Esercizi Spazi vettoriali

December 15, 2020

Esercizio 1. *Per le seguenti applicazioni lineari determinare la dimensione e una base per* $\ker(f)$ *e per* $\mathrm{Im}(f)$ *e dire se sono iniettive, suriettive e/o isomorfismi [Sceglietene qualcuna, non importa farle tutte]:*

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y - x)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, y - x)$;
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-z, x - y + 2z, x + 2z)$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-2x - z, x - y, x)$;
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x - z, x - y + z, x + z)$;
6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y - z, -x + z, -x + z)$;
7. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x, -x, 0)$;
8. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (-x + 2y - 2z, -x + 2z, -2x + 2z)$;
9. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y - 2z, -x + y, -x + z)$;
10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 2z, -x + y, 0)$;
11. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -x + y, 2x - y, 4y + z)$;
12. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (-x + y + t, 2x + y + 2z + t, y - z + t)$;

Esercizio 2. *Determinare quali tra le applicazioni dell'esercizio 1 sono diagonalizzabili su* $\mathbb{R}$*; nel caso in cui non lo siano, determinare se sono diagonalizzabili su* $\mathbb{C}$.

Esercizio 3. *Data una applicazione lineare* F *da* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}^m$*, descrivere la relazione tra la dimensione del nucleo di* F*, la dimensione dell'immagine di* F*, e il rango di* F.

Esercizio 4. *Data una applicazione lineare* F *da* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}^m$*, descrivere le condizioni su* m *e* n *tali che* F *possa essere iniettiva, suriettiva, o un isomorfismo. E' vero che una applicazione lineare* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ *e' sempre iniettiva?*

Esercizio 5. *Sia* F *l'applicazione lineare definita da* $F((1, 1)) = (2, 1, 3)$ *e* $F(1, -1) = (2, 1, 1)$*. Scrivere la matrice associata a* F *con le basi canoniche in partenza e in arrivo. Scrivere una base per l'immagine di* F.

Esercizio 6. *Sia* $A \in M_{4\times4}$ *e siano* $1, 2, i, -i$ *i suoi autovalori. Determinare gli autovalori delle seguenti matrici:* $-A$*;* $3iA$*;* $\overline{A}$*;* $5A$*.*

Esercizio 7. *Sia* f *la applicazione di cui al punto 10. dell'esercizio 1 e* g *la applicazione di cui al punto 9. dell'esercizio 1. Calcolare la matrice associata (rispetto alle basi canoniche) alla applicazione lineare* $h = f \circ g$ *e all'applicazione lineare* $L = g \circ f$*. Scegliere un isomorfismo tra le applicazioni lineari dell'esercizio 1 e scrivere la matrice associata alla sua applicazione inversa.*

Esercizio 8. *Determinare per* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y - 2z, -x + y, -x + z)$ *una base di* $\mathbb{R}^3$ *composta da autovettori di* f*. Scrivere l'espressione di* f *rispetto a quella base.*

Esercizio 9. *Sia* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *l'applicazione la cui matrice associata rispetto alle basi canoniche di* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathbb{R}^3$ *è* $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. Determinare:*

1. $f(x, y, z)$*;*
2. *se* f *è iniettiva e/o suriettiva;*
3. *una base per* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $\mathrm{Im}(f)$*.*

Esercizio 10. *Stabilire se due matrici simili hanno gli stessi autovalori e/o gli stessi autovettori.*

Esercizio 11. *Scrivete tutte le condizioni che implicano che una matrice sia diagonalizzabile su* $\mathbb{R}$*.*