Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 1 del 17/6/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Si dimostri la regola della catena (chain rule).

2. **[12 punti]** Si supponga che l'80% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 95% degli studenti preparati e dal 10% degli studenti impreparati. Si calcolino: a) la probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame; b) la probabilità che uno studente che ha superato l'esame sia in effetti impreparato.

3. **[12 punti]** Sia X una variabile casuale uniformemente distribuita in $[-2,2]$ e sia $g(x)$ la trasformazione

$$g(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ x & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

Determinare la densità di probabilità della variabile casuale $Y = g(X)$ e disegnarne il grafico.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.
2. Definendo gli eventi

$$\begin{aligned}\mathscr{P} &= \{\text{lo studente è preparato}\}\\ \overline{\mathscr{P}} &= \{\text{lo studente non è preparato}\}\\ \mathscr{E} &= \{\text{l'esame è superato}\}\end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}P(\mathscr{P}) &= 0.8\\ P(\overline{\mathscr{P}}) &= 1-0-8 = 0.2\\ P(\mathscr{E}|\mathscr{P}) &= 0.95\\ P(\mathscr{E}|\overline{\mathscr{P}}) &= 0.1\end{aligned}$$

   (a) Per il teorema della probabilità totale

$$P(\mathscr{E}) = P(\mathscr{E}|\mathscr{P})P(\mathscr{P}) + P(\mathscr{E}|\overline{\mathscr{P}})P(\overline{\mathscr{P}}) = 0.78$$

   (b) Per il teorema di Bayes

$$P(\mathscr{P}|\mathscr{E}) = \frac{P(\mathscr{E}|\mathscr{P})P(\mathscr{P})}{P(\mathscr{E})} = 0,97$$

3. La figura 1 mostra la trasformazione $g(x)$ e la densità di probabilità $f_X(x)$ della variabile casuale X. Quest'ultima, per la condizione di normalizzazione, assume il valore $1/4$ per $-2 \leq x \leq 2$.

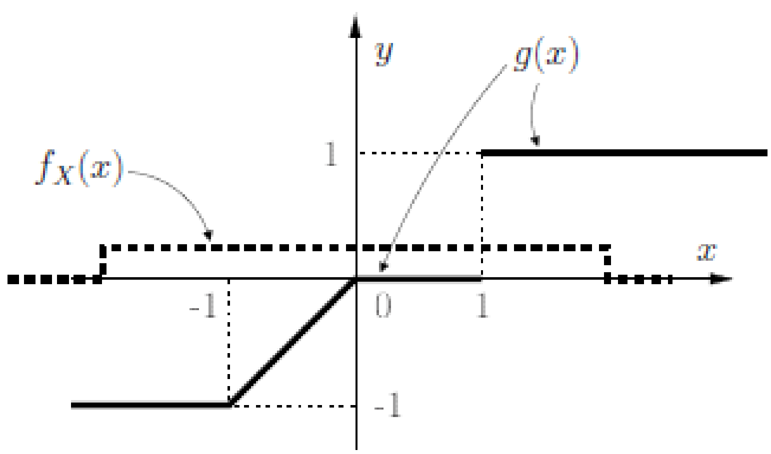

Figura 1: Densità di probabilità $f_X(x)$ della variabile casuale X e trasformazione $g(x)$.

Avendo $g(x)$ dei tratti costanti, la variabile casuale Y sarà mista. In particolare

$$P\{Y=-1\} = \int_{-\infty}^{-1} f_X(x)\,dx = \frac{1}{4}$$
$$P\{Y=0\} = \int_{0}^{1} f_X(x)\,dx = \frac{1}{4}$$
$$P\{Y=1\} = \int_{1}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{4}\,.$$

Di conseguenza, nella densità di probabilità di Y compariranno 3 delta di Dirac di area 1/4. Per $-1 \leq x \leq 0$ possiamo ricorrere al teorema fondamentale, ma poiché $g(x) = x$, la sua applicazione è banale e avremo $f_Y(y) = f_X(y) = \frac{1}{4}$. Il grafico della densità di probabilità $f_Y(x)$ è mostrato in Fig. 2.

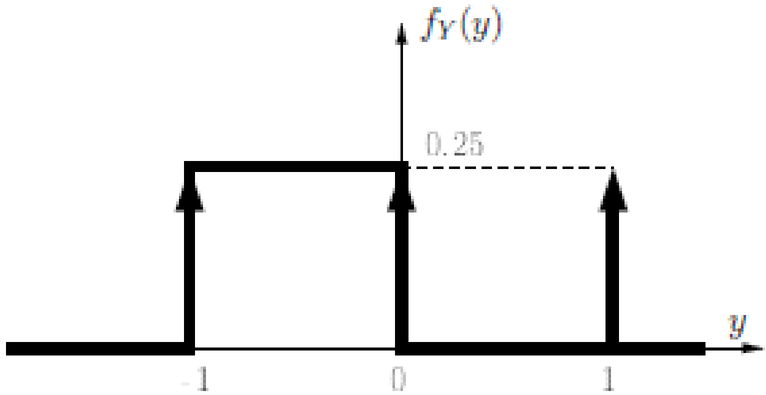

Figura 2: Densità di probabilità $f_Y(x)$ della variabile casuale Y.