Risoluzione del compito n. 6 (Giugno 2024)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \bar{z} - w = 3(1 - \mathrm{i}) \\ z\bar{w} + 5\mathrm{i} = 0 \, . \end{cases}$$

Coniugando ambo i membri della prima equazione otteniamo

$$z - \bar{w} = 3(1 + \mathrm{i}) \iff \bar{w} = z - 3(1 + \mathrm{i})$$

che sostituiamo nella seconda equazione ottenendo

$$z^2 - 3(1 + \mathrm{i})z + 5\mathrm{i} = 0 \, ,$$

una equazione di secondo grado la cui soluzione è

$$z = \frac{3(1 + \mathrm{i}) \pm \sqrt{9(1 - 1 + 2\mathrm{i}) - 20\mathrm{i}}}{2} = \frac{3(1 + \mathrm{i}) \pm \sqrt{-2\mathrm{i}}}{2} \, .$$

Il numero $-2\mathrm{i}$ nel piano di Gauß punta dritto verso il basso, ossia ha argomento $-\pi/2$, quindi una delle sue radici quadrate ha argomento $-\pi/4$ ed è pertanto un multiplo di $1 - \mathrm{i}$. Dato che $-2\mathrm{i}$ ha modulo 2, le sue radici hanno modulo $\sqrt{2}$ così le radici sono $\pm(1 - \mathrm{i})$ e

$$z = \frac{3(1 + \mathrm{i}) \pm (1 - \mathrm{i})}{2} = \begin{cases} 1 + 2\mathrm{i} \\ 2 + \mathrm{i} \, . \end{cases}$$

Ricavando w dalla prima equazione del sistema, $w = \bar{z} - 3(1 - \mathrm{i}) = \bar{z} - 3 + 3\mathrm{i}$, otteniamo

$$\begin{cases} z_1 = 1 + 2\mathrm{i} & \Rightarrow & \bar{z}_1 = 1 - 2\mathrm{i} & \Rightarrow & w_1 = -2 + \mathrm{i} \\ z_2 = 2 + \mathrm{i} & \Rightarrow & \bar{z}_2 = 2 - \mathrm{i} & \Rightarrow & w_2 = -1 + 2\mathrm{i} \, , \end{cases}$$

e le due soluzioni del sistema sono

$$z_1 = 1 + 2\mathrm{i} \, , \; w_1 = -2 + \mathrm{i} \, , \qquad z_2 = 2 + \mathrm{i} \, , \; w_2 = -1 + 2\mathrm{i} \, .$$

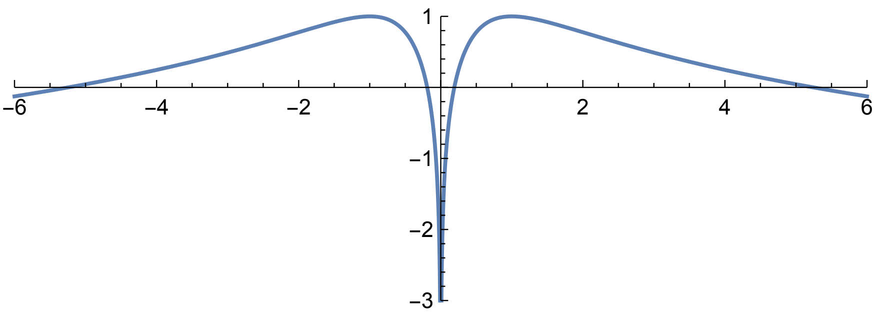
PROBLEMA 2

Considerate le funzioni

$$\boldsymbol{f(x) = \log_{\mathrm{e}} \frac{2\,\mathrm{e}|x|}{1+x^2}}\,, \qquad \boldsymbol{g(x) = \log_{\mathrm{e}} \left|\frac{2\,\mathrm{e}x}{1+x^2}\right|}\,, \qquad \boldsymbol{h(x) = \left|\log_{\mathrm{e}} \frac{2\,\mathrm{e}x}{1+x^2}\right|}\,.$$

a) **Dite se sono uguali o diverse, giustificando accuratamente le risposte.**
b) **Determinate il dominio di f, il segno, gli zeri, i limiti agli estremi del dominio.**
c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo o minimo locale.**
d) **Determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f e i punti di flesso.**
e) **Disegnate il grafico di f.**

Dato che $|2\,\mathrm{e}x/(1+x^2)| = 2\,\mathrm{e}|x|/1+x^2$, le funzioni f e g sono uguali. Invece f ed h sono diverse: ad esempio f esiste per $x<0$ mentre h no. Il dominio di f sono tutti i numeri x per cui l'argomento del logaritmo (esiste ed) è positivo, ma essendo un valore assoluto ciò equivale a dire che l'argomento non è nullo, dunque il dominio è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Osserviamo poi che f è pari, quindi basta studiarla per $x>0$ e ribaltare i risultati anche a sinistra dell'origine. Per $x>0$ abbiamo

$$f(x)>0 \iff \frac{2\,\mathrm{e}x}{1+x^2}>1 \iff x^2-2\,\mathrm{e}x+1<0 \iff \mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<x<\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1}$$

(osserviamo che $\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<\mathrm{e}$ quindi entrambi gli estremi sono positivi) perciò $f(x)$ è

$$\begin{cases} >0 & \text{per } -\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<x<-\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1} \text{ e per } \mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}^2-1}<x<\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1} \\ =0 & \text{per } x=\pm\big(\mathrm{e}-\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\big) \text{ e per } x=\pm\big(\mathrm{e}+\sqrt{\mathrm{e}^2-1}\big) \\ <0 & \text{per gli altri valori di } x\neq 0. \end{cases}$$

Sia per $x\to 0$ che per $x\to\pm\infty$ abbiamo $2\,\mathrm{e}|x|/(1+x^2)\to 0$, quindi la funzione f tende a $-\infty$. La derivata di f per $x>0$ è

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)}$$

che è positiva per $0 < x < 1$ e negativa per $x > 1$, dunque f è

$$\begin{array}{ll} \text{strettamente crescente} & \text{per } x < -1 \text{ e per } 0 < x < 1 \\ \text{strettamente decrescente} & \text{per } -1 < x < 0 \text{ e per } x > 1, \end{array}$$

ed ha massimo (assoluto) in $x = \pm 1$ dove vale $\log \mathsf{e} = 1$. La derivata seconda per $x > 0$ è

$$f''(x) = \frac{x^4 - 4x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2}$$

e dato che l'equazione $t^2 - 4t - 1 = 0$ ha radici $t = 2 \pm \sqrt{5}$ ma una è negativa, abbiamo che f è

$$\begin{array}{ll} \text{strettamente convessa} & \text{per } x < -\sqrt{2+\sqrt{5}} \text{ e per } x > \sqrt{2+\sqrt{5}} \\ \text{strettamente concava} & \text{per } -\sqrt{2+\sqrt{5}} < x < 0 \text{ e per } 0 < x < \sqrt{2+\sqrt{5}}. \end{array}$$

I punti di flesso sono $x = \pm\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \operatorname{sen}(\mathrm{e}^{2x-3x^2} - 1)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(2x - x^2)$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) - g(x)$.**

d) **Calcolate, per tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste, il limite**

$$\ell_\alpha = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + \alpha x^3}{x^4}.$$

Sappiamo che $2x - 3x^2$ è un infinitesimo di ordine 1, quindi $o(2x - 3x^2)^k = o(x^k)$; poi

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{2x-3x^2} &= 1 + (2x - 3x^2) + \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\
&= 1 + 2x - 3x^2 + \frac{4x^2 - 12x^3 + 9x^4}{2} + \frac{8x^3 - 36x^4}{6} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4) \\
&= 1 + 2x - x^2 - \frac{14x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4),
\end{aligned}$$

e di qui, osservando che anche $2x - x^2 + \cdots$ è un infinitesimo di ordine 1,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \operatorname{sen}\Big(2x - x^2 - \frac{14x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)\Big) \\
&= 2x - x^2 - \frac{14x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o(\cdots)^4 \\
&= 2x - x^2 - \frac{14x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4) - \frac{1}{6}(8x^3 - 12x^4) \\
&= 2x - x^2 - 6x^3 + \frac{7x^4}{6} + o(x^4).
\end{aligned}$$

In modo simile

$$g(x) = 2x - x^2 - \frac{1}{6}(2x - x^2)^3 + o(2x - x^2)^4 = 2x - x^2 - \frac{4x^3}{3} + 2x^4 + o(x^4)$$

per cui

$$f(x) - g(x) = -\frac{14x^3}{3} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $-14x^3/3$. Allora per $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - g(x) + \alpha x^3}{x^4} = \frac{(\alpha - 14/3)x^3 - 5x^4/6 + o(x^4)}{x^4} = \frac{\alpha - 14/3}{x} - \frac{5}{6} + \frac{o(x^4)}{x^4}$$

da cui otteniamo che il limite ℓ_α esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e vale

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 14/3 \\ -5/6 & \text{se } \alpha = 14/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 14/3. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Per $x > 0$ sia $F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^3} - 1}{t}\, dt$.

a) Calcolate $\lim_{x \to 0+} \frac{F(x)}{x^3}$.

b) Posto $a_n = \int_0^{1/n} \frac{e^{t^3} - 1}{t}\, dt$, determinate al variare dell'esponente reale α il carattere della serie

$$\sum_n n^\alpha a_n .$$

Se $0 < t < x$, è $e^{t^3} > e^0$ quindi la funzione integranda è positiva; inoltre $e^{t^3} = 1 + t^3 + o(t^3)$ quindi

$$F(x) = \int_0^x \bigl(t^2 + o(t^2)\bigr)\, dt = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui $F(x)/x^3 \to 1/3$. In particolare, visto che $a_n = F(1/n) > 0$ e quindi possiamo applicare il criterio del confronto asintotico, dal punto precedente abbiamo

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{1/n^3} = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad n^\alpha a_n \sim n^{\alpha - 3} = \frac{1}{n^{3-\alpha}}$$

e la serie converge se e solo se $3 - \alpha > 1$ cioè $\alpha < 2$, mentre diverge positivamente per $\alpha \geq 2$.

Esercizio 1. Una soluzione dell'equazione $\big(z^2-(1-\mathrm{i})z-\mathrm{i}\big)(z+3-\mathrm{i})=0$ è

(A) $-\mathrm{i}$.	(C) $3-\mathrm{i}$.
(B) i .	(D) 0 .

Basta provare a sostituire i quattro numeri proposti nel polinomio al primo membro (anzi, solo nel primo fattore, dato che il secondo si annulla solo per $z=-3+\mathrm{i}$), e l'unico valore che lo annulla è $z=-\mathrm{i}$.

Esercizio 2. Ho scritto due numeri interi a e b , con $1\le a<b$, la cui somma fa 23 . Qual è la probabilità che siano proprio $a=1$ e $b=22$?

(A) $1/11$.	(C) $1/23$.
(B) $2/23$.	(D) $1/\binom{23}{2}$.

Naturalmente il caso favorevole è soltanto uno, appunto $a=1$ e $b=22$. Per contare i casi possibili osserviamo che per ogni scelta di a c'è un solo valore di b per cui la somma risulta 23 , ma se vogliamo che sia $a<b$ il numero a non deve superare metà del risultato, quindi $1\le a\le 11$ e i casi possibili sono 11 .

Esercizio 3. L'integrale $\int_0^{2\pi}|\cos x|\,dx$ vale

(A) 4 .	(C) 0 .
(B) 2 .	(D) 2π .

Per le simmetrie della funzione coseno, basta calcolare quattro volte l'integrale fra 0 e $\pi/2$ ottenendo $4\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=4$.

Esercizio 4. Dato $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{2\alpha}\arctan(x^{3\alpha})\,dx$

(A) converge se e solo se $\alpha<-1/5$.	(C) converge se e solo se $\alpha<-1/2$.
(B) non esiste per qualche valore di α .	(D) diverge positivamente se $\alpha\ge-1/3$.

La funzione $f(x)=x^{2\alpha}\arctan(x^{3\alpha})$ è continua e positiva su $[1,+\infty)$, quindi l'integrale (generalizzato) o converge o diverge positivamente. Poiché inoltre $f(x)\to+\infty$ se $x\to+\infty$ per ogni $\alpha>0$, mentre $f(x)=\pi/4>0$ per ogni x , se $\alpha=0$, allora l'integrale diverge positivamente se $\alpha\ge 0$. Invece, se $\alpha<0$, risulta $x^{\alpha}\to 0^+$ e dunque $\arctan(x^{3\alpha})\sim x^{3\alpha}$ per $x\to+\infty$, dato che $\arctan t\sim t$ per $t\to 0$. Quindi se $\alpha<0$ abbiamo che $f(x)\sim x^{2\alpha}\cdot x^{3\alpha}=x^{5\alpha}=1/x^{-5\alpha}$ e per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge se l'esponente $-5\alpha>1$, i.e. se $\alpha<-1/5$, mentre diverge positivamente se $\alpha\ge-1/5$.

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-1}\le 3+3x$. Allora:

(A) $]1,5/4[\subset S$.

(B) $-5/4 \in S$.

(C) $-1 \notin S$.

(D) S non è limitato inferiormente.

La radice esiste se $x^2-1 \geq 0$, quindi se $x \leq -1$ o $x \geq 1$. Inoltre, per avere soluzioni occorre che $3+3x \geq 0$, quindi $x \geq -1$. Osserviamo che $x=-1$ risolve la disequazione, mentre le eventuali altre soluzioni verificano la condizione $x \geq 1$, che ora imponiamo. Possiamo dunque elevare al quadrato ambo i membri e passare alla disequazione equivalente $(x^2-1) \leq (3+3x)^2$, che riscriviamo come $(x-1)(x+1) \leq 9(x+1)^2$. Semplificando poi il fattore positivo $(x+1)$ ci riduciamo a risolvere la disequazione

$$(x-1) \leq 9(x+1) \iff 8x \geq -10 \iff x \geq -\frac{5}{4} \ .$$

Da quanto sopra ricaviamo che $S=\{-1\} \cup [1,+\infty)$, dunque $]1,5/4[\subset S$, mentre le altre risposte sono false, in quanto $-5/4 \notin S$, $-1 \in S$ ed S è limitato inferiormente.

Esercizio 6. La funzione $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di legge $f(x)=x^4+2x^3-10x$

(A) ha minimo uguale a -7 .

(B) ha almeno un punto di massimo locale.

(C) ha un solo punto di flesso.

(D) è convessa su $[-1,0]$.

Abbiamo $f'(x)=4x^3+6x^2-10$, dunque $f'(1)=0$. Dividendo il polinomio $4x^3+6x^2-10$ per $x-1$, si ottiene la fattorizzazione $f'(x)=(x-1)(4x^2+10x+10)$, dove il polinomio $4x^2+10x+10$ ha discriminante negativo e dunque è sempre positivo. Quindi la derivata prima è negativa se $x<1$, si annulla in $x=1$ ed è positiva se $x>1$. Ma allora f è strettamente decrescente su $(-\infty,1]$ e strettamente crescente su $[1,+\infty)$ ed ha un punto di minimo in $x=1$, per cui f ha minimo uguale a $f(1)=1+2-10=-7$. Osserviamo in particolare che f non ha punti di massimo locale. Dato poi che $f''(x)=12x^2+12x=12x(x+1)$, dallo studio del segno di f'' deduciamo che f è concava su $[-1,0]$ ed ha due punti di flesso in $x=-1$ e $x=0$.

Esercizio 7. La successione $\dfrac{3n+4n^{-1}}{\sqrt[n]{5\cdot n^n}+7/n}$ ha limite

(A) 3 .

(B) $4/7$.

(C) $3/5$.

(D) 0 .

A numeratore risulta $3n+4n^{-1} \sim 3n$, invece a denominatore $7/n \to 0$, mentre

$$\sqrt[n]{5n^n} = \sqrt[n]{5}\cdot\sqrt[n]{n^n} = \sqrt[n]{5}\cdot n \sim n$$

in quanto $\sqrt[n]{5} \to 1$, dunque

$$\frac{3n+4n^{-1}}{\sqrt[n]{5n^n}+7/n} \sim \frac{3n}{n} \to 3 \ .$$