Risoluzione del compito n. 7 (Luglio 2023)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^2 - 2w = 4\mathrm{i} - 7 \\ \dfrac{z}{w} = \dfrac{1}{2 - \mathrm{i}} \end{cases}.$$

Ricordiamoci che dovremo scartare eventuali soluzioni con $w = 0$ e dalla seconda equazione ricaviamo subito $w = (2 - \mathrm{i})z$, che sostituito nella prima dà

$$\begin{aligned} z^2 - 2(2 - \mathrm{i})z + 7 - 4\mathrm{i} = 0 \iff z &= (2 - \mathrm{i}) \pm \sqrt{4 - 1 - 4\mathrm{i} - 7 + 4\mathrm{i}} = (2 - \mathrm{i}) \pm \sqrt{-4} \\ &= (2 - \mathrm{i}) \pm 2\mathrm{i} = \begin{cases} 2 + \mathrm{i} \\ 2 - 3\mathrm{i} \end{cases} \end{aligned}$$

così i corrispondenti valori di w sono

$$w = (2 - \mathrm{i})z = \begin{cases} (2 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = 5 \\ (2 - \mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 1 - 8\mathrm{i} \end{cases}$$

e le due soluzioni del sistema sono

$$z = 2 + \mathrm{i}\,,\ w = 5 \qquad z = 2 - 3\mathrm{i}\,,\ w = 1 - 8\mathrm{i}\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \log_e(x^3 - 2x^2 + x) + 2x + \log_e 8$.

a) **Calcolatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli asintoti.**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo e/o minimo locale.**

c) **Determinate il numero di zeri di f .**

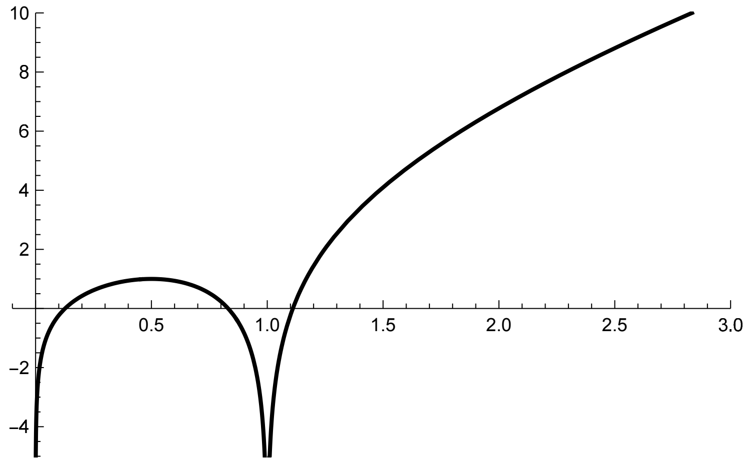
d) **Calcolate la derivata seconda e gli intervalli di convessità o concavità di f .**

e) **Disegnate il grafico di f .**

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\ .$$

Dato che $P(x) \to 0^+$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 1$, mentre $P(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$, dall'andamento del logaritmo segue immediatamente che $f(x) \to -\infty$ per $x \to 0^+$ e per $x \to 1$, mentre $f(x) \to +\infty$ per $x \to +\infty$. Quindi $x = 0$ è asintoto verticale (destro) e $x = 1$ asintoto verticale. Dato che $f(x)/x \to 2$ ma $\big[f(x) - 2x\big] \to +\infty$ per $x \to +\infty$, la funzione non ha asintoto obliquo.



La funzione è continua e derivabile (infinite volte) in tutto il dominio, e risulta

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} + 2 = \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{x(x-1)^2}$$

e quindi (ricordando che nel dominio di f è $x > 0$) il segno della derivata dipende dal segno della funzione $g(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. A questo punto o si vede il raccoglimento

$$g(x) = x^2(2x-1) - (2x-1) = (x^2-1)(2x-1) = (x+1)(x-1)(2x-1) \ ,$$

o in alternativa si cerca uno zero di g , si trova che $g(1) = 0$ e allora dividendo per $x - 1$ risulta $g(x) = (x-1)(2x^2 + x - 1)$ e dato che il polinomio $2x^2 + x - 1$ si annulla in

$x = -1$ e in $x = 1/2$, possiamo fattorizzare $2x^2 + x - 1 = (x+1)(2x-1)$ pervenendo alla formula trovata in precedenza.
Dato che $g(x)$ è positiva per $0 < x < 1/2$, negativa per $1/2 < x < 1$, positiva per $x > 1$, e si annulla per $x = 1/2$, otteniamo che f è crescente in $]0, 1/2]$, decrescente in $[1/2, 1[$, crescente in $]1, +\infty[$. Inoltre f ha un solo punto di massimo locale in $x = 1/2$, dove vale

$$f(1/2) = \log(1/8) + 1 + \log 8 = 1 \ .$$

Dalla continuità della funzione e dall'andamento agli estremi di ognuno degli intervalli, grazie al Teorema dei valori intermedi risulta

$$f(]0, 1/2]) = f([1/2, 1[) =]-\infty, 1] \,, \quad f(]1, +\infty[) = \mathbb{R} \ .$$

Quindi per la stretta monotonia di f in ognuno degli intervalli considerati, concludiamo che la funzione si annulla una volta in $]0, 1/2]$, una volta in $[1/2, 1[$ e una volta in $]1, +\infty[$ e dunque ha esattamente tre zeri.
Per l'ultimo punto, ricordando che dobbiamo calcolare la derivata seconda nei punti del dominio, semplifichiamo prima

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x-1)(2x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{(x+1)(2x-1)}{x(x-1)} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x}$$

e dunque

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} = \frac{(4x+1)(x^2 - x) - (2x^2 + x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x)^2} = -\frac{3x^2 - 2x + 1}{(x^2 - x)^2}$$

dove il polinomio $3x^2 - 2x + 1$ è sempre positivo, avendo discriminante negativo. Quindi $f''(x) < 0$ in ogni punto del dominio di f, per cui concludiamo che f è strettamente concava sia in $]0, 1[$ che in $]1, +\infty[$.
La soluzione sarebbe stata più veloce osservando che scrivendo (serve il valore assoluto!)

$$\log(x^3 - 2x^2 + x) = \log\bigl(x(x-1)^2\bigr) = \log x + \log\bigl((x-1)^2\bigr) = \log x + 2\log|x-1|$$

si calcola subito per $x > 0$ e $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + 2 \,, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{(x-1)^2}$$

da cui si ottengono rapidamente le informazioni richieste.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x+1}\,, \quad g(x) = \log_{\mathrm{e}}\Big(1 + x - \frac{x^2}{2}\Big)\,.}$$

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**
c) **Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $f(x) - g(x)$.**
d) **Calcolate al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite**

$$\boldsymbol{\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - g(x) + \alpha(x^3 + x^4)}{x^4}\,.}$$

Sappiamo che

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\,, \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

e dunque

$$\begin{aligned} f(x) =& \Big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\Big)\big(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)\big) \\ =& x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - x^2 + \frac{x^4}{6} + x^3 - x^4 \\ =& x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

Inoltre, da

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + o(y^4)$$

con $y = x - x^2/2$, e dunque $o(y)^k = o(x)^k$, otteniamo

$$\begin{aligned} \log\Big(1 + x - \frac{x^2}{2}\Big) =& \Big(x - \frac{x^2}{2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^2}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(x - \frac{x^2}{2}\Big)^3 - \frac{1}{4}\Big(x - \frac{x^2}{2}\Big)^4 + o(x^4) \\ =& x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\Big(x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\Big) + \frac{1}{3}\Big(x^3 - \frac{3x^4}{2}\Big) - \frac{1}{4}\,x^4 + o(x^4) \\ =& x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{7x^4}{8} + o(x^4)\,. \end{aligned}$$

Quindi risulta che

$$f(x) - g(x) = x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{5x^4}{6} + o(x^4) - \Big(x - x^2 + \frac{5x^3}{6} - \frac{7x^4}{8}\Big) = \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $x^4/24$ e il limite richiesto vale

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^3 + (\alpha + 1/24)x^4 + o(x^4)}{x^4} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1/24 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia $F(x) = \int_0^x (\arctan t^4)^3 \, dt$ **.**

a) Determinate per quale valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ **risulta finito e diverso da zero**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^\alpha} .$$

b) Studiate al variare di $\beta \in \mathbb{R}$ **la convergenza della serie**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/n^\beta} (\arctan x^4)^3 \, dx .$$

Osserviamo che $(\arctan t^4)^3$ è una funzione continua e non negativa in $[0, +\infty[$ e tende a zero per $x \to 0$, quindi $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = 0$. Allora per $\alpha \le 0$ il limite di $F(x)/x^\alpha$ vale certamente zero, e possiamo limitarci a studiare il caso $\alpha > 0$. Allora (solo adesso!) possiamo applicare il Teorema di de l'Hôpital ottenendo grazie al Teorema fondamentale del calcolo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^\alpha} \underset{\substack{\uparrow \\ H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\arctan x^4)^3}{\alpha x^{\alpha-1}} ,$$

ma per $t \to 0$ è $\arctan t = t + o(t)$ quindi $(\arctan x^4)^3 = \big(x^4 + o(x^4)\big)^3 = x^{12} + o(x^{12})$ pertanto ricordando che siamo nel caso $\alpha > 0$ proseguiamo con

$$\cdots = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{12} + o(x^{12})}{\alpha x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha - 1 < 12 \iff 0 < \alpha < 13 \\ 1/13 & \text{se } \alpha = 13 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 13. \end{cases}$$

Il valore cercato è dunque $\alpha = 13$, e possiamo riscrivere quanto ora dimostrato come

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^{13}} = \frac{1}{13} \iff \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x) - x^{13}/13}{x^{13}} = 0 \iff F(x) = \frac{x^{13}}{13} + o(x^{13}) .$$

Osserviamo ora che

$$a_n := \int_0^{1/n^\beta} (\arctan x^4)^3 \, dx = F(1/n^\beta)$$

è sempre positivo, quindi potremo applicare tutti i criteri per serie a termini positivi e tanto per cominciare la serie o converge o diverge positivamente. Per $\beta = 0$ il termine generale a_n è costantemente $\int_0^1 (\arctan t^4)^3 \, dt$, un numero positivo, e dato che il termine generale non tende a zero la serie diverge positivamente. Per $\beta < 0$ abbiamo $a_n \to \int_0^{+\infty} (\arctan t^4)^3 \, dt$, di nuovo un numero positivo, e di nuovo la serie diverge positivamente. Invece per $\beta > 0$ abbiamo $1/n^\beta \to 0^+$ e (soltanto adesso!) possiamo usare quanto ricavato sopra, ottenendo

$$a_n = F(1/n^\beta) = \frac{1}{13 n^{13\beta}} + o\Big(\frac{1}{n^{13\beta}}\Big)$$

e per il criterio del confronto asintotico la serie proposta ha lo stesso carattere della serie armonica generalizzata $\sum_n 1/n^{13\beta}$, che converge per $\beta > 1/13$ e diverge per $0 < \beta \leq 1/13$. In conclusione la serie converge per $\beta > 1/13$ e diverge positivamente per gli altri valori di β .
La prima parte sarebbe stata più rapida utilizzando il fatto che se $f(t) = o(t^k)$ è una funzione integrabile allora $\int_0^x f(t)\,dt = o(x^{k+1})$: infatti avremmo potuto subito scrivere

$$F(x) = \int_0^x (\arctan t^4)^3\,dt = \int_0^x \big(t^{12} + o(t^{12})\big)\,dt = \frac{x^{13}}{13} + o(x^{13})\ .$$

Esercizio 1. Se $w - z = 3 + 4\mathrm{i}$ e $|z| = 10$ allora

(A) $5 \le |w| \le 15$.	(C) $w = 3 + (4 \pm 10)\mathrm{i}$.
(B) $w = (3 \pm 10) + 4\mathrm{i}$.	(D) $|w| + |z| = 7$.

Osserviamo che l'equazione si può rileggere $w = (3+4\mathrm{i}) + z$, e di z sappiamo solo che è un numero di modulo 10 . Allora w è un qualunque punto della circonferenza di centro $3 + 4\mathrm{i}$ e raggio 10 , e possiamo scartare le due risposte precise (" $w = \cdots$ "). Poi, se già $|z| = 10$ è impossibile che $|z| + |w| = 7$ e resta solo una risposta. In effetti, dato che il centro $3 + 4\mathrm{i}$ ha modulo 5 , i punti della circonferenza detta sopra (disegnatela) devono avere moduli compresi fra 5 e 15 . In alternativa, avremmo potuto usare la seconda disuguaglianza triangolare ottenendo

$$\big||w| - |z|\big| \le |w - z| = |3 + 4\mathrm{i}| = 5 \iff \big||w| - 10\big| \le 5$$

e di nuovo $5 \le |w| \le 15$.

Esercizio 2. Se f è continua su $\mathbb{R}$

(A) ha come immagine un intervallo.	(C) è anche derivabile.
(B) non può essere uniformemente continua.	(D) non può avere massimo e minimo.

Che abbia come immagine un intervallo segue dal Teorema dei valori intermedi. Invece ad esempio la funzione $|x|\,\mathrm{e}^{-|x|}$ — che a destra di zero è $x\,\mathrm{e}^{-x}$ e a sinistra è simmetrica — è uniformemente continua (ha derivata non superiore a 1 in valore assoluto, quindi è Lipschitziana), non è derivabile in zero e ha massimo in $x = \pm 1$ e minimo in $x = 0$.

Esercizio 3. Nell' intervallo $[-\pi/4, \pi]$ la funzione $\operatorname{sen} x$ ha immagine

(A) $[-\sqrt{2}/2, 1]$.	(C) $[-1, 1]$.
(B) $[-\sqrt{2}/2, 0]$.	(D) $[-1, \sqrt{2}/2]$.

La funzione seno è continua, ed è strettamente crescente in $[-\pi/4, \pi/2]$ e strettamente decrescente in $[\pi/2, \pi]$. Per il Teorema dei valori intermedi la sua immagine su $[-\pi/4, \pi/2]$ è $[\operatorname{sen}(-\pi/4), \operatorname{sen}(\pi/2)] = [-\sqrt{2}/2, 1]$ e la sua immagine su $[\pi/2, \pi]$ è $[\operatorname{sen}\pi, \operatorname{sen}(\pi/2)] = [0, 1]$. In conclusione l' immagine cercata, che è l'unione delle precedenti, è $[-\sqrt{2}/2, 1]$.

Esercizio 4. Le combinazioni di 20 oggetti presi a 7 per volta sono

(A) fra 40000 e 160000 .	(C) fra 2500 e 10000 .
(B) fra 10000 e 40000 .	(D) fra 600 e 2500 .

Si tratta di stimare

$$\binom{20}{7} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 19 \cdot 17 \cdot 24 \cdot 10 > 16 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 10 > 200 \cdot 200 .$$

La sola risposta possibile è che siano fra 40000 e 160000.

Esercizio 5. Sia $S = \{x \in \mathbb{R} : \log_{\mathrm{e}}(2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 3\,\mathrm{e}^2) < 2\}$. Allora:

(A) $]-2\,\mathrm{e}, -3\,\mathrm{e}/2[\subset S$.

(B) $-\mathrm{e} \in S$.

(C) S non è limitato.

(D) $]-1, -1/2[\subset S$.

Perché il logaritmo sia definito occorre che il suo argomento sia positivo, dopo di che (visto che $2 = \log_{\mathrm{e}} \mathrm{e}^2$) per la monotonia del logaritmo la disequazione equivarrà a $2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 3\,\mathrm{e}^2 < \mathrm{e}^2$. L'insieme S è dunque definito da

$$\begin{cases} 2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 3\,\mathrm{e}^2 > 0 \\ 2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 3\,\mathrm{e}^2 < \mathrm{e}^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 3\,\mathrm{e}^2 > 0 \\ 2x^2 + 5\,\mathrm{e}x + 2\,\mathrm{e}^2 < 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x < -3\,\mathrm{e}/2 \text{ oppure } x > -\mathrm{e} \\ -2\,\mathrm{e} < x < -\mathrm{e}/2 \end{cases}$$

e pertanto $S =]-2\,\mathrm{e}, -3\,\mathrm{e}/2[\cup]-\mathrm{e}, -\mathrm{e}/2[$, mentre $]-1, -1/2[\not\subset S$ dato che $-\mathrm{e}/2 < -1$.

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_n n^\alpha \cdot \left(\mathrm{e}^{1/n^2} - 1\right)$

(A) converge se e solo se $\alpha < 1$.

(B) converge per ogni $\alpha < 3$.

(C) converge se e solo se $\alpha < -1$.

(D) diverge positivamente se $\alpha > 0$.

Si tratta di una serie a termini positivi, e dato che

$$n^\alpha \cdot \left(\mathrm{e}^{1/n^2} - 1\right) = n^\alpha \cdot \frac{\mathrm{e}^{1/n^2} - 1}{1/n^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}^{1/n^2} - 1}{1/n^2} \cdot \frac{1}{n^{2-\alpha}}$$

e che la prima frazione tende a 1 , per il criterio del confronto asintotico la serie ha lo stesso carattere di $\sum 1/n^{2-\alpha}$, che è una serie armonica generalizzata e converge per $2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$ e diverge positivamente per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 7. La successione $\dfrac{n\left(\mathrm{e}^{2/n} - 1\right)}{\cos(\pi n)}$

(A) non ha limite.

(B) diverge positivamente.

(C) tende a 2 .

(D) è infinitesima.

Osserviamo che $\cos(\pi n) = (-1)^n$ e che posto

$$a_n = \frac{n\left(\mathrm{e}^{2/n} - 1\right)}{\cos(\pi n)}$$

abbiamo

$$a_n = (-1)^n \cdot 2\frac{\mathrm{e}^{2/n} - 1}{2/n} \quad :$$

dato che la seconda parte della successione tende a 2 , abbiamo

$$a_{2n} \to +2\ , \qquad a_{2n+1} \to -2$$

e dunque a_n non ha limite.