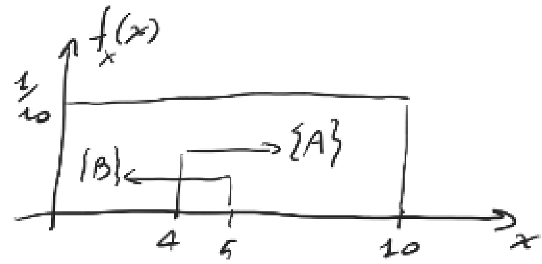
Soluzioni_ex_04

1)

DETTA X L'ASCISSA DEL PUNTO DI ROTTURA (V.A.) MISURATA A PARTIRE DALL'ESTREMO SINISTRO, LA DENSITÀ DI PROBABILITÀ DI X SI PUÒ ASSUMERE UNIFORME FRA $\emptyset$ E 10 CM: LA LUNGHEZZA DEL PEZZO DI SINISTRA



È QUINDI UGUALE A X E LA LUNGHEZZA DEL PEZZO DI DESTRA È UGUALE A $(10-x)$.

QUINDI DETTI: $A = \{\text{LUNGHEZZA PEZZO SX} > 4 \text{ CM}\} = \{X > 4\}$

$B = \{ \quad " \qquad " \ \text{DX} > 5 \text{ CM}\} = \{10 - X > 5\}$

DA CUI LE PROBABILITÀ SEGUENTI CHE SI CALCOLANO IMMEDIATAMENTE DATA L'UNIFORMITÀ:

$$P(A) = P(X > 4) = \frac{6}{10}$$

$$P(B) = P(10 - X > 5) = P(X < 5) = \frac{1}{2}$$

E INFINE LA PROBABILITÀ RICHIESTA:

$$P(A, B) = P\{(X > 4), (X < 5)\} = P\{4 < X < 5\} = \frac{1}{10}$$

POICHÉ È: $P(A, B) \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

I DUE EVENTI <u>NON</u> SONO INDIPENDENTI.

2)

DALLA DESCRIZIONE DEL PROBLEMA SI PUÒ ASSUMERE CHE LO SPAZIO DEGLI ESITI DELL'ESPERIMENTO SIA CONTINUO E UNIFORME NELL'INTERVALLO $[\emptyset, 10]$.
LA PROBABILITÀ p CHE PIAZZANDO UN SOLO PUNTO ESSO CADA IN $[\emptyset, 2]$ SI PUÒ SCRIVERE : $p = \frac{2-\emptyset}{10-\emptyset} = \frac{1}{5}$

a) IL PROBLEMA È DI PROVE RIPETUTE IN CUI SI CERCA LA PROBABILITÀ DI 2 SUCCESSI (DI PROB. p) SU 5 PROVE: QUINDI È (DETTA P_A LA PROBABILITÀ CERCATA):

$$P_A = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^{5-2} = 10 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{64}{125} \simeq 0,2$$

b) IN QUESTO CASO, DETTA P_B LA PROBABILITÀ CERCATA, SI HA:

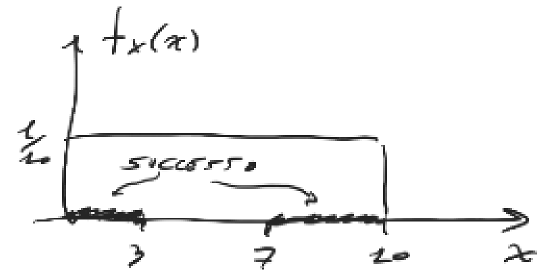
$$P_B = \sum_{i=2}^{5} \binom{5}{i} p^i (1-p)^{5-i} = 1 - P\{\emptyset \text{ PUNTI IN } [\emptyset, 2]\} - P\{1 \text{ PUNTO IN } [\emptyset, 2]\} =$$

$$= 1 - (1-p)^5 - 5 \cdot p(1-p)^4 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5 - 5 \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 0,26$$

3)

SI TRATTA DI UN PROBLEMA DI PROVE RIPETUTE DOVE IL SINGOLO ESPERIMENTO CONSISTE NELLA SCELTA A CASO DI UN PUNTO SU UN BASTONCINO E DELLA SUA ROTTURA.
IL SUCCESSO È COSTITUITO DALL'EVENTO $A = \{$ UNA DELLE DUE PARTI OTTENUTE HA LUNGHEZZA MINORE DI 3 CM $\}$.
DETTA X LA V. A. "ASCISSA DEL PUNTO DI ROTTURA MISURATA A PARTIRE DA UN'ESTREMITÀ", SI PUÒ ASSUMERE $f_X(x)$

UNIFORME FRA Ø E 10 CM COME IN FIGURA.



L'EVENTO "SUCCESSO" SI PUÒ ESPRIMERE IN QUESTO MODO:

$A = \{ (\emptyset < X < 3) \cup (7 < X < 10) \}$

DA CUI: $p \doteq P(A) = 2 \cdot \frac{3}{10} = 0{,}6$

LA PROBABILITÀ CHE DEI 10 PEZZI OTTENUTI DALLE 5 RIPETIZIONI DELL'ESPERIMENTO DUE SOLI SIANO DI LUNGHEZZA MINORE DI 3 CM EQUIVALE ALLA PROBABILITÀ P DI AVERE 2 SUCCESSI SU 5 PROVE, OSSIA:

$$P = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 \cdot 0{,}6^2\, 0{,}4^3 \simeq 0{,}23$$

N.B.: SI OSSERVI CHE OGNI ROTTURA DI BASTONCINO DÀ AL MASSIMO UN PEZZO DI LUNGHEZZA MINORE DI 3 CM.

5)

SI DEFINISCONO I SEGUENTI EVENTI:

A = { IL LOTTO SCELTO PROVIENE DALL'IMPIANTO A }

B = { " " " " " B }

C = { TRE MOTORI DEL LOTTO SCELTO SONO DIFETTOSI }

SI CERCANO LA PROBABILITÀ $P(A/C)$ E $P(B/C) = 1 - P(A/C)$

SI HA (BAYES):

$$P(A/C) = \frac{P(C/A) \cdot P(A)}{P(C)}$$

IN MANCANZA DI ALTRE INDICAZIONI SI PUÒ ASSUMERE CHE IL LOTTO SCELTO POSSA PROVENIRE DA A O DA B CON UGUALE PROBABILITÀ, OSSIA: $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

SIANO INOLTRE $p_A = 0,03$ E $p_B = 0,01$ LE PROBABILITÀ (DATE) CHE UN MOTORE ESCA DIFETTOSO DAI DUE IMPIANTI, RISPETTIVAMENTE. SI PUÒ QUINDI SCRIVERE (PROVE RIPETUTE):

$$P(C/A) = \binom{100}{3} p_A^3 (1-p_A)^{97} = 161700 \cdot 2,7 \cdot 10^{-5} \cdot 0,052 \simeq 0,227$$

E ANCHE (FATTORIZZAZIONE):

$$P(C) = P(C/A) \cdot P(A) + P(C/B) \cdot P(B) = 0,227 \cdot \frac{1}{2} + 0,061 \cdot \frac{1}{2} \simeq 0,144$$

DOVE SI È FATTO USO DEL SEGUENTE RISULTATO:

$$P(C/B) = \binom{100}{3} p_B^3 (1-p_B)^{97} = 161700 \cdot 10^{-6} \cdot 0,377 \simeq 0,061$$

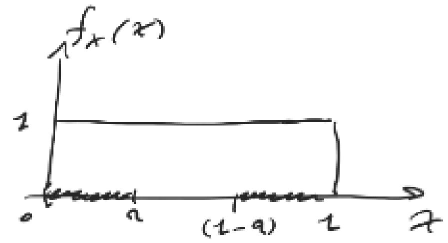
SI HANNO INFINE LE DUE PROBABILITÀ CERCATE:

$$P(A/C) = \frac{0,227 \cdot \frac{1}{2}}{0,144} \simeq 0,788 \quad , \quad P(B/C) = 1 - P(A/C) \simeq 0,212$$

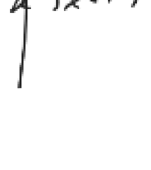
6)

a) SI CHIEDE DI CALCOLARE LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO CONGIUNTO:

$$\{(X < a), [(1-x) < a]\} = \{(X < a), (X > (1-a))\}$$

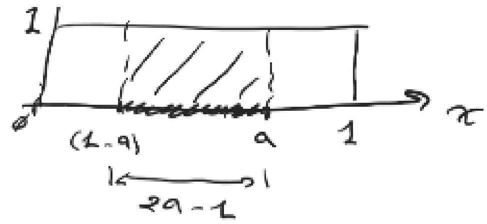


I SINGOLI EVENTI SONO RAPPRESENTATI DAI SEGMENTI A TRATTO SPESSO IN FIGURA. È EVIDENTE CHE PER $0 < a < \frac{1}{2}$ I DUE EVENTI SONO DISGIUNTI E LA PROBABILITÀ CERCATA È NULLA. NEL CASO $\frac{1}{2} < a < 1$ L'EVENTO INTERSEZIONE È $\{(1-a) < X < a\}$ RAPPRESENTATO DAL SEGMENTO A TRATTO SPESSO NELLA FIGURA SOTTO



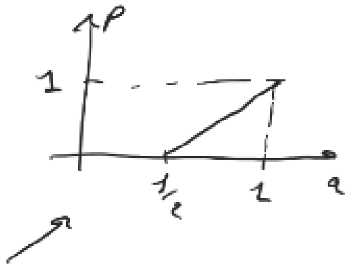
IN QUESTO CASO LA PROBABILITÀ

IN QUESTO CASO LA PROBABILITÀ CERCATA È UGUALE ALL'AREA TRATTEGGIATA QUINDI IN DEFINITIVA:



$$P = P\{(X<a),[X>(1-a)]\} =$$

$$= \begin{cases} \emptyset & \text{PER } \emptyset < a < 1/2 \\ P\{(1-a)<X<a\} = (2a-1) & \text{PER } 1/2 < a < 1 \end{cases}$$



TALE PROBABILITÀ È RAPPRESENTATA IN FIGURA IN FUNZIONE DI a.

b) GLI EVENTI $\{X<a\}$ E $\{X>(1-a)\}$ SONO INDIPENDENTI SE LA PROBABILITÀ DELLA LORO INTERSEZIONE, TROVATA AL PUNTO PRECEDENTE, RISULTA UGUALE AL PRODOTTO DELLE SINGOLE PROBABILITÀ CHE SONO (PRIMA FIGURA):

$$P\{X<a\} = P\{X>1-a\} = a$$

SI CHIEDE QUINDI SE ESISTA UN VALORE DI $\emptyset < a < 1$ TALE CHE:

$$a \cdot a = (2a-1) \quad \text{OSSIA} \quad a^2 - 2a + 1 = \emptyset$$

OSSIA ANCORA $(a-1)^2 = \emptyset$

QUESTA È VERIFICATA SOLO PER $a=1$, QUINDI <u>NON ESISTE ALCUN VALORE DI a</u> NELL'INTERVALLO $(\emptyset, 1)$ CHE RENDA INDIPENDENTI GLI EVENTI INDICATI.