Metodi Probabilistici
Appello 08/07/2024

Tempo a disposizione: 180 minuti

1. **[5 punti]** Si fornisca la definizione della funzione delta di Dirac e se ne illustri il significato e l'utilità.

2. **[5 punti]** Calcolare media e varianza della variabile aleatoria esponenziale (funzione di densità di probabilità: $f_x(x) = \mu e^{-\mu x} u(x)$ con $u(x)$ funzione gradino unitario) attraverso il calcolo della sua funzione generatrice dei momenti.

3. **[5 punti]** Si definisca ed esponga il concetto di indipendenza per probabilità di eventi, e per CDF e PDF di variabili aleatorie.

4. **[7 punti]** Un'urna contiene inizialmente 1 pallina nera (N) e 2 palline bianche (B). Si fanno estrazioni casuali di una pallina rimettendola poi nell'urna, e ogni volta aggiungendo altre 2 palline del colore estratto e 3 palline del colore non estratto. Calcolare la probabilità che in 4 estrazioni successive si ottenga la stringa ordinata BNNB.

5. **[7 punti]** Si consideri la variabile aleatoria X definita come
$$X = \begin{cases} \sqrt{2U} & U < 0.5 \\ 2 - \sqrt{2 - 2U} & U \geq 0.5 \end{cases}$$
con $U \sim \text{Unif}[0,1]$. Determinare e disegnare la funzione di densità di probabilità di X.

6. **[7 punti]** Nel piano (x, y), si consideri il dominio $\mathscr{D}$ mostrato in figura e definito come
$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$$

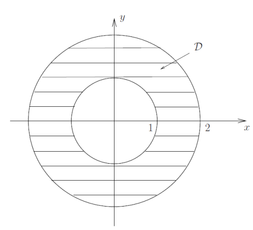

Figura 1: Dominio $\mathscr{D}$.

Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con densità di probabilità costante sul dominio $\mathscr{D}$ e nulla altrove. Si determinino le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$. Si dica se X e Y sono indipendenti oppure no.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. La funzione generatrice dei momenti è definita come

$$\Psi_X(s) = E\{e^{sX}\} = \int_0^\infty e^{sx}\mu e^{-\mu x}\,dx = \int_0^\infty \mu e^{(s-\mu)x}\,dx = \frac{\mu}{\mu - s}$$

(l'integrale converge se $s < \mu$). Quindi

$$E\{X\} = \left.\frac{d\Psi_X(s)}{ds}\right|_{s=0} = \frac{1}{\mu}\,.$$

3. Domanda di teoria.

4. Indichiamo con B_i, N_i ($i = 1,\ldots,4$) gli eventi: {pallina Bianca (Nera) alla i-esima estrazione}. Dopo ogni estrazione cambia lo spazio campione, e se gli esiti delle prime tre estrazioni seguono la sequenza voluta: $B_1\,N_2\,N_3$ il numero delle palline presenti nell'urna quando avviene la i-esima estrazione si modifica come segue:

i	Nere	Bianche
1	1	2
2	4	4
3	6	7
4	8	10

Quindi

$$P(B_1) = \frac{2}{3}, \qquad P(N_2|B_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$P(N_3|N_2,B_1) = \frac{6}{13}, \qquad P(B_4|N_3,N_2,B_1) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

E infine la probabilità della sequenza ordinata $BNNB$ è:

$$P(B_1,N_2,N_3,B_4) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{5}{9} = \frac{10}{117} \simeq 0.08547$$

5. Per $0 \le U < 0.5$ si ha $0 \le X < 1$ e

$$u(x) = \frac{x^2}{2} \qquad g'(u) = \frac{1}{\sqrt{2u}}$$

Per cui

$$f_X(x) = \frac{f_U(u(x))}{|g'(u(x))|} = x$$

Mentre per $0.5 \leq U \leq 1$ si ha $1 \leq X \leq 2$ e

$$u(x) = \frac{2-(2-x)^2}{2} \qquad g'(u) = \frac{1}{\sqrt{2-2u}}$$

Per cui

$$f_X(x) = \frac{f_U(u(x))}{|g'(u(x))|} = 2-x$$

Quindi la PDF di X è una funzione triangolare per $0 \leq X \leq 2$ con $f_X(x) = 1$ per $x = 1$.

6. La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x,y)$ può essere espressa come

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(\mathscr{D})} & (x,y) \in \mathscr{D} \\ 0 & (x,y) \notin \mathscr{D}. \end{cases}$$

Poiché $\text{Area}(\mathscr{D}) = 4\pi - \pi = 3\pi$, abbiamo

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi} & (x,y) \in \mathscr{D} \\ 0 & (x,y) \notin \mathscr{D}. \end{cases}$$

Cominciamo a calcolare la densità di probabilità marginale di X. Poiché è

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

avremo

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 2 \\ 2\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}) & 1 \leq |x| \leq 2 \\ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}\sqrt{4-x^2} & |x| < 1 \end{cases}$$

Per la simmetria del problema sarà

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & |y| > 2 \\ \frac{2}{3\pi}(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2}) & 1 \leq |y| \leq 2 \\ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}\sqrt{4-y^2} & |y| < 1 \end{cases}$$

X e Y non possono essere quindi indpendenti dal momento che $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ come si può facilmente verificare ad esempio per $(x,y) = (0,0)$.