Università degli Studi di Parma - C. L. in Ingegneria I. E. T.
Analisi Matematica - Prof. Domenico Mucci
Esercizi proposti sul cap. 5 : funzioni contine e limiti

Funzioni continue.

Dite se la seguente funzione ha limite per $x \to 0^+$, per $x \to 0^-$, per $x \to 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ \operatorname{sen} x - 1 & \text{se } x < 0 \,. \end{cases}$$

Verificate poi in quali punti di $\mathbb{R}$ la funzione f è continua.

Verificate per quali valori del parametro reale a risulta continua in $x_0 = 0$ la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{se } x > 0 \\ a(\operatorname{sen} x - 1) & \text{se } x \le 0 \,. \end{cases}$$

Esistenza di limiti.

Determinate se i seguenti limiti esistono e, in tale caso, calcolate quanto valgono:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \operatorname{sen} x \,, \qquad \lim_{x\to 0} e^x \operatorname{sen} x \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x \operatorname{sen} x \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1)\cos x \,.$$

Asintoti obliqui.

Determinate gli asintoti obliqui delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + x - 2} \quad \text{per} \quad x \to +\infty \,, \qquad f(x) = \frac{3x^3 - x^2}{2x^2 - 1} \quad \text{per} \quad x \to -\infty \,.$$

Calcolo di limiti.

Calcolate i seguenti limiti con radici:

$$\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x}) \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2 + x}) \,.$$

Calcolate i seguenti limiti con potenze ed esponenziali:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2^x) \,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + x^2}{2^x + x^{100}} \,, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + x^2}{2^x + x^{100}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x} - 4^x}{5^x - 9^x} \,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3^{2x} - 4^x}{5^x - 9^x} \,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{x^2 + \cos x} \,.$$

Dei seguenti limiti, se non esistono, calcolate il limite da destra e il limite da sinistra:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{|x|} \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\cos x - 1} \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{sen} 3x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad \text{dove} \quad a > 0 \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} \quad \text{dove} \quad a > 0 \quad \mathbf{e} \quad a \ne 1 \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x + x)^2}{(e^x - \cos x)\log(1-x)} \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{e^{x^2} - \cos x} \,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2^{x^2} - \cos 3x}{\operatorname{sen}^2 \log(1-2x)} \,.$$

Cambio di variabile nei limiti.

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{1 - \cos(x-1)}{x^2 - 1}, \qquad \lim_{x\to -\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x + 1}{(2x+\pi)^2}, \qquad \lim_{x\to 0^\pm} e^{1/x}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\big(\log(x+1) - \log x\big), \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \Big(1 - \frac{1}{x}\Big)^x, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(3^x - 9)}{\log(x^2-3)}.$$

Ordine di infinitesimo.

A partire dai limiti fondamentali per $x \to 0$, determinate rapidamente ordine e parte principale di infinitesimo delle seguenti funzioni:

$$\frac{\operatorname{sen} x - 2x}{2\cos x}, \qquad e^{x^2} - \cos x, \qquad \frac{\log(\cos x) + e^{\operatorname{sen} x^2} - 1}{x} \qquad \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$$

Stessa domanda, ma questa volta dovete utilizzare gli sviluppi di Taylor delle funzioni fondamentali:

i) $2e^x(1-\cos x) - x^2(1+x)$

ii) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2$

iii) $e^{x^2+2x} - \cos(2x) - 2\operatorname{sen} x - 5x^2$

iv) $\arctan(3x) + \operatorname{sen}(\cos x - 1) - \log(1 + 3x + 4x^2)$.

Calcolo di un limite mediante gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x(1-\cos x)}{e^{x^2-x} - \cos x + \log(1 + x - 3x^2/2)}.$$

Una prova d'esame:

Sia data la funzione $f(x) = \log\left(1 - \operatorname{sen}(x - x^2/2)\right) + \operatorname{sen} x$.
Scrivete il polinomio di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x)$.
Calcolate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \alpha x^3}{x^4 + x^5}.$$