Università degli Studi di Parma - C. L. in Ingegneria I. E. T.
Analisi Matematica - Prof. Domenico Mucci
Esercizi proposti sul cap. 3 : successioni

Monotonia di successioni.

Verificate se le seguenti successioni sono monotone (o def.te monotone) e di che tipo:

$$\frac{2n+3}{n+1}\,, \qquad \frac{2(n-4)}{(n-1)(n-2)}\,, \qquad \operatorname{sen}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)\,, \qquad \cos(n^{-1})\,, \qquad \cos(\pi n)\,.$$

Estremi di successioni.

Trovate l'estremo superiore e inferiore di ognuna delle successioni di cui sopra, determinando se sono massimo e/o minimo.

Limite di successioni.

Usando i teoremi algebrici e di confronto, calcolate (se esiste) il limite delle seguenti successioni:

$$\frac{n^2-2n}{2-3n^2}\,, \qquad \frac{n^2-3n^3}{n^2-2n}\,, \qquad \frac{(-1)^n n-2}{3n-2}\,, \qquad \frac{(-1)^n n-2}{n^2-3}\,.$$

Usando ora anche le proprietà delle funzioni continue, calcolate (se esiste) il limite delle seguenti successioni:

$$\frac{2(n-4)}{(n-1)(n-2)}\,, \quad \operatorname{sen}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)\,, \quad \cos(n^{-1})\,, \quad \cos(\pi n)\,, \quad \Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)\cdot\frac{1/n+5+\operatorname{sen} n^2}{1/n^2-n+\cos n}\,.$$

Calcolate, se esiste, il limite delle seguenti successioni contenenti radici:

$$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\,, \qquad \sqrt{2n+1}-\sqrt{n}\,, \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\,,$$
$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\,, \qquad n^{2/3}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})\,.$$

Limiti di successioni fondamentali.

Usando infine i primi limiti fondamentali, calcolate i limiti delle seguenti successioni:

$$(3n^2-2n)\cdot\operatorname{sen}(1/n^2)\,, \qquad (3n^2-2n)\cdot\operatorname{sen}(1/n)\,, \qquad \frac{\operatorname{sen}(1/n^2)}{\cos(1/n)-1}\,, \qquad \frac{1+\cos(1/n)}{1/n}\,,$$

$$n\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(1/n))\,, \qquad n\cdot\tan(3/n)\,, \qquad \frac{\operatorname{sen}(n^{-1/2})}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}\,, \qquad \frac{\operatorname{sen}^2(3/n)-1/n^2}{\cos(2/n)-1}\,,$$

Limiti di successioni con potenze, radici, fattoriali:

$$(\sqrt{n})^3 \cdot \Big(\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-2}}\Big)\,, \quad \big(3+(-1)^n\big)^n\,, \quad \sqrt[n]{2^n+n}\,, \quad \sqrt[n]{2^n+3^n}\,,$$

$$\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n+1}}\,, \quad \sqrt[n]{\frac{3^n+n^5}{n!}}\,, \quad \frac{n!}{(2n)^n}\,,$$

$$\frac{(4-\cos n)^n+n^3}{(n-2)!-2^n}\,, \quad n\frac{n!-(n+1)^3}{n^3-2(n+1)!}\,, \quad \Big(n!\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{n^n}\Big)^{1/n}.$$

Alcuni limiti dati agli esami degli anni scorsi:

$$\frac{(1/2)^{1-2n}+3^n}{4^{n-2}-3^{n-3}}\,, \quad \frac{2n+3n^{1/n}}{7n+5n^{1/n}}\,,$$

$$\frac{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}{\mathrm{sen}(5/n)}\,, \quad \frac{\sqrt[n]{2^n n^2+3^n n^3}}{\sqrt[n]{5^n n^3+3^n n^5}}\,.$$

Limiti di successioni con exp e log:

$$e^{n\,\mathrm{sen}(-3/n)}\,, \quad e^{n^2(1-\cos(5/n))}\,, \quad n^2\big(e^{\mathrm{sen}^2(1/n)}-\cos(1/n)\big)\,,$$

$$n^2[\log(n^2+3)-2\log n]\,, \quad (5n+3)\,\log\big(1+\mathrm{sen}(1/n)\big)\,,$$

$$\frac{n(e^{1/n}-1)\,\mathrm{sen}(1/n)}{\log(n+1)-\log n}\,, \quad n^2\log\Big(\cos\frac{1}{n}\Big)\,, \quad \frac{2^n}{n}\,\log(1+2^n)\,,$$

$$(3n-5n^2)\,\log\Big(\frac{n^2-3}{n^2}\Big)\,, \quad \frac{\log\big(1+2^n 3^{n^2}+e^n\big)}{n^2}\,.$$

Limiti di successioni risolti passando alla forma esponenziale:

$$\Big(1-\frac{2}{n^2}\Big)^{3n^2}\,, \quad \big(\cos(1/n)\big)^{n^2}\,, \quad \Big(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^{5/\,\mathrm{sen}(1/n)}\,, \quad n\,\big(3^{1/n}-2^{1/n}\big)\,,$$

$$\big(\cos(1/n)\big)^{\mathrm{sen}^{-2}(1/n)}\,, \quad \big(\mathrm{sen}(1/n)\big)^{\cos^{-2}(1/n)}\,, \quad \big[\log(e+n^{-1})\big]^n\,,$$

$$\big(\cos(1/n)\big)^{n^\alpha} \quad \text{al variare del parametro } \alpha\in\mathbb{R}\,.$$