7 Funzioni integrabili

Primitive

Il primo esempio di equazione differenziale è della forma

$$y'(x) = f(x)$$

dove f è una funzione nota definita su un intervallo I e $y = y(x)$ è l'incognita. Risolvere tale equazione su I significa trovare una funzione $y = y(x)$ derivabile su I e tale che la sua derivata $y'(x)$ sia uguale a $f(x)$ per ogni $x \in I$.

Ad esempio se $f(x) = \operatorname{sen} x$ la funzione $y(x) = -\cos x + c$ risolve l'equazione differenziale comunque scegliamo la costante additiva $c \in \mathbb{R}$. Se l'equazione differenziale è accoppiata ad una condizione del tipo $y(x_0) = y_0$, dove $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ sono dati, allora si parla di *problema di Cauchy* del primo ordine. Se nell'esempio precedente richiediamo che $y(0) = 3$, allora il problema di Cauchy ha una ed una sola soluzione su tutto $\mathbb{R}$ data da $y(x) = -\cos x + 4$.

Definizione 7.1 Se f è una funzione definita su un insieme A, si dice che una funzione $F : A \to \mathbb{R}$ è una *primitiva* di f su A se F è derivabile su A e risulta $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in A$.

Se $f(x)$ ha una primitiva $F(x)$, allora anche $F(x) + c$ è primitiva, per ogni $c \in \mathbb{R}$. Infatti l'operatore di derivata è lineare e $Dc = 0$. Ad esempio, le funzioni $F(x) = -\cos x + c$ sono tutte primitive di $f(x) = \operatorname{sen} x$ su $\mathbb{R}$ e ci aspettiamo che *ogni* primitiva di $\operatorname{sen} x$ sia di quella forma. Questo in generale è falso.

Esempio 7.2 La funzione $f(x) = 1/x$ ha primitiva $F(x) = \log |x|$ su tutto il suo dominio naturale $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Osserviamo poi che anche la funzione $G : A \to \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \log x$ se $x > 0$ e $G(x) = 1 + \log(-x)$ se $x < 0$ è primitiva di f su A, ma non esiste nessuna costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = \log |x| + c$ per ogni $x \in A$.

Il motivo è che nell'esempio precedente l'insieme A non è un intervallo e dunque se una funzione ha derivata nulla su A non possiamo concludere che sia costante su A. Infatti abbiamo:

Proposizione 7.3 *Sia f una funzione definita su un intervallo I. Se una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ è primitiva di f, allora ogni altra primitiva di f su I è della forma $F(x) + c$, dove $c \in \mathbb{R}$.*

DIMOSTRAZIONE: Se $G : I \to \mathbb{R}$ è un'altra primitiva di f, risulta $(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ per ogni $x \in I$. Ma allora per la proposizione 6.49 la funzione $G - F$ è costante sull'intervallo I, i.e. $G(x) - F(x) = c$ per ogni $x \in I$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.4 Grazie al *teorema fondamentale del calcolo*, dedurremo che l'esistenza di primitive è garantita dalla continuità della funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Vediamo ora che una funzione non continua può non avere primitive. Posto infatti $f(x) = 1$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$, allora una eventuale primitiva F di f su $\mathbb{R}$ deve essere tale che $F'(x) = 1$ su entrambe le semirette $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$, dunque esistono due costanti $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che $F(x) = x + c_1$ se $x > 0$ e $F(x) = x + c_2$ se $x < 0$. Dovendo essere derivabile anche in $x_0 = 0$, allora F deve essere continua e dunque $c_1 = c_2 = c$. Ma la funzione $F(x) = x + c$ ha derivata 1 in $x_0 = 0$, mentre $f(0) = 0$.

Integrale indefinito

Definizione 7.5 Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua su un intervallo, chiamiamo *integrale indefinito* la famiglia di tutte le primitive di f su I e denotiamo tale famiglia con il simbolo

$$\int f(x)\, dx\,.$$

Quindi, nota una primitiva F di f su I, sappiamo che $\int f(x)\, dx = \{F(x) + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ e con un abuso di notazione (come per gli "o piccoli") scriveremo per brevità:

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c\,.$$

Ad esempio sappiamo che $\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$.

Poiché inoltre l'operatore di derivazione è lineare, con un abuso di notazione scriveremo per ogni $f, g \in C^0(I)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\,, \qquad \int \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$$

dove la somma e il prodotto per una costante vanno intesi nel senso di famiglie di funzioni.

Ad esempio scriviamo: $\int \big(2 \operatorname{sen} x - 3\mathrm{e}^x\big)\, dx = 2 \int \operatorname{sen} x\, dx - 3 \int \mathrm{e}^x\, dx = -2\cos x - 3\mathrm{e}^x + c$.

Esempio 7.6 Conoscendo le derivate delle funzioni fondamentali $f(x)$, otteniamo immediatamente le corrispondenti famiglie di primitive. Per ogni $k \neq 0$:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = x^n & F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c\,, & n \in \mathbb{N} \\
f(x) = x^\alpha & F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c & \alpha \neq -1\,, x > 0 \\
f(x) = \mathrm{e}^{kx} & F(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k} + c & \\
f(x) = \operatorname{sen}(kx) & F(x) = -\dfrac{\cos(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \cos(kx) & F(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \operatorname{senh}(kx) & F(x) = \dfrac{\cosh(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \cosh(kx) & F(x) = \dfrac{\operatorname{senh}(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \dfrac{k}{x} & F(x) = k \log|x| + c\,, & x > 0 \text{ oppure } x < 0 \\
f(x) = \dfrac{1}{1 + k^2x^2} & F(x) = \dfrac{\arctan(kx)}{k} + c & \\
f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - k^2x^2}} & F(x) = \dfrac{\operatorname{arcsen}(kx)}{k} + c\,, & x \in]-1/k, 1/k[\,.
\end{array}$$

Osservazione 7.7 Quindi per linearità si ottengono le primitive delle funzioni che sono combinazioni lineari di quelle scritte sopra, ad esempio le primitive di un polinomio di grado tre

$$\int (4x^3 - 7x^2 + 3x + 2)\, dx = 4 \int x^3\, dx - 7 \int x^2\, dx + 3 \int x\, dx + 2 \int 1\, dx = x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

sono polinomi di grado 4 che differiscono tra loro per una costante additiva $c \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.8 Usando ancora la formula della derivata della composizione si possono dedurre facilmente le primitive di altre funzioni. Ad esempio, se $\varphi(x) = 1 + x^2$ abbiamo $\varphi'(x) = 2x$ e dunque

$$\int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx = \log(1 + x^2) + c\,.$$

Infatti per ogni funzione φ di classe C^1 sappiamo che $D \log|\varphi(x)| = \varphi'(x)/\varphi(x)$ in ogni punto $x \in \operatorname{dom} \varphi$ in cui $\varphi(x) \neq 0$.

Per integrazione si intende il calcolo esplicito dell'integrale indefinito, ossia delle primitive di una funzione. Oltre alle proprietà di linearità, esistono due procedimenti importanti che fanno riferimento alla formula della derivata del prodotto e della composizione di funzioni: i metodi di *integrazione per parti* e *per sostituzione.*

Formula di integrazione per parti

Siano f e g due funzioni definite su un intervallo I, con f continua e g di classe C^1. Sia inoltre F una primitiva di f su I. Derivando il prodotto $F \cdot g$ otteniamo

$$(F \cdot g)'(x) = F'(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) + F(x) \cdot g'(x) \qquad \forall\, x \in I$$

e dunque la funzione $F(x)g(x)$ è una primitiva di $f(x)g(x) + F(x)g'(x)$ e possiamo scrivere

$$\int \big(f(x)g(x) + F(x)g'(x)\big)\,dx = F(x)g(x) + c\,.$$

Usando la proprietà di linearità dell'integrale indefinito rispetto alla somma, e "portando a secondo membro" il secondo integrale ottenuto, deduciamo allora:

Teorema 7.9 *Se $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(I)$ allora*

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I.

Esempio 7.10 Calcoliamo le primitive di $x\cos x$. Poniamo $f(x) = \cos x$, che viene quindi detto *fattore integrante*, e $g(x) = x$, che viene quindi detto *fattore differenziale*. Poiché $F(x) = \operatorname{sen} x$ è una primitiva di $\cos x$, mentre $g'(x) \equiv 1$, scriviamo

$$\int x\cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)\cdot x - \int (\operatorname{sen} x)\cdot 1\,dx = x\operatorname{sen} x - (-\cos x + c) = x\operatorname{sen} x + \cos x + c$$

dove conveniamo che $c \in \mathbb{R}$ è una qualsiasi costante additiva reale.

Formula di integrazione per sostituzione

Nell'osservazione 7.8 abbiamo visto che se $\varphi(x) = 1 + x^2$ la funzione $2x/(1 + x^2)$ ha come primitiva la funzione $\log(1 + x^2)$. Infatti abbiamo scritto $2x/(1 + x^2) = \varphi'(x)/\varphi(x)$ con $\varphi(x) = 1 + x^2$. La formula di integrazione per sostituzione parte da un'estensione di questo esempio, i.e. dalla formula della derivata di una composizione di funzioni.

Teorema 7.11 *Siano I e J due intervalli di numeri reali, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to I$ una funzione di classe C^1. Allora indicando con $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f su I risulta*

$$\int (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)\,dx = (F\circ\varphi)(x) + c\,, \qquad x \in J\,.$$

Dimostrazione: La funzione $F\circ\varphi : J \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, essendo composizione di funzioni di classe C^1. Per ogni $x \in J$ calcoliamo

$$(F\circ\varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)$$

essendo $F'(t) = f(t)$ per ogni $t \in I$. La tesi segue dunque dalla definizione di integrale indefinito. □

Se ora cambiamo variabile $t = \varphi(x)$, dove φ viene detta funzione di transizione, la formula precedente si riscrive come

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = F(t) + c\,, \qquad t = \varphi(x) \in I\,, \quad x \in J$$

ma sappiamo che $\int f(t)\ dt = F(t) + c$ se $t \in I$, dunque riscriviamo la *formula di integrazione per sostituzione* come:

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\ dt \qquad \text{con} \quad t = \varphi(x) \tag{7.1}$$

dove abbiamo sottinteso gli intervalli di variazione $t \in I$ e $x \in J$.

Esempio 7.12 Troviamo le primitive di $\mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)$ su $\mathbb{R}$.

Posto $f(t) = \cos t$ e $\varphi(x) = \mathsf{e}^x$, abbiamo $f(\varphi(x)) = \cos(\mathsf{e}^x)$ e $\varphi'(x) = \mathsf{e}^x$ per ogni x, dunque $\mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x) = (f\circ\varphi)(x)\,\varphi'(x)$ e scriviamo per sostituzione

$$\int \mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)\,dx = \int \cos t\ dt \qquad \text{con} \quad t = \mathsf{e}^x\,.$$

Poiché $\int \cos t\ dt = \operatorname{sen} t + c$, risostituendo $t = \mathsf{e}^x$ otteniamo che

$$\int \mathsf{e}^x\cos(\mathsf{e}^x)\,dx = \operatorname{sen}(\mathsf{e}^x) + c\,.$$

Osservazione 7.13 Nella formula (7.1), osserviamo che se $t = \varphi(x)$ allora con le notazioni di Leibniz

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\,\varphi(x) = \varphi'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \varphi'(x)\ dx$$

dove la formula a destra è nota come *uguaglianza tra i differenziali*. Infatti con $t = \varphi(x)$ nell'integrale a primo membro della (7.1) scriviamo $(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(t)$ e $\varphi'(x)\ dx = dt$, ottenendo l'integrale a secondo membro. Nell'esempio precedente abbiamo infatti $\cos(\mathsf{e}^x) = \cos t$ per $t = \mathsf{e}^x$ e dunque

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\mathsf{e}^x}{dx} = \mathsf{e}^x \qquad \Longleftrightarrow \qquad dt = \mathsf{e}^x\ dx\,.$$

Sostituzioni implicite

Ci sono funzioni per la quali il calcolo delle primitive avviene mediante una *sostituzione implicita.*

Esempio 7.14 Per trovare le primitive di $\mathsf{e}^{\sqrt{x}}$ su $[0, +\infty[$, osserviamo che se poniamo $t = \sqrt{x}$, la funzione di transizione $t = \varphi(x)$ è biunivoca da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ e la sua inversa è $x = \psi(t) = t^2$, la cui derivata è $\psi'(t) = 2t$ per ogni $t \geq 0$. Quindi con le notazioni di Leibniz scriviamo l'uguaglianza tra i differenziali

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\psi(t) = \psi'(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad dx = \psi'(t)\ dt$$

e nel nostro esempio $x = t^2 \iff dx = 2t\ dt$. Sostituendo abbiamo quindi

$$\int \mathsf{e}^{\sqrt{x}}\ dx = \int \mathsf{e}^t 2t\ dt \qquad \text{con} \quad t = \sqrt{x}\ .$$

Poiché inoltre integrando per parti

$$\int \mathsf{e}^t 2t\ dt = 2\mathsf{e}^t t - 2\int \mathsf{e}^t\ dt = 2\mathsf{e}^t(t-1) + c$$

risostituendo $t = \sqrt{x}$ otteniamo:

$$\int \mathsf{e}^{\sqrt{x}}\ dx = 2\mathsf{e}^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c\ .$$

In generale, se $\varphi : J \to I$ è di classe C^1 e biunivoca, l'inversa $\psi = \varphi^{-1} : I \to J$ è anch'essa di classe C^1 e otteniamo per ogni funzione continua $f : J \to \mathbb{R}$

$$\int f(x)\ dx = \int f(\psi(t))\,\psi'(t)\ dt \qquad \text{con} \quad x = \psi(t) \ \text{ e } \ dx = \psi'(t)\ dt\ . \tag{7.2}$$

Un problema di Cauchy

Risolviamo il problema di Cauchy

$$y'(x) = \frac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}} \qquad \textbf{e} \qquad y(0) = 0\,.$$

Dobbiamo trovare l'unica funzione derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(0) = 0$ e $f'(x) = \dfrac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}}$. Per cercare le primitive di $\log(1 + \mathsf{e}^x)/(1 + \mathsf{e}^{-x})$, posto $t = \mathsf{e}^x$ abbiamo $x = \log t$ e $dx = (1/t)\ dt$ da cui, sostituendo,

$$\int \frac{\log(1 + \mathsf{e}^x)}{1 + \mathsf{e}^{-x}}\ dx = \int \frac{\log(1 + t)}{1 + t^{-1}} \cdot \frac{1}{t}\ dt = \int \frac{\log(1 + t)}{1 + t}\ dt = \frac{1}{2}\log^2(1 + t) + c\ ,$$

con $t = \mathsf{e}^x$. Quindi risostituendo abbiamo che una generica primitiva è $f(x) = \dfrac{1}{2}\log^2(1 + \mathsf{e}^x) + c$. Imponendo la condizione $f(0) = 0$ abbiamo $(1/2)\log^2 2 + c = 0 \iff c = -(1/2)\log^2 2$ e dunque la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{1}{2}\big(\log^2(1 + \mathsf{e}^x) - \log^2 2\big)\ .$$

L'integrale definito

Il problema dell'area

Se Ω è un sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ abbastanza regolare, vogliamo mostrare come è possibile dare una buona definizione di area di Ω. Se Ω è un triangolo o un rettangolo sappiamo come calcolarne l'area. Quindi per un insieme generico Ω, se supponiamo che sia limitato, allora esiste un numero $M > 0$ (intero) tale che $\Omega \subset [-M, M]^2 := [-M, M] \times [-M, M]$. Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}^+$, dividiamo il quadrato $[-M, M]^2$ in $(2Mn)^2$ quadratini di lato $1/n$. Chiamiamo poi $P_n^-(\Omega)$ l'unione dei quadratini di lato $1/n$ che sono contenuti in Ω e $P_n^+(\Omega)$ l'unione dei quadratini di lato $1/n$ che contengono elementi di Ω. Ovviamente $P_n^-(\Omega) \subset A \subset P_n^+(\Omega)$ per ogni n e denotando con $|P_n^{\pm}(\Omega)|$ l'area di $P_n^{\pm}(\Omega)$ (che è la somma delle aree dei quadratini di $P_n^{\pm}(\Omega)$) allora $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_n^+(\Omega)|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo poi che se ogni quadratino di lato $1/n$ viene suddiviso in 4 quadratini di lato $1/(2n)$, allora ovviamente si deduce che $P_n^-(\Omega) \subset P_{2n}^-(\Omega)$ e $P_n^+(\Omega) \supset P_{2n}^+(\Omega)$, dunque otteniamo che $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_{2n}^-(\Omega)| \leq |P_{2n}^+(\Omega)| \leq |P_{2n}^+(\Omega)|$. Quindi facendo un "raffinamento" della quadrettatura, la stima per difetto tende a crescere e la stima per eccesso a decrescere. Si può allora definire come migliore stima per difetto dell'area di Ω il numero

$$\mathbf{A}^-(\Omega) := \lim_{n\to\infty} |P_n^-(\Omega)| = \sup_n |P_n^-(\Omega)|$$

mentre la miglior stima per eccesso è data dal numero

$$\mathbf{A}^+(\Omega) := \lim_{n\to\infty} |P_n^+(\Omega)| = \inf_n |P_n^+(\Omega)| \,.$$

Poiché inoltre per ogni n risulta $|P_n^-(\Omega)| \leq |P_n^+(\Omega)|$, allora ovviamente

$$\mathbf{A}^-(\Omega) \leq \mathbf{A}^+(\Omega) \,.$$

Ora, se l'insieme Ω è abbastanza regolare (l'unione di triangoli o di parti di dischi, ad esempio), accade che $\mathbf{A}^-(\Omega) = \mathbf{A}^+(\Omega)$ e tale numero rappresenta l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ di Ω. Questo è essenzialmente il metodo di esaustione di Eudosso per il calcolo dell'area di figure piane. Con tale approccio ci si accorge che se l'insieme Ω contiene delle parti "filiformi" (o di "dimensione" più piccola di due) allora queste parti non sono rilevanti per la nozione di area. Inoltre, anche la frontiera di Ω è irrilevante per il calcolo dell'area, se è sufficientemente regolare.

Osservazione 7.15 D'altra parte esistono degli insiemi $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitati che non sono "misurabili" nel senso precedente, i.e. tali che $\mathbf{A}^-(\Omega) \leq \mathbf{A}^+(\Omega)$. Se ad esempio consideriamo $\Omega = ([0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times [0, 1]$, con $M = 1$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $P_n^-(\Omega) = \emptyset$ e $P_n^+(\Omega) = [0, 1]^2$, dato che ogni quadratino della suddivisione n-esima contiene sia punti con ascissa razionale che punti con ascissa irrazionale. Ma allora facilmente otteniamo che $\mathbf{A}^-(\Omega) = 0$ mentre $\mathbf{A}^+(\Omega) = 1$, quindi tale insieme si dice non misurabile.

In conclusione, una buona nozione di area (ad esempio la *misura di Peano-Jordan*) deve verificare le seguenti proprietà:

1. l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ è ben definita per insiemi Ω limitati abbastanza regolari (detti insiemi *misurabili*);
2. se Ω è un triangolo o un rettangolo, l'area $\mathbf{A}(\Omega)$ coincide con l'area elementare $|\Omega|$, mentre se Ω ha "dimensione" più piccola di due, allora $\mathbf{A}(\Omega) = 0$;
3. l'area è invariante rispetto a moti rigidi del piano: se Ω è misurabile e $\widetilde{\Omega}$ è ottenuto da Ω mediante una traslazione, rotazione o riflessione, allora anche $\widetilde{\Omega}$ è misurabile e $\mathbf{A}(\widetilde{\Omega}) = \mathbf{A}(\Omega)$;
4. l'area è monotona rispetto l'inclusione: se $\Omega_1 \subset \Omega_2$ sono due insiemi del piano limitati e misurabili, allora $\mathbf{A}(\Omega_1) \leq \mathbf{A}(\Omega_2)$;
5. l'unione disgiunta $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ di insiemi misurabili è ancora misurabile e $\mathbf{A}(\Omega) = \mathbf{A}(\Omega_1) + \mathbf{A}(\Omega_2)$.

Verso la nozione di area di sottografici

Nel seguito della teoria considereremo sempre funzioni reali $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitate e definite su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ chiuso e limitato.

Se f è non negativa, il *sottografico* di f è dato dall'insieme

$$\Gamma(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a \le x \le b \ \textbf{e} \ 0 \le y \le f(x)\} .$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è limitato e abbastanza regolare, si vede facilmente che Ω si suddivide nell'unione e differenza di un numero finito di parti del piano che sono *sottografici* di funzioni come sopra.

Ad esempio, se Ω è un cerchio di raggio $r > 0$, fissatone il centro (a meno di una traslazione) nel punto $(0,r)$, si può vedere Ω (a meno del suo bordo) come la differenza insiemistica $\Gamma(f^+) \setminus \Gamma(f^-)$ tra i sottografici delle due funzioni $f^\pm : [-r,r] \to \mathbb{R}$ definite da $f^\pm(x) = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$.

Quindi in generale il problema dell'area di insiemi limitati del piano si riconduce al problema dell'*area del sottografico* di funzioni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definite su un intervallo chiuso e limitato che sono continue e non negative. Infine per un sottografico $\Gamma(f)$ come sopra, invece di fare una quadrettatura del piano, visto che due dei lati del bordo di $\Gamma(f)$ sono verticali, al fine di trovare figure regolari approssimanti è sufficiente suddividere l'intervallo $[a,b]$ in un numero finito di intervalli e suddividere poi il sottografico di f in "strisce" mediante le rette verticali passanti per i punti di tale suddivisione.

Definizione 7.16 Chiamiamo *suddivisione* di $[a,b]$ ogni insieme finito e ordinato di punti di $[a,b]$

$$\mathcal{A} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n \mid a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\} .$$

Denotiamo poi con $\mathcal{D}[a,b]$ la famiglia di tali suddivisioni. Per ogni suddivisione $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$ in seguito indicheremo per brevità con

$$I_i := [x_{i-1}, x_i] , \qquad (\delta x)_i := (x_i - x_{i-1}) \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n$$

gli intervalli della suddivisione e la loro ampiezza. Le quantità

$$S^-(f,\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \inf_{I_i} f , \qquad S^+(f,\mathcal{A}) := \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \sup_{I_i} f$$

sono dette rispettivamente *somma inferiore e superiore di f rispetto alla suddivisione* $\mathcal{A}$. Chiamiamo infine

$$S^-(f) = \sup\{S^-(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]\} \qquad S^+(f) = \inf\{S^+(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]\}$$

rispettivamente *somma integrale inferiore e superiore* (secondo Riemann) *di f su* $[a,b]$.

Osservazione 7.17 Se f è non negativa, allora $S^\pm(f,\mathcal{A})$ è uguale all'area elementare $|P^\pm(f,\mathcal{A})|$ del *plurirettangolo* dato da:

$$P^-(f,\mathcal{A}) := \bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, \inf_{I_i} f] , \qquad P^+(f,\mathcal{A}) := \bigcup_{i=1}^n I_i \times [0, \sup_{I_i} f]$$

e osserviamo che $P^-(f,\mathcal{A}) \subset \Gamma(f) \subset P^+(f,\mathcal{A})$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a,b]$. Quindi la somma integrale inferiore e superiore $S^\pm(f)$ sono le migliori misure per difetto e per eccesso che possiamo ottenere al fine di calcolare, se possibile, l'*area* del sottografico di f.

Osservazione 7.18 Vedremo in seguito che per ogni funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata risulta:

$$-\infty < S^-(f) \le S^+(f) < +\infty$$

ma può accadere che $S^-(f) < S^+(f)$. Se ad esempio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \tag{7.3}$$

allora risulta $S^-(f,\mathcal{A}) = 0$ e $S^+(f,\mathcal{A}) = 1$ per ogni $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[0,1]$, in quanto ogni intervallo chiuso non degenere di numeri reali contiene sia razionali che irrazionali. Dunque $S^-(f) = 0$ e $S^+(f) = 1$. Si noti che il sottografico $\Gamma(f)$ della funzione di Dirichlet è uguale (a meno di un segmento orizzontale) al sottinsieme non misurabile Ω di $[0,1]^2$ dell'osservazione 7.15.

Funzioni integrabili secondo Riemann

Definizione 7.19 Una funzione limitata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice *integrabile* (secondo Riemann) su $[a, b]$ se risulta $S^-(f) = S^+(f)$. In tal caso il valore comune $\mathbb{I}(f)$ ottenuto viene detto *integrale (definito) di f su* $[a, b]$ e si denota con il simbolo

$$\mathbb{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Denotiamo poi con $\mathcal{R}(a, b)$ la classe delle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili (secondo Riemann).

Osservazione 7.20 Quindi la funzione di Dirichlet vista sopra non è integrabile. Inoltre, se f è non negativa e integrabile su $[a, b]$, dal momento che la somma integrale inferiore e superiore $S^\pm(f)$ danno le migliori stime per difetto e per eccesso del sottografico di f, allora definiamo *area del sottografico* di f

$$\mathbf{A}(\Gamma(f)) := \int_a^b f(x)\ dx \qquad \forall\, f \in \mathcal{R}(a, b)\,, \quad f \geq 0\,.$$

In generale, se $f \in \mathcal{R}(a, b)$ cambia segno, denotati

$$\Omega_f^+ := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ \mathbf{e}\ 0 \leq y \leq f(x)\}\,, \qquad \Omega_f^- := \{(x, y) \mid a \leq x \leq b \ \mathbf{e}\ f(x) \leq y \leq 0\} \tag{7.4}$$

allora l'integrale rappresenta la somma dell'area di Ω_f^+ con l'opposto dell'area di Ω_f^-, i.e.

$$\mathbb{I}(f) = \int_a^b f(x)\, dx = \mathbf{A}(\Omega_f^+) - \mathbf{A}(\Omega_f^-)\,.$$

Raffinamenti

Date due suddivisioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$, diciamo che $\mathcal{B}$ è un *raffinamento* di $\mathcal{A}$ se risulta che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Vediamo ora che un raffinamento migliora le stime per difetto e per eccesso.

Proposizione 7.21 *Se $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$ sono tali che $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, allora*

$$S^-(f, \mathcal{A}) \leq S^-(f, \mathcal{B})\,, \qquad S^+(f, \mathcal{B}) \leq S^+(f, \mathcal{A})\,.$$

DIMOSTRAZIONE: Infatti scelto un punto c tale che $x_{i-1} < c < x_i$, risulta

$$\begin{aligned}(\delta x)_i \cdot \inf_{I_i} f &\leq (c - x_{i-1}) \cdot \inf_{[x_{i-1}, c]} f + (x_i - c) \cdot \inf_{[c, x_i]} f \\ (\delta x)_i \cdot \sup_{I_i} f &\geq (c - x_{i-1}) \cdot \sup_{[x_{i-1}, c]} f + (x_i - c) \cdot \sup_{[c, x_i]} f\,.\end{aligned}$$

Quindi la tesi è vera se $\mathcal{B}$ contiene un solo punto c oltre a quelli di $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{B}$ contiene n punti in più oltre a quelli di $\mathcal{A}$, l'asserto segue per induzione ripetendo l'argomento precedente. □

Osservazione 7.22 Date due suddivisioni $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$, un *raffinamento comune* ad entrambe è dato ad esempio dalla suddivisione individuata dai punti $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Quindi risulta

$$\forall\, \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]\,, \quad S^-(f, \mathcal{A}) \leq S^-(f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S^+(f, \mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \leq S^+(f, \mathcal{B})\,. \tag{7.5}$$

In particolare, per definizione di estremo superiore abbiamo che $S^-(f) \leq S^+(f, \mathcal{B})$ per ogni $\mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$ e dunque, per definizione di estremo inferiore,

$$-\infty < S^-(f) \leq S^+(f) < +\infty\,.$$

Classi di funzioni integrabili

Ci aspettiamo poi che una sufficiente regolarità di una funzione f garantisca la sua integrabilità. Vediamo quindi prima un importante criterio. Denotiamo per ogni suddivisione $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$ come sopra

$$\Delta S(f, \mathcal{A}) := S^+(f, \mathcal{A}) - S^-(f, \mathcal{A}) = \sum_{i=1}^n (\delta x)_i \cdot \operatorname{osc}(f, I_i)\,,$$

dove $\operatorname{osc}(f, I_i)$ denota l'*oscillazione* di f sull'intervallo I_i, i.e.

$$\operatorname{osc}(f, I_i) := \Big(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\Big)\,.$$

Teorema 7.23 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata, allora i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. $f \in \mathcal{R}(a, b)$
2. *per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$ tali che $S^+(f, \mathcal{B}) - S^-(f, \mathcal{A}) < \varepsilon$*
3. *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\widetilde{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}[a, b]$ tale che $\Delta S(f, \widetilde{\mathcal{A}}) < \varepsilon$.*

Dimostrazione: Per definizione di sup e inf, fissato $\varepsilon > 0$ esistono $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{D}[a, b]$ tali che $S^-(f, \mathcal{A}) > S^-(f) - \varepsilon/2$ e $S^+(f, \mathcal{B}) < S^+(f) + \varepsilon/2$. Se vale la 1., allora $S^-(f) = S^+(f)$ e dunque

$$S^+(f, \mathcal{B}) - S^-(f, \mathcal{A}) < S^+(f) + \frac{\varepsilon}{2} - S^-(f) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e dunque vale la 2. Se vale la 2., posto $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ dalla (7.5) otteniamo che

$$\Delta S(f, \widetilde{\mathcal{A}}) = S^+(f, \widetilde{\mathcal{A}}) - S^-(f, \widetilde{\mathcal{A}}) \le S^+(f, \mathcal{B}) - S^-(f, \mathcal{A}) < \varepsilon$$

e dunque vale la 3. Se infine vale la 3., allora in corrispondenza di $\varepsilon = 1/n$ troviamo $\mathcal{A}_n \in \mathcal{D}[a, b]$ tale che $\Delta S(f, \mathcal{A}_n) < 1/n$. Risulta quindi

$$S^+(f) \le S^+(f, \mathcal{A}_n) \textbf{ e } S^-(f) \ge S^-(f, \mathcal{A}_n) \quad \Longrightarrow \quad S^+(f) - S^-(f) \le \Delta S(f, \mathcal{A}_n) \le \frac{1}{n}$$

e dunque, per la proprietà di Archimede, $S^+(f) - S^-(f) \le 0$. Essendo sempre $S^+(f) - S^-(f) \ge 0$, ne segue che $S^+(f) = S^-(f)$ e, in definitiva, che vale la 1. □

Integrabilità delle funzioni continue

Vediamo ora che le funzioni continue sono integrabili.

Teorema 7.24 *Ogni funzione continua su $[a, b]$ è anche integrabile.*

Dimostrazione: Per il teorema 5.50 di Weierstrass sappiamo che f è limitata ed inoltre, per ogni suddivisione $\mathcal{A} \in \mathcal{D}[a, b]$ e per ogni intervallo chiuso I_i della suddivisione, risulta

$$\inf_{I_i} f = \min_{I_i} f \,, \quad \sup_{I_i} f = \max_{I_i} f \,, \quad \operatorname{osc}(f, I_i) = \max_{I_i} f - \min_{I_i} f \,.$$

Poiché per il teorema 5.76 di Heine-Cantor f è anche uniformemente continua, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale che se I_i è un intervallo di ampiezza minore di δ, allora $\operatorname{osc}(f, I_i) < \varepsilon/(b - a)$. Scelta quindi una suddivisione $\mathcal{A}$ tale che ogni intervallino I_i della suddivisione abbia ampiezza minore di $\delta = \delta(\varepsilon)$, allora risulta

$$\Delta(f, \mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i \cdot \operatorname{osc}(f, I_i) < \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i \cdot \frac{\varepsilon}{b - a} = \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\delta x)_i = \varepsilon \,.$$

Per il criterio precedente, teorema 7.23, concludiamo che $f \in \mathcal{R}(a, b)$. □

Integrabilità delle funzioni monotone

Vediamo ora che le anche le funzioni monotone e limitate sono integrabili.

Teorema 7.25 *Ogni funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona e limitata è integrabile.*

Dimostrazione: Supponiamo f debolmente crescente e limitata. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ consideriamo una suddivisione $\mathcal{A}_n \in \mathcal{D}[a, b]$ in n intervalli I_i di uguale ampiezza $(\delta x)_i = (b - a)/n$. Questa è ovviamente ottenuta ponendo

$$x_i = a + \frac{b - a}{n} i \qquad i = 0, 1, \ldots, n \,. \tag{7.6}$$

Poiché f è crescente, per ogni intervallo I_i risulta

$$\inf_{I_i} f = f(x_{i-1})\,, \qquad \sup_{I_i} f = f(x_i)\,, \qquad \operatorname{osc}(f, I_i) = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

per cui otteniamo

$$\Delta S(f, \mathcal{A}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n}\big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) = \frac{b-a}{n}\cdot \big(f(b) - f(a)\big)\,.$$

Per l'arbitrarietà di n, essendo $0 \leq f(b) - f(a) < \infty$, la tesi segue ancora grazie al criterio 7.23 di integrabilità. □

Il metodo di esaustione di Eudosso rivisitato

L'argomento alla base della dimostrazione dell'integrabilità delle funzioni monotone è lo stesso usato da Eudosso per il calcolo di aree. Supponiamo infatti di voler calcolare l'area della parte di piano Ω compresa tra l'asse delle ascisse, il grafico della funzione $f(x) = x^2$ e due rette verticali di equazione $x = a$ e $x = b$, con $0 < a < b < \infty$. L'insieme Ω è dunque il sottografico della funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ di legge $f(x) = x^2$. Se sappiamo calcolare l'area del sottografico di x^2 tra le rette $x = 0$ e $x = b$, che risulterà uguale a $b^3/3$, per differenza otteniamo che l'area di Ω è uguale a $(b^3 - a^3)/3$. In termini di integrali, otteniamo quindi:

$$\int_a^b x^2\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3}\,.$$

Posto infatti $a = 0$ e definiti x_i come in (7.6), risulta $f(x_i) = (b/n)^2 i^2$ e dunque

$$S^+(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) = \sum_{i=1}^n \frac{b}{n}\cdot\frac{b^2 i^2}{n^2} = \frac{b^3}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

dove abbiamo usato che la somma dei quadrati dei numeri interi da 1 ad n vale $n(n+1)(2n+1)/6$. Passando al limite in n otteniamo che

$$\lim_{n\to\infty} S^+(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{b^3}{3}\,.$$

In maniera analoga si mostra che anche la somma integrale inferiore $S^-(x^2_{|[0,b]}, \mathcal{A}_n) \to b^3/6$ se $n \to \infty$. Quindi concludiamo che

$$\int_0^b x^2\, dx = \frac{b^3}{3}\,.$$

Funzioni a gradini

Ci aspettiamo che né la continuità né la monotonia siano condizioni necessarie per l'integrabilità.

Esempio 7.26 Infatti, se consideriamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ la funzione a gradini $f : [0, n] \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = a_i$ per ogni $x \in [i-1, i[$ e $i = 1, \ldots, n$, allora è evidente che f è integrabile e

$$\mathbb{I}(f) = \int_0^n f(x)\, dx = \sum_{i=1}^n a_i\,.$$

Funzioni generalmente continue

Nell'esempio precedente non abbiamo specificato il valore della funzione a gradini nel punto $x_0 = n$. Infatti in generale si ha:

Proposizione 7.27 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e continua nell'intervallo $]a, b]$. Allora $f \in \mathcal{R}(a, b)$ e l'integrale $\mathbb{I}(f)$ di f su $[a, b]$* non dipende *dal valore $f(a)$.*

Osservazione 7.28 Nella dimostrazione non si usa la continuità di f su $]a,b]$ ma l'ipotesi più generale che f sia *integrabile su* $[a',b]$ *per ogni* $a'>a$. Inoltre, la proposizione precedente vale ancora se il punto di discontinuità è $x_0=b$ oppure un punto x_0 interno ad $[a,b]$. Otteniamo quindi una vasta classe di funzione integrabili.

Definizione 7.29 Una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ si dice *generalmente continua* se f è limitata e continua su tutto $[a,b]$ tranne al più un numero finito di punti.

Infatti, iterando l'argomento precedente, otteniamo immediatamente:

Corollario 7.30 *Ogni funzione generalmente continua su* $[a,b]$ *è anche integrabile su* $[a,b]$ *ed il valore dell'integrale* $\mathbb{I}(f)$ *non dipende dal valore di* f *nei punti di discontinuità o negli estremi di* $[a,b]$.

Osservazione 7.31 Data una funzione limitata su $[a,b]$, ci possiamo chiedere "quanti" punti di discontinuità può avere affinché risulti integrabile. La risposta a tale domanda è stata ottenuta dal matematico modenese G. Vitali che ha dimostrato che se D denota l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione limitata f su $[a,b]$, allora $f\in\mathcal{R}(a,b)$ se e solo se l'insieme D ha misura nulla $\mathcal{L}^1(D)=0$ rispetto alla *misura di Lebesgue* $\mathcal{L}^1$. Questo accade se D è finito o anche numerabile, ad esempio $D=\mathbb{Q}\cap[a,b]$. Si noti che l'insieme dei punti di discontinuità della funzione di Dirichlet definita in (7.3) è $D=[0,1]$ e dunque $\mathcal{L}^1(D)=1$.

Proprietà delle funzioni integrabili

La prima proprietà, che non dimostreremo in dettaglio, segue facilmente dalla permamenza del segno, grazie ad un argomento per assurdo.

Proposizione 7.32 *Se* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *è continua e non negativa, con* $a<b$, *allora* $\mathbb{I}(f)=0\Rightarrow f(x)\equiv 0$.

DIMOSTRAZIONE: Infatti se esistesse $x_0\in[a,b]$ tale che $f(x_0)>0$, allora troveremmo un intervallo centrato in x_0 in cui $f>0$. Ma allora si dedurrebbe che $S^-(f)>0$, il che è assurdo. □

Osservazione 7.33 La tesi è falsa se f cambia segno: si prenda ad esempio la funzione continua $f(x)=x$ su un intervallo simmetrico $[-a,a]$ con $a>0$. Ricordiamo infatti dalla notazione (7.4) che

$$\int_{-a}^{a} x\,dx=\mathbf{A}(\Omega_f^+)-\mathbf{A}(\Omega_f^-)\,,$$

dove Ω_f^+ è il triangolo di vertici $(0,0),(a,0),(0,a)$, di area $a^2/2$, mentre Ω_f^- è un triangolo equivalente ad Ω_f^+, dunque $\mathbb{I}(f)=0$ anche se f non è la funzione identicamente nulla.

Linearità dell'integrale

L'insieme $\mathcal{R}(a,b)$ è uno *spazio vettoriale* su $\mathbb{R}$ e l'operatore $f\mapsto\mathbb{I}(f)$ è *lineare* su $\mathcal{R}(a,b)$.

Teorema 7.34 *Se* $f,g\in\mathcal{R}(a,b)$, *allora* $f+g\in\mathcal{R}(a,b)$ *e* $\lambda f\in\mathcal{R}(a,b)$ *per ogni* $\lambda\in\mathbb{R}$, *inoltre risulta*

$$\mathbb{I}(f+g)=\mathbb{I}(f)+\mathbb{I}(g)\,,\qquad \mathbb{I}(\lambda f)=\lambda\,\mathbb{I}(f)\,.$$

La dimostrazione è abbastanza tecnica e non la vedremo.

Teorema di confronto

In maniera ovvia si dimostra:

Teorema 7.35 *Se* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sono due funzioni limitate tali che* $f(x)\le g(x)$ *per ogni* $x\in[a,b]$, *allora* $S^-(f)\le S^-(g)$ *e* $S^+(f)\le S^+(g)$. *In particolare, se* $f,g\in\mathcal{R}(a,b)$ *allora* $\mathbb{I}(f)\le\mathbb{I}(g)$.

Integrale e valore assoluto

Introduciamo ora le funzioni parte positiva f^+ e parte negativa f^- definite per ogni $x \in [a,b]$ da $f^\pm(x) := \max\{\pm f(x), 0\}$. Quindi $f^\pm = \Phi^\pm \circ f$, dove $\Phi^\pm$ è la funzione continua definita da

$$\Phi^+(y) := \begin{cases} y & \text{se} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \end{cases} \qquad \Phi^-(y) := \begin{cases} -y & \text{se} \quad y \leq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \geq 0\,. \end{cases}$$

Quindi ovviamente $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, mentre $0 \leq f^\pm \leq f$.

Teorema 7.36 *Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, allora anche $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(a,b)$. Inoltre risulta*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx\,.$$

Dimostrazione: La dimostrazione della prima parte è un po' tecnica e non la faremo. Osserviamo solo che se f è in particolare generalmente continua, allora lo sono anche f^+, f^- e $|f|$, che dunque sono integrabili. Sapendo allora che $f^+, f^-, |f| \in \mathcal{R}(a,b)$, per i teoremi 7.34 e 7.35 di linearità e di confronto, essendo $-|f| \leq f \leq |f|$, risulta

$$-\mathbb{I}(|f|) = \mathbb{I}(-|f|) \leq \mathbb{I}(f) \leq \mathbb{I}(|f|) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\mathbb{I}(f)| \leq \mathbb{I}(|f|)\,,$$

come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.37 Il viceversa è falso: *la funzione $|g|$ può essere integrabile anche se non lo è g.* Ad esempio, se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet data dalla formula (7.3), la funzione $g := f - 1/2$ non è integrabile su $[0,1]$, perché altrimenti lo sarebbe anche $f = g + 1/2$, per il teorema 7.34. Ma la funzione $|g|$ vale costantemente $1/2$, dunque $|g|$ è integrabile su $[0,1]$.

Il teorema di spezzamento

Con un po' di fatica, si dimostra il seguente:

Teorema 7.38 *Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e $c \in]a,b[$, allora f è integrabile su $[a,c]$ e su $[b,c]$ e risulta*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,. \tag{7.7}$$

Viceversa, se f è integrabile su $[a,c]$ e su $[b,c]$, allora $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e vale la formula di spezzamento (7.7).

Il teorema della media integrale

Definizione 7.39 Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, chiamiamo *media integrale* di f su $[a,b]$ il numero $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\,.$

Osservazione 7.40 Se $f : [0,n] \to \mathbb{R}$ è una funzione a gradini come nell'esempio 7.26, essendo $(b-a) = n$ allora la media integrale è uguale alla media aritmetica $\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$. Se invece f è non negativa, allora la media integrale è uguale all'altezza h di un rettangolo di base lunga $(b-a)$ e la cui area è uguale all'area del sottografico di f.

Teorema 7.41 *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile. Allora*

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sup_{[a,b]} f\,.$$

Se in particolare f è anche continua su $[a,b]$, allora esiste $z \in [a,b]$ tale che

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione: Posti $l = \inf_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$ e $L = \sup_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$, allora $l \leq f(x) \leq L$ per ogni $x \in [a,b]$ e dunque, per il teorema 7.35 di confronto, e per linearità,

$$l \cdot (b-a) = \int_a^b l\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b L\, dx = L \cdot (b-a)$$

e dunque la prima diseguaglianza segue dividendo per la quantità positiva $(b-a) > 0$. Se in particolare $f \in C^0([a,b])$, per il teorema 5.44 dei valori intermedi sappiamo che l'immagine di f è uguale all'intervallo chiuso $[l, L]$. Detta $h \in \mathbb{R}$ la media integrale, poiché sappiamo che $h \in [l, L]$, allora $h = f(z)$ per qualche $z \in [a,b]$, come volevamo dimostrare. $\square$

Osservazione 7.42 La seconda parte del *teorema della media integrale* è falsa in generale se f non è continua su tutto $[a,b]$. Infatti, se ad esempio $f : [0, n[\to \mathbb{R}$ è una funzione a gradini, l'immagine di f è l'insieme $\{a_1, \ldots, a_n\}$ e in generale la media aritmetica (che coincide con la media integrale) non è uguale a nessuno dei numeri a_i.

Verso il teorema fondamentale del calcolo

In questa sezione considereremo funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$ che siano *localmente integrabili su* I, i.e. tali che per ogni intervallo chiuso e limitato $[a,b] \subset I$ la restrizione della funzione ad $[a,b]$ è integrabile. Questo accade se ad esempio f è continua su I oppure se è limitata e con un numero finito di punti di discontinuità su I o anche se f è monotona e limitata su I.

Integrazione su intervalli non orientati

Per una funzione f come sopra, vogliamo definire l'integrale $\int_a^b f(x)\, dx$ per ogni scelta di $a, b \in I$, i.e. anche se $a \geq b$. Allora basta porre per ogni $a, b, c \in I$, con $a \neq b$,

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx\,, \qquad \int_c^c f(x)\, dx = 0\,, \tag{7.8}$$

dove nella prima formula uno dei due integrali (il secondo se $a < b$ e il primo se $a > b$) è già stato definito.

Proposizione 7.43 *Valgono le seguenti proprietà per ogni $a, b, c \in I$:*

1. linearità: $\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu\, g(x)\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$ *per ogni* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

2. confronto: *se $f \leq g$ nell'intervallo chiuso di estremi a e b, allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx \quad \text{se } a \leq b \qquad \mathbf{e} \qquad \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b g(x)\, dx \quad \text{se } a \geq b\,;$$

3. continuità: $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|\, dx\right|$;

4. additività rispetto al dominio: $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx\,;$

5. teorema della media integrale: *se $a \neq b$, allora la media integrale* $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$ *è compresa tra l'estremo inferiore e l'estremo superiore di f sull'intervallo chiuso di estremi a e b; se poi f è continua allora esiste un punto $z \in I$ compreso tra a e b tale che*

$$f(z) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione: Le prime tre proprietà sono un'ovvia conseguenza dei teoremi già visti, alla luce della definizione (7.8). Proviamo la formula di additività rispetto al dominio. Se $a < c < b$ non è altro che la formula di spezzamento (7.7). Supponiamo ora che $b < c < a$. In tal caso infatti abbiamo

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \qquad \textbf{e} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

e l'additività rispetto al dominio segue applicando la (7.7) con $b < c < a$ invece di $a < c < b$, che si scrive: $\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx$, moltiplicando per -1. Gli altri casi si provano in maniera analoga. Infine, poiché per $a > b$ abbiamo

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{a-b}\int_b^a f(x)\,dx\,,$$

allora il teorema 7.41 della media integrale vale ancora nella forma scritta sopra. □

La funzione integrale

Definizione 7.44 Se $f : I \to \mathbb{R}$ è localmente integrabile, la *funzione integrale* di f di punto iniziale $a \in I$ è la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in I\,.$$

Osservazione 7.45 Per quanto visto sopra, se f è localmente integrabile su I, l'intervallo chiuso di estremi a e x è contenuto in I e dunque l'integrale a secondo membro è ben definito per ogni $a, x \in I$. Abbiamo usato la lettera t dentro l'integrale non potendo usare x, che denota la variabile indipendente e dunque compare solo al secondo estremo di integrazione. Infatti per ogni $a, b \in I$ possiamo scrivere

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

essendo la variabile dentro l'integrale una lettera "muta".

Esempio 7.46 Se $f(t) = t^2$ e $a = 0$, allora abbiamo visto che per $x > 0$ risulta

$$F(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}\,.$$

Poiché t^2 è pari, per $x < 0$ l'area del sottografico di f ristretta a $[x, 0]$ è uguale all'area del sottografico di f ristretta a $[0, -x]$ e dunque

$$\int_x^0 t^2\,dt = -\frac{x^3}{3} \qquad \forall\, x < 0$$

per cui deduciamo che $F(x) = x^3/3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Osservazione 7.47 Nell'esempio precente abbiamo che la funzione integrale F è una primitiva di f, in quanto $F'(x) = D(x^3/3) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Vedremo nel teorema fondamentale del calcolo che questo accade ogni volta che f è continua, mentre è falso in generale se f non è continua.

Esempio 7.48 Se $f(t) = 1$ se $t > 0$ e $f(t) = 0$ se $t \le 0$, scelto $a = 0$ abbiamo $F(0) = 0$, $F(x) = x$ se $x > 0$ e $F(x) = 0$ se $x < 0$. Quindi F non è derivabile su $\mathbb{R}$. In particolare, F è continua su $\mathbb{R}$ ed è derivabile per $x_0 \ne 0$, dove $x_0 = 0$ è l'unico punto di discontinuità di f.

Proposizione 7.49 *Se f è localmente integrabile su I e F è la funzione integrale di punto iniziale $a \in I$, allora*

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \qquad \forall\, x_0\,, x_1 \in I\,. \tag{7.9}$$

Dimostrazione: Scriviamo infatti

$$F(x_1) - F(x_0) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_a^{x_1} f(t)\,dt + \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt$$

dove abbiamo usato la definizione (7.8) e l'additività rispetto al dominio, che generalizza la formula di spezzamento (7.7). □

Il prossimo corollario motiva (almeno in parte) il nome "continuità" dato alla proprietà iii) della proposizione 7.43.

Corollario 7.50 *Se in particolare f è limitata su I, allora la funzione integrale F è lipschitziana su I con costante di Lipschitz $L := \sup_I |f|$.*

Dimostrazione: Scelti infatti due punti $x_0 < x_1$ in I, per la (7.9) risulta

$$|F(x_1) - F(x_0)| = \Big| \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,dt \Big| \le \int_{x_0}^{x_1} |f(t)|\,dt \le \int_{x_0}^{x_1} L\,dt = L \cdot (x_1 - x_0) = L \cdot |x_1 - x_0|\,,$$

dove abbiamo usato la diseguaglianza del teorema 7.36. Poiché per $x_1 < x_0$ risulta $|F(x_1) - F(x_0)| = |F(x_0) - F(x_1)|$ e $|x_1 - x_0| = |x_0 - x_1|$, la tesi segue dalla definizione (5.12) di funzione lipschitziana. □

Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Grazie a questo risultato fondamentale, mediante la teoria dell'integrazione si risolve il problema di esistenza delle primitive.

Teorema 7.51 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e $F : I \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di punto iniziale $a \in I$, cf. definizione 7.44. Allora F è una primitiva di f su I, i.e. F è derivabile su I e $F'(x_0) = f(x_0)$ per ogni $x_0 \in I$.*

Dimostrazione: Fissato $x_0 \in I$, per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$, dalla formula (7.9), con $x_1 = x$, deduciamo che la funzione rapporto incrementale di F centrata in x_0 e calcolata in x verifica l'uguaglianza

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

quindi coincide con la media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x. Poiché f è continua in tale intervallo, essendo continua su tutto l'intervallo I, allora per la forma generale del teorema della media integrale, cf. la parte 5 della proposizione 7.43, esiste un punto $z(x)$ compreso tra x_0 ed x tale che

$$\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f(z(x))\,.$$

Poiché $|z(x) - x_0| \le |x - x_0|$, allora per il teorema di confronto sui limiti deduciamo che $z(x) \to x_0$ se $x \to x_0$. Usando ancora la continuità di f in x_0, otteniamo che $f(z(x)) \to f(x_0)$ se $x \to x_0$. In definitiva abbiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to x_0} f(z(x)) = f(x_0) \in \mathbb{R}$$

e dunque esiste $F'(x_0) = f(x_0)$, come volevamo dimostrare. □

Osservazione 7.52 Concludiamo osservando che mediante la funzione integrale si definiscono funzioni *non elementari*. Questo accade tutte le volte che troviamo funzioni continue le cui primitive non sono ricavate a partire dalle funzioni elementari mediante somme, prodotti, quozienti o composizioni. Esempi sono le seguenti funzioni di classe $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$x \mapsto \int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt\,, \quad x \mapsto \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\,, \quad x \mapsto \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t^2}\,dt$$

e quelle che si ottengono da queste integrando per parti o per sostituzione, cf. esempio 7.62.

Conseguenze del teorema fondamentale del calcolo

Il teorema di Torricelli

Come prima conseguenza, deduciamo che il calcolo degli integrali di funzioni continue si riconduce al problema del calcolo di primitive.

Teorema 7.53 *Sia f una funzione continua su I e sia $G : I \to \mathbb{R}$ una qualsiasi primitiva di f su I. Allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = G(\beta) - G(\alpha) =: [G(x)]_\alpha^\beta \,.$$

Dimostrazione: Detta F la funzione integrale definita in 7.44, per il teorema 7.51 anche F è una primitiva di f su I. Ma allora dalla proposizione 7.3 sappiamo che esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in I$. Quindi per ogni $\alpha, \beta \in I$ otteniamo che

$$G(\beta) - G(\alpha) = \big(F(\beta) + c\big) - \big(F(\alpha) + c\big) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx\,,$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà (7.9) con $x_1 = \beta$ e $x_0 = \alpha$. □

Esempio 7.54 Calcoliamo $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2}\,dx$. Poiché $D\arctan(x/2) = 2/(4+x^2)$, allora

$$\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{2}{4+x^2}\,dx = \Big[\arctan\Big(\frac{x}{2}\Big)\Big]_2^{2\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}\,.$$

Formula di integrazione per parti

Dal teorema 7.9 e grazie al teorema 7.53 di Torricelli, otteniamo immediatamente

Corollario 7.55 *Se $f \in C^0(I)$ e $g \in C^1(I)$ allora per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta*

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx = \big[F(x)g(x)\big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g'(x)\,dx$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f su I e $\big[F(x)g(x)\big]_\alpha^\beta := F(\beta)g(\beta) - F(\alpha)g(\alpha)$.

Formula di integrazione per sostituzione

Dal teorema 7.11 otteniamo invece:

Corollario 7.56 *Siano I e J due intervalli di numeri reali, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : J \to I$ una funzione di classe C^1. Allora risulta per ogni $\alpha, \beta \in J$*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt\,.$$

Dimostrazione: Infatti il teorema 7.11 afferma che se G è una primitiva di f su I, allora $(G \circ \varphi)(x)$ è una primitiva di $(f \circ \varphi)(x)\,\varphi'(x)$ su J. Quindi per il teorema 7.53 di Torricelli scriviamo

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \Big[(G \circ \varphi)(x)\Big]_\alpha^\beta = (G \circ \varphi)(\beta) - (G \circ \varphi)(\alpha) = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))\,.$$

Ma ancora per il teorema 7.53 sappiamo che

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = G(\varphi(\beta)) - G(\varphi(\alpha))$$

da cui segue l'asserto. □

Esempio 7.57 Calcoliamo $\displaystyle\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx$. Posto $t=\varphi(x)=\log x$, poiché $\varphi'(x)=1/x$, per sostituzione abbiamo $\varphi(4)=\log 4$ e $\varphi(16)=\log 16$ e dunque

$$\begin{aligned}\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx &= \int_{\log 4}^{\log 16} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\log t\Big]_{\log 4}^{\log 16} = \log(\log 16)-\log(\log 4) \\ &= \log(\log(2^4))-\log(\log(2^2)) = \log(4\log 2)-\log(2\log 2) = \log\Big(\frac{4\log 2}{2\log 2}\Big) = \log 2\,.\end{aligned}$$

In alternativa, dalla formula per sostituzione sugli integrali indefiniti abbiamo che per $x\in]0,+\infty[$

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + c = \log(\log x)+c$$

e dunque deduciamo che $\log(\log x)$ è una primitiva di $1/(x\log x)$ su $]1,+\infty[$, per cui scriviamo direttamente

$$\int_4^{16} \frac{1}{x\log x}\,dx = \Big[\log(\log x)\Big]_4^{16} = \log(\log 16)-\log(\log 4) = \log 2\,.$$

Esempio 7.58 Calcoliamo $\displaystyle\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx$. Per $x>-1$, posto $\sqrt{1+x}=t \iff 1+x=t^2 \iff x=t^2-1$, abbiamo $dx=2t\,dt$. Inoltre $(x=3 \iff t=2)$ e $(x=8 \iff t=3)$ da cui, sostituendo,

$$\int_3^8 \sqrt{1+x}\,dx = \int_2^3 t\cdot 2t\,dt = \Big[\frac{2}{3}t^3\Big]_2^3 = \frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}\,.$$

Lo stesso risultato può essere ottenuto come sopra notando che $(2/3)(1+x)^{3/2}$ è una primitiva di $\sqrt{1+x}$.

Integrali di funzioni simmetriche

La seguente osservazione è utile per semplificare i calcoli.

Proposizione 7.59 *Sia $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile. Se f è dispari si ha*

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx \quad \textit{e dunque} \quad \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0\,,$$

mentre se f è pari risulta

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx \quad \textit{e dunque} \quad \int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione: Cambiando variabile $t=-x$ scriviamo

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_a^0 f(-t)\,(-1)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt\,.$$

Se f è dispari risulta $f(-t)=-f(t)$ per ogni t e dunque

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = -\int_0^a f(t)\,dt = -\int_0^a f(x)\,dx$$

mentre se f è pari risulta $f(-t)=f(t)$ per ogni t e dunque

$$\int_{-a}^0 f(x)\,dx = \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(x)\,dx$$

da cui segue l'asserto, per l'additività dell'integrale rispetto al dominio. □

Esempio 7.60 In *teoria dei segnali*, un impulso è descritto da una funzione generalmente continua dipendente dalla variabile tempo, $t \mapsto x(t)$. La media temporale nell' intervallo $[t_1, t_2]$ è la media integrale

$$\langle x(t)\rangle_{[t_1,t_2]} := \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\, dt\,, \qquad t_1 < t_2$$

e la *media temporale dell'impulso* è data, qualora esista, dal limite

$$\langle x(t)\rangle := \lim_{T\to+\infty} \langle x(t)\rangle_{[-T/2,T/2]} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt\,.$$

Se l'impulso è periodico di periodo T_0, ad esempio, $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t - t_0)$, dove $\omega > 0$ e $T_0 = 2\pi/\omega$, allora la media temporale è uguale alla media su un intervallo di ampiezza T_0, i.e. $\langle x(t)\rangle = \langle x(t)\rangle_{[-T_0/2,T_0/2]}$.

Un calcolo di area

Dopo avere disegnato l' insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \le y \le 1 - \sqrt{2|x| - x^2}\}\ ,$$

ne calcoliamo l'area.

Osserviamo che se $(x, y) \in A$ allora $-1 \le x \le 1$. Inoltre A è l' insieme ottenuto per estensione simmetrica rispetto all'asse delle ordinate dell'unione degli insiemi B e C dati da

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ x^2-1 \le y \le 0\}\,, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ 0 \le y \le 1-\sqrt{2x - x^2}\}\,.$$

Quindi l'area di A è il doppio della somma delle aree di B e C. Osserviamo inoltre che l'area di B è uguale all'area dell' insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1 - x^2\}$$

ottenuto da B mediante una riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Poiché dunque D è il sottografico della funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che manda $x \mapsto (1-x^2)$, mentre C è il sottografico della funzione $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ che manda $x \mapsto (1 - \sqrt{2x - x^2})$, allora deduciamo che

$$\mathbf{A}(A) = 2(\mathbf{A}(B) + \mathbf{A}(C))\,, \quad \mathbf{A}(B) = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx\,, \quad \mathbf{A}(C) = \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2})\, dx\ .$$

Calcoliamo quindi

$$\mathbf{A}(B) = \int_0^1 (1 - x^2)\, dx = \Big[x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\ .$$

Riguardo poi il secondo integrale, dal momento che $2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2$, posto $(x - 1) = \mathrm{sen}\, t \iff t = \varphi(x) = \mathrm{arcsen}(x - 1)$, allora $\varphi : [0, 1] \to [-\pi/2, 0]$ è crescente, con $\varphi(0) = -\pi/2$ e $\varphi(1) = 0$. Inoltre $\sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, t} = |\cos t| = \cos t$, in quanto $\cos t > 0$ se $t \in [-\pi/2, 0]$, ed infine $dx = \cos t\; dt$. Quindi otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(C) &= \int_0^1 (1 - \sqrt{2x - x^2})\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\, dx = 1 - \int_{-\pi/2}^0 \cos^2 t\; dt \\ &= 1 - \frac{1}{2}\Big[t + \mathrm{sen}\, t \cos t\Big]_{-\pi/2}^0 = 1 - \frac{1}{2}\Big[\frac{\pi}{2}\Big] = 1 - \frac{\pi}{4}\ .\end{aligned}$$

In conclusione abbiamo che

$$\mathbf{A}(A) = 2 \cdot \frac{2}{3} + 2\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{10}{3} - \frac{\pi}{2}\ .$$

Osserviamo infine che l'area di C poteva essere ottenuta senza calcolare integrali, ma osservando che C è dato dai punti del quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ che non stanno nel cerchio di centro $(1, 1)$ e raggio 1.

La funzione integrale

Esempio 7.61 Studiamo la funzione integrale $F : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \,, \qquad \text{dove} \qquad f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad -1 \le t < 0 \\ -2t & \text{se} \quad 0 \le t \le 1 \\ 2t - 4 & \text{se} \quad 1 < t \le 2 \\ 1 & \text{se} \quad 2 < t < 3 \\ 1/2 & \text{se} \quad t = 3 \,, \end{cases}$$

specificando in quali punti F non è continua o non è derivabile.

Poiché f è limitata, allora F è Lipschitziana con costante $L = \sup|f| = 2$ e quindi F è continua. Inoltre per il teorema fondamentale del calcolo sappiamo che F è sicuramente derivabile in tutti i punti in cui f è continua, e quindi su $[-1, 0[\cup]0, 2[\cup]2, 3[$. Abbiamo $F(0) = 0$. Inoltre se $x \in [-1, 0[$ risulta $F(x) = \int_0^x (-1)\, dt = -x$, mentre se $x \in]0, 1]$ risulta $F(x) = \int_0^x (-2t)\, dt = -x^2$. In particolare $F(1) = -1$. Se invece $x \in]1, 2]$, allora scriviamo

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)\, dt = -1 + \int_1^x (2t - 4)\, dt = -1 + \Big[t^2 - 4t\Big]_1^x = x^2 - 4x + 2 \,.$$

In particolare risulta $F(2) = -2$. In modo analogo, se $x \in]2, 3[$ scriviamo

$$F(x) = F(2) + \int_2^x f(t)\, dt = -2 + \int_2^x 1\, dt = -2 + \Big[t\Big]_2^x = x - 4 \,.$$

Infine, dal momento che il valore dell' integrale non dipende dal valore della funzione f in un punto, abbiamo che $F(3) = -1$ e che quindi F è derivabile anche nel punto 3. In conclusione risulta

$$F(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ -x^2 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ x^2 - 4x + 2 & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \\ x - 4 & \text{se} \quad 2 < x \le 3 \,. \end{cases}$$

Studio qualitativo di una funzione integrale non elementare

Esempio 7.62 Studiamo la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\, dt$.

Ricordiamo che F non è una funzione elementare. Facciamo comunque uno studio qualitativo.

Poiché $f(t) = \mathsf{e}^{-t^2}$ è continua, allora f è integrabile nell'intervallo di estremi 0 ed x per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque F è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché la sua derivata è f, che è di classe $C^n(\mathbb{R})$ per ogni n, allora F è di classe C^∞. Inoltre la funzione F è dispari. Infatti f è pari e dunque, come nella proposizione 7.59, deduciamo che $F(-x) = -F(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione F è strettamente crescente. Infatti per il teorema fondamentale del calcolo sappiamo che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma f è positiva su tutto $\mathbb{R}$. Poiché $F(0) = 0$, allora $F(x) > 0$ se $x > 0$ e $F(x) < 0$ se $x < 0$.

La funzione F è strettamente convessa su $[0, +\infty[$ e strettamente concava su $]-\infty, 0]$. Infatti $F''(x) = f'(x) = D(\mathsf{e}^{-x^2}) = \mathsf{e}^{-x^2} \cdot (-2x)$ e dunque $F''(x) < 0$ se $x > 0$ e $F''(x) > 0$ se $x < 0$. Il punto $x_0 = 0$ è un flesso a tangente obliqua; in particolare $F'(0) = f(0) = 1$ e dunque la retta tangente in $(0, 0)$ è la bisettrice $y = x$. Dalla stretta convessità deduciamo poi che $F(x) < x$ se $x > 0$ e $F(x) > x$ se $x < 0$.

Essendo F crescente, allora esiste il limite

$$L = \lim_{x \to +\infty} F(x)$$

ed è un numero reale positivo oppure è $+\infty$. Essendo dispari, inoltre, ponendo $z = -x$ abbiamo anche

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{z \to +\infty} F(-z) = \lim_{z \to +\infty} (-F(z)) = -L \,.$$

Il valore del limite L non si calcola con argomenti di Analisi Matematica 1, dato che non conosciamo una primitiva della funzione e^{-x^2} per potere applicare il teorema di Torricelli. Vediamo invece che mediante un argomento di confronto possiamo comunque concludere che $L \in \mathbb{R}$ e dare una maggiorazione di L.

Fissato infatti $x > 1$, scriviamo mediante uno spezzamento

$$F(x) = \int_0^1 \mathsf{e}^{-t^2}\,dt + \int_1^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt\,.$$

Ora per $0 \le t \le 1$ risulta $0 < \mathsf{e}^{-t^2} \le 1$ e dunque, per il confronto, $\int_0^1 \mathsf{e}^{-t^2}\,dt \le 1$. Invece per $t \ge 1$ risulta $-t^2 \le -t$ e dunque $\mathsf{e}^{-t^2} \le \mathsf{e}^{-t}$. Quindi abbiamo

$$\int_1^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt \le \int_1^x \mathsf{e}^{-t}\,dt = \left[-\mathsf{e}^{-t}\right]_1^x = \mathsf{e}^{-1} - \mathsf{e}^{-x}\,.$$

In definitiva abbiamo ottenuto che $F(x) \le g(x) := 1 + \mathsf{e}^{-1} - \mathsf{e}^{-x}$ per ogni $x > 0$ e dal momento che $g(x) \to 1 + \mathsf{e}^{-1}$ per $x \to +\infty$, per il teorema del confronto deduciamo che il limite L è un numero reale positivo e non maggiore di $1+\mathsf{e}^{-1}$. Quindi le rette di equazione $y = L$ e $y = -L$ sono asintoti orizzontali di $F(x)$ per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$, rispettivamente. Infine, per la stretta monotonia concludiamo che $-L < F(x) < L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, dunque F ha immagine uguale a $]-L, L[$.

Osservazione 7.63 Con argomenti di Analisi Matematica 2 si calcola che $L = \sqrt{\pi}/2$.

Derivate di funzioni integrali

Sia ora $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua su I e $\alpha, \beta : J \to I$ due funzioni di classe C^1 su J. Allora è ben definita la funzione $F : J \to \mathbb{R}$ data dalla legge

$$F(x) := \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\,, \qquad x \in J\,.$$

Infatti l'intervallo di estremi $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ è contenuto in I per ogni $x \in J$. Inoltre, grazie al teorema 7.53 possiamo scrivere che $F(x) = G(\beta(x)) - G(\alpha(x))$ per ogni $x \in J$, dove $G : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f su I. Ma allora derivando otteniamo che per ogni $x \in J$

$$F'(x) = (G \circ \beta)'(x) - (G \circ \alpha)'(x) = G'(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - G'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

e dunque possiamo scrivere

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) \qquad \forall\, x \in J\,. \tag{7.10}$$

Esempio 7.64 Calcoliamo

$$\frac{d}{dx} \int_{2x}^{x^2} \sqrt{1-t^2}\,dt = \sqrt{1-(x^2)^2}\,Dx^2 - \sqrt{1-(2x)^2}\,D(2x) = 2(x\sqrt{1-x^4} - \sqrt{1-4x^2})\,.$$

Regolarità di funzioni integrali

Sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,dt\,,$$

dove g è una funzione continua e limitata su $[-a, a] \setminus \{0\}$. Dimostriamo che:

a) f è continua in 0 e $f(0) = 0$;

b) se g è pari [[dispari]] allora f è dispari [[pari]];

c) se $a(x)$ e $b(x)$ sono funzioni a valori in $[-a, a]$ e tali che $\big(b(x) - a(x)\big) \to 0$ per $x \to 0$, allora

$$\lim_{x\to 0} \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\,dt = 0\,.$$

a) Poiché g è limitata, esiste $M > 0$ tale che $|g(t)| < M$ per ogni $t \in [-a, a] \setminus \{0\}$. Dal momento che l'integrale non dipende dal valore della funzione g in un punto, poniamo $g(0) = 0$. Quindi abbiamo $f(0) = \int_0^0 g(t)\, dt = 0$ e per $x \neq 0$

$$0 \leq |f(x)| \leq \int_0^{|x|} |g(t)|\, dt < \int_0^{|x|} M\, dt = M|x| \to 0$$

se $x \to 0$, per cui f è continua in 0.
b) Basta ragionare come nel corollario 7.55, con $a = x$. Infatti otteniamo che se g è pari allora $f(-x) = -f(x)$, i.e. f è dispari, mentre se g è dispari allora $f(-x) = f(x)$, i.e. f è pari.
c) Abbiamo

$$0 \leq \Big| \int_{a(x)}^{b(x)} g(t)\, dt \Big| \leq \Big| \int_{a(x)}^{b(x)} |g(t)|\, dt \Big| \leq \Big| \int_{a(x)}^{b(x)} M\, dt \Big| \leq M|b(x) - a(x)|$$

e quindi basta applicare il teorema del confronto.

Un limite con funzioni integrali

Indicata con f la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$, calcoliamo il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2f(x) - f(2x)}{x - f(x)} .$$

Poiché $|\operatorname{sen} t/t| < 1$ per $t \neq 0$, allora per l'esempio precedente abbiamo che $f(x) \to 0$ per $x \to 0$. Da questo deduciamo che il limite ha una forma indeterminata $0/0$. Inoltre prendendo $M = 1$ nel caso a) dell'esercizio precedente, deduciamo che $|f(x)| < |x|$ e quindi il denominatore è diverso da 0 per $x \neq 0$. Poiché $\operatorname{sen} t/t$ è continua, allora per il teorema fondamentale del calcolo f è derivabile per $x \neq 0$, con $f'(x) = \operatorname{sen} x/x$. Poiché infine $D\big(x - f(x)\big) = 1 - \operatorname{sen} x/x \neq 0$ se $x \neq 0$, allora sono verificate le ipotesi del teorema 6.62 di de l'Hôpital. Abbiamo quindi

$$\frac{D\big(2f(x) - f(2x)\big)}{D\big(x - f(x)\big)} = \frac{2f'(x) - f'(2x) \cdot 2}{1 - f'(x)} = \frac{2(\operatorname{sen} x/x) - \big(\operatorname{sen}(2x)/2x\big) \cdot 2}{1 - \operatorname{sen} x/x} .$$

Inoltre $\operatorname{sen} x/x = 1 - x^2/6 + o(x^2)$ e $\operatorname{sen}(2x)/x = 2 - 8x^2/6 + o(x^2)$ per cui

$$\frac{2(\operatorname{sen} x/x) - \big(\operatorname{sen}(2x)/2x\big) \cdot 2}{1 - \operatorname{sen} x/x} = \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2/6 + o(x^2)} \to 6$$

se $x \to 0$. In conclusione, per il teorema di de l'Hôpital il limite vale 6.

Sviluppi di Taylor di funzioni integrali

Risulta utile la seguente osservazione.

Proposizione 7.65 *Sia f una funzione continua su un intervallo I contenente l'origine e $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ la sua funzione integrale con punto iniziale $a = 0$. Se $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ con $P_n(x)$ un polinomio di ordine $n \in \mathbb{N}$, allora risulta*

$$F(x) = \int_0^x P_n(t)\, dt + o(x^{n+1}) \qquad \forall\, x \in I .$$

Dimostrazione: Osserviamo che la funzione $g(x) = f(x) - P_n(x)$ è anch'essa continua su I, dunque integrabile vicino all'origine. In particolare, se $a > 0$ è tale che $[-a, a] \subset I$, allore g è anche limitata su $[-a, a]$. Ma allora la funzione $x \mapsto \int_0^x g(t)\, dt$ è derivabile su $[-a, a]$ e vale zero per $t = 0$. Allora per il teorema 6.62 di de L'Hôpital abbiamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x g(t)\, dt}{x^{n+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{D \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt}{D x^{n+1}} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{(n+1)\, x^n} = 0 ,$$

essendo per ipotesi $g(x) = o(x^n)$, e dunque

$$F(x) - \int_0^x P_n(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt = o(x^{n+1}),$$

come volevamo dimostrare. □

Esempio 7.66 Determiniamo ordine e parte principale per $x \to 0$ dell'infinitesimo $\operatorname{sen} x - \int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt$.

Abbiamo $\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + o(x^3)$. Poiché inoltre $\mathsf{e}^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2)$, allora

$$\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^x \big(1 - t^2 + o(t^2)\big)\,dt = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

In conclusione otteniamo

$$\operatorname{sen} x - \int_0^x \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

e quindi l'ordine di infinitesimo è 3 e la parte principale $x^3/6$.

Esempio 7.67 Calcoliamo $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^x \big(\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t\big)\,dt}{x(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)}$.

A denominatore abbiamo $\operatorname{sen}^2 x = \big(x - x^3/3! + o(x^3)\big)^2 = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$ e quindi $x(x^2 - \operatorname{sen}^2 x) = x\big(x^4/3 + o(x^4)\big) = x^5/3 + o(x^5)$. Inoltre a numeratore abbiamo $\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t = 1 - t^2 + t^4/2 + t^2 - t^4/3 + o(t^4) = 1 + t^4/6 + o(t^4)$ e quindi

$$x - \int_0^x \big(\mathsf{e}^{-t^2} + \operatorname{sen}^2 t\big)\,dt = x - \int_0^x \Big(1 + \frac{t^4}{6} + o(t^4)\Big)\,dt = x - x - \frac{x^5}{30} + o(x^5) = -\frac{x^5}{30} + o(x^5),$$

per cui il limite si scrive come

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x^5/30 + o(x^5)}{x^5/3 + o(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1/30 + o(x^5)/x^5}{1/3 + o(x^5)/x^5} = -\frac{1}{10}.$$