8 Integrale generalizzato

Esempi fondamentali

La teoria dell'integrazione di Riemann tratta funzioni limitate e definite su intervalli $]a,b[$ limitati. Vediamo ora con alcuni esempi come si può generalizzare la nozione di integrale $\int_a^b f(x)\,dx$ a funzioni (continue) definite su intervalli non limitati oppure che non sono limitate in prossimità degli estremi del dominio $]a,b[$ di integrazione.

Esempio 8.1 Nell'esempio 7.62 abbiamo visto che esiste ed è finito il limite

$$\lim_{M\to+\infty}\int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\,dx = L\in\mathbb{R}\,.$$

Per ogni $M>0$ l'integrale $\int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\,dx$ rappresenta l'area del sottografico Ω_M di e^{-x^2} compresa tra le rette $x=0$ e $x=M$, i.e.

$$\int_0^M \mathsf{e}^{-x^2}\,dx = \mathbf{A}(\Omega_M)\,,\qquad \Omega_M=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid 0\le x\le M\,,\ 0\le y\le \mathsf{e}^{-x^2}\}\,.$$

Da questo deduciamo che la parte di piano che sta nel primo quadrante sotto il grafico di e^{-x^2} è finita:

$$\mathbf{A}(\Omega)=L<\infty\,,\qquad \Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x\ge 0\,,\ 0\le y\le \mathsf{e}^{-x^2}\}\,.$$

Questo dà senso alla notazione

$$\int_0^{+\infty}\mathsf{e}^{-x^2}=L\in\mathbb{R}\,.$$

Dalla simmetria della funzione e^{-x^2}, ponendo $t=-x$, in maniera analoga otteniamo:

$$\int_{-\infty}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \mathsf{e}^{-t^2}\,dt = \int_0^{+\infty}\mathsf{e}^{-t^2}\,dt = L\in\mathbb{R}\,.$$

Quindi, estendendo la proprietà di additività rispetto al dominio, e sapendo che $L=\sqrt{\pi}/2$, scriviamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathsf{e}^{-x^2}\,dx := \int_{-\infty}^0 \mathsf{e}^{-x^2}\,dx + \int_0^{+\infty}\mathsf{e}^{-x^2}\,dx = L+L=\sqrt{\pi}\,.$$

Osservazione 8.2 La funzione *Gaussiana* $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\mathsf{e}^{-t^2}$ ha integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=1$ e rappresenta la densità di una misura di probabilità su $\mathbb{R}$. La funzione degli errori (di Gauss) è definita da

$$\mathrm{erf}\,(x) := \int_0^x f(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathsf{e}^{-t^2\,dt}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Invece, la *funzione di ripartizione* della Gaussiana f è definita dall'integrale generalizzato

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^x \mathsf{e}^{-t^2\,dt}\,,\quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Per quanto visto, risulta che $F:\mathbb{R}\to]0,1[$ è biunivoca e strettamente crescente, $F(x)\to 0$ se $x\to-\infty$, $F(0)=1/2$ e $F(x)\to 1$ se $x\to+\infty$. Inoltre $F(x)+F(-x)=1$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Il valore $F(x_0)$ è l'area della parte di piano al di sopra dell'asse delle ascisse, al di sotto del grafico di f e a sinistra della retta $x=x_0$. Inoltre, erf $(x)=F(x)-1/2$ per ogni $x\in\mathbb{R}$. Le tabelle dei valori (approssimati) della funzione erf servono nelle applicazioni in quanto la funzione Gaussiana non ha primitive elementari.

Esempio 8.3 Se invece consideriamo una successione $\{a_i\}_i$ di numeri reali e la funzione a gradini $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=a_i$ per ogni $x\in[i-1,i[$ e $i\in\mathbb{N}$, sappiamo dall'esempio 7.26 che per ogni $n\in\mathbb{N}$ risulta

$$\int_0^n f(x)\,dx = S_n := \sum_{i=1}^n a_i\,.$$

Allora deduciamo che esiste il limite $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f(x)\,dx$ se e solo se la successione delle somme parziali ha limite S, cf. la definizione 4.1. In tal caso ha senso la notazione

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

e dunque l' *integrale generalizzato* di f nella semiretta $[0,+\infty[$ è uguale alla somma S della serie. In particolare, l' integrale generalizzato di una funzione a gradini è finito se e solo se la serie $\sum_n a_n$ converge.

Esempio 8.4 Consideriamo ora la funzione $f(x) = 1/(1+x^2)$. Per ogni $M > 0$ risulta

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_0^M = \arctan M\,, \qquad \int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \big[\arctan x\big]_{-M}^0 = \arctan M\,,$$

in quanto $\arctan(-M) = -\arctan M$ e $\arctan 0 = 0$, essendo arctan dispari e continua. Allora passando al limite per $M \to +\infty$, poiché $\arctan M \to \pi/2$, ha senso scrivere

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_0^M \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx := \lim_{M\to+\infty}\int_{-M}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

ed infine, estendendo la proprietà di additività rispetto al dominio, anche

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx := \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi\,.$$

Questo significa che l'area della parte di piano compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione $1/(1+x^2)$ è finita:

$$\mathbf{A}(\Omega) = \pi\,, \qquad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid 0 \le y \le 1/(1+x^2)\}\,.$$

Esempio 8.5 Consideriamo ora la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x^\alpha$, dove l'esponente $\alpha \in \mathbb{R}$. Tale funzione è continua (e limitata) in ogni intervallo $[a,b]$ tale che $0 < a < b < +\infty$, ma se $\alpha > 0$ sappiamo che non è limitata vicino a zero, in quanto $f(x) \to +\infty$ per $x \to 0^+$. Quindi per dare senso all'integrale di f nella semiretta $]0,+\infty[$ è opportuno suddividere la semiretta nei due intervalli $]0,1]$ e $[1,+\infty[$ e trattarli separatamente. Ragionando come sopra, mostriamo ora che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \le 1 \end{cases} \qquad \mathbf{e} \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha \ge 1\,. \end{cases}$$

Infatti, nel caso $\alpha \neq 1$ scriviamo per ogni $M > 1$ e $0 < \varepsilon < 1$

$$\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\big[x^{1-\alpha}\big]_1^M = \frac{1}{1-\alpha}\big[M^{1-\alpha}-1\big]\,, \qquad \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\big[x^{1-\alpha}\big]_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\big[1-\varepsilon^{1-\alpha}\big]\,.$$

Passando quindi al limite per $M \to +\infty$ scriviamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\big[M^{1-\alpha}-1\big] = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{se} \quad \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha < 1 \end{cases}$$

mentre passando al limite per $\varepsilon \to 0^+$ scriviamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{1-\alpha}\big[1-\varepsilon^{1-\alpha}\big] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se} \quad \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se} \quad \alpha > 1\,. \end{cases}$$

Se invece $\alpha = 1$, otteniamo similmente

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x}\,dx = \lim_{M\to+\infty}\big[\log x\big]_1^M = \lim_{M\to+\infty}\log M = +\infty$$

ed anche

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to0^+}\big[\log x\big]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to0^+}[-\log\varepsilon] = +\infty\,.$$

Esempio 8.6 Come nell'esempio 8.5 si prova che la funzione $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ è integrabile in un intorno di x_0 se e solo se $\alpha > -1$, mentre è integrabile in un intorno di $+\infty$ o di $-\infty$ se e solo se $\alpha < -1$.

Osservazione 8.7 Il motivo per cui nell'esempio 8.5 si trattano separatamente le improprietà in $x_0 = 0$ e $x_0 = +\infty$ è evidente se consideriamo l'integrale su tutto $\mathbb{R}$ della funzione $f(x) = x$. Se trattiamo separatamente le improprietà a $-\infty$ e $+\infty$, come sopra otteniamo ovviamente che

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = +\infty \qquad \textbf{e} \qquad \int_{-\infty}^0 x\,dx = -\infty\,.$$

Se invece calcolassimo il limite per $M \to +\infty$ dell'integrale di f nell'intervallo $[-M, M]$, poiché f è dispari sappiamo che $\int_{-M}^M x\,dx = 0$ per ogni $M > 0$ e dunque otterremmo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_{-M}^M x\,dx = 0\,.$$

Ma allora non varrebbe più la proprietà di additività rispetto al dominio, che diventerebbe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^0 x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 = -\infty + \infty\,.$$

Questo approccio definirebbe l'integrale generalizzato alla Cauchy, che non ci interessa perché vogliamo conservare la proprietà di additività rispetto al dominio. Quindi, non avendo senso in $\overline{\mathbb{R}}$ la somma $-\infty + \infty$, in questo caso concludiamo che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ *non ha senso*.

Esempio 8.8 Analogamente deduciamo che *non ha senso* l'integrale $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\,dx$. Infatti, dato che $-\log(\cos x)$ è una primitiva di $\tan x$ su $]-\pi/2, \pi/2[$, risulta

$$\int_0^{\pi/2} \tan x\,dx = \lim_{M\to\pi/2^-} \int_0^M \tan x\,dx = \lim_{M\to\pi/2^-} \big[-\log(\cos x)\big]_0^M = \lim_{M\to\pi/2^-} [\log 1 - \log(\cos M)] = +\infty$$

essendo $\cos M \to 0^+$ per $M \to \pi/2^-$, e analogamente, essendo $\tan x$ dispari,

$$\int_{-\pi/2}^0 \tan x\,dx = \lim_{M\to\pi/2^-} \int_{-M}^0 \tan x\,dx = -\lim_{M\to\pi/2^-} \int_0^M \tan x\,dx = -\infty\,.$$

Se non spezziamo l'integrale (seguendo l'approccio alla Cauchy) otteniamo che $\int_{-M}^M \tan x\,dx \to 0$ se $M \to \pi/2^-$, in quanto $\int_{-M}^M \tan x\,dx = 0$ per ogni $M \in]0, \pi/2[$, essendo $\tan x$ dispari. Ma allora l'additività rispetto al dominio darebbe ancora $0 = +\infty - \infty$, che non ha senso.

Esempio 8.9 Vediamo similmente che *non ha senso* definire l'integrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$. Infatti, usando che $1/x$ è dispari, otteniamo che

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = +\infty \qquad \textbf{e} \qquad \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = -\infty\,.$$

Quindi se facessimo la somma dei due integrali ottenuti avremmo ancora una forma indeterminata $+\infty - \infty$. Osserviamo ancora che se invece calcolassimo il limite per $\varepsilon \to 0^+$ della somma degli integrali di f negli intervalli $[-1, -\varepsilon]$ e $[\varepsilon, 1]$, dove $0 < \varepsilon < 1$, avremmo

$$\lim_{\varepsilon\to0^+} \Big(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx \Big) = \lim_{\varepsilon\to0^+} \big(\big[\log|x|\big]_{-1}^{-\varepsilon} + \big[\log|x|\big]_\varepsilon^1 \big) = \lim_{\varepsilon\to0^+} (\log\varepsilon - \log\varepsilon) = 0\,.$$

D'altronde, se applicassimo erroneamente (e senza controllare le ipotesi) il teorema di Torricelli, scriveremmo che $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = [\log|x|]_{-1}^1 = 0$. Ma questo è falso perché $\log|x|$ non è una primitiva di $1/x$ su $[-1, 1]$, comunque estendiamo la funzione $1/x$ in $x_0 = 0$.

Esempio 8.10 Può succedere che non abbia senso definire l'integrale sulla semiretta $[0,+\infty[$ anche nel caso di funzioni continue e limitate, come $f(x)=\cos x$. Infatti per ogni $M>0$ risulta

$$\int_0^M \cos x\,dx = \big[\operatorname{sen} x\big]_0^M = \operatorname{sen} M$$

ma sappiamo che il limite di $\operatorname{sen} M$ per $M\to+\infty$ *non esiste.*

Osservazione 8.11 La funzione $f(x)=\cos x$ dell'esempio 8.10 non ha segno costante in alcun intorno di $+\infty$. Vediamo ora che se f è continua e non negativa [[non positiva]] su $[a,b[$, allora l' integrale generalizzato $\int_a^b f$ ha sempre senso ed è convergente oppure divergente positivamente [[negativamente]].

Infatti, cf. la definizione 8.16 seguente, osserviamo che la funzione integrale $F(x):=\int_a^x f$ è monotona su $[a,b[$, crescente se $f\geq 0$ e decrescente se $f\leq 0$, dunque il suo limite per $x\to b^-$ esiste sempre ed è reale non negativo o $+\infty$ nel primo caso, reale non positivo o $-\infty$ nel secondo caso.

In particolare, per funzioni $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continue e non negative, scriveremo

$$\int_a^b f(x)\,dx<+\infty\,,\qquad \int_a^b f(x)\,dx=+\infty$$

per distinguere se l'integrale generalizzato è convergente o diverge positivamente.

Esempio 8.12 Calcoliamo al variare dell'esponente $\beta\in\mathbb{R}$ l' integrale generalizzato

$$I_\beta := \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\,(\log x)^\beta}\,dx\,.$$

Per ogni $M>2$, sostituendo $t=\log x$, per cui $dt=(1/x)\,dx$, se $\beta=1$ calcoliamo

$$\int_2^M \frac{1}{x\,\log x}\,dx=\int_{\log 2}^{\log M}\frac{1}{t}\,dt=\big[\log t\big]_{\log 2}^{\log M}=\log(\log M)-\log\log 2$$

mentre se $\beta\neq 1$ risulta

$$\int_2^M\frac{1}{x\,(\log x)^\beta}\,dx=\int_{\log 2}^{\log M}\frac{1}{t^\beta}\,dt=\frac{1}{1-\beta}\big[t^{1-\beta}\big]_{\log 2}^{\log M}=\frac{1}{1-\beta}\big((\log M)^{1-\beta}-(\log 2)^{1-\beta}\big)\,.$$

Poiché $\log M\to+\infty$ se $M\to+\infty$, allora deduciamo che $I_\beta=+\infty$ se $\beta\leq 1$, mentre se $\beta>1$

$$I_\beta=\lim_{M\to+\infty}\frac{1}{1-\beta}\big((\log M)^{1-\beta}-(\log 2)^{1-\beta}\big)=\frac{1}{\beta-1}\,(\log 2)^{1-\beta}\,.$$

Criterio dell'integrale per le serie

C'è un forte legame tra la teoria degli integrali generalizzati e quella delle serie. Basti pensare che la somma parziale $S_n=\sum_{i=0}^n a_i$ di una serie è uguale all'integrale nell'intervallo di estremi 0 ed $n+1$ della funzione *a gradini* che vale a_i all'interno dell'intervallo $]i,i+1[$, per ogni $i=0,\dots,n$. Quindi, se esiste, la somma della serie ci restituisce l'integrale generalizzato della corrispondente funzione a gradini sulla semiretta dei reali positivi. Il *criterio dell'integrale* esprime più in generale la relazione tra convergenza di serie e di integrali generalizzati.

Teorema 8.13 *Sia $f:[n_0,+\infty[\to[0,+\infty[$ una funzione non negativa e debolmente decrescente, e sia $a_n=f(n)$ per ogni $n\geq n_0$. Allora la serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la funzione f è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $[n_0,+\infty[$. Inoltre vale la stima*

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}a_n\leq\int_{n_0}^{+\infty}f(x)\,dx\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n\ ,\qquad a_n=f(n)\ . \tag{8.1}$$

Dimostrazione: Osserviamo prima che f è integrabile su $[n_0,N]$ per ogni $N>n_0$ naturale, essendo monotona e limitata. Inoltre, sia la serie che l'integrale convergono oppure divergono positivamente, essendo f non negativa. Dalla decrescenza di f abbiamo poi che $a_{n+1} = f(n+1) \le f(x) \le f(n) = a_n$ per ogni $x \in [n, n+1]$ e per ogni $n \ge n_0$ intero. Integrando su $[n, n+1]$ otteniamo quindi

$$a_{n+1} \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le a_n \qquad \forall\, n \ge n_0$$

da cui, sommando sugli interi tra n_0 ed N, per l'additività dell' integrale otteniamo

$$\sum_{n=n_0+1}^{N+1} a_n = \sum_{n=n_0}^{N} a_{n+1} \le \int_{n_0}^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=n_0}^{N} a_n \qquad \forall\, N > n_0\,,$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo sostituito n con $n+1$ nell' indice di sommatoria. Ora, se la successione delle somme parziali converge, dalla diseguaglianza di destra deduciamo la convergenza dell'integrale generalizzato. Per il viceversa, si usa la diseguaglianza di sinistra. Passando infine al limite per $N \to \infty$ si ottiene la (8.1). □

Esempio 8.14 Posto $f(x) = x^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$, ed $n_0 = 1$, poiché f è positiva e decrescente su $[1, +\infty[$ possiamo applicare il criterio dell'integrale. Dal momento quindi che $f(x) = x^{-\alpha}$ è integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$, concludiamo che la serie armonica generalizzata $\sum_n n^{-\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$. Poiché inoltre per $\alpha > 1$ abbiamo

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

la (8.1) diventa:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\ .$$

Essendo poi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\ ,$$

otteniamo una stima sulla somma della serie armonica generalizzata:

$$\frac{1}{\alpha-1} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1} \qquad \forall\, \alpha > 1\ .$$

Esempio 8.15 Per ogni $\beta > 0$ la funzione $f(x) = (x \log^\beta x)^{-1}$ è positiva e decrescente su $[2, +\infty[$, avendo derivata $f'(x)$ negativa per ogni $x > 2$. Inoltre, nell'esempio 8.12 abbiamo ottenuto che f è integrabile in senso generalizzato su $[2, +\infty[$ se e solo se $\beta > 1$. Allora per il criterio dell' integrale deduciamo che la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^\beta n}$ è convergente se $\beta > 1$ e diverge positivamente se $0 < \beta \le 1$. Per ogni $\beta > 1$, dalla formula (8.1) si può infine ricavare come sopra una stima per difetto e per eccesso sulla somma della serie, a partire dal valore dell'integrale generalizzato $I_\beta = \int_2^{+\infty} (x \log^\beta x)^{-1}\,dx$, già calcolato nell'esempio 8.12.

Definizioni

Motivati dagli esempi precedenti, procediamo come segue.

Definizione 8.16 Se $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è una funzione continua (non necessariamente limitata), dove b può essere anche $+\infty$, allora diremo che f *è integrabile in senso generalizzato*, o improprio, su $[a, b[$ se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(x)\ dx\ ,$$

che in tal caso viene denotato $\int_a^b f(x)\ dx$. Se invece tale limite esiste ed è uguale a $+\infty$ [[a $-\infty$]] allora diremo che l' integrale *diverge positivamente* [[*negativamente*]], e scriveremo $\int_a^b f(x)\ dx = +\infty$ [[$-\infty$]]. Se infine tale limite non esiste, allora diremo che l' integrale $\int_a^b f(x)\ dx$ *non ha senso.*

Osservazione 8.17 Dalla definizione ricaviamo immediatamente che se esiste l'integrale generalizzato di f su $[a,b[$, allora esiste anche l'integrale generalizzato di λf su $[a,b[$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, se due funzioni f e g sono integrabili in senso generalizzato su $[a,b[$, allora lo sono anche $f+g$ e λf per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

In modo analogo, mediante il limite $\displaystyle\lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^b f(x)\,dx$ si tratta il caso di funzioni continue $f:]a,b]\to\mathbb{R}$, e non necessariamente limitate, dove a può essere anche $-\infty$.

Se invece l'improprietà dell'integrale di f si verifica in entrambi gli estremi di $]a,b[$, allora per conservare la proprietà di additività rispetto al dominio si usa la seguente

Definizione 8.18 Se f è continua su $]a,b[$ e $c\in]a,b[$ è un qualsiasi punto, allora diremo che f è integrabile (in senso generalizzato) su $]a,b[$ se essa è integrabile su $]a,c]$ e su $[c,b[$, nel senso generalizzato sopra descritto, ed in tal caso porremo

$$\int_a^b f(x)\;dx = \int_a^c f(x)\;dx + \int_c^b f(x)\;dx\;.$$

Se uno degli integrali $\int_a^c f(x)\;dx$ $\int_c^b f(x)\;dx$ è finito e l'altro diverge positivamente [[negativamente]], o se sono entrambi divergenti positivamente [[entrambi divergenti negativamente]], diremo che $\int_a^b f(x)\;dx$ diverge positivamente [[negativamente]]. In tutti gli altri casi, diremo che $\int_a^b f(x)\;dx$ non ha senso.

Osservazione 8.19 La definizione precedente non dipende dalla scelta del punto $c\in]a,b[$. Infatti, scelto un altro punto $c'\in]a,b[$, poiché l'integrale definito $\int_c^{c'} f(x)\,dx$ esiste ed è un numero reale, allora per l'additività rispetto al dominio deduciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $]a,c]$ se e solo se lo è su $]a,c']$ e, analogamente, f è integrabile in senso generalizzato su $[c,b[$ se e solo se lo è su $[c',b[$. Analogamente, l'integrale $\int_a^c f(x)\;dx$ diverge positivamente [[negativamente]] se e solo se l'integrale $\int_a^{c'} f(x)\;dx$ diverge positivamente [[negativamente]], et cetera. Da questo segue che la precedente è una buona definizione.

Osservazione 8.20 Se invece $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ presenta un'improprietà dell'integrale anche in punti interni ad $]a,b[$, allora *occorre trattare separatamente tutte le improprietà di f*. Ad esempio, se f è una funzione razionale con denominatore che si annulla in due punti $d_1<d_2$, dunque $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\{d_1,d_2\}$, si fissano tre punti $c_1<d_1<c_2<d_2<c_3$, si suddivide il dominio di f negli intervalli $]-\infty,c_1[$, $]c_1,d_1[$, $]d_1,c_2[$, $]c_2,d_2[$, $]d_2,c_3[$, $]c_3,+\infty[$ e si vede prima se sono definiti in $\overline{\mathbb{R}}$ gli integrali di f negli intervalli scritti sopra:

$$\int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx\,,\quad \int_{d_1}^{c_2} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_2}^{d_2} f(x)\,dx\,,\quad \int_{d_2}^{c_3} f(x)\,dx\,,\quad \int_{c_3}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Se questo accade, inoltre, il *carattere* di ognuno degli integrali (i.e. il fatto che sia reale o $\pm\infty$) non dipende dalla scelta effettuata dei punti c_i. Ma allora, volendo conservare la proprietà di additività rispetto al dominio, è ben definito l'integrale di f su $\mathbb{R}$ se e solo se la somma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \int_{-\infty}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{d_1} f(x)\,dx + \int_{d_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{d_2} f(x)\,dx + \int_{d_2}^{c_3} f(x)\,dx + \int_{c_3}^{+\infty} f(x)\,dx$$

ha senso in $\overline{\mathbb{R}}$, i.e. non presenta forme indeterminate del tipo $+\infty-\infty$. Se poi tale somma è reale, i.e. l'integrale di f converge su $\mathbb{R}$, il valore dell'integrale ottenuto dalla precedente formula non dipende dalla scelta effettuata dei punti c_i. Infine, lo stesso accade se la somma vale $\pm\infty$.

Criteri di confronto

Confrontiamo ora due funzioni non negative, nel caso della definizione 8.16.

Proposizione 8.21 *Se $f,g:[a,b[\to\mathbb{R}$ sono funzioni continue, con $0\le f(x)\le g(x)$ per ogni $x\in]a,b[$, allora vale il seguente* criterio di confronto*:*

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_a^b g(x)\;dx < +\infty & \Longrightarrow & \displaystyle 0\le\int_a^b f(x)\;dx<+\infty \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\;dx = +\infty & \Longrightarrow & \displaystyle\int_a^b g(x)\;dx=+\infty\;. \end{array}$$

Dimostrazione: Infatti per ogni $\beta \in]a,b[$ risulta

$$F(\beta) \leq G(\beta)\,, \qquad F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx\,, \quad G(\beta) = \int_a^\beta g(x)\,dx$$

e sia F che G sono crescenti e non negative su $]a,b[$, cf. osservazione 8.11. Ma allora

$$0 \leq \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) \leq \lim_{\beta\to b^-} G(\beta) \leq +\infty$$

per cui l'asserto segue dalla definizione 8.16. □

In generale è preferibile utilizzare il seguente *criterio di confronto asintotico*:

Proposizione 8.22 *Siano $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue, non negative in un intorno di b e tali che per $x \to b^-$ risulta $f(x) \sim l\,g(x)$ con $l > 0$ reale, i.e.*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0,+\infty[\ .$$

Allora f è integrabile in senso generalizzato su $[a,b[$ se e solo se lo è g.

Dimostrazione: Dall'ipotesi esiste $a' \in]a,b[$ tale che

$$\frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l \qquad \forall x \in]a',b[$$

e dunque, moltiplicando per $g(x) > 0$,

$$\frac{l}{2}\cdot g(x) \leq f(x) \leq 2l\cdot g(x) \qquad \forall x \in]a',b[\,.$$

L'asserto segue quindi dal criterio del confronto, tenuto conto dell'osservazione 8.17. □

Osservazione 8.23 Nelle applicazioni del criterio di confronto asintotico, si considera separatamente tutte le improprietà della funzione, ragionando come nell'osservazione 8.20. Per dedurre la convergenza mediante il confronto asintotico, si fa poi riferimento alle funzioni test date dall'esempio 8.5, per improprietà vicino a zero o $\pm\infty$, ed all'esempio 8.6 per improprietà vicino a un numero reale $x_0 \neq 0$.

Esempio 8.24 La funzione

$$f(x) = \frac{(1+\mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)}}{x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x}$$

è continua e positiva nel suo dominio naturale, che è la semiretta $]0,+\infty[$. Inoltre notiamo che $f(x) \to +\infty$ se $x \to 0^+$ e $f(x) \to 0^+$ se $x \to +\infty$. Spezzando il dominio nei due intervalli $]0,1]$ e $[1,+\infty[$, vediamo ora che f è integrabile in entrambi gli intervalli e, dunque, è integrabile in senso generalizzato sulla semiretta $]0,+\infty[$.

Infatti, per $x \to 0^+$ abbiamo $(1+\mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)} \sim 2\cdot x^{3/2}$ e $x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x \sim x^2+x^2/2 = 3x^2/2$, dunque $f(x) \sim (4/3)\cdot x^{-1/2}$ per $x \to 0^+$. Ma $(4/3)\cdot x^{-1/2}$ è integrabile su $]0,1]$ e quindi lo è anche f su $]0,1]$, per confronto asintotico.

Inoltre, per $x \to +\infty$ abbiamo $(1+\mathsf{e}^{-x})\sqrt{x^3(x+1)} \sim 1\cdot x^{4/2} = x^2$ e $x^2(1+x\sqrt{x})+1-\cos x \sim x^2\cdot x^{3/2} = x^{7/2}$, essendo $1-\cos x$ limitata. Quindi $f(x) \sim x^2/x^{7/2} = x^{-3/2}$ per $x \to +\infty$. Ma $x^{-3/2}$ è integrabile su $[1,+\infty[$ e quindi lo è anche f su $[1,+\infty[$, ancora per confronto asintotico.

Andamento all'infinito

L'andamento del limite a $+\infty$ dà informazioni sull'integrale di una funzione su una semiretta destra.

Proposizione 8.25 *Se $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e $f(x) \to l$ se $x \to +\infty$, abbiamo:*

1. *se $l > 0$ allora* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

2. *se* $l < 0$ *allora* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$

3. *se* f *è integrabile in senso generalizzato su* $]a, +\infty[$*, allora* $l = 0$.

Dimostrazione: Se il limite l è positivo, esistono un numero positivo N_0 e un numero reale $M_0 > a$ tali che $f(x) > N_0$ per ogni $x > M_0$. Ma allora per ogni $M > M_0$ risulta

$$\int_a^M f(x)\,dx = \int_a^{M_0} f(x)\,dx + \int_{M_0}^M f(x)\,dx \geq \int_a^{M_0} f(x)\,dx + \int_{M_0}^M N_0\,dx = \int_a^{M_0} f(x)\,dx + N_0 \cdot (M - M_0)\,.$$

Poiché $N_0 \cdot (M - M_0) \to +\infty$ se $M \to +\infty$, allora per confronto otteniamo che

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx = +\infty\,.$$

Analogamente, se $l < 0$ otteniamo che $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = -\infty$. Ma allora se l'integrale di f converge il limite l è necessariamente uguale a zero. □

Osservazione 8.26 Il viceversa del punto 3. è falso: se $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ non è detto che f sia integrabile vicino a $+\infty$. Infatti, dall'esempio 8.5 sappiamo che $f(x) = 1/x^\alpha$ è integrabile su $[1, +\infty[$ se e solo se $\alpha > 1$, ma è infinitesima per $x \to +\infty$ per ogni $\alpha > 0$.

Criterio di assoluta convergenza

Nel caso di funzioni che cambiano segno, vale il seguente *criterio di assoluta convergenza*:

Proposizione 8.27 *Siano* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *due funzioni continue e tali che* $|f(x)| \leq g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b[$*. Inoltre, supponiamo che* g *sia integrabile in senso generalizzato in* $[a, b[$*. Allora anche* $|f|$ *e* f *sono integrabili in senso generalizzato in* $[a, b[$ *e risulta*

$$\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx < +\infty\,.$$

Dimostrazione: Infatti, ricordando la nozione di parte positiva e negativa, abbiamo che $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$, con $0 \leq f^\pm \leq |f|$. Dunque per il criterio di confronto le funzioni continue e non negative f^- e f^+ sono integrabili in senso generalizzato su $[a, b[$. Ma allora lo sono anche la loro somma e la loro differenza, i.e. le funzioni $|f|$ ed f . Essendo poi per ogni $\beta \in]a, b[$

$$\Big|\int_a^\beta f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^\beta |f(x)|\,dx \leq \int_a^\beta g(x)\,dx\,,$$

la catena di diseguaglianze nella tesi è ottenuta passando al limite per $\beta \to b^-$. □

Esempio 8.28 La funzione $f(x) = (1+\operatorname{sen} x)/\sqrt{|x|}$ è integrabile in senso generalizzato su $[-1, 1]$. Infatti risulta $|f(x)| \leq 2/|x|^{1/2}$, che è integrabile in senso generalizzato sia su $[0, 1]$ che su $[-1, 0]$.

Osservazione 8.29 Il criterio precedente non ha un viceversa: esistono infatti funzioni f integrabili in senso generalizzato pur non essendolo $|f|$. Un esempio, di cui non daremo la verifica, è la funzione $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ nella semiretta $[1, +\infty[$.

Trasformata di Fourier

In varie branche della fisica e dell'ingegneria (ad esempio in teoria dei segnali) si utilizza la *trasformata di Fourier*, al fine di decomporre (e poi ricomporre mediante l'antitrasformata) un segnale generico in una somma infinita di sinusoidi con frequenze, ampiezze e fasi diverse.

Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, si dice che appartiene alla classe di Schwartz se all'infinito tutte le sue derivate sono infinitesime di ordine superiore ad ogni potenza negativa, i.e. se per ogni $n \in \mathbb{N}$

risulta che $f^{(n)}(x)/x^m \to 0$ se $x \to \pm\infty$, per ogni $m \in \mathbb{N}$. La trasformata di Fourier di una funzione di Schwartz è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$ dall'integrale generalizzato (o meglio di Lebesgue)

$$\widehat{f}(t) = \mathcal{F}\{f\}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathsf{e}^{-ixt}\, dx\,, \qquad \mathsf{e}^{-ixt} = \cos(xt) - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\,.$$

Quindi $\widehat{f}$ è definita su $\mathbb{R}$ ed è a valori in $\mathbb{C}$ e si decompone

$$\widehat{f}(t) = \Re\widehat{f}(t) + \mathbf{i}\Im\widehat{f}(t)$$

in funzione parte reale e parte immaginaria, dove

$$\Re\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \cos(xt)\, dx\,, \quad \Im\widehat{f}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{sen}(xt)\, dx\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Inoltre, entrambe le funzioni $t \mapsto \Re\widehat{f}(t)$ e $t \mapsto \Im\widehat{f}(t)$ sono di Schwartz.

Più in generale la formula precedente ha senso per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $|f|$ è integrabile in senso generalizzato. Se poi anche entrambe le funzioni $t \mapsto |\Re\widehat{f}(t)|$ e $t \mapsto |\Im\widehat{f}(t)|$ sono integrabili in senso generalizzato su tutto $\mathbb{R}$, allora (mediante l'antitrasformata) risulta

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(t)\, \mathsf{e}^{ixt}\, dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,, \qquad \mathsf{e}^{ixt} = \cos(xt) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\,.$$

Esempio 8.30 Se $f(x) = 1$ per $x \in [-1, 1]$ e $f(x) = 0$ altrimenti, risulta

$$\sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(t) = \int_{-1}^{1} \big(\cos(xt) - \mathbf{i}\,\mathrm{sen}(xt)\big)\, dx = \frac{2\,\mathrm{sen}\, t}{t} + \mathbf{i} \cdot 0 = \frac{2\,\mathrm{sen}\, t}{t}$$

per ogni $t \neq 0$ e $\sqrt{2\pi}\, \widehat{f}(0) = 2$. Si noti che $\widehat{f}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.