Risoluzione del compito n. 7 (Luglio 2024)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$\boldsymbol{z + z^2 + \bar{z}^3 + \bar{z}^3 z = 0}$$

specificando chiaramente quante sono.

L'equazione si riscrive

$$0 = z + z^2 + \bar{z}^3 + \bar{z}^3 z = z(1+z) + \bar{z}^3(1+z) = (1+z)(z+\bar{z}^3) ,$$

perciò o $1 + z = 0$, e troviamo la soluzione $z = -1$, o $z + \bar{z}^3 = 0$. Intanto

$$z = -\bar{z}^3 \Rightarrow |z| = |-\bar{z}^3| = |z|^3 \iff |z|(1 - |z|^2) = 0$$

perciò o $|z| = 0$, e abbiamo la seconda soluzione, o $|z| = 1$. Ma allora moltiplicando l'equazione $-\bar{z}^3 = z$ per $\bar{z}$

$$-\bar{z}^4 = z\bar{z} = |z|^2 = 1 \iff \bar{z}^4 = -1 \iff z^4 = \overline{-1} = -1$$

e le ultime quattro soluzioni sono le radici quarte di -1 . In totale abbiamo sei soluzioni,

$$0 , \quad -1 , \quad \frac{1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}} , \quad \frac{-1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}} .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \log(2\,e^x - 1) - 2\,e^x + 3$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Calcolate la derivata di f e determinatene gli intervalli di monotonia.**

c) **Trovate il numero degli zeri di f e gli estremi di f .**

d) **Calcolate la derivata seconda di f e determinatene gli intervalli di convessità e/o concavità.**

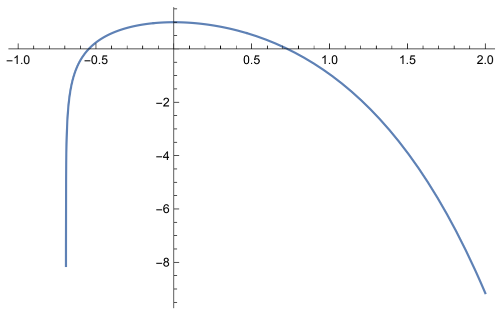
e) **Disegnate il grafico di f .**

La funzione è definita quando l'argomento del logaritmo è positivo, quindi da

$$2\,e^x - 1 > 0 \iff e^x > \frac{1}{2} \iff x > \log\frac{1}{2} = -\log 2$$

ricaviamo che il dominio di f è la semiretta $]-\log 2, +\infty[$. Poiché inoltre $(2\,e^x - 1) \to 0^+$ se $x \to -(\log 2)^+$, otteniamo che $f(x) \to -\infty$ se $x \to -(\log 2)^+$. Per calcolare il limite a $+\infty$ osserviamo che $\log t/t \to 0$ per $t \to +\infty$, quindi

$$f(x) = \log(2\,e^x - 1) - (2\,e^x - 1) + 2 = \Big[\frac{\log(2\,e^x - 1)}{2\,e^x - 1} - 1\Big](2\,e^x - 1) + 2 \to -\infty\,.$$



Osserviamo ora che

$$f'(x) = \frac{4(1 - e^x)\,e^x}{2\,e^x - 1}\,.$$

Dal segno del fattore $1 - e^x$, otteniamo che $f'(x) > 0$ se $-\log 2 < x < 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ se $x > 0$, dunque f è strettamente crescente su $]-\log 2, 0]$ e strettamente decrescente su $[0, +\infty[$. Dato poi che f è continua, dai limiti di cui sopra, ed essendo $f(0) = \log 1 - 2 + 3 = 1$, otteniamo che f ha due zeri (uno negativo ed uno positivo), non è limitata inferiormente ($\inf f = -\infty$) ed ha massimo, $\max f = f(0) = 1$.
Per calcolare la derivata seconda di f , è

$$f''(x) = \frac{4}{(2\,e^x - 1)^2}\,(-2\,e^{2x} + 2\,e^x - 1)\,e^x\,,$$

ma il primo fattore è sempre positivo nel dominio di f , e il polinomio $-2t^2 + 2t - 1$ ha primo coefficiente e discriminante negativi, quindi è sempre negativo ed f ha derivata seconda negativa in tutto il dominio, dunque f è strettamente concava su $]-\log 2, +\infty[$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \log(1 - 2x^2)$ e $g(x) = \operatorname{sen}(1 - \cos(2x))$.
a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.
b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.
c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $f(x) + g(x)$.
d) Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x) + \alpha\, x^4}{x^6}$.

Osserviamo che le funzioni f e g sono entrambe pari, quindi i loro polinomi di Taylor hanno tutti i coefficienti dei monomi di grado dispari uguali a zero. Dato che $\log(1-t) = -(t + t^2/2 + t^3/3) + o(t^3)$, con $t = 2x^2$ risulta

$$f(x) = -\Big(2x^2 + \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{3}\Big) + o((2x^2)^3) = -2x^2 - 2x^4 - \frac{8x^6}{3} + o(x^6)\ .$$

Dallo sviluppo al sesto ordine di $\cos t$, dove $4! = 24$ e $6! = 720$, con $t = 2x$ ricaviamo

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} + o(t^6) \Longrightarrow 1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\ .$$

Dato che $1 - \cos(2x)$ è un infinitesimo di ordine due, basta lo sviluppo al terzo ordine $\operatorname{sen} y = y - y^3/6 + o(y^3)$, con $y = 1 - \cos(2x)$ e dunque $o(y^3) = o(x^6)$, per ricavare:

$$g(x) = \operatorname{sen}(1-\cos(2x)) = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \frac{4x^6}{45} + o(x^6) - \frac{(2x^2)^3}{6} = 2x^2 - \frac{2x^4}{3} - \frac{56x^6}{45} + o(x^6)\ .$$

Ma allora otteniamo:

$$f(x) + g(x) = -\frac{8x^4}{3} - \frac{176x^6}{45} + o(x^6) = -\frac{8x^4}{3} + o(x^4)\ ,$$

dunque $f + g$ è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-8x^4/3$. Infine,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x) + \alpha\, x^4}{x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha - 8/3)x^4 - 176x^6/45}{x^6} = \lim_{x\to 0} \Big((\alpha - 8/3)x^{-2} - \frac{176}{45}\Big)$$

e dunque il limite richiesto vale $-\infty$ se $\alpha < 8/3$, vale $+\infty$ se $\alpha > 8/3$, mentre vale $-176/45$ se $\alpha = 8/3$.

PROBLEMA 4

Siano $\boldsymbol{a_n = \int_{1/n^2}^{1/n} \log(1/x)\,dx\,,\ \ b_n = \int_{1/n^2}^{1/n} \frac{\log(1/x)}{1+x^{20}}\,dx\,.}$

a) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n)\,.}$

b) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} n^4(a_n - b_n)\,.}$

c) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} nb_n\,.}$

Intanto osserviamo che $0 < 1/n^2 \le x \le 1/n \le 1$, quindi $\log(1/x) = -\log x \ge 0$; abbiamo

$$a_n - b_n = \int_{1/n^2}^{1/n} \log\frac{1}{x}\cdot\frac{x^{20}}{1+x^{20}}\,dx = \int_{1/n^2}^{1/n} \frac{-x^{20}\log x}{1+x^{20}}\,dx$$

e osserviamo che la funzione integranda è positiva, ma $x\log x \to 0$ per $x\to 0^+$, quindi la funzione $x\log x$ è limitata per $0 < x \le 1$, diciamo $|x\log x| \le M$. Allora

$$|a_n - b_n| = a_n - b_n \le \int_{1/n^2}^{1/n} M\frac{x^{19}}{1+x^{20}}\,dx \le M\int_0^{1/n} x^{19}\,dx \le \frac{M}{20}\cdot\frac{1}{n^{20}} \to 0\,.$$

Da questa disuguaglianza segue pure che $n^4(a_n - b_n) \to 0$, a che $n(a_n - b_n) \to 0$. Se riusciamo a calcolare $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = \ell$, avremo che

$$nb_n = na_n + (nb_n - na_n) \to \ell + 0 = \ell\,.$$

Ora,

$$\begin{aligned} na_n &= n\int_{1/n^2}^{1/n} \log(1/x)\,dx = -n\int_{1/n^2}^{1/n} \log x\,dx = -n\Big[x\log x - x\Big]_{1/n^2}^{1/n} \\ &= -\log\frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n}\log\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \to +\infty \end{aligned}$$

per cui $\ell = +\infty$ e anche $nb_n \to +\infty$.

Esercizio 1. Se $\begin{cases} \bar z(z+\mathrm{i}w)=1 \\ \bar z = z+\mathrm{i}w+2\mathrm{i} \end{cases}$ allora $z+\mathrm{i}w$ è uguale a

(A) $-\mathrm{i}$.

(B) $1+\mathrm{i}$.

(C) $1-2\mathrm{i}$.

(D) 0.

Conviene chiamare $q=z+\mathrm{i}w$ e $p=\bar z$ così il sistema diventa

$$pq=1\,,\quad p=q+2\mathrm{i}$$

e dobbiamo trovare q. Ma sostituendo p nella prima equazione questa diventa

$$(q+2\mathrm{i})q=1 \iff q^2+2\mathrm{i}q-1=0 \iff (q+\mathrm{i})^2=0 \iff q=-\mathrm{i}\,.$$

Esercizio 2. Sette studenti scrivono ciascuno un numero a caso fra 1 e 3. Qual è la probabilità che abbiano scritto tutti lo stesso numero?

(A) $1/3^6$.

(B) $1/\binom{7}{3}$.

(C) $3/7$.

(D) $3!/3^7$.

I casi possibili sono $3\cdot 3\cdots = 3^7$. I casi favorvoli sono solo tre (tutti scrivono 1, o tutti 2 oppure 3), e la probabilità è $1/3^6$.

Esercizio 3. Quale fra queste uguaglianze è corretta?

(A) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \frac{1}{2}\log_{\mathrm{e}} 2$.

(B) $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \frac{2}{\mathrm{e}}-1$.

(C) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\cos 2-\cos 1$.

(D) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = 0$.

Scartiamo subito la risposta relativa a $(\operatorname{sen} x)/x$, che è noto che non si può integrare elementarmente; in ogni caso la funzione integranda è positiva, mentre $\cos 2 < 0$ e $\cos 1 > 0$. Anche l'integrale di $x\cos x$ sarà certamente negativo, e restano solo due risposte da controllare:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx = \Big[-\log\cos x\Big]_0^{\pi/4} = -\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\log 2}{2}\,,$$

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx = \Big[(-x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1 = 1-\frac{2}{\mathrm{e}}\,.$$

Esercizio 4. Dato $\alpha\in\mathbb{R}$, l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log_{\mathrm{e}}(x+1)-\log_{\mathrm{e}} x}{1-x\operatorname{sen}(1/x)}\,x^{\alpha}\,dx$

(A) converge se $\alpha<-2$.

(B) non esiste per qualche valore di α.

(C) è negativo per almeno un valore di α.

(D) diverge positivamente se $\alpha\ge -3$.

Dato che $\operatorname{sen} t < t$ per ogni $t > 0$, per $x \geq 1$ abbiamo $\operatorname{sen}(1/x) < 1/x$ e dunque $x \operatorname{sen}(1/x) < 1$, da cui ricaviamo che il denominatore $1 - x \operatorname{sen}(1/x)$ è positivo per ogni $x \geq 1$. Inoltre per la monotonia del logaritmo anche il numeratore $\log_{\mathrm{e}}(x+1) - \log_{\mathrm{e}} x$ è positivo per ogni $x \geq 1$. Quindi la funzione $f(x) = \dfrac{\log(x+1) - \log x}{1 - x \operatorname{sen}(1/x)}$ è continua e positiva su $[1, +\infty)$, per cui l'integrale (generalizzato) o converge (ad un numero positivo) o diverge positivamente. Inoltre, posto $t = 1/x$ risulta $t \to 0^+$ se $x \to +\infty$ e per il limite fondamentale del logaritmo

$$\log(x+1) - \log x = \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \log(1+t) \sim t \;.$$

Analogamente, partendo dallo sviluppo di Taylor all'ordine 3 di $\operatorname{sen} t$, scriviamo

$$1 - x \operatorname{sen}(1/x) = \frac{1}{t}\,(t - \operatorname{sen} t) = \frac{1}{t}\,(t^3/6 + o(t^3)) = t^2/6 + o(t^2) \;.$$

Con queste informazioni, per $x \to +\infty$ otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1/x}{1/(6x^2)} = 6x \quad \Rightarrow \quad f(x)\, x^{\alpha} \sim 6x^{\alpha+1} = \frac{6}{x^{-(\alpha+1)}} \;.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale converge se e solo se

$$-(\alpha+1) > 1 \iff \alpha < -2 \;,$$

mentre diverge positivamente se e solo se

$$-(\alpha+1) \leq 1 \iff \alpha \geq -2 \;.$$

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log_{\mathrm{e}}(x^2 + 2x - 3) \leq \log_{\mathrm{e}}(9 + 3x)$. Allora:

(A) $]1, 4[\subset S$.

(B) $]-2, 3[\subset S$.

(C) $1 \in S$.

(D) S è un intervallo chiuso.

Il polinomio $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ è positivo se e solo se $x < -3$ o $x > 1$, mentre $9 + 3x > 0$ se e solo se $x > -3$. Quindi entrambi i logaritmi esistono se e solo se $x > 1$. Dalla monotonia del logaritmo, posto $x > 1$ la disequazione è equivalente a

$$(x^2 + 2x - 3) \leq (9 + 3x) \iff x^2 - x - 12 \leq 0 \iff (x+3)(x-4) \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 4 \;.$$

Quindi otteniamo che $S =]1, 4]$, da cui segue la risposta corretta $]1, 4[\subset S$, mentre le altre sono false, in quanto $]-2, 3[\setminus S \neq \varnothing$, $1 \notin S$ ed S non è un intervallo chiuso.

Esercizio 6. La retta tangente il grafico della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos(2x)$ in corrispondenza del punto $(\pi/6,\ f(\pi/6))$ ha equazione:

(A) $\sqrt{3}x + 4y = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1\,.$

(B) $\sqrt{3}x + 4y = 1 - \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}\,.$

(C) $y - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\Big(x - \dfrac{\pi}{6}\Big)\,.$

(D) $4y - 1 = 0\,.$

Abbiamo $f(\pi/6) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$, mentre

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos(2x) - 2\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(2x) \quad \Rightarrow \quad f'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} - 2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$$

Dalla formula $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = \pi/6$ otteniamo dunque

$$y = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\Big(x - \frac{\pi}{6}\Big) \iff 4y = 1 - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\,,$$

dove abbiamo moltiplicato ambo i membri per 4, da cui otteniamo l'unica risposta corretta

$$\sqrt{3}x + 4y = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1\,.$$

Esercizio 7. La successione $\big(\sqrt[n]{n!} + 2n\big)\operatorname{sen}\dfrac{1}{3n}$ ha limite

(A) $\dfrac{2\,\mathrm{e}+1}{3\,\mathrm{e}}\,.$

(B) $\big(3\,\mathrm{e}\big)^{-1}\,.$

(C) $\dfrac{2}{3}\,.$

(D) $+\infty\,.$

Dalla formula di Stirling ricaviamo

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \Big(\frac{n!}{n^n}\Big)^{1/n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt[n]{n!} + 2n}{n} \to \frac{1}{\mathrm{e}} + 2 = \frac{2\,\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}$$

mentre dal limite fondamentale del seno

$$n\operatorname{sen}\frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\,\frac{\operatorname{sen}(1/(3n))}{1/(3n)} \to \frac{1}{3}$$

e dunque

$$\big(\sqrt[n]{n!} + 2n\big)\operatorname{sen}\frac{1}{3n} = \frac{\sqrt[n]{n!} + 2n}{n}\cdot n\operatorname{sen}\frac{1}{3n} \to \frac{2\,\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2\,\mathrm{e}+1}{3\,\mathrm{e}}\,.$$