Risoluzione del compito n. 5 (Aprile 2024)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3})^2 = (z^2 + 4z)^2 \;.$$

Possiamo osservare preliminarmente che se sviluppassimo mentalmente i quadrati otterremmo un'equazione polinomiale di terzo grado in z, quindi ci aspettiamo al massimo tre soluzioni (esattamente tre se le contiamo con la loro molteplicità). Due numeri complessi hanno lo stesso quadrato se e solo se sono o uguali o opposti, dunque l'equazione si traduce in

$$z^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = z^2 + 4z \qquad \text{oppure} \qquad z^2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = -(z^2 + 4z) \;:$$

la prima equazione ha soluzione $z = -\mathrm{i}\sqrt{3}/2$, mentre la seconda è

$$2z^2 + 4z - 2\mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \iff z^2 + 2z - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \iff z = -1 \pm \sqrt{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}} \,.$$

Dato che $1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ ha modulo 2 e argomento $\pi/3$, una sua radice ha modulo $\sqrt{2}$ e argomento $\pi/6$, quindi è $\sqrt{2}\big(\sqrt{3}/2 + \mathrm{i}/2\big)$, e l'altra radice è l'opposta. Otteniamo allora le tre soluzioni

$$z = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \,, \qquad z = -1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \,, \qquad z = -1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \,.$$

PROBLEMA 2

Sia data la funzione $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$.

a) **Determinatene segno, gli intervalli di monotonia e quelli di convessità e concavità. Disegnate poi il grafico di f .**

b) **Trovate al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

c) **Determinate il segno e gli intervalli di monotonia di $g(x) = \arctan\big(f(x)\big)$.**

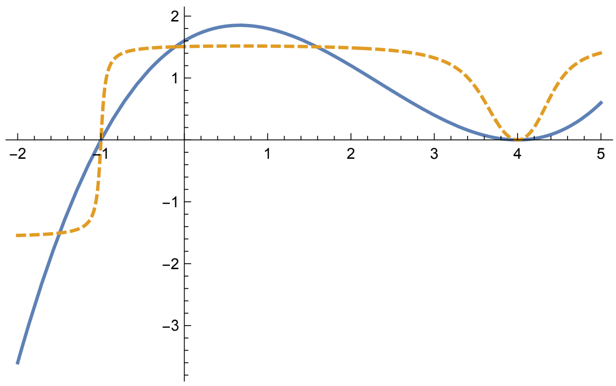
Per determinare il segno di f dobbiamo trovare tutte le radici del polinomio; per tentativi, una radice vale -1 . Allora possiamo dividere f per $x - (-1)$ ottenendo

$$f(x) = (x+1)(x^2 - 8x + 16) = (x+1)(x-4)^2 .$$

Allora f è negativa per $x < -1$, si annulla per $x = -1$ e per $x = 4$ ed è positiva per tutti gli altri valori di x . La derivata di f vale

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8 = 3(x-4)(x-2/3)$$

dunque si annulla per $x = 4$ e $x = 2/3$, è negativa per $2/3 < x < 4$ e positiva per tutti gli altri valori di x , pertanto f è strettamente crescente in $]-\infty, 2/3]$, strettamente decrescente in $[2/3, 4]$ e strettamente crescente in $[4, +\infty[$. Infine da $f''(x) = 6x - 14$ ricaviamo che f è strettamente concava per $x \leq 7/3$ e strettamente convessa per $x \geq 7/3$. Nel grafico, f è riscalata di un fattore 10 dato che è molto grande (il che spiega perché la sua arcotangente ha un comportamento così estremo).



Dato che

$$f\Big(\frac{2}{3}\Big) = 4 \cdot \Big(\frac{2}{27} - \frac{7}{9} + \frac{4}{3} + 4\Big) = 4 \cdot \frac{2 - 21 + 36 + 108}{27} = 4 \cdot \frac{125}{27} = \frac{500}{27} ,$$

mentre $f(4) = 0)$, l'equazione $f(x) = k$ ha:

$$\begin{cases} k < 0 & \Rightarrow \text{una soluzione} \\ k = 0 & \Rightarrow \text{due soluzioni} \\ 0 < k < 500/27 & \Rightarrow \text{tre soluzioni} \\ k = 500/27 & \Rightarrow \text{due soluzioni} \\ k > 500/27 & \Rightarrow \text{una soluzione.} \end{cases}$$

Infine, visto che la funzione $\arctan x$ ha lo stesso segno del suo argomento, g è positiva, o negativa, esattamente dove lo è f. E visto che l'arcotangente è strettamente crescente, e la composizione di una crescente con una monotona è monotona dello stesso tipo, gli intervalli in cui g è strettamente crescente, o decrescente, sono esattamente quelli in cui lo è f.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x+x^2)}$, $g(x) = \operatorname{sen}(2x+3x^2)$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = 2f(x) - g(x) - 2$.**

c) **Determinate per quale valore del coefficiente $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite ℓ per $x \to 0^+$ della funzione**
$$\frac{h(x) + \alpha x^3}{x^4}$$
è finito. Calcolate poi tale limite ℓ .

Dallo sviluppo di $\operatorname{sen} t$ ricaviamo

$$\operatorname{sen}(x+x^2) = (x+x^2) - \frac{1}{6}(x+x^2)^3 + o(x+x^2)^4 = x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) ,$$

mentre dallo sviluppo di e^t , osservando che $x + \cdots$ è un infinitesimo di ordine 1 e quindi $o(x+\cdots)^k = o(x^k)$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \Big(x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\Big) + \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\ &= 1 + x + x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) + \frac{1}{2}\Big(x^2 + x^4 + 2x^3 - \frac{1}{3}x^4\Big) + \frac{1}{6}(x^3 + 3x^4) + \frac{x^4}{24} \\ &= 1 + x + \frac{3x^2}{2} + x^3 + \frac{3x^4}{8} + o(x^4) . \end{aligned}$$

Invece facilmente

$$\begin{aligned} g(x) &= (2x + 3x^2) - \frac{1}{6}(\cdots)^3 + o(\cdots)^4 \\ &= 2x + 3x^2 - \frac{1}{6}(8x^3 + 36x^4) + o(x^4) = 2x + 3x^2 - \frac{4x^3}{3} - 6x^4 + o(x^4) . \end{aligned}$$

Allora
$$h(x) = \frac{10}{3}x^3 + \frac{27}{4}x^4 + o(x^4)$$
è un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $10x^3/3$. Dato che

$$h(x) + \alpha x^3 = \Big(\frac{10}{3} + \alpha\Big)x^3 + \frac{27}{4}x^4 + o(x^4) ,$$

se il coefficiente di x^3 non è nullo il limite proposto è infinito. In generale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)+\alpha x^3}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > -10/3 \\ 27/4 & \text{se } \alpha = -10/3 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -10/3. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Calcolate una primitiva per $x > 0$ della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
Calcolate quindi l' integrale improprio $\int_0^{+\infty} f(x)\, dx$.

Integriamo per parti:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log\frac{x+1}{x}\, dx = 2\sqrt{x}\log\frac{x+1}{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$
$$= 2\sqrt{x}\log\frac{x+1}{x} + 2\int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx\,.$$

Nell'ultimo integrale possiamo sostituire $\sqrt{x} = t$, cui è associato il cambiamento dei differenziali $(1/2\sqrt{x})\, dx = dt$, ottenendo

$$\int \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \underset{\sqrt{x}=t}{\overset{\uparrow}{=}} 2\int \frac{1}{t^2+1}\, dt = 2\arctan t + c \underset{t=\sqrt{x}}{\overset{\uparrow}{=}} 2\arctan\sqrt{x} + c\,,$$

quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \log\frac{x+1}{x}\, dx = 2\sqrt{x}\log\frac{x+1}{x} + 4\arctan\sqrt{x} + c\,.$$

L' integrale è improprio sia in zero che all' infinito, ma esiste di certo (finito o uguale a $+\infty$) dato che la funzione integranda è positiva. Se chiamiamo $F(x)$ la primitiva che abbiamo trovato, dovremmo spezzare l' integrale ad esempio come

$$\int_0^{+\infty} \cdots = \int_0^1 \cdots + \int_1^{+\infty} \cdots = \lim_{M\to+\infty} [F(M) - F(1)] + \lim_{\varepsilon\to 0^+} [F(1) - F(\varepsilon)]\,,$$

dunque i valori di $F(1)$ si semplificano e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \log\frac{x+1}{x}\, dx = \lim_{M\to+\infty}\left(2\sqrt{M}\log\frac{M+1}{M} + 4\arctan\sqrt{M}\right)$$
$$- \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{\varepsilon}\log\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} + 4\arctan\sqrt{\varepsilon}\right).$$

Osserviamo che per $x \to +\infty$ è $\log(1 + 1/x) = (1/x) + o(1/x)$ quindi

$$\lim_{M\to+\infty}\left(2\sqrt{M}\log\frac{M+1}{M} + 4\arctan\sqrt{M}\right) = \lim_{M\to+\infty} 4\arctan\sqrt{M} = 2\pi\,.$$

Invece per $x \to 0^+$ abbiamo

$$\sqrt{x}\log\frac{x+1}{x} = \sqrt{x}\log(1+x) - \sqrt{x}\log x \to 0$$

pertanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(2\sqrt{\varepsilon}\log\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} + 4\arctan\sqrt{\varepsilon}\right) = 0$$

e l' integrale cercato vale 2π.

Esercizio 1. Se $z = 3 + 4\mathrm{i}$ e $|w| = 7$ allora $z + w$

(A) potrebbe avere modulo 8.

(B) potrebbe avere modulo 14.

(C) potrebbe avere parte reale 11.

(D) potrebbe avere parte immaginaria -4.

Dato che $|z| = 5$, il modulo della somma non può essere né minore di $2 = 7 - 5$ né maggiore di $12 = 7 + 5$, la parte reale della somma deve essere compresa fra $-4 = 3 - 7$ e $10 = 3 + 7$, e la parte immaginaria compresa fra $-3 = 4 - 7$ e $11 = 4 + 7$. L'unica risposta corretta è che la somma potrebbe avere modulo 8.

Esercizio 2. Lanciando tre dadi con le facce numerate da 1 a 6, quale fra questi eventi è il più probabile?

(A) Nessun dado segna più di 2.

(B) Tutti i dadi mostrano lo stesso punteggio.

(C) La somma dei punti è minore di 5.

(D) La somma dei punti è 17.

Calcoliamo il numero di casi favorevoli di ciascun evento (i casi possibili sono sempre gli stessi e sono 6^3 dato che ciascun dado può presentarsi con 6 punteggi, indipendentemente dagli altri due dadi). Se nessun dado segna più di 2 vuol dire che i punteggi di ogni dado possono essere solo due, quindi i casi favorevoli sono $2^3 = 8$. Se tutti i dadi mostrano lo stesso punteggio questo può essere 1 (e ciò accade in un solo caso) e 2 (ancora un solo caso) e così via fino a 6, in totale 6 casi favorevoli. Se la somma dei punti è minore di 5 vuol dire che la somma è o 3, e per forza i tre dadi segnano 1, un solo caso favorevole, o 4, e due dadi segnano 1 mentre l'altro 2, tre casi favorevoli, e in totale i casi favorevoli sono 4. Per finire, la somma dei punti è 17 solo se un dado segna 5 e gli altri due segnano 6, tre casi favorevoli. L'evento più probabile è dunque che nessun dado segni più di 2.

Esercizio 3. Senza calcolare gli integrali, dite quale fra questi numeri è più grande.

(A) $\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$.

(B) $\int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx$.

(C) $\int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx$.

(D) $\int_0^1 \operatorname{sen}(x-1)\,dx$.

Non serve integrare (e non si può nemmeno): intanto per $0 < x < 1$ abbiamo $-\pi < -1 < x - 1 < 0$ quindi $\operatorname{sen}(x-1) < 0$, e l'integrale di $\operatorname{sen}(x-1)$ è negativo; poi per $0 < x < 1$ abbiamo $0 < x^2 < x < \sqrt{x} < 1$ e il seno è crescente fra 0 e 1, quindi

$$0 < \operatorname{sen} x^2 < \operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad 0 < \int_0^1 \operatorname{sen} x^2\,dx < \int_0^1 \operatorname{sen} x\,dx < \int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx\,,$$

pertanto il valore maggiore si ha integrando $\operatorname{sen}\sqrt{x}$.

Esercizio 4. Un valore di α per il quale converge $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{-|2\alpha-2|} + |3\alpha - 4|^n\right)$ è

(A) $\alpha = 1.6$.

(B) $\alpha = 1.8$.

(C) $\alpha = 1.2$.

(D) $\alpha = 1.4$.

Si tratta della somma di due serie a termini positivi, pertanto converge se e solo se convergono le due serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-|2\alpha-2|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|2\alpha-2|}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |3\alpha-4|^n \ :$$

la prima è una serie armonica generalizzata e converge se e solo se $|2\alpha - 2| > 1$; la seconda è una serie geometrica di ragione $|3\alpha - 4|$ e converge se e solo se $|3\alpha - 4| < 1$. Allora la serie proposta converge se e solo se

$$\begin{cases} |2\alpha-2| > 1 \\ |3\alpha-4| < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha < 1 \ \ \textbf{o} \ \ 2\alpha > 3 \\ 3 < 3\alpha < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha < 1/2 \ \ \textbf{o} \ \ \alpha > 3/2 \\ 1 < \alpha < 5/3 \end{cases}$$

e cioè se e solo se $3/2 < \alpha < 5/3$, e fra i valori proposti il solo che soddisfa le due disuguaglianze è $\alpha = 1.6$.

Esercizio 5. La successione $\dfrac{e^{1/n^2} - \cos(6/n)}{\operatorname{sen}^2(5/n)}$ ha limite

(A) $19/25$.	(C) $1/25$.
(B) $19/5$.	(D) $18/25$.

Dai limiti fondamentali di esponenziale, coseno e seno, sommando e sottraendo 1 a numeratore, abbiamo

$$e^{1/n^2} - 1 \sim \frac{1}{n^2}\,, \quad 1 - \cos(6/n) \sim \frac{(6/n)^2}{2} = \frac{18}{n^2} \quad \Rightarrow \quad e^{1/n^2} - \cos(6/n) \sim \frac{19}{n^2}$$

mentre a denominatore

$$\operatorname{sen}^2(5/n) \sim (5/n)^2 = \frac{25}{n^2}$$

da cui ricaviamo

$$\frac{e^{1/n^2} - \cos(4/n)}{\operatorname{sen}^2(5/n)} \sim \frac{19/n^2}{25/n^2} \to \frac{19}{25}\,.$$

Esercizio 6. La retta tangente il grafico della funzione $e^{\cos(2x)}$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = \pi/4$ ha equazione:

(A) $2y + 4x = \pi + 2$.	(C) $2y - 4x = \pi + 2$.
(B) $y + x = 1 + \dfrac{\pi}{4}$.	(D) $y = 2x + \dfrac{2-\pi}{2}$.

Posto $f(x) = e^{\cos(2x)}$, abbiamo $f'(x) = -2\operatorname{sen}(2x)\, e^{\cos(2x)}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Con $x_0 = \pi/4$, dato che $\cos(\pi/2) = 0$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, risulta $f(x_0) = 1$ e $f'(x_0) = -2$. Sostituendo nell'equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si ottiene dunque $y = 1 - 2(x - \pi/4)$, da cui la risposta corretta $2y + 4x = \pi + 2$.

Esercizio 7. La funzione $\dfrac{5x^{-4}-7x^{-3}}{3x^{-3}+2x^{-2}} \cdot \sqrt{1+x^2}$ per $x \to -\infty$ tende a:

(A) $\dfrac{7}{2}$.

(B) $-\dfrac{7}{2}$.

(C) $\dfrac{5}{3}$.

(D) $+\infty$.

La funzione proposta si riscrive

$$\frac{\frac{5}{x}-7}{\frac{3}{x}+2}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{\frac{5}{x}-7}{\frac{3}{x}+2}\,\frac{|x|\sqrt{(1/x^2)+1}}{x} \ .$$

La prima frazione tende a $-7/2$ e la radice a 1, mentre per $x < 0$ è $|x|/x = -1$, quindi il limite vale $+7/2$.
