Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova del 16/5/2024
Tempo a disposizione: 90 minuti

1. **[6 punti]** Data una variabile casuale X di Poisson con parametro Λ, se ne calcolino il valor medio e la varianza (domanda di teoria).

2. **[6 punti]** Si consideri la trasformazione $Y = g(X)$ della variabile casuale X. Si dimostri il teorema fondamentale nell'ipotesi che la funzione $g(x)$ sia monotona crescente (domanda di teoria).

3. **[8 punti]** Si consideri una v.a. X gaussiana con media e deviazione standard unitarie e la funzione
$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < -1 \\ x/2 & \text{per } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$
Determinare la densità di probabilità della variabile aleatoria $Y = g(X)$ e disegnarne il grafico.

4. **[12 punti]** Il numero R di telefonate ricevute in un minuto da un centralino telefonico è una variabile casuale di Poisson che ha un parametro $\Lambda_1 = 10$ nelle ore di punta (dalle 8 alle 16) e un parametro $\Lambda_2 = 2$ nella restante parte del giorno (dalle 16 alle 8). Si calcolino:
   (a) Il valor medio di R.
   (b) Si contano il numero di telefonate ricevute in un minuto e risulta $R = 5$. Qual'è la probabilità che l'osservazione sia avvenuta nelle ora di punta?

Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova del 16/5/2024
Available time: 90 min.

1. **[6 punti]** Considering a random variable X having Poisson distribution with parameter Λ, compute its expected value and its variance (theoretical question).

2. **[6 punti]** Consider the random variable $Y = g(X)$ obtained by transforming the random variable X. Demonstrate the fundamental theorem when the function $g(x)$ is monotonically increasing (theoretical question).

3. **[8 punti]** Consider a Gaussian random variable X with unitary mean and standard deviation, and the function

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } x < -1 \\ x/2 & \text{for } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

   Determine the probability density function of the random variable $Y = g(X)$ and draw its graph.

4. **[12 punti]** The number R of phone calls received at a switchboard in one minute is a Poisson random variable with parameter $\Lambda_1 = 10$ during peak hours (from 8 to 16) and parameter $\Lambda_2 = 2$ during the rest of the day (from 16 to 8). Compute:

   (a) The mean value of R.

   (b) Assume the number of phone calls received in one minute is $R = 5$. What is the probability that this observation took place during the peak hours?

Soluzione:

1. Nel caso della distribuzione di Poisson la funzione massa di probabilità è

$$p_k = \frac{\Lambda^k}{k!} e^{-\Lambda} . \tag{1}$$

Il valor medio è quindi

$$\begin{aligned} E\{X\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{(k-1)!} e^{-\Lambda} = \Lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\Lambda} \\ &= \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Lambda^i}{i!} e^{-\Lambda} = \Lambda . \end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} E\{X(X-1)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{(k-2)!} e^{-\Lambda} = \Lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\Lambda} \\ &= \Lambda^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Lambda^i}{i!} e^{-\Lambda} = \Lambda^2 . \end{aligned} \tag{3}$$

Poiché

$$E\{X(X-1)\} = E\{X^2\} - E\{X\} \tag{4}$$

possiamo quindi ricavare

$$E\{X^2\} = E\{X(X-1)\} + E\{X\} = \Lambda^2 + \Lambda \tag{5}$$

da cui

$$\sigma_X^2 = E\{X^2\} - E^2\{X\} = \Lambda . \tag{6}$$

2. Domanda di teoria.

3. La densità di probabilità $f_X(x)$ ha espressione

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \tag{7}$$

ed è mostrata in Fig. 1. Si tratta ovviamente di una v.a. continua. Poiché la funzione $g(x)$, mostrata in Fig. 2, ha due tratti orizzontali, la v.a. Y sarà una v.a. mista con due masse di probabilità in corrispondenza dei valori -1 e 1. Y assumerà poi valori compresi tra -1/2 e 1/2. Abbiamo

$$\begin{aligned} P\{Y=-1\} &= P\{X \le -1\} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} \, dx = \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz \\ &= \int_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \, dz = \mathrm{Q}(2) = 0,023 \\ P\{Y=1\} &= P\{X \ge 1\} = 0,5 \end{aligned} \tag{8}$$

Invece per $-1/2 \le y \le 1/2$ possiamo utilizzare il teorema fondamentale. Poiché $g'(x) = 1/2$, abbiamo

$$f_Y(y) = \left.\frac{f_X(x)}{1/2}\right|_{x=g^{-1}(y)=2y} = 2f_X(2y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2y-1)^2}{2}}. \tag{9}$$

Per ogni altro valore di y, $f_Y(y) = 0$. Quindi riassumendo

$$f_Y(y) = 0{,}023\delta(y+1) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(2y-1)^2}{2}}\Pi(y) + 0{,}5\delta(y-1) \tag{10}$$

ed è mostrata in Fig. 3.

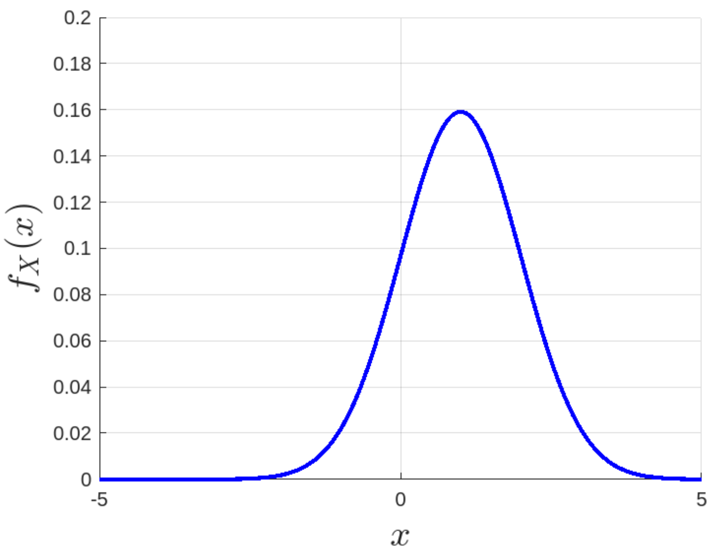

Figura 1: Densità di probabilità della v.a. X.

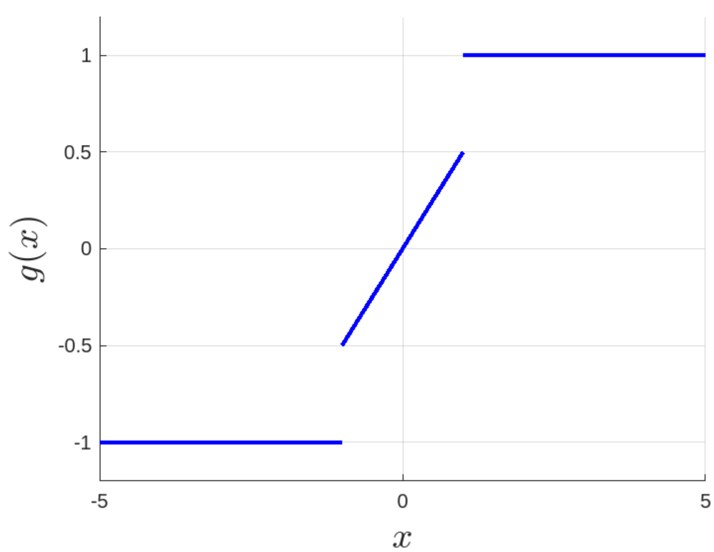

Figura 2: Funzione $g(x)$.

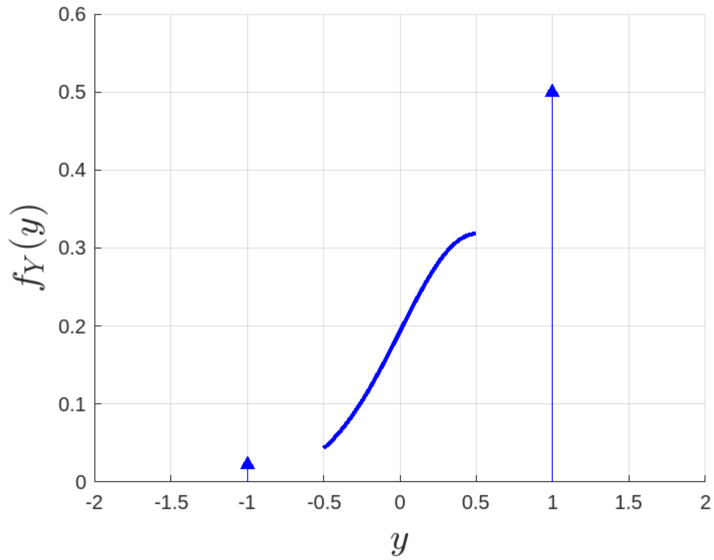

Figura 3: Densità di probabilità della v.a. $Y = g(X)$.

4. Si tratta del classico esempio di esperimento composito.

   (a) Per una v.a. di Poisson di parametro Λ, si ha che $E\{X\} = \Lambda$. Indicando con $\mathscr{P}$ l'evento $\mathscr{P} = \{\text{ora di punta}\}$ è ovviamente

$$\begin{aligned} P(\mathscr{P}) &= \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \\ P(\overline{\mathscr{P}}) &= \frac{16}{24} = \frac{2}{3} \\ E\{R|\mathscr{P}\} &= \Lambda_1 \\ E\{R|\overline{\mathscr{P}}\} &= \Lambda_2 \end{aligned} \tag{11}$$

   da cui ricaviamo

$$E\{R\} = E\{R|\mathscr{P}\}P(\mathscr{P}) + E\{R|\overline{\mathscr{P}}\}P(\overline{\mathscr{P}}) = 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \tag{12}$$

   (b) Si richiede di calcolare

$$P(\mathscr{P}|\{R=5\}) = \frac{P(\{R=5\}|\mathscr{P})P(\mathscr{P})}{P\{R=5\}} \tag{13}$$

   Poiché

$$\begin{aligned} P(\{R=5\}|\mathscr{P}) &= \frac{\Lambda_1^5}{5!}e^{-\Lambda_1} = \frac{10^5}{5!}e^{-10} \\ P(\{R=5\}|\overline{\mathscr{P}}) &= \frac{\Lambda_2^5}{5!}e^{-\Lambda_2} = \frac{2^5}{5!}e^{-2} \end{aligned} \tag{14}$$

   possiamo calcolare

$$P(\mathscr{P}|\{R=5\}) = \frac{\frac{10^5}{5!}e^{-10} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{10^5}{5!}e^{-10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2^5}{5!}e^{-2} \cdot \frac{2}{3}} = 0,344 \tag{15}$$