Risoluzione del compito n. 4 (Febbraio 2024)

PROBLEMA 1

Trovate tutte le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z^3 + (\sqrt{3} - \mathrm{i})w^2 + z = 0 \\ \bar{w} = \mathrm{i}\bar{z} \, . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione ricaviamo $w = -\mathrm{i}z$, dunque $w^2 = -z^2$, che sostituito nella prima ci dà l'equazione di terzo grado in z

$$z^3 + (-\sqrt{3} + \mathrm{i})z^2 + z = 0 \iff z(z^2 + (-\sqrt{3} + \mathrm{i})z + 1) = 0 \, .$$

Se $z = 0$ risulta $w = 0$. Troviamo ora le radici $z_{1,2}$ del polinomio di secondo grado. Il suo discriminante vale

$$\Delta = (-\sqrt{3} + \mathrm{i})^2 - 4 = 3 - 1 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 4 = -2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = 4\Big(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\Big)$$

ed è il numero complesso di modulo 4 e argomento $4\pi/3$. Le sue radici quadrate hanno modulo 2 e argomento $2\pi/3$ o $5\pi/3$, dunque valgono $\pm(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$. Dalla formula risolutiva ricaviamo

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{3} - \mathrm{i} \pm (-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})}{2}$$

e dunque

$$z_1 = \frac{(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{i}}{2} \, , \quad z_2 = \frac{(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + 1)\,\mathrm{i}}{2} \, .$$

In corrispondenza, ricaviamo

$$w_1 = -\mathrm{i}z_1 = \frac{(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{i}}{2} \, , \quad w_2 = -\mathrm{i}z_2 = \frac{-(\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{3} + 1)\,\mathrm{i}}{2}$$

e dunque il sistema ha tre soluzioni: $(0, 0)$, (z_1, w_1), (z_2, w_2).

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = (x^3 + x^2 + 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio ed il segno.**

b) **Calcolate la derivata di f e determinatene gli intervalli di monotonia.**

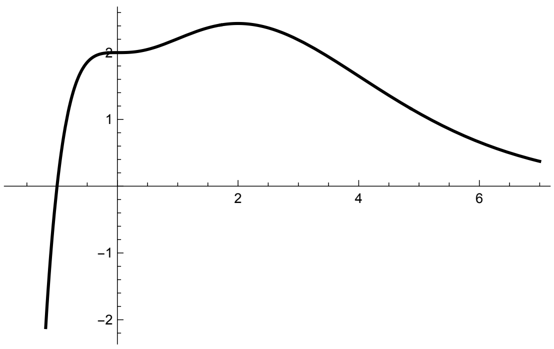
c) **Calcolate la derivata seconda di f e determinatene i punti di flesso e gli intervalli di convessità e/o concavità.**

d) **Disegnate il grafico di f .**

e) **Calcolate l'area dell' insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le f(x)\}$.**

La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e ha limite $-\infty$ per $x \to -\infty$, e dato che l'esponenziale domina sulle potenze ha limite zero per $x \to +\infty$. Inoltre, e^{-x} è sempre positivo, mentre il polinomio si annulla per $x = -1$ e si fattorizza come

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(x^2+2) \ ,$$



dunque $f(x) > 0$ se $x > -1$, $f(-1) = 0$ e $f(x) < 0$ se $x < -1$. Calcoliamo ora

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(3x^2 + 2x + 2 - x^3 - x^2 - 2x - 2) = \mathrm{e}^{-x}(-x^3 + 2x^2) = \mathrm{e}^{-x}x^2(2-x)$$

per cui $f'(x) < 0$ se $x > 2$, $f'(x) = 0$ se $x = 0$ o $x = 2$, $f'(x) > 0$ se $x < 0$ o $0 < x < 2$. Poiché f è continua su $\mathbb{R}$, ricaviamo che f è strettamente crescente su $(-\infty, 2]$ e strettamente decrescente su $[2, +\infty)$. Inoltre, risulta

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\,\mathrm{e}^{-x}(-x^3 + 2x^2) = \mathrm{e}^{-x}(-3x^2 + 4x + x^3 - 2x^2) = \mathrm{e}^{-x}(x^3 - 5x^2 + 4x) \ .$$

Dato che

$$x^3 - 5x^2 + 4x = x(x^2 - 5x + 4) = x(x-1)(x-4)$$

ricaviamo che $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, 0[\cup]1, 4[$, $f''(x) = 0$ se $x \in \{0, 1, 4\}$ e $f''(x) > 0$ se $x \in]0, 1[\cup]4, +\infty)$. Quindi f ha tre punti di flesso in corrispondenza dei punti di ascissa 0, 1 o 4, mentre f è strettamente concava su $(-\infty, 0]$ e su $[1, 4]$ ed è strettamente convessa su $[0, 1]$ e su $[4, +\infty)$. Infine, da quanto visto l'area di A è uguale all' integrale generalizzato $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$. Per calcolare una primitiva $F(x)$ di $f(x)$, possiamo integrare (tre volte) per parti. Ma da questo procedimento ricaveremmo che una primitiva è della forma

$$F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\ \mathrm{e}^{-x}\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}\,,$$

per cui è più pratico procedere a rovescio: derivando, risulta

$$F'(x) = \big(-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + (c-d)\big)\ \mathrm{e}^{-x}\ .$$

Imponendo che $F'(x) = f(x)$, e semplificando il fattore positivo e^{-x} , risulta

$$-ax^3 + (3a-b)x^2 + (2b-c)x + (c-d) = x^3 + x^2 + 2x + 2 \iff \begin{cases} -a = 1 \\ 3a - b = 1 \\ 2b - c = 2 \\ c - d = 2 \end{cases}$$

per il principio di identità dei polinomi, da cui segue a cascata che $a = -1$, $b = -4$, $c = -10$, $d = -12$, dunque $F(x) = (-x^3 - 4x^2 - 10x - 12)\ \mathrm{e}^{-x}$. In conclusione, risulta

$$\mathrm{area}(A) = \int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{-1}^{+\infty} = -F(-1) = (-1 + 4 - 10 + 12)\,\mathrm{e} = 5\,\mathrm{e}\ .$$

PROBLEMA 3

In questo esercizio tutti i coefficienti vanno ridotti ai minimi termini. Considerate le funzioni $f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{x^2}{2}\right)$ e $g(x) = \cos x \, \log(1 - x)$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 5 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $f(x) + g(x)$.**

d) **Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x) + \alpha(x^4 + x^5)}{x^4 + x^5}$.**

Dallo sviluppo al quinto ordine di $\operatorname{sen} t$, con $t = (x + x^2/2)$, ricaviamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(x + \frac{x^2}{2}\right) &= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^5 + o\left(\left(x + \frac{x^2}{2}\right)^5\right) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^5}{4}\right) + \frac{1}{120}\, x^5 + o(x^5) \\
&= x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{7x^5}{60} + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

Dato poi che $\log(1 - x) = -(x + x^2/2 + x^3/3 + x^4/4 + x^5/5) + o(x^5)$, scriviamo

$$\begin{aligned}
\cos x \, \log(1 - x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)(-1)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)\right) \\
&= -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{24} + o(x^5)\right) \\
&= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} + o(x^5) \ .
\end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) + g(x) = -\frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-x^4/4$. Infine, dato che $x^4 + x^5 = x^4 + o(x^4)$, mentre $f(x) + g(x) + \alpha(x^4 + x^5) = (\alpha - 1/4)x^4 + o(x^4)$, risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) + g(x) + \alpha(x^4 + x^5)}{x^4 + x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{(\alpha - 1/4)x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \alpha - \frac{1}{4} \ , \quad \forall \, \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

PROBLEMA 4

Motivando la risposta, calcolate al variare dell'esponente $\beta \in \mathbb{R}$ il limite

$$\boldsymbol{\ell_\beta = \lim_{x\to 0+} \frac{\displaystyle\int_0^x t^4(\,e^{t^2}-1)\,dt}{x^\beta}\,.}$$

Posto poi $a_n = \displaystyle\int_0^{1/n} t^4(\,e^{t^2}-1)\,dt$, determinate al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ il carattere della serie $\displaystyle\sum_n n^\gamma a_n$.

La funzione $f(t) = t^4(\,e^{t^2}-1)$ è continua su $\mathbb{R}$, dunque la funzione integrale

$$F(x) := \int_0^x t^4(\,e^{t^2}-1)\,dt$$

vale zero in $x = 0$ e per il teorema fondamentale del calcolo è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata $F'(x) = x^4(\,e^{x^2}-1)$. Quindi se $\beta \le 0$ il limite richiesto vale zero. Consideriamo ora il caso $\beta > 0$: il limite presenta una forma indeterminata $0/0$ e sono verificate le ipotesi del primo teorema di de l'Hôpital in quanto $Dx^\beta = \beta x^{\beta-1} > 0$ per ogni $x > 0$, dove

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{F'(x)}{\beta x^{\beta-1}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^4(\,e^{x^2}-1)}{\beta x^{\beta-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{\beta x^{\beta-5}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+o(x^2)}{\beta x^{\beta-5}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+o(x^2)/x^2}{\beta x^{\beta-7}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta < 7 \\ 1/7 & \text{se } \beta = 7 \\ +\infty & \text{se } \beta > 7\,. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi risulta $\ell_\beta = +\infty$ se $\beta > 7$, $\ell_7 = 1/7$, $\ell_\beta = 0$ se $\beta < 7$.
Da quanto sopra deduciamo che $F(x) \sim x^7$ per $x \to 0^+$, dunque $a_n = F(1/n) \sim n^{-7}$ e $n^\gamma a_n \sim n^{\gamma-7} = 1/n^{7-\gamma}$. Ma allora per il criterio del confronto asintotico concludiamo che la serie converge se $\gamma < 6$ e diverge positivamente se $\gamma \ge 6$.

Esercizio 1. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{1-2x}{2x^2+x-1} \leq 1+6x$. Allora:

(A) $S\cap]-2/3,-1/2[=\varnothing$.	(C) $[-1,-2/3]\subset S$.
(B) $[0,1]\subset S$.	(D) S è limitato superiormente.

Risolvendo l'equazione $2x^2+x-1=0$ otteniamo che la funzione razionale a primo membro esiste per $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1/2\}$, ma anche la fattorizzazione $2x^2+x-1=(x+1)(2x-1)$ del denominatore. Quindi, per $x\neq -1$ e $x\neq 1/2$, la disequazione è equivalente a

$$\frac{-(2x-1)}{(x+1)(2x-1)} \leq 1+6x \iff \frac{-1}{(x+1)} \leq 1+6x \iff \frac{6x^2+7x+2}{x+1} \geq 0 \ .$$

Dato poi che $6x^2+7x+2=(2x+1)(3x+2)$, e ricordando che $x\neq 1/2$, per la regola dei segni risulta

$$S=]-1,-2/3]\cup[-1/2,1/2[\cup]1/2,+\infty)$$

e dunque $S\cap]-2/3,-1/2[=\varnothing$, mentre S non è limitato superiormente ed entrambe le inclusioni $[0,1]\subset S$ e $[-1,-2/3]\subset S$ sono false. Se non si vede la semplificazione, si perviene alla disequazione equivalente

$$\frac{12x^3+8x^2-3x-2}{2x^2+x-1} \geq 0$$

da cui occorre trovare per tentativi una delle radici del polinomio di terzo grado a numeratore, che sono $\pm 1/2$ e $-2/3$, e riscrivere la disequazione come

$$\frac{(2x-1)(2x+1)(3x+2)}{(x+1)(2x-1)} \geq 0 \iff \frac{(2x+1)(3x+2)}{x+1} \geq 0 \ \textbf{e} \ x\neq\frac{1}{2} \ .$$

Esercizio 2. La retta tangente il grafico della funzione $f(x)=\log_{\mathrm{e}} x$ in corrispondenza del punto $(\mathrm{e}^{-2}, f(\mathrm{e}^{-2}))$ ha equazione:

(A) $y+3=\mathrm{e}^2 x$.	(C) $y=\mathrm{e}^{2x}-3$.
(B) $y=\mathrm{e}^2 x-1$.	(D) $y=-2+\mathrm{e}^{-2}(x-\mathrm{e}^{-2})$.

Abbiamo $f(\mathrm{e}^{-2})=\log(\mathrm{e}^{-2})=-2$, mentre dalla derivata $D\log x=1/x$ segue che $f'(\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^2$. Quindi, dalla formula $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, con $x_0=\mathrm{e}^{-2}$ otteniamo

$$y=-2+\mathrm{e}^2(x-\mathrm{e}^{-2}) \iff y=-2+\mathrm{e}^2x-1 \iff y+3=\mathrm{e}^2 x \ .$$

Esercizio 3. La successione $(2+3n)\log_{\mathrm{e}}\Big(\dfrac{n+5}{n}\Big)$ ha limite

(A) 15 .	(C) $+\infty$.
(B) 10 .	(D) 3 .

Per il limite fondamentale del logaritmo risulta

$$\log\Big(\frac{n+5}{n}\Big) = \log\Big(1+\frac{5}{n}\Big) \sim \frac{5}{n} \,,$$

dunque scriviamo

$$(2+3n)\,\log_{\mathrm{e}}\Big(\frac{n+5}{n}\Big) = \frac{2+3n}{n}\cdot n\,\log_{\mathrm{e}}\Big(\frac{n+5}{n}\Big) \to 3\cdot 5 = 15\,.$$

Esercizio 4. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$, l' integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^\alpha + x^4} - x^2}\,dx$

(A) converge se $\alpha > 3$.	(C) vale $\sqrt{2}-1$ se $\alpha = 4$.
(B) converge se e solo se $\alpha > 2$.	(D) non esiste per qualche valore di α .

Ricordando che $(a-b)^{-1} = (a+b)/(a^2-b^2)$ se $a+b \neq 0$ e $a-b\neq 0$, con $a = \sqrt{x^\alpha + x^4}$ e $b = x^2$ possiamo scrivere per ogni $x \geq 1$

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^\alpha + x^4} - x^2} = \frac{\sqrt{x^\alpha + x^4} + x^2}{(x^\alpha + x^4) - x^4} = \frac{\sqrt{x^\alpha + x^4} + x^2}{x^\alpha}\,.$$

Poiché dunque la funzione f è continua e positiva su $[1,+\infty)$, l' integrale (generalizzato) o converge o diverge positivamente. Inoltre, la velocità del numeratore dipende da α . Se $\alpha > 4$, per $x \to +\infty$ risulta

$$f(x) = \frac{x^{\alpha/2}\big(\sqrt{1 + x^{4-\alpha}} + x^{2-\alpha/2}\big)}{x^\alpha} \sim \frac{1}{x^{\alpha/2}}$$

e dato che $\alpha/2 > 1$, per il criterio del confronto asintotico l' integrale converge. Se $\alpha = 4$, otteniamo similmente che $f(x) \sim (\sqrt{2}+1)/x^2$ e dunque che l' integrale converge. Se invece $\alpha < 4$, scriviamo

$$f(x) = \frac{x^2\big(\sqrt{x^{\alpha-4}+1} + 1\big)}{x^\alpha} \sim \frac{2}{x^{\alpha-2}}$$

e dunque l' integrale converge se e solo se $\alpha - 2 > 1$, i.e. $\alpha > 3$, mentre diverge positivamente se e solo se $\alpha \leq 3$. Infine, per $\alpha = 4$ risulta

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{x^{-2}}{\sqrt{2}-1}\,dx = \Big[\frac{-x^{-1}}{\sqrt{2}-1}\Big]_1^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \neq \sqrt{2}-1\,.$$

Esercizio 5. L' integrale indefinito di $\operatorname{sen}(\log_{\mathrm{e}} x)$ è

(A) $\frac{1}{2}x\big(\mathrm{sen}(\log_{\mathrm{e}} x) - \cos(\log_{\mathrm{e}} x)\big) + c$.	(C) $\frac{1}{2}x\big(\mathrm{sen}(\log_{\mathrm{e}} x) + \cos(\log_{\mathrm{e}} x)\big) + c$.
(B) $-\dfrac{\cos(\log_{\mathrm{e}} x)}{x} + c$.	(D) $\dfrac{\mathrm{sen}(\log_{\mathrm{e}} x)}{x} + c$.

Calcoliamo:

$$\int \mathrm{sen}(\log x)\,dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=\mathrm{e}^t}}{=} \int \mathrm{sen}\,t \cdot \mathrm{e}^t\,dt\ ,$$

ma

$$I = \int \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,t\,dt = \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,t - \int \mathrm{e}^t \cos t\,dt =$$

$$\mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,t - \Big(\mathrm{e}^t \cos t - \int \mathrm{e}^t \cdot (-\,\mathrm{sen}\,t)\,dt\Big) = \mathrm{e}^t(\mathrm{sen}\,t - \cos t) - I$$

per cui

$$\int \mathrm{sen}\,t \cdot \mathrm{e}^t\,dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t(\mathrm{sen}\,t - \cos t) + c \underset{\substack{\uparrow \\ \mathrm{e}^t=x}}{=} \frac{1}{2}x\big(\mathrm{sen}(\log x) - \cos(\log x)\big) + c\ .$$

Esercizio 6. Le disposizioni di 23 oggetti presi a k per volta sono più delle combinazioni di 24 oggetti presi a 6 per volta. Allora

(A) $k \geq 4$.	(C) $k \neq 6$.
(B) $k < 3$.	(D) $k = 2$.

Abbiamo

$$D_{23,k} = \frac{23!}{(23-k)!} = 23 \cdot 22 \cdots (23-k+1)\ ,$$

$$C_{24,6} = \frac{24!}{6!18!} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{6 \cdot 5 \cdot 24} = 23 \cdot 22 \cdot 19 \cdot 14\ ,$$

e se vogliamo che $D_{23,k} > C_{24,6}$ si vede subito che fermarsi a $23-k+1 = 21$ non basta, mentre se $23-k+1 = 20, 19, \ldots$ la disuguaglianza è verificata, quindi serve $k \geq 4$.

Esercizio 7. Se $z = (3\mathrm{i}+1)w$ allora $(3\mathrm{i}+1)\bar{z}$ è uguale a

(A) $10\bar{w}$.	(C) $(8-6\mathrm{i})w$.
(B) $(6\mathrm{i}-8)\bar{w}$.	(D) $-10w$.

Subito

$$(3\mathrm{i}+1)\bar{z} = (3\mathrm{i}+1)(1-3\mathrm{i})\bar{w} = (1+9)\bar{w}\ .$$