sqrt[n]{n^q} \to 1$. Infatti, posto $a_n = n^q$, abbiamo $a_{n+1}/a_n = [(n+1)/n]^q \to 1$, per la continuità di x^q nel punto 1.
Ovviamente $\sqrt[n]{q^n} \equiv q$ per ogni $q > 1$, mentre $\sqrt[n]{n^n} = n \to +\infty$.
Infine abbiamo $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$. Infatti, posto $a_n = n!$, otteniamo $a_{n+1}/a_n = (n+1)!/n! = (n+1) \to +\infty$.

Il numero di Nepero

Studiamo ora le successioni $\mathsf{e}_n := \Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n$ e $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Mostreremo che entrambe convergono ad un numero reale compreso tra 2 e 3, il *numero di Nepero* e.

Proposizione 3.93 *La successione $\{\mathsf{e}_n\}_n$ è strettamente crescente e limitata superiormente, inoltre $2 \leq \mathsf{e}_n < 3 - 1/12$ per ogni n. Quindi $\{\mathsf{e}_n\}_n$ converge.*

Dimostrazione: Dalla diseguaglianza di Bernoulli (2.5), con $a = 1/n$, stimamo $\mathsf{e}_n \geq 1 + n(1/n) = 2$ per ogni n. Inoltre, dalla formula del binomio di Newton (2.7), con $a = 1$ e $b = 1/n$, scriviamo

$$\mathsf{e}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$$

e dunque, per ogni $n \geq 2$,

$$\mathsf{e}_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n}$$

dove per ogni intero $2 \leq k \leq n$ abbiamo posto

$$P_{k,n} := \prod_{i=0}^{k-1} \Big(1 - \frac{i}{n}\Big) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \ .$$

Lemma 3.94 *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *per ogni k, n con $2 \leq k \leq n$ risulta $0 < P_{k,n} < 1$ e $P_{k,n} < P_{k,n+1}$*
2. $\lim_{n\to\infty} P_{k,n} = 1$ *per ogni k*
3. $\mathsf{e}_n \leq b_n$ *per ogni $n \geq 2$*
4. $\mathsf{e}_n < \mathsf{e}_{n+1}$ *per ogni n.*

Dimostrazione: i) Infatti $0 < (1 - i/n) < 1$ per ogni $i = 1, \ldots, k-1$ e $(1 - i/n) < (1 - i/(n+1))$.
ii) Osserviamo che $(1 - i/n) \to 1$ per ogni fissato $i = 1, \ldots, k-1$.
iii) Stimiamo $\mathsf{e}_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = b_n$.
iv) Abbiamo $\mathsf{e}_1 = 2 < 9/4 = \mathsf{e}_2$, mentre per ogni $n \geq 2$, essendo $P_{k,n} < P_{k,n+1}$, maggioriamo

$$\mathsf{e}_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} < 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} = \mathsf{e}_{n+1} \ .$$

□

Troviamo ora un maggiorante per la successione strettamente crescente $\{b_n\}_n$.

Proposizione 3.95 $b_n < 3 - 1/12$ *per ogni n.*

Dimostrazione: Per induzione si dimostra facilmente[3] che $k! \geq 2^{k-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora stimiamo per ogni $n \geq 4$

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{8}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \ .$$

Ricordiamo ora che la somma di una progressione geometrica (2.4) con ragione $q = 1/2$ dà la stima

$$\sum_{h=0}^{m} \Big(\frac{1}{2}\Big)^h = \frac{1 - (1/2)^{m+1}}{1 - 1/2} < \frac{1}{1/2} = 2 \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \ .$$

Posto $h = k - 4$, possiamo quindi maggiorare

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=4}^{n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k-1} = \sum_{h=0}^{n-4} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{h+3} = \frac{1}{8} \sum_{h=0}^{n-4} \Big(\frac{1}{2}\Big)^h < \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

[3]Tale diseguaglianza è vera per $k = 0, 1$. Inoltre, supposto che sia vera per un naturale $k \geq 1$, essa vale anche per $k+1$, in quanto $(k+1)! = (k+1)\, k! \geq (k+1)\, 2^{k-1} \geq 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$.

e dunque $b_n < \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{35}{12} = 3 - \dfrac{1}{12}$, come volevamo dimostrare. □

Essendo quindi $\{\mathsf{e}_n\}_n$ una successione strettamente crescente e limitata superiormente da $3 - 1/12$, per il teorema 3.32 essa converge ad un numero reale strettamente compreso tra 2 e 3. □

Definizione 3.96 Chiamiamo numero di Nepero il limite e della successione $\{\mathsf{e}_n\}_n$, i.e.

$$\mathsf{e} := \lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n , \qquad 2 < \mathsf{e} < 3 - 1/12. \tag{3.9}$$

Osservazione 3.97 Il numero e non è razionale e si approssima facilmente con $\mathsf{e} \simeq 2.7$. Si può anche dimostrare che e *non è algebrico*, i.e. che non esiste nessuna equazione polinomiale a coefficienti interi che sia risolta da e. Si noti che $\sqrt{2}$ è algebrico, in quanto risolve l'equazione $x^2 - 2 = 0$.

Esempio 3.98 Vediamo ora che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2} = +\infty$ e che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^{n} = 1$.

Il primo limite si ottiene dal teorema del confronto, in quanto $\displaystyle\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n^2} = (\mathsf{e}_n)^n \ge 2^n \to +\infty$.

Per il secondo, scriviamo $\displaystyle\Big(1 + \frac{1}{n^2}\Big)^{n} = (\mathsf{e}_{n^2})^{1/n}$. Essendo $1 \le \mathsf{e}_{n^2} \le 3$ per ogni n, allora per la monotonia della funzione $x^{1/n}$ sui reali non negativi risulta $1 \le (\mathsf{e}_{n^2})^{1/n} \le 3^{1/n}$. Poiché $3^{1/n} \to 1$, basta applicare il teorema dei carabinieri.

Proposizione 3.99 *Anche la successione* $\displaystyle b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *converge al numero di Nepero* e.

Dimostrazione: Osserviamo che è sufficiente mostrare che

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\,, \quad b_m \le \mathsf{e}\,. \tag{3.10}$$

Infatti, se vale (3.10), allora per la iii) definitivamente $\mathsf{e}_n \le b_n \le \mathsf{e}$ e l'asserto segue dal teorema dei carabinieri, in quanto $\mathsf{e}_n \to \mathsf{e}$. Per provare la (3.10), che è ovviamente vera per $m = 0, 1$, fissato $m \ge 2$ stimiamo per ogni $n \ge m$

$$\mathsf{e}_n = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\, P_{k,n} \ge b_n^{(m)}\,, \qquad b_n^{(m)} := 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\, P_{k,n}\ .$$

Dalla proprietà ii) otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} b_n^{(m)} = \lim_{n\to\infty} \Big(2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!}\, P_{k,n}\Big) = 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k!} = b_m$$

mentre sappiamo che $\mathsf{e}_n \to \mathsf{e}$. La successione $\{\mathsf{e}_n - b_n^{(m)}\}_n$ è non negativa ed ha limite $\mathsf{e} - b_m$. Quindi, dalla permanenza del segno, deduciamo che il limite $\mathsf{e} - b_m \ge 0$, i.e. la diseguaglianza (3.10). □

Osservazione numerica

Anche se entrambe le successioni e_n e b_n convergono ad e, la velocità di convergenza della seconda è maggiore, quindi b_n è più utile nelle stime numeriche di e. Cerchiamo ad esempio il primo elemento delle due successioni che dista meno di 10^{-3} da e. Si verifica che il primo naturale n tale che $(\mathsf{e} - \mathsf{e}_n) < 10^{-3}$ è $n = 1360$, mentre il primo naturale tale che $(\mathsf{e} - b_n) < 10^{-3}$ è $n = 6$.

Le stime sul numero di Nepero si ottengono per esempio costruendo oltre ad $\{\mathsf{e}_n\}_n$ un'altra successione $\{c_n\}_n$ che converge ad e dall'alto, i.e. che sia decrescente. Posto infatti $c_n := (1 + 1/n)^{n+1}$, poiché $c_n = \mathsf{e}_n \cdot (1 + 1/n)$, allora ovviamente $c_n \to \mathsf{e}$. Inoltre, si può dimostrare che $c_n > c_{n+1}$ per ogni n. Allora abbiamo che

$$\forall\, n\,, \quad \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \le \mathsf{e} \le \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1}\ . \tag{3.11}$$

Quindi, se ad esempio e_n e c_n hanno le prime tre cifre dopo la virgola uguali, si ottiene un'approssimazione di e con errore più piccolo di 10^{-3}, i.e. con tre cifre decimali esatte.

La formula di Stirling

Per approssimare il fattoriale si usa la *formula di Stirling*

$$\forall\, n \geq 1, \quad \frac{n^n}{\mathsf{e}^n} \leq n! \leq n\mathsf{e}\,\frac{n^n}{\mathsf{e}^n}\ . \tag{3.12}$$

La sua dimostrazione fa uso delle diseguaglianze (3.11) e del principio di induzione.

Esponenziale e logaritmo

La funzione esponenziale

Consideriamo ora le successioni $\mathsf{e}_n(x) := \Big(1+\dfrac{x}{n}\Big)^n$ e $b_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$, entrambe dipendenti da un parametro reale $x \in \mathbb{R}$. Si noti che per $x = 1$ abbiamo $\mathsf{e}_n(1) = \mathsf{e}_n$ e $b_n(1) = b_n$. Con un po' di fatica si dimostra la seguente

Proposizione 3.100 *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ le successioni $\{\mathsf{e}_n(x)\}_n$ e $\{b_n(x)\}_n$ convergono allo stesso limite $l(x)$, dove $l(0) = 1$ ed $l(1) = \mathsf{e}$. Inoltre $l(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e*

$$x_1 < x_2 \quad\Rightarrow\quad l(x_1)(x_2 - x_1) \leq l(x_2) - l(x_1) \leq l(x_2)(x_2 - x_1)\ .$$

Vale inoltre la seguente importante proprietà, detta di semigruppo:

Proposizione 3.101 *Per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $l(x_1 + x_2) = l(x_1)\cdot l(x_2)$.*

Di conseguenza, possiamo ora verificare che

$$\forall\, x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}\,, \quad l(n/m) = [l(1)]^{n/m} = \mathsf{e}^{n/m}\ . \tag{3.13}$$

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo per induzione $l(nx) = (l(x))^n$, in particolare $l(n) = \mathsf{e}^n$. Inoltre, se $m \in \mathbb{N}^+$ scriviamo $\mathsf{e} = l(1) = l(m\cdot(1/m)) = [l(1/m)]^m$, dunque $l(1/m) = l(1)^{1/m} = \mathsf{e}^{1/m}$, da cui otteniamo $l(n/m) = l(1/m)^n = (l(1)^{1/m})^n = \mathsf{e}^{n/m}$. Infine osseviamo che se $-q$ è un razionale negativo, allora $l(-q)\,l(q) = l(0) = 1$, da cui $l(-q) = l(q)^{-1} = [l(1)^q]^{-1} = [l(1)]^{-q} = \mathsf{e}^{-q}$.

Definizione 3.102 La funzione *esponenziale* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $\exp(x) = \mathsf{e}^x := l(x)$.

Osservazione 3.103 Dunque la proposizione 3.101 esprime la prima proprietà delle potenze nel caso di base e : per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\mathsf{e}^{x_1+x_2} = \mathsf{e}^{x_1}\cdot\mathsf{e}^{x_2}$.

Da quanto visto sopra, si ottiene la seguente:

Proposizione 3.104 *La funzione* exp *è continua, positiva e strettamente crescente. Inoltre*

$$x_1 < x_2 \quad\Rightarrow\quad \mathsf{e}^{x_1}(x_2 - x_1) \leq \mathsf{e}^{x_2} - \mathsf{e}^{x_1} \leq \mathsf{e}^{x_2}(x_2 - x_1)\ .$$

Osservazione 3.105 Di conseguenza, scelti $x_1 = 0$ e $x_2 = x$, e poi $x_1 = x$ e $x_2 = 0$, otteniamo

$$\begin{array}{lll} x > 0 & \Rightarrow & x \leq \mathsf{e}^x - 1 \leq \mathsf{e}^x\cdot x \\ x < 0 & \Rightarrow & \mathsf{e}^x\cdot(-x) \leq 1 - \mathsf{e}^x \leq 1\cdot(-x) \end{array}$$

e dunque

$$\forall\, x\,, \quad x \leq \mathsf{e}^x - 1 \leq x\,\mathsf{e}^x\ .$$

In particolare, abbiamo che

$$\forall\, x\,, \quad \mathsf{e}^x \geq 1 + x \tag{3.14}$$

ed infine

$$\forall\, x \neq 0\,, \quad \min\{x, 1\} \leq \frac{\mathsf{e}^x - 1}{x} \leq \max\{1, \mathsf{e}^x\}\ . \tag{3.15}$$

Valgono allora i seguenti limiti fondamentali dell'esponenziale:

Proposizione 3.106 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$*, allora* $\dfrac{\mathrm{e}^{x_n} - 1}{x_n} \to 1$.
Inoltre, $x_n \to +\infty \Rightarrow \mathrm{e}^{x_n} \to +\infty$ *ed anche* $x_n \to -\infty \Rightarrow \mathrm{e}^{x_n} \to 0^+$.

Dimostrazione: Il primo limite fondamentale segue dalla proprietà (3.15) con $x = x_n$, grazie al teorema dei carabinieri, osservando che $\mathrm{e}^{x_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$ per continuità. Il secondo dalla (3.14), ed il terzo dall'osservazione che $\mathrm{e}^{x_n} = 1/\mathrm{e}^{-x_n}$, grazie al teorema sul limite del reciproco ed al fatto che $-x_n \to +\infty$ se $x_n \to -\infty$. □

Osservazione 3.107 In particolare, abbiamo che $\sup \exp = +\infty$ e $\inf \exp = 0$, che non è minimo.

La funzione logaritmo

Sappiamo che la funzione exp è continua e strettamente crescente, con $\mathrm{e}^x > 0$ per ogni x, dunque la sua immagine è contenuta in $]0, +\infty[$. Inoltre, sappiamo che $\inf \exp = 0$ e che exp non è limitata superiormente. Grazie al teorema dei valori intermedi, otterremo che la sua immagine è esattamente $]0, +\infty[$. Dunque la funzione $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biunivoca ed invertibile.

Definizione 3.108 La funzione *logaritmo* $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è l'inversa della funzione esponenziale.

Quindi abbiamo
$$\forall\, x > 0\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log x = y \iff \mathrm{e}^y = x$$
ed ovviamente
$$\forall\, x > 0\,, \quad \mathrm{e}^{\log x} = x\,, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log(\mathrm{e}^y) = y\ .$$
Inoltre la funzione log è biunivoca e crescente, come inversa di una funzione crescente. Essendo $\log 1 = 0$, abbiamo anche che $\log x > 0$ se $x > 1$ e $\log x < 0$ se $0 < x < 1$. Poiché $\mathrm{e}^y \geq 1 + y$ per ogni y, posto $y = \log x$ otteniamo che $\log x \leq x - 1$ per ogni $x > 0$. Inoltre, dedurremo che *la funzione* log *è continua*, essendo inversa di una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Fissati $x_1, x_2 > 0$, abbiamo $\exp(\log x_1 + \log x_2) = \exp(\log x_1) \cdot \exp(\log x_2) = x_1\, x_2 = \exp(\log(x_1\, x_2))$. Quindi, per l'iniettività dell'esponenziale otteniamo che
$$\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log(x_1\, x_2) = \log x_1 + \log x_2\ .$$
Scelto $x_1 = x > 0$ e $x_2 = 1/x_1 > 0$, essendo $\log 1 = 0$ otteniamo in particolare che
$$\forall\, x > 0\,, \quad \log(1/x) = -\log x$$
e dunque
$$\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log(x_1/x_2) = \log x_1 - \log x_2\ .$$
Inoltre, per induzione otteniamo che $\log(x^n) = n \log x$ per ogni $x > 0$ ed $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, per ogni $x > 0$ ed $m \in \mathbb{N}^+$, scriviamo $m \log(x^{1/m}) = \log x$ e dunque che $\log(x^{1/m}) = (1/m) \log x$. Quindi $\log(x^{n/m}) = n \log(x^{1/m}) = (n/m)\, \log x$ ed infine, essendo $\log(x^{-n/m}) = -\log(x^{n/m})$, abbiamo che:
$$\forall\, q \in \mathbb{Q}\,, \quad \forall\, x > 0\,, \quad \log(x^q) = q\, \log x\ . \tag{3.16}$$

Osservazione 3.109 Dalla proprietà (3.16) otteniamo che $(\mathrm{e}^y)^q = \mathrm{e}^{yq}$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Posto infatti $x = \mathrm{e}^y$, i.e. $y = \log x$, scriviamo
$$\mathrm{e}^{yq} = \exp(q\, \log x) = \exp(\log(x^q)) = x^q = (\mathrm{e}^y)^q\ .$$

Dalle proprietà dell'esponenziale, otteniamo infine i seguenti limiti fondamentali del logaritmo:

Proposizione 3.110 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$*, allora* $\dfrac{\log(1 + x_n)}{x_n} \to 1$.
Inoltre, $x_n \to +\infty \Rightarrow \log x_n \to +\infty$ *ed anche* $x_n \to 0^+ \Rightarrow \log x_n \to -\infty$.

Dimostrazione: Nel primo caso, abbiamo che definitivamente $0 < |x_n| < 1$. Posto $y_n = \log(1+x_n)$, i.e. $x_n = \exp(y_n) - 1$, allora $x_n \to 0$ se e solo se $y_n \to 0$. Quindi $(\exp(y_n) - 1)/y_n \to 1$, i.e. $x_n / \log(1+x_n) \to 1$, da cui segue il primo limite, passando ai reciproci.

Posto invece definitivamente $y_n = \log x_n \iff x_n = \exp(y_n)$, allora $x_n \to +\infty \Rightarrow \exp(y_n) \to +\infty \Rightarrow y_n \to +\infty \Rightarrow \log x_n \to +\infty$. Analogamente, $x_n \to 0^+ \Rightarrow \exp(y_n) \to 0^+ \Rightarrow y_n \to -\infty \Rightarrow \log x_n \to -\infty$. □

Funzioni esponenziali

Dalla proprietà (3.16) deduciamo che per ogni $a > 0$ e $q \in \mathbb{Q}$, $\exp(q \log a) = \exp(\log(a^q)) = a^q$. Poiché la funzione exp è definita su tutto $\mathbb{R}$, possiamo dare la seguente

Definizione 3.111 Per ogni $a > 0$ la *funzione esponenziale di base* a è la funzione reale $a^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla legge

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad a^x := \exp(x \log a)\ .$$

Se $a = 1$, allora $\log 1 = 0$ e dunque 1^x è la funzione costante uguale ad 1 (ad esempio, $1^\pi = 1$).

Se $a > 1$, allora $\log a > 0$, dunque $x \mapsto x \log a$ è strettamente crescente. Per la monotonia della funzione exp deduciamo quindi che a^x è strettamente crescente. Analogamente, se $0 < a < 1$, allora $\log a < 0$ e $x \mapsto x \log a$ è strettamente decrescente, dunque a^x è anch'essa strettamente decrescente. Inoltre a^x è continua, come composizione di funzioni continue.

Poiché dunque $x \mapsto x \log a$ è suriettiva, mentre exp ha immagine $]0, +\infty[$, deduciamo che l'immagine di a^x è esattamente $]0, +\infty[$, tranne ovviamente nel caso $a = 1$.

Dall'andamento della funzione exp a $\pm\infty$, otteniamo immediatamente:

Proposizione 3.112 *Se* $x_n \to +\infty$ *allora* $a^{x_n} \to +\infty$ *se* $a > 1$ *e* $a^{x_n} \to 0^+$ *se* $0 < a < 1$. *Inoltre, se* $x_n \to -\infty$ *allora* $a^{x_n} \to 0^+$ *se* $a > 1$ *e* $a^{x_n} \to +\infty$ *se* $0 < a < 1$.

Dal limite fondamentale di exp otteniamo anche:

Proposizione 3.113 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{a^{x_n} - 1}{x_n} \to \log a$ *per ogni* $a > 0$.

Dimostrazione: Se $a \neq 1$, essendo $\log a \neq 0$ abbiamo

$$\frac{a^{x_n} - 1}{x_n} = \frac{\exp(x_n \log a) - 1}{x_n} = \frac{\exp(x_n \log a) - 1}{x_n \log a} \cdot \log a \to 1 \cdot \log a\ .$$

Se invece $a = 1$, allora $(1^{x_n} - 1)/x_n = 0$ per ogni n (non è una forma indeterminata!) e $\log 1 = 0$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 3.114 Otteniamo ora le proprietà delle potenze: per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$, $(a^x)^q = a^{xq}$. Infatti sappiamo che valgono per $a = \mathsf{e}$, per cui scriviamo $a^{x_1+x_2} = \exp((x_1 + x_2)\log a) = \exp(x_1 \log a + x_2 \log a) = \exp(x_1 \log a) \cdot \exp(x_2 \log a) = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$ ed inoltre $(a^x)^q = (\exp(x \log a))^q = \exp(qx \log a) = a^{xq}$. Infine ricaviamo la terza proprietà delle potenze: per ogni $a, b > 0$ e $x \in \mathbb{R}$, $a^x \cdot b^x = (ab)^x$. Scriviamo infatti $a^x \cdot b^x = \exp(x \log a) \cdot \exp(x \log b) = \exp(x \log a + x \log b) = \exp(x(\log a + \log b)) = \exp(x \log(ab)) = (ab)^x$.

Funzioni logaritmiche

D'ora in poi *supporremo sempre* $a > 0$ **e** $a \neq 1$. Abbiamo visto che la funzione $a^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è biunivoca e strettamente monotona (crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$). Quindi ha inversa:

Definizione 3.115 Se $a > 0$ **e** $a \neq 1$, la funzione *logaritmo di base* a è la funzione $\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ data dall'inversa della funzione esponenziale a^x.

Dalla definizione segue che per $a = \mathsf{e}$ risulta $\log_{\mathsf{e}} = \log$, che è detto *logaritmo naturale.* Inoltre

$$\forall\, x > 0\,,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log_a x = y \iff a^y = x$$

ed ovviamente

$$\forall\, x > 0\,, \quad a^{\log_a x} = x\,, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \log_a(a^y) = y\ .$$

Quindi $x \mapsto \log_a x$ è strettamente crescente se $a > 1$, decrescente se $0 < a < 1$. Inoltre $\log_a 1 = 0$ in quanto $a^0 = 1$. Allora abbiamo che se $a > 1$, $\log_a x > 0 \iff x > 1$ e $\log_a x < 0 \iff 0 < x < 1$, mentre se $0 < a < 1$, $\log_a x < 0 \iff x > 1$ e $\log_a x > 0 \iff 0 < x < 1$. Infine vedremo che la funzione $\log_a$ è continua, essendo l'inversa di una funzione continua su $\mathbb{R}$.

Osservazione 3.116 Presi ora $a, b > 0$, con $a \neq 1$, essendo $b = a^{\log_a b}$ e prendendo il logaritmo naturale di ambo i membri abbiamo che $\log b = \log(a^{\log_a b}) = \log_a b \cdot \log a$ e dunque, essendo $\log a \neq 0$,

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a} \ . \tag{3.17}$$

In particolare abbiamo che

$$\log_{1/a} b = \frac{\log b}{\log(1/a)} = \frac{\log b}{-\log a} = -\frac{\log b}{\log a} = -\log_a b \ .$$

Grazie al cambio di base (3.17) ed alle analoghe proprietà del logaritmo in base e, si ottengono immediatamente le formule sull'andamento dei logaritmi:

Proposizione 3.117 *Se* $\{x_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *e* $x_n \to 0$, *allora* $\dfrac{\log_a(x_n + 1)}{x_n} \to \dfrac{1}{\log a}$.
Inoltre, se $x_n \to +\infty$, *allora* $\log_a x_n \to +\infty$ *se* $a > 1$ *e* $\log_a x_n \to -\infty$ *se* $0 < a < 1$. *Infine, se* $x_n \to 0^+$, *allora* $\log_a x_n \to -\infty$ *se* $a > 1$ *e* $\log_a x_n \to +\infty$ *se* $0 < a < 1$.

Usando la (3.17) si ottengono in maniera analoga anche le proprietà dei logaritmi di base a:

1. $\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log_a(x_1\, x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_1$

2. $\forall\, x > 0\,, \quad \log_a(1/x) = -\log_a x$

3. $\forall\, x_1, x_2 > 0\,, \quad \log_a(x_1/x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_1$

4. $\forall\, q \in \mathbb{Q}\,, \quad \forall\, x > 0\,, \quad \log_a(x^q) = q\, \log_a x$.

Osservazione 3.118 Di conseguenza tutti i logaritmi si recuperano a partire da quello naturale, tramite un cambio di base. In alcune applicazioni si utilizza la base 10, in quanto se ad esempio $x \simeq 10^n$, con $n \in \mathbb{Z}$, allora $\log_{10} x \simeq \log_{10}(10^n) = n$. Da questa osservazione nascono le scale in base logaritmica usate ad esempio in chimica per stabilire il grado di acidità (detto pH) di una sostanza.

Passaggio alla forma esponenziale

Sia $\{a_n\}_n$ una successione definitivamente positiva. Allora per ogni successione $\{b_n\}_n$ possiamo scrivere che definitivamente

$$(a_n)^{b_n} = \mathsf{e}^{\log((a_n)^{b_n})} = \mathsf{e}^{b_n \log(a_n)} \ . \tag{3.18}$$

Supponendo che $a_n \to l_a$ e $b_n \to l_b$, vogliamo calcolare il limite di $(a_n)^{b_n}$.

La continuità e l'andamento dell'esponenziale a $\pm\infty$ permettono dunque di calcolare il limite di $(a_n)^{b_n}$ una volta noto il limite della successione $b_n \log(a_n)$. Tranne che nei casi in cui all'esponente ci sia una forma indeterminata del tipo $0 \cdot (\pm\infty)$ o $\pm\infty \cdot 0$, il limite si risolve facilmente. Osserviamo che se $b_n \to 0$, allora $\log(a_n) \to -\infty$ se $a_n \to 0^+$ mentre $\log(a_n) \to +\infty$ se $a_n \to +\infty$. Questo dà luogo alle cosiddette forme indeterminate 0^0 e ∞^0. Se invece $b_n \to \pm\infty$, allora $\log(a_n) \to 0 \iff a_n \to 1$, per cui abbiamo anche la forma indeterminata 1^∞.

Proposizione 3.119 *Se* $\{x_n\}_n \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *e* $x_n \to 0$, *allora* $\lim_{n\to\infty} \big(1 + x_n\big)^{1/x_n} = \mathsf{e}$.
Se inoltre $y_n \to \pm\infty$, *allora* $\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \dfrac{1}{y_n}\Big)^{y_n} = \mathsf{e}$.

Dimostrazione: Infatti, definitivamente risulta $0 < |x_n| < 1$ e dunque

$$(1 + x_n)^{1/x_n} = \exp[\log[(1 + x_n)^{1/x_n}]] = \exp[\log(1 + x_n)/x_n] \to \exp(1) = \mathsf{e} \ .$$

Per il secondo limite basta considerare la successione $x_n = 1/y_n \to 0$. □

Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sottosuccessioni

Ricordiamo che una successione di numeri reali è una funzione $f : S \to \mathbb{R}$ definita su una semiretta S di naturali, per cui abbiamo scritto $a_n = f(n)$. Quando abbiamo definito le sottosuccessioni di posto pari o dispari, abbiamo posto $b_n := a_{2n} = f(k_1(n))$ e $c_n := a_{2n+1} = f(k_2(n))$, dove $k_1(n) = 2n$ e $k_2(n) = 2n+1$ sono applicazioni da $\mathbb{N}$ in sé strettamente crescenti, cf. l'osservazione 3.18. Estendiamo tale operazione mediante la seguente

Definizione 3.120 Si dice *sottosuccessione* (o successione estratta) di una successione $f : S \to \mathbb{R}$ la composizione $f \circ k$ di f con una qualsiasi applicazione strettamente crescente $k : S \to \mathbb{N}$.

Posto quindi $k_n = k(n)$ e $a_n = f(n)$, allora una sottosuccessione è una nuova successione che si denota con $\{a_{k_n}\}_n$, dove $a_{k_n} = a_{k(n)}$. Osserviamo ora:

Proposizione 3.121 *Se $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente, allora $k(n) \geq n$ per ogni n.*

Dimostrazione: Infatti $k(0) \geq 0$. Fissato poi n, sapendo che $k(n) \geq n$, allora otteniamo $k(n+1) > k(n) \geq n$ e dunque $k(n+1) \geq n+1$. L'asserto segue quindi dal principio di induzione. □

Di conseguenza, possiamo estendere la proposizione 3.19:

Proposizione 3.122 *Se una successione $\{a_n\}$ ha limite l, allora anche ogni sua sottosuccessione ha lo stesso limite l.*

Dimostrazione: Sappiamo che $a_n \to l$ significa che $\forall\ V \in \mathcal{I}_l,\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N} : \forall\ n \geq \overline{n},\ a_n \in V$. Allora, poiché $k(n) \geq \overline{n}$ se $n \geq \overline{n}$, otteniamo che $\forall\ n \geq \overline{n},\ a_{k(n)} \in V$, come volevamo dimostrare. □

Dalla contronominale otteniamo dunque:

Corollario 3.123 *Data una successione $\{a_n\}_n$, se possiamo estrarre due sottosuccessioni che hanno limite diverso, allora la successione $\{a_n\}_n$ non ha limite.*

Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Ricordiamo ora che ogni successione convergente è limitata, ma che il viceversa è falso: esistono successioni limitate che non convergono, ad esempio $(-1)^n$. Il *teorema di Bolzano-Weierstrass* dà una risposta parziale ma fondamentale per il proseguimento della teoria.

Teorema 3.124 *Da ogni successione di numeri reali limitata possiamo sempre estrarre una sottosuccessione convergente.*

La sua dimostrazione, che non faremo per motivi di tempo, si basa su un *argomento di bisezione* e fa uso del teorema 3.32 di esistenza del limite di successioni monotone, del teorema 3.40 dei carabinieri, del principio di induzione, proposizione 2.62, ed infine della seguente:

Proposizione 3.125 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia A_n un insieme* infinito *di numeri naturali, $A_n \subset \mathbb{N}$. Allora esiste una applicazione strettamente crescente $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $k(n) \in A_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*