Risoluzione del compito n. 5 (Aprile 2023)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \bar{z} - \bar{w} = \mathrm{i} \\ zw + z + w + 1 = 0 \, . \end{cases}$$

La prima equazione si riscrive

$$z - w = -\mathrm{i} \iff z = w - \mathrm{i} \, ,$$

che sostituito nella seconda equazione dà

$$w^2 - \mathrm{i}w + w - \mathrm{i} + w + 1 = 0 \iff w^2 + (2 - \mathrm{i})w + 1 - \mathrm{i} = 0 \, ,$$

una equazione di secondo grado che risolviamo:

$$w = \frac{\mathrm{i} - 2 \pm \sqrt{-1 + 4 - 4\mathrm{i} - 4 + 4\mathrm{i}}}{2} = \frac{\mathrm{i} - 2 \pm \mathrm{i}}{2} = \begin{cases} \mathrm{i} - 1 \\ -1 \, . \end{cases}$$

Ricavando i valori corrispondenti di $z = w - \mathrm{i}$ abbiamo le due soluzioni del sistema,

$$z_1 = -1 \, , \quad w_1 = \mathrm{i} - 1 \qquad z_2 = -1 - \mathrm{i} \, , \quad w_2 = -1 \, .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{1+4x}}$ **.**

a) **Calcolatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, il segno.**

b) **Calcolate la derivata di** $\boldsymbol{f}$ **, il dominio di** $\boldsymbol{f'}$ **e i limiti di** $\boldsymbol{f'}$ **agli estremi del suo dominio, determinate gli intervalli di monotonia di** $\boldsymbol{f}$ **e gli eventuali punti di massimo o minimo locale.**

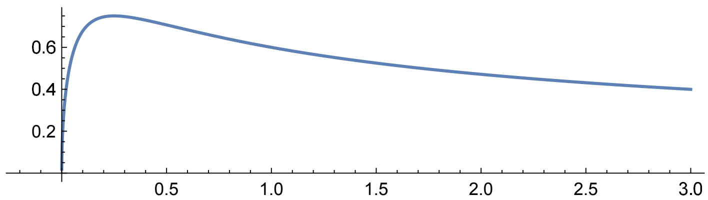
c) **Determinate al variare di** $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$ **il numero di soluzioni dell'equazione** $\boldsymbol{f(x) = k}$ **.**

d) **Calcolate la derivata seconda di** $\boldsymbol{f}$ **e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di** $\boldsymbol{f}$ **.**

e) **Disegnate il grafico di** $\boldsymbol{f}$ **.**

La funzione è definita per $x \geq 0$, è continua ed è sempre positiva salvo per $x = 0$ dove si annulla; inoltre tende a 0^+ per $x \to +\infty$. La sua derivata è

$$f'(x) = 3\frac{1-4x}{2\sqrt{x}(1+4x^2)^2} \,, \qquad f'(x) > 0 \iff 0 < x < 1/4 \,.$$



Per $x = 0$ la funzione non è derivabile, e ha derivata $f'(0) = +\infty$ come si vede o dal limite della derivata o dal limite del rapporto incrementale. La funzione f è dunque strettamente crescente su $[0, 1/4]$ e strettamente decrescente su $[1/4, +\infty[$, ha massimo assoluto per $x = 1/4$ dove vale $3/4$, mentre già sappiamo che il minimo assoluto si ha per $x = 0$ dove f si annulla. Allora l'immagine di f è $[0, 3/4]$ e l'equazione $f(x) = k$ ha una soluzione per $k = 0$ e $k = 3/4$, due soluzioni (una prima e una dopo $x = 1/4$) per $0 < k < 3/4$, e nessuna soluzione per $k < 0$ e per $k > 3/4$. La derivata seconda è

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{3}{2x(1+4x)^4}\left[-4\sqrt{x}(1+4x)^2 - (1-4x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+4x)^2 + 8\sqrt{x}(1+4x)\right)\right] \\
&= \frac{3}{4x(1+4x)^3} \cdot \frac{-8x(1+4x) - (1-4x)(1+4x+16x)}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{3}{8x\sqrt{x}(1+4x)^3}(-8x - 32x^2 - 1 - 20x + 4x + 80x^2) \\
&= \frac{3}{8x\sqrt{x}(1+4x)^3}(48x^2 - 24x - 1) \,.
\end{aligned}$$

Dato che

$$48x^2 - 24x - 1 = 0 \iff x = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{48} = \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{12} \,,$$

e che $3-2\sqrt{3}=3-\sqrt{12}<0$, la derivata seconda è negativa per $0<x<\bigl(3+2\sqrt{3}\,\bigr)/12$ e positiva per $x>\bigl(3+2\sqrt{3}\,\bigr)/12$, dunque f è

$$\begin{aligned}&\text{strettamente concava per } 0\le x\le \bigl(3+2\sqrt{3}\,\bigr)/12\\ &\text{strettamente convessa per } x\ge (3+2\sqrt{3}\,\bigr)/12.\end{aligned}$$

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = 1/(1-2x)$, $g(x) = \mathrm{e}^{2x+2x^2}$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = f(x) - g(x)$.**

c) **Determinate per quale valore del coefficiente $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite ℓ per $x \to 0^+$ della funzione**

$$\frac{h(x) + \alpha x^3}{x^4}$$

è finito. Calcolate poi tale limite ℓ.

Dallo sviluppo di $1/(1-t)$

$$f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + o(x^4)\ ,$$

mentre dallo sviluppo di e^t, osservando che $2x + 2x^2$ è un infinitesimo di ordine 1 e quindi $o(2x+2x^2)^k = o(x^k)$,

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 + (2x+2x^2) + \frac{(\cdots)^2}{2} + \frac{(\cdots)^3}{6} + \frac{(\cdots)^4}{24} + o(\cdots)^4 \\ &= 1 + (2x+2x^2) + \frac{4x^2+8x^3+4x^4}{2} + \frac{8x^3+24x^4}{6} + \frac{16x^4}{24} + o(\cdots)^4 \\ &= 1 + 2x + 4x^2 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^4 + o(x^4)\ . \end{aligned}$$

Allora

$$h(x) = \frac{8}{3}x^3 + \frac{28}{3}x^4 + o(x^4)\ ,$$

un infinitesimo di ordine 3 con parte principale $8x^3/3$, e per $x \to 0^+$

$$\frac{h(x)+\alpha x^3}{x^4} = \frac{(\alpha+\frac{8}{3})x^3 + \frac{28}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} \begin{cases} \to +\infty & \text{se } \alpha + 8/3 > 0 \iff \alpha > -8/3 \\ \to 28/3 & \text{se } \alpha = -8/3 \\ \to -\infty & \text{se } \alpha < -8/3. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e considerate le successioni

$$a_n = |5\alpha - 2|^n + |2\alpha - 2|^{-n} \,, \qquad b_n = (5\alpha - 2)^n + |2\alpha - 2|^{-n} \,.$$

a) **Studiate al variare di α il carattere di $\sum_n a_n$.**
b) **Studiate al variare di α il carattere di $\sum_n b_n$.**

Cominciamo studiando le tre serie geometriche

$$A := \sum_n |5\alpha - 2|^n \,, \qquad B := \sum_n (5\alpha - 2)^n \,, \qquad C := \sum_n \Big(\frac{1}{|2\alpha - 2|}\Big)^n \,,$$

e partiamo dall'ultima: questa non avrebbe senso per $\alpha = 1$, ha ragione maggiore di zero quindi converge o diverge positivamente, e converge se la ragione è minore di 1 ossia se

$$\frac{1}{|2\alpha - 2|} < 1 \iff |2\alpha - 2| > 1 \iff [2\alpha < 1 \text{ oppure } 2\alpha > 3] \iff \Big[\alpha < \frac{1}{2} \ \textbf{o} \ \alpha > \frac{3}{2}\Big] \,,$$

mentre diverge positivamente per $\alpha \in [1/2, 3/2]$ con $\alpha \neq 1$.
La serie geometrica di ragione $(5\alpha - 2)$ diverge positivamente per $\alpha \geq 3/5$, converge per $1/5 < \alpha < 3/5$ ed è indeterminata per $\alpha \leq 1/5$; allora la serie geometrica di ragione $|5\alpha - 2|$ converge per $1/5 < \alpha < 3/5$ e diverge positivamente per tutti gli altri valori di α. Ora possiamo rispondere alle due domande: per la serie $\sum_n a_n$, in cui il termine generale è somma di due addendi positivi, possiamo sempre scrivere $\sum_n a_n = A + C$, e otteniamo che essa converge quando convergono entrambe ossia per $\alpha \in]1/5, 1/2[$, e diverge positivamente per tutti gli altri valori di α (diversi da 1). Anche per $\sum_n b_n$ possiamo certamente scrivere la risposta quando B non è indeterminata, ottenendo che $\sum_n b_n = B + C$ converge per $\alpha \in]1/5, 1/2[$ e diverge positivamente per $\alpha \geq 1/2$ (con $\alpha \neq 1$). Per $\alpha \leq 1/5$ sappiamo che B è indeterminata e C converge, dunque anche $\sum_n b_n$ è indeterminata: infatti se non lo fosse sarebbe o divergente o convergente, e in entrambi i casi otterremmo che

$$B = \sum_n (5\alpha - 2)^n = \sum_n [(5\alpha - 2)^n + |2\alpha - 2|^{-n} - |2\alpha - 2|^{-n}] = \sum_n b_n - C$$

sarebbe anche lei o divergente o convergente come $\sum_n b_n$, dato che C converge, ma sappiamo che B è indeterminata quindi per forza $\sum_n b_n$ è indeterminata. In conclusione

	$\sum_n a_n$	$\sum_n b_n$
$\alpha \leq 1/5$	$+\infty$	indeterminata
$1/5 < \alpha < 1/2$	converge	converge
$1/2 \leq \alpha,\ \alpha \neq 1$	$+\infty$	$+\infty$.

Esercizio 1. Una soluzione dell'equazione $4z^3 - 2\mathrm{i}z^2 + (1-\mathrm{i})z - 1 + \mathrm{i} = 0$ è

(A) i .	(C) 1 .
(B) $-\mathrm{i}$.	(D) -1 .

Basta provare a sostituire i quattro numeri proposti nel polinomio al primo membro, l'unico valore che lo annulla è $z = \mathrm{i}$.

Esercizio 2. Quali sono i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 2 & \text{se } -\pi/2 < x < \pi \\ a \operatorname{sen} x + b \cos x & \text{se } x \leq -\pi/2 \text{ o } x \geq \pi \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a = 2\pi + 2$, $b = 2 - 4\pi$.	(C) $a = 2\pi - 2$, $b = 2 + 4\pi$.
(B) $a = \pi - 1$, $b = 3 + 2\pi$.	(D) $a = \pi + 1$, $b = 3 - 2\pi$.

Per il Teorema di località del limite, sappiamo già che la funzione è continua in tutti i punti tranne $x = -\pi/2$ e $x = \pi$, indipendentemente da a e b ; resta da studiare la continuità in questi due punti. Abbiamo

$$f\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \lim_{x\to(-\pi/2)^-} f(x) = -a \,, \qquad \lim_{x\to(-\pi/2)^+} f(x) = -4\frac{\pi}{2} - 2 = -2\pi - 2$$
$$f(\pi) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = a \operatorname{sen}\pi + b\cos\pi = -b \,, \qquad \lim_{x\to\pi^-} f(x) = 4\pi - 2$$

quindi f è continua anche in questi due punti se e solo se $a = 2\pi + 2$ e $b = 2 - 4\pi$.

Esercizio 3. Nell' intervallo $[-1/2, 1/2]$ la funzione $\arctan\Big|\dfrac{2x}{1+x}\Big|$ ha immagine

(A) $[0, \arctan 2]$.	(C) $]\arctan(2/3), \arctan 2]$.
(B) $]\arctan(2/3), \pi/2[$.	(D) $[\arctan(2/3), \arctan 2]$.

Se uno osserva che la funzione si annulla per $x = 0$, e c'è una sola risposta che ha 0 nell' immagine, non c'è altro da fare. In alternativa, se uno osserva che la funzione è continua su un intervallo chiuso e limitato, le due risposte in cui l' immmagine non ha minimo sono scartate e ne restano solo due. Ma procediamo senza astuzia: la funzione $\arctan x$ è crescente, quindi l' immagine di $[a, b]$ sarà $[\arctan a, \arctan b]$ e basta trovare l' immagine $[a, b]$ di $|2x/(1+x)|$. Osserviamo che su $[-1/2, 1/2]$ la funzione $2x/(1+x)$ ha il segno di x , ha derivata

$$\frac{2 + 2x - 2x}{(1+x)^2} > 0$$

ed è quindi strettamente crescente, pertanto su $[-1/2, 0]$ va da -2 a 0 e su $[0, 1/2]$ va da 0 a $2/3$. Allora il suo valore assoluto ha su $[-1/2, 0]$ immagine $[0, 2]$ e su $[0, 1/2]$ immagine $[0, 2/3]$. In conclusione $|2x/(1+x)|$ ha su $[-1/2, 1/2]$ immagine $[0, 2]$ e la funzione proposta ha immagine $[\arctan 0, \arctan 2] = [0, \arctan 2]$.

Esercizio 4. Aldo è un dilettante che partecipa a una corsa a ostacoli. In totale ci sono 8 ostacoli, ma Aldo non è molto bravo, e ad ogni ostacolo ha una probabilità di $1/9$ di inciampare. Qual è la probabilità che arrivi al traguardo senza cadute?

(A) $8^8/9^8$.	(C) $8!/9!$.
(B) $8/9$.	(D) $16/72$.

Occorre che abbia superato indenne il primo ostacolo (e fin qui la probabilità è $8/9$), dopo di che deve aver superato anche il secondo (e fin qui la probabilità è $8/9$ degli $8/9$ precedenti) e così via per gli altri 6 ostacoli, e arriverà al traguardo con probabilità $(8/9)\cdot(8/9)\cdots(8/9)=(8/9)^8$.

Esercizio 5. Sia S l' insieme delle soluzioni della disequazione $|x^2+3x|\le 3+x$. Allora:

(A) $[0,1/3]\subset S$.	(C) S è un intervallo.
(B) $[-3,-1]\subset S$.	(D) $3\in S$.

La disequazione equivale a

$$\begin{cases} x^2+3x\le 3+x \\ x^2+3x\ge -3-x \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x-3\le 0 \\ x^2+4x+3\ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -3\le x\le -1 \\ x\le -3 \text{ oppure } x\ge -1 \end{cases}$$
$$\iff [x=-3 \text{ oppure } -1\le x\le 1]$$

e la sola risposta esatta è che $[0,1/3]\subset S$.

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la serie $\sum_n n^{5-\alpha-2\alpha^2}$

(A) converge se $\alpha>3/2$.	(C) converge se $\alpha<-3/2$.
(B) diverge negativamente se $-2\le\alpha<0$.	(D) è indeterminata per almeno un valore di α .

È una serie armonica generalizzata, $\sum 1/n^{2\alpha^2+\alpha-5}$, che converge se e solo se

$$2\alpha^2+\alpha-5>1 \iff 2\alpha^2+\alpha-6>0 \iff [\alpha<-2 \text{ oppure } \alpha>3/2]$$

e diverge positivamente per $-2\le\alpha\le 3/2$.

Esercizio 7. La successione $\dfrac{3^{1/n}-2^{1/n}}{\log_e n-\log_e(n+5)}$ ha limite

(A) $\dfrac{\log_e 2-\log_e 3}{5}$.	(C) $-\dfrac{3/2}{\log_e 5}$.
(B) $\dfrac{\log_e(3/2)}{5}$.	(D) 0 .

Scriviamo

$$\begin{aligned} 3^{1/n} - 2^{1/n} &= 2^{1/n}\big((3/2)^{1/n} - 1\big) = 2^{1/n}\big(\, e^{(1/n)\log(3/2)} - 1\big) \\ &= 2^{1/n}\,\frac{e^{(1/n)\log(3/2)} - 1}{(1/n)\log(3/2)} \cdot \frac{\log(3/2)}{n} \end{aligned}$$

e

$$\log n - \log(n+5) = -\log\frac{n+5}{n} = -\log\big(1 + (5/n)\big) = -\frac{\log\big(1+(5/n)\big)}{5/n} \cdot \frac{5}{n}\ ,$$

quindi grazie ai limiti noti

$$\frac{3^{1/n} - 2^{1/n}}{\log n - \log(n+5)} = -\frac{\log(3/2)}{5} \cdot \frac{2^{1/n}\,\frac{e^{(1/n)\log(3/2)} - 1}{(1/n)\log(3/2)}}{\frac{\log\big(1+(5/n)\big)}{5/n}} \to -\frac{\log(3/2)}{5} = \frac{\log 2 - \log 3}{5}\ .$$
