Risoluzione del compito n. 2 (Gennaio 2024/1)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} w=(z+1)z^2 \\ zw=z+1\ , \end{cases}$$

specificando chiaramente quante sono.

Dalla prima equazione ricaviamo che se z vale zero, anche w è zero, ma $z=w=0$ non risolve la seconda equazione. Allora possiamo ricavare dalla seconda equazione $w=(z+1)/z$ e sostituirlo nella seconda che diventa

$$\frac{z+1}{z}=(z+1)z^2 \iff z+1=(z+1)z^3 \iff (z+1)(z^3-1)=0\ ,$$

così o $z+1=0$ cioè $z=-1$, o $z^3=1$, cioè z è una radice cubica dell'unità, e abbiamo quattro possibilità:

$$z_0=-1\ ,\qquad z_1=1\ ,\qquad z_2=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad z_3=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

Dato che $w=(z+1)/z=1+(1/z)=1+(\bar{z}/|z|^2)=1+\bar{z}$ visto che $|z_k|=1$, otteniamo per ciascuno z_k il corrispondente valore

$$w_0=0\ ,\qquad w_1=1+\bar{z}_1=2\ ,\qquad w_2=1+\bar{z}_2=\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad w_3=1+\bar{z}_3=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e le quattro soluzioni del sistema sono le coppie (z_0,w_0), (z_1,w_1), (z_2,w_2) e (z_3,w_3).

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \sqrt{3(4+3x-x^2)} + 4 - x$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**

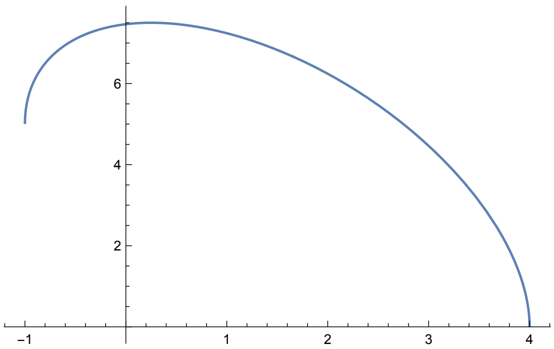
b) **Calcolate la derivata di f e determinate gli intervalli di monotonia di f ed i limiti di f' agli estremi del dominio.**

c) **Trovate l'immagine di f .**

d) **Calcolate la derivata seconda e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .**

e) **Disegnate il grafico di f .**

La funzione f è definita quando l'argomento della radice è maggiore o uguale a zero: dato che $4+3x-x^2 = -(x+1)(x-4)$ ricaviamo che $\operatorname{dom} f = [-1,4]$. Inoltre, per la continuità di f , i suoi limiti gli estremi del dominio sono $f(-1) = 5$ e $f(4) = 0$.



Ricordando che $Dt^{1/2} = 1/(2t^{1/2})$, e portando $\sqrt{3}$ fuori dalla radice, per $x \in]-1,4[$ risulta

$$f'(x) = \sqrt{3}\,\frac{3-2x}{2\sqrt{4+3x-x^2}} - 1 = \frac{\sqrt{3}(3-2x) - 2\sqrt{4+3x-x^2}}{2\sqrt{4+3x-x^2}}$$

ed il segno di f' è determinato dal segno del numeratore, dunque

$$f'(x) \geq 0 \iff \sqrt{3}\,(3-2x) - 2\sqrt{4+3x-x^2} \geq 0 \iff \sqrt{4+3x-x^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\,(3-2x)\ .$$

La disequazione a destra non è vericata se il secondo membro è negativo (ricordiamoci che $x \in]-1,4[$), dunque se $3/2 < x < 4$, mentre se $-1 < x \leq 3/2$ possiamo elevare al quadrato ambo i membri e passare alla disequazione equivalente

$$\begin{cases} 4+3x-x^2 \leq \dfrac{3}{4}\,(9-12x+4x^2) \\ -1 < x \leq \dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 4x^2 - 12x + \dfrac{11}{4} \geq 0 \\ \ldots \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (4x-1)\Big(x - \dfrac{11}{4}\Big) \geq 0 \\ \ldots \end{cases}$$

che ha soluzione $-1 < x \leq 1/4$. Quindi $f'(x) > 0$ se $-1 < x < 1/4$ e $f'(x) < 0$ se $1/4 < x < 4$, mentre $f'(1) = 0$, da cui deduciamo che f è strettamente crescente su $[-1, 1/4]$ e strettamente decrescente su $[1/4, 4]$. Inoltre

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x \to 4^-} f'(x) = -\infty\,.$$

Per i teoremi di Weierstrass e dei valori intermedi, l' immagine di f è un intervallo chiuso e limitato avente per estremi il minimo e il massimo di f . Dato che $f(-1) > f(4) = 0$, mentre

$$f(1/4) = \sqrt{\frac{9 \cdot 25}{16}} + \frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

concludiamo che l' immagine di f è l' intervallo $[0, 15/2]$.
Calcoliamo poi per ogni $x \in]-1, 4[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dx} \frac{3-2x}{\sqrt{4+3x-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{-2\,(4+3x-x^2)^{1/2} - (3-2x)\,(4+3x-x^2)^{-1/2}(3-2x)/2}{(4+3x-x^2)} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{-4\,(4+3x-x^2) - (3-2x)^2}{(4+3x-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \frac{25}{(4+3x-x^2)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Dato che $f''(x) < 0$ per ogni $x \in]-1, 4[$, concludiamo che f è strettamente concava su tutto il dominio $[-1, 4]$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{\cos x + e^x}{2}}$, $\boldsymbol{g(x) = \log\Big(\dfrac{\cos x + e^x}{2}\Big)}$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e centrato in $\boldsymbol{x_0 = 0}$ di $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e centrato in $\boldsymbol{x_0 = 0}$ di $\boldsymbol{g(x)}$.

c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $\boldsymbol{x \to 0}$, della funzione $\boldsymbol{g(x) + a(4x - x^2 + x^3 + x^4/8)}$, al variare di $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$.

d) Calcolate $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{g(x) + a(4x - x^2 + x^3 + x^4/8)}}$ al variare di $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}\Big) \\ =& 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{240} + o(x^5) \ . \end{aligned}$$

Dato poi che $g(x) = \log(f(x)) = \log(1+t)$, con $t = f(x) - 1$, dallo sviluppo al quinto ordine

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + o(t^5)$$

con

$$t = f(x) - 1 = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{240} + o(x^5)$$

(che è un infinitesimo di ordine 1 , quindi $o(t^k) = o(x^k)$) e tenendo tutti i monomi di grado minore di sei, otteniamo quindi

$$\begin{aligned} g(x) =& \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{240} + o(x^5) - \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24}\Big) \\ &+ \frac{1}{3}\Big(\frac{x^3}{8} + \frac{x^5}{16}\Big) - \frac{1}{4}\frac{x^4}{16} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{32} \\ =& \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{8} - \frac{x^4}{64} + \frac{5x^5}{480} + o(x^5) \ . \end{aligned}$$

Scriviamo dunque

$$g(x)+a(4x-x^2+x^3+x^4/8) = \frac{1+8a}{2}\,x - \frac{1+8a}{8}\,x^2 + \frac{1+8a}{8}\,x^3 + \frac{-1+8a}{64}\,x^4 + \frac{5x^5}{480} + o(x^5)$$

da cui otteniamo che se $a \neq -1/8$

$$g(x) + a(4x - x^2 + x^3 + x^4/8) = \frac{1+8a}{2}\,x + o(x)$$

è un infinitesimo di ordine uno con parte principale $(1+8a)x/2$, mentre se $a = -1/8$

$$g(x) - \frac{1}{8}\,(4x - x^2 + x^3 + x^4/8) = \frac{-x^4}{32} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-x^4/32$. Quindi il limite richiesto vale zero se $a \neq -1/8$, mentre vale -32 se $a = -1/8$.

PROBLEMA 4

Sia $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ e sia

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{(x-1)x^{\alpha^2}}{x^{2\alpha+2}(1+x^2)^{\alpha^2-4\alpha+4}}} \;.$$

a) **Determinate il carattere della serie $\boldsymbol{(A) = \sum_n f(n)}$ al variare di $\boldsymbol{\alpha}$.**
b) **Determinate il carattere della serie $\boldsymbol{(B) = \sum_n f(1/n)}$ al variare di $\boldsymbol{\alpha}$.**
c) **Determinate il carattere della serie $\boldsymbol{(C) = \sum_n [f(n) - f(1/n)]}$ al variare di $\boldsymbol{\alpha}$.**

Cominciamo osservando che $f(x) < 0$ per $0 < x < 1$ e $f(x) > 0$ per $x > 1$, quindi f ha segno costante (negativo) in un intorno di zero e segno costante (positivo) in un intorno di $+\infty$. Per $x \to 0$ abbiamo

$$x - 1 \to -1 \,, \quad 1 + x^2 \to 1 \Rightarrow (1+x^2)^q \to 1 \;\forall q \,,$$

pertanto posto

$$g_0(x) = \frac{(-1)x^{\alpha^2}}{x^{2\alpha+2} \cdot 1} = -x^{\alpha^2-2\alpha-2}$$

abbiamo $\lim_{x\to 0^+} [f(x)/g_0(x)] = 1$. Invece per $x \to +\infty$ abbiamo

$$\frac{x-1}{x} \to 1 \,, \quad \frac{1+x^2}{x^2} \to 1 \Rightarrow \frac{(1+x^2)^q}{x^{2q}} \to 1 \;\forall q \,,$$

pertanto posto

$$g_\infty(x) = \frac{x \cdot x^{\alpha^2}}{x^{2\alpha+2} x^{2\alpha^2-8\alpha+8}} = \frac{1}{x^{\alpha^2-6\alpha+9}}$$

abbiamo $\lim_{x\to+\infty} [f(x)/g_\infty(x)] = 1$.
Dato che $f(n)/g_\infty(n) \to 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_n f(n)$ ha lo stesso carattere di

$$\sum_n g_\infty(n) = \sum_n \frac{1}{n^{\alpha^2-6\alpha+9}} \,,$$

una serie armonica generalizzata che converge per

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 > 1 \iff \alpha^2 - 6\alpha + 8 > 0 \iff [\alpha < 2 \;\textbf{o}\; \alpha > 4]$$

e diverge positivamente altrimenti.
Dato che $f(1/n)/g_0(1/n) \to 1$, per il criterio del confronto asintotico la serie $\sum_n f(1/n)$ ha lo stesso carattere di

$$\sum_n g_0(1/n) = -\sum_n \frac{1}{n^{\alpha^2-2\alpha-2}} \,,$$

di nuovo una serie armonica generalizzata che converge per

$$\alpha^2 - 2\alpha - 2 > 1 \iff \alpha^2 - 2\alpha - 3 > 0 \iff [\alpha < -1 \;\textbf{o}\; \alpha > 3]$$

e diverge negativamente altrimenti.
Dato che $f(n) - f(1/n) = f(n) + \big(-f(1/n)\big)$ è la somma di due termini positivi, la serie (C) converge se convergono entrambe le serie (A) e (B), e diverge positivamente altrimenti, cioè converge per $\alpha < -1$ **o** $\alpha > 4$ e diverge positivamente per $-1 \leq \alpha \leq 4$.
Osserviamo (ma non è richiesto!) che molto più delicato sarebbe stato lo studio di (D) $= \sum_n [f(n) + f(1/n)]$: infatti questa serie converge di sicuro quando convergono sia (A) che (B) ossia per $\alpha < -1$ **o** $\alpha > 4$, diverge positivamente per $3 < \alpha \leq 4$ dove (A) diverge positivamente e (B) converge, e diverge negativamente per $-1 \leq \alpha < 2$ dove (A) converge e (B) diverge negativamente. Nella zona $2 \leq \alpha \leq 3$ le due serie da sommare divergono una positivamente e una negativamente, ma osserviamo che

$$g_\infty(n) + g_0(1/n) = \frac{1}{n^{\alpha^2-6\alpha+9}} - \frac{1}{n^{\alpha^2-2\alpha-2}}$$

e che

$$\alpha^2 - 6\alpha + 9 > \alpha^2 - 2\alpha - 2 \iff \alpha < 11/4 = 2.75 \, ,$$

pertanto per $2 \leq \alpha < 11/4$ domina il termine della serie (B), possiamo applicare il criterio del confronto asintotico perché la serie (D) risulta almeno definitivamente a termini negativi e la (D) diverge negativamente, mentre per $11/4 < \alpha \leq 3$ domina il termine della serie (A) e (D) diverge positivamente. Delicatissimo è il caso $\alpha = 11/4$ dove il confronto con g_0 e g_∞ non basta. Qui bisogna scrivere esplicitamente

$$f(x) = \frac{(x-1)x^{1/16}}{(1+x^2)^{9/16}}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(n) + f(1/n) &= \frac{(n-1)n^{1/16}}{(1+n^2)^{9/16}} + \frac{\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\dfrac{1}{n^{1/16}}}{\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{9/16}} = \frac{(n-1)n^{1/16}}{(1+n^2)^{9/16}} + \frac{\left(\dfrac{1-n}{n}\right)\dfrac{1}{n^{1/16}}}{\left(\dfrac{1+n^2}{n^2}\right)^{9/16}} \\ &= \frac{(n-1)}{(1+n^2)^{9/16}} \cdot \left[n^{1/16} - \frac{\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n^{1/16}}}{\dfrac{1}{(n^2)^{9/16}}} \right] = 0 \end{aligned}$$

e la serie è tutta nulla e converge.

Esercizio 1. Una coppia (z, w) che verifica $\mathrm{i}zw = 1/2$ è

(A) $z = w = (1 - \mathrm{i})/2$.	(C) $z = w = (-1 - \mathrm{i})/2$.
(B) $z = 1 - \mathrm{i},\ w = 1 + \mathrm{i}$.	(D) $z = 2(1 - \mathrm{i}),\ w = 2(1 + \mathrm{i})$.

Dall'equazione segue che il modulo di zw , che è il prodotto dei moduli, vale $1/2$, e questo esclude sia $z = 1-\mathrm{i},\ w = 1+\mathrm{i}$ (hanno entrambi modulo $\sqrt{2}$) che $z = 2(1+\mathrm{i}),\ w = 2(1-\mathrm{i})$ (hanno entrambi modulo $2\sqrt{2}$). Nelle altre due risposte è $z = w$ quindi l'equazione diventa $\mathrm{i}z^2 = 1/2 \iff z^2 = 1/2\mathrm{i} = -\mathrm{i}/2$, ma le radici di $-\mathrm{i}/2$ hanno argomento $-\pi/4$ e $3\pi/4$, quindi la risposta corretta è $z = w = (-1 + \mathrm{i})/2$.

Esercizio 2. Cinque persone entrano in un negozio che ha 12 scaffali; ciascuna acquista un solo prodotto. Qual è la probabilità che li abbiano presi da cinque scaffali diversi?

(A) $12!/(7! \cdot 12^5)$.	(C) $1/(12! \cdot 5!)$.
(B) $1/\binom{12}{5}$.	(D) $5/12^5$.

Ogni persona sceglie uno scaffale a caso, quindi i casi possibili sono 12^5 . Per far sì che i prodotti vengano scelti da 5 scaffali diversi, il primo cliente ha 12 possibilità ma il secondo solo 11 , poi 10 e così via fino a 8 . La probabilità è dunque

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{12!}{7! \cdot 12^5} .$$

Esercizio 3. Se f è integrabile, quale fra queste affermazioni è corretta?

(A) Se f è dispari allora $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 0$.	(C) $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b [f(x)]^4\,dx = 0$.
(B) Se $f(x) \ge 0\ \forall x$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ per qualunque scelta di a, b .	(D) Necessariamente f è continua.

Sappiamo che le funzioni monotone e quelle generalmente continue sono integrabili, senza bisogno di essere continue; poi ad esempio l'integrale fra 0 e 2π di $\operatorname{sen} x$ è zero, ma non certo l'integrale di $\operatorname{sen}^4 x$, che è positivo. Se $f(x) \ge 0\ \forall x$ allora $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$ se $a < b$, ma non se $a > b$. Invece se f è dispari l'integrale di f su $[-a, a]$ fa sempre zero.

Esercizio 4. La successione $\dfrac{2n^2 + 3}{n} \left(\sqrt[n]{3 + \mathrm{e}^{-n}} - 2^{1/n} \right)$ ha limite

(A) $2 \log(3/2)$.	(C) $\log 2 - \log 3$.
(B) $2 \log 3$.	(D) $+\infty$.

Ricordiamo che $q^{1/n} \to 1$ per ogni $q > 0$. Poiché

$$3 \le 3 + \mathrm{e}^{-n} \le 4 \quad \Rightarrow \quad 3^{1/n} \le \sqrt[n]{3 + \mathrm{e}^{-n}} \le 4^{1/n} \quad \forall n ,$$

per il teorema dei carabinieri $\sqrt[n]{3+\mathrm{e}^{-n}} \to 1$ e dunque la successione tra parentesi tende a zero. Dato poi che

$$\frac{2n^2+3}{n} \sim 2n \to +\infty$$

per togliere l'indeterminazione nel prodotto occorre calcolare con quale velocità tende a zero la successione tra parentesi. Raccogliendo il fattore $2^{1/n}$, e passando poi per comodità alla forma esponenziale, scriviamo

$$\sqrt[n]{3+\mathrm{e}^{-n}} - 2^{1/n} = 2^{1/n}\Big(\Big(\frac{3+\mathrm{e}^{-n}}{2}\Big)^{1/n} - 1\Big) = 2^{1/n}\big(\exp(x_n) - 1\big)$$

dove abbiamo posto

$$x_n := \frac{1}{n}\log\Big(\frac{3+\mathrm{e}^{-n}}{2}\Big)\,.$$

Dato che

$$\mathrm{e}^{-n} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \log\Big(\frac{3+\mathrm{e}^{-n}}{2}\Big) \to \log(3/2) \quad \Rightarrow \quad x_n \sim \log(3/2)\cdot\frac{1}{n}$$

risulta $x_n \to 0$ e $x_n \neq 0$ per ogni $n \geq 1$, dunque per il limite fondamentale dell'esponenziale otteniamo

$$2^{1/n}\big(\exp(x_n) - 1\big) \sim \exp(x_n) - 1 \sim x_n \sim \log(3/2)\cdot\frac{1}{n}\,.$$

In conclusione, otteniamo

$$\frac{2n^2+3}{n}\,\big(\sqrt[n]{3+\mathrm{e}^{-n}} - 2^{1/n}\big) \sim 2n\cdot\log(3/2)\cdot\frac{1}{n} \to 2\log(3/2)\,.$$

Esercizio 5. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx$

(A) converge se $\alpha < 2$.	(C) vale 1 se $\alpha = 0$.
(B) non esiste per qualche valore di α.	(D) diverge positivamente se $\alpha > 1$.

La funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}$ è continua e positiva su $]0,1]$, ma non è detto che sia limitata vicino allo zero. In ogni caso, l'integrale (generalizzato) o converge (ad un numero positivo) o diverge positivamente. Poiché inoltre $\operatorname{sen} x \sim x$, per $x \to 0^+$ risulta

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,.$$

Ricordiamo che l'integrale in $[0,1]$ della funzione $1/x^\beta$ converge se $\beta < 1$, mentre diverge positivamente se $\beta \geq 1$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico l'integrale richiesto converge se e solo se

$$\alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2\,,$$

mentre diverge positivamente se e solo se

$$\alpha - 1 \geq 1 \iff \alpha \geq 2 .$$

Infine, se $\alpha = 0$ l'integrale su $[0,1]$ di $\operatorname{sen} x$ vale $1 - \cos 1$ e non 1.

Esercizio 6. Se $f(x) = \begin{cases} (x+2)^{a(x+2)} & \text{per } x \geq 0 \\ bx + 2 & \text{per } x < 0 , \end{cases}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$, allora f è derivabile su $\mathbb{R}$ se e solo se:

(A) $a = 1/2$, $b = 1 + \log 2$.	(C) $a = 1$, $b = 2 + \log 4$.
(B) $a = 1/2$, $b = 1$.	(D) $a = 0$, $b = 1 + \log 2$.

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ in quanto $(x+2)$ è positivo per $x \geq 0$. Inoltre, per la località del limite, la funzione è derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per ogni valore di a, b. La funzione è continua in zero se $f(0)$ è uguale al limite per $x \to 0^-$ di f, quindi se $2^{2a} = 2$, da cui ricaviamo la prima condizione $a = 1/2$. Per $x > 0$, scrivendo in forma esponenziale

$$(x+2)^{a(x+2)} = \exp\big(a(x+2)\log(x+2)\big)$$

calcoliamo

$$\frac{d}{dx}(x+2)^{a(x+2)} = (x+2)^{a(x+2)}\frac{d}{dx}\big(a(x+2)\log(x+2)\big) = (x+2)^{a(x+2)}a\big(1 + \log(x+2)\big)$$

e dunque

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2^{2a}a\big(1 + \log 2\big)$$

mentre ovviamente

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = b .$$

Ma allora, per un corollario del teorema di de l'Hôpital, la funzione è derivabile anche in zero se è continua e se esiste finito il limite per $x \to 0$ della derivata prima, dunque se $a = 1/2$ e $b = 2 \cdot (1/2)\big(1 + \log 2\big) = 1 + \log 2$.

Esercizio 7. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log\left(\dfrac{7+x}{x^2 - 2x + 3}\right) \leq 0$. Allora:

(A) $[-5, -2] \subset S$.	(C) S è limitato superiormente.
(B) $]1, 3[\subset S$.	(D) $[2, 5] \subset S$.

Il polinomio $x^2 - 2x + 3$ è positivo su tutto $\mathbb{R}$, avendo discriminante negativo, quindi il logaritmo esiste se $x > -7$. Dalla monotonia del logaritmo, ed essendo $\log 1 = 0$, posto $x > -7$ la disequazione è equivalente a

$$\frac{7+x}{x^2 - 2x + 3} \leq 1 \iff \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 2x + 3} \geq 0$$

dove sappiamo già che il denominatore è sempre positivo, mentre $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$. Quindi otteniamo che $S =]-7, -1] \cup [4, +\infty)$, da cui la risposta $[-5, -2] \subset S$. Inoltre, S non è limitato superiormente, mentre entrambe le inclusioni $]1, 3[\subset S$ e $[2, 5] \subset S$ sono false.
