

Contents

1	Funzioni e disequazioni	1
	Funzioni astratte	1
	Composizione di funzioni	1
	Funzioni reali	1
	Funzioni monotone	1
	Funzioni simmetriche	2
	Equazioni e disequazioni irrazionali	2
	Valore assoluto	3
2	Insiemi numerici	5
	Relazioni di equivalenza e ordine	5
	Relazioni di equivalenza	5
	Relazioni di ordine	5
	I numeri reali	6
	Assiomi algebrici	6
	Assioma di Dedekind	6
	Retta reale estesa e intervalli	7
	I numeri razionali	7
	La proprietà di Dedekind non vale sui razionali	7
	Densità dei razionali	8
	Estremo superiore	8
	Teorema di esistenza dell'estremo superiore	8
	Proprietà di Archimede	9
	Caratterizzazioni	9
	Estremi di funzioni	10
	I numeri complessi	11
	Forma algebrica	11
	Coniugato e modulo	11
	Piano di Gauss e forma trigonometrica	12
	Operazioni in forma trigonometrica	12
	Radici complesse	13
	Equazioni complesse	14
	Teorema fondamentale dell'algebra	14
	Forma esponenziale	14
	I principi del minimo intero e di induzione	15
	Principio del minimo intero	15
	Principio di induzione	15
	Sommatorie	16
	Principio di induzione applicato ai predicati	16
	Forma equivalente del principio di induzione	17
	Calcolo combinatorio	17
	Permutazioni, disposizioni e combinazioni	17
	Disposizioni e combinazioni con ripetizioni	18
	Probabilità finita	18
	Coefficienti binomiali	19
3	Successioni	21
	Successioni monotone	21
	Estremi di successioni	22
	Limite di successioni	22
	Intorni	22
	Limite di successioni	23
	Sottosuccessioni di posto pari o dispari	24
	Predicati definitivamente veri o frequentemente veri	24
	Teorema sul limite di successioni monotone	25

Teoremi di confronto e teoremi algebrici	25
Limitatezza e permanenza del segno	25
Confronto e teorema dei carabinieri	26
Limite e valore assoluto	26
Operazioni algebriche con i limiti	27
Forme indeterminate	28
Limite del reciproco e del quoziente	29
Continuità	30
Continuità di alcune funzioni elementari	30
Composizione	31
Continuità e andamento di funzioni tipo radice	31
Limiti di successioni fondamentali	32
Limiti tipo seno e coseno	32
Successioni potenze ed esponenziali	32
Criterio del rapporto per successioni	33
Confronto fra successioni divergenti	34
Criterio della radice per successioni	34
Il numero di Nepero	34
Osservazione numerica	36
La formula di Stirling	37
Esponenziale e logaritmo	37
La funzione esponenziale	37
La funzione logaritmo	38
Funzioni esponenziali	39
Funzioni logaritmiche	39
Passaggio alla forma esponenziale	40
Il teorema di Bolzano-Weierstrass	41
Sottosuccessioni	41
Il teorema di Bolzano-Weierstrass	41
4 Serie numeriche	42
Somma di una serie	42
Condizioni di Cauchy	43
Serie a termini non negativi	44
Criteri di confronto	44
Criterio della radice per serie	45
Criterio del rapporto per serie	46
Serie a termini di segno alternato	46
5 Funzioni continue e limiti	47
Verso la definizione di limite	47
Una definizione equivalente di continuità	47
Dalla continuità al limite	47
Cenni di topologia	48
Limite di funzioni	49
Caratterizzazione sequenziale del limite	49
Limite e continuità	50
Località	50
Limite da destra e da sinistra	50
Alcuni esempi fondamentali	51
Asintoti	51
Teoremi algebrici con i limiti	51
Limite di composizione e cambio di variabile	52
Altri limiti fondamentali	54
Limite di funzioni monotone	55
Funzioni continue su intervalli	55
Permanenza del segno	55

Teorema di esistenza degli zeri	56
Teorema dei valori intermedi	56
Continuità dell'inversa	57
Iniettività e monotonia	57
Un viceversa parziale del teorema dei valori intermedi	57
Funzioni continue invertibili	57
Teorema di Weierstrass	57
Infinitesimi	59
Ordine di infinitesimo e parte principale	59
Proprietà degli "o piccoli"	60
Sviluppi di Taylor	61
Limite di quoziente di infinitesimi	63
Funzioni uniformemente continue	63
Funzioni lipschitziane	64
Il teorema di Heine-Cantor	65
6 Funzioni derivabili	66
Differenziale e derivata	66
Differenziale	66
Rapporto incrementale e derivata	66
Derivate destra e sinistra	67
Retta tangente e rette secanti	68
Derivate delle funzioni elementari	68
Funzione derivata e derivate successive	69
Operazioni con le derivate	69
Linearità dell'operatore di derivazione	69
Prodotto, reciproco, quoziente	69
Derivata della composizione	71
Derivata dell'inversa	72
Esempi fondamentali	72
Derivate di funzioni pari o dispari	74
Derivate e proprietà locali delle funzioni	74
Località della derivata	75
Monotonia e derivata	75
Punti di minimo e massimo locale	75
Il teorema di Fermat	76
I teoremi di Rolle e Lagrange	77
Il teorema di Rolle	77
Il teorema di Lagrange	77
Conseguenze del teorema di Lagrange	78
Il teorema di Cauchy	79
I teoremi di de l'Hôpital	80
Commenti sui teoremi di de l'Hôpital	81
Un corollario del teorema di de l'Hôpital	82
I teoremi di Taylor	83
Formula di Taylor con il resto di Peano	83
Esempi fondamentali	84
Sulla natura di punti critici	85
Formula di Taylor con il resto di Lagrange	85
Serie di potenze	86
Esponenziale complesso	87
Funzioni convesse	87
Insiemi convessi del piano	87
Funzioni convesse	88
Convessità e derivate	89
Rette e coni tangenti	89

7 Funzioni integrabili	90
Primitive	90
Integrale indefinito	90
Formula di integrazione per parti	91
Formula di integrazione per sostituzione	92
Sostituzioni implicite	93
Un problema di Cauchy	93
L'integrale definito	94
Il problema dell'area	94
Verso la nozione di area di sottografici	94
Funzioni integrabili secondo Riemann	96
Raffinamenti	96
Classi di funzioni integrabili	96
Integrabilità delle funzioni continue	97
Integrabilità delle funzioni monotone	97
Il metodo di esaustione di Eudosso rivisitato	98
Funzioni a gradini	98
Funzioni generalmente continue	98
Proprietà delle funzioni integrabili	99
Linearità dell'integrale	99
Teorema di confronto	99
Integrale e valore assoluto	100
Il teorema di spezzamento	100
Il teorema della media integrale	100
Verso il teorema fondamentale del calcolo	101
Integrazione su intervalli non orientati	101
La funzione integrale	102
Il teorema fondamentale del calcolo integrale	103
Conseguenze del teorema fondamentale del calcolo	104
Il teorema di Torricelli	104
Formula di integrazione per parti	104
Formula di integrazione per sostituzione	104
Integrali di funzioni simmetriche	105
Un calcolo di area	106
La funzione integrale	107
Studio qualitativo di una funzione integrale non elementare	107
Derivate di funzioni integrali	108
Regolarità di funzioni integrali	108
Un limite con funzioni integrali	109
Sviluppi di Taylor di funzioni integrali	109
8 Integrale generalizzato	111
Esempi fondamentali	111
Criterio dell'integrale per le serie	114
Definizioni	115
Criteri di confronto	116
Andamento all'infinito	117
Criterio di assoluta convergenza	118
Trasformata di Fourier	118
Modalità di svolgimento dell'esame	124
Definizioni e proprietà: solo enunciato	124
Teoremi: enunciato e dimostrazione	125