Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 2 del 17/6/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Derivare l'espressione matematica e illustrare il significato della disuguaglianza di Chebyshev.

2. **[12 punti]** Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   1) Trovare la funzione generatrice dei momenti di X, $\phi(s) = \mathbb{E}\{e^{sX}\}$.
   2) Utilizzarla per ricavare media e valore quadratico medio di X.

3. **[12 punti]** Sia X una variabile aleatoria con la seguente densità di probabilità

$$f_X(x) = \frac{1}{3}(u(x+1) - u(x-1)) + \frac{1}{6}e^{-\lambda(x-0.5)}u(x-0.5) + \frac{1}{6}\delta(x-2)$$

   con $u(x)$ gradino unitario.
   Dopo aver stabilito il valore di λ, si trovi, usando il teorema fondamentale, la densità di probabilità di $Y = g(X)$ con

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. a) Per $s < 1$ si ha

$$\begin{aligned}
\phi_X(s) = \mathbb{E}[e^{sX}] &= \int_0^\infty e^{sx}\left(e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-x}\right)dx \\
&= \left[\frac{1}{s-2}e^{sx-2x} + \frac{1}{2(s-1)}e^{sx-x}\right]\Big|_0^\infty \\
&= 0 - \frac{1}{s-2} + 0 - \frac{1}{2(s-1)} \\
&= \frac{1}{2-s} + \frac{1}{2(1-s)}
\end{aligned}$$

   b) Si ha

$$\begin{aligned}
\phi'_X(s) &= \frac{1}{(2-s)^2} + \frac{1}{2(1-s)^2} \\
\phi''_X(s) &= \frac{2}{(2-s)^3} + \frac{1}{(1-s)^3}
\end{aligned}$$

   da cui $\mathbb{E}[X] = \phi'_X(0) = \frac{3}{4}$ e $\mathbb{E}[X^2] = \phi''_X(0) = \frac{5}{4}$.

3. Si trova facilmente $\lambda = 1$.
   Si ha $Y \in [0,1]$, con
   - $\delta(y)$ di peso $P\{X < 0\} = 1/3$ e $\delta(y-1)$ di peso $P\{X > 1\} = 1/6(1+e^{-0.5})$.
   - Per $0 \leq y < 0.25$ si ha $f_Y(y) = 1/(6\sqrt{y})$.
   - Per $0.25 \leq y \leq 1$ si ha $f_Y(y) = 1/(6\sqrt{y}) + e^{-(\sqrt{y}-0.5)}/(12\sqrt{y})$.