Spazi Vettoriali

def Uno spazio vettoriale su un ~~campo~~ $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}, \mathbb{C}$) è un insieme V su cui sono definite la
- somma $(\forall u, v \in V,\ u+v \in V)$
- e prodotto per scalare $(\forall u \in V,\ c \in \mathbb{K},\ c \cdot u \in V)$

Devono soddisfare le seguenti propietà.

① $\exists$ elemento 0_V (vettore nullo) t.c.
$$v + 0_V = 0_V + v = v \quad \forall\ v \in V$$

② $\forall\ v \in V\ \exists\ -v \in V$ t.c. $v + (-v) = 0_V$ (Esistenza degli inversi)

$p(t) = 2t^2 + it^3$
$-p(t) = -2t^2 - it^3$

- $v + w = w + v \quad \forall\ v, w \in V$
- $(v+w)+u = v+(w+u) \quad \forall\ u, v, w \in V$
- $1 \cdot v = v \quad \forall\ v \in V \qquad 1 \in \mathbb{C}, \mathbb{R} \quad (= 1 \in \mathbb{K})$
- $(ab)c\, v = a(bc)\, v \quad \forall\ a, b, c \in \mathbb{K},\ v \in V$
- $(a+b)v = av + bv \quad \forall\ a, b \in \mathbb{K},\ v \in V$
- $a(v+w) = av + aw \quad \forall\ a \in \mathbb{K},\ v, w \in V$

Oss V s.v. su $\mathbb{K} \Rightarrow \overset{\in \mathbb{K}}{0} \cdot v = 0_V \quad \forall\ v \in V$

Esempi
- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},\ z_i \in \mathbb{C} \right\}$
- $M_{m \times n}$ a coefficienti reali o complessi è uno s.v. su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
  [Possiamo specificare $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $M_{m\times n}(\mathbb{C})$]
  [Qui il prodotto tra matrici non ha ruolo]
- L'insieme dei polinomi a coefficienti reali o complessi ($\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{C}[t]$) è uno s.v. su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- Le funzioni continue su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Sottospazi Vettoriali

È un sottoinsieme di uno s.v che è a sua volta uno s.v.

def V s.v su $\mathbb{K}$. $W \overset{\equiv W \text{ sottoinsieme di } V}{\subset} V$ è un ssv di V se:

- $0_V \in W$
- $\forall\, v, w \in W,\quad v+w \in W$
- $\forall\, v \in W,\ \forall c \in \mathbb{K},\quad cv \in W$

] Chiusura rispetto alla somma e alla moltiplicazione per scalare

[$0_V \in W$ segue dalla chiusura, MA praticamente è la prima condizione che si controlla]

Esempi ① $W^{\subset \mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R} : x_1 = 0 \right\}$ è un s.s.v di $\mathbb{R}^3$

② $W = Sol(A|0)$ è un ssv.

(Le soluzioni dei sistemi lineari omogenei sono ssv.)

$v \in Sol(A|0) \Leftrightarrow Av = 0$

$w \in Sol(A|0) \Leftrightarrow Aw = 0$

$\Rightarrow$ Se guardo $v+w \in Sol(A|0)$? Devo vedere se

$$A(v+w) \overset{?}{=} 0$$
$$\underbrace{Av}_{0} + \underbrace{Aw}_{0} = 0 \quad \checkmark$$

Stessa cosa se moltiplico per scalare.

②' Cosa succede se $W = Sol(A|b)$ con $b \neq 0$?

- Se $v \in Sol(A|b) \Rightarrow Av = b$

$w \in Sol(A|b) \Rightarrow Aw = b$

$v+w \in Sol(\quad)$? $A(v+w) = \underbrace{Av}_{b} + \underbrace{Aw}_{b} = 2b \neq b$

③ $W = \left\{ a v_1 + b v_2 \,,\ \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \\ v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$ sono s.s.v. di $\mathbb{R}^n$

④ $\mathbb{R}_n[t]$, $\mathbb{C}_n[t]$ (polinomi di grado $\leq n$)
sono un ss.v. di $\mathbb{R}[t]$, $\mathbb{C}[t]$
MA i polinomi di grado esattamente n no.
(posso imporre condizioni aggiuntive)

⑤ Matrici a traccia nulla
(E quelle con determinante nullo?)

⑥ Matrici triangolari, diagonali...

Es Sottoinsiemi che NON sono ssv.

① $W \underset{=}{\subset} \mathbb{R}^2 \ \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2^5 \right\}$ non è un ssv.

② $GL(n, \mathbb{R}) = \{$ Matrici invertibili $n \times n \}$ NON è un ssv.

A è invert, anche $-A$ è invert.
ma $A + (-A) = 0$ non invert.

③ Sia $W = \left\{ \begin{pmatrix} i x_1 \\ i x_2 \\ i x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$
è ss.v di $\mathbb{C}^3$ visto su campo $\mathbb{R}$
non è ssv di $\mathbb{C}^3$ visto su campo $\mathbb{C}$

[Il campo mi dice a chi appartengono gli scalari, non come sono fatti i vettori]

④ Le rette e i piani in $\mathbb{R}^3$ sono ssv. solo se passano per 0

(Se non passano per 0 non contengono 0 $\Rightarrow$ non sono ssv)

[retta/piano passa per 0 $\Leftrightarrow$ è la sol. di un sistema lin. omogeneo

non " " " $\Leftrightarrow$ " " sistema lin non omogeneo

Combinazioni Lineari

def V s.v su $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. $v \in V$ è combinazione lineare (C.L.) di $v_1 \_\_ v_k \in V$ se $\exists$ $c_1 \_\_ c_k$ scalari t.c.

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = \sum_{j=1}^{k} a_j v_j$$

def Dati $v_1 \_\_ v_k \in V$, lo spazio generato da $v_1 \_\_ v_k$ è lo spazio di tutte le loro combinazioni lineari

$$\mathcal{L}(v_1, \_\_ v_k) = \{\text{combinazioni lineari di } v_1 \_\_ v_k\}$$

$v_1 \_\_ v_k$ si chiamano generatori

$\mathcal{L}(v_1 \_\_ v_k)$ si dice finitamente generato se è possibili trovare un numero finito di generatori

Esempi • $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix}, \; t, s \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$

• $W = \{\text{matrici simm. } 2\times 2\} = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

<u>Oss</u> • $0_V \in \mathcal{L}(v_1 \_\_\_ v_k)$, basta prendere la CL con tutti i coeff. nulli

• $W = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\17\\-5\end{pmatrix}\right\}$ $\quad v = \begin{pmatrix}4\\15\\-5\end{pmatrix} \in W$ perché

$$v = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}2\\17\\-5\end{pmatrix}$$

$w = \begin{pmatrix}4\\15\\0\end{pmatrix} \in W$ perché $a_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}2\\17\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\15\\0\end{pmatrix}$

non è soddisfatto per nessun valore di a_1, a_2.

• $\begin{pmatrix}\pi\\e\\e\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \begin{pmatrix}\pi\\e\\e\end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix}\pi\\e\\e\end{pmatrix} = \pi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

• $\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4 = \left\{ s\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}\right\}$

$$= \left\{\begin{pmatrix}s\\t\\0\\t\end{pmatrix}, \ s,t \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_2 = x_4 \end{array}\right\}$$

• Matrici ortogonali: $A \in M_{n \times n}$ ortog $\Rightarrow \forall v \in \mathbb{R}^n$, se $v_1 \_\_ v_n$ sono le colonne di A, $\exists\ c_1 \_\_ c_n$ tc

$$v = a_1 v_1 + \qquad + a_n v_n \qquad c_i = \langle v, v_i \rangle$$

$\equiv$ Ogni $v \in \mathbb{R}^n$ è combinazione lineare delle colonne di A.

$\equiv$ Le colonne di ogni matrice ortog. sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$

Prop Sia $A \in M_{n \times n}$ invertibile $\Rightarrow$ le colonne di A sono un insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$

Domanda: Dati $v_1, v_k \in \mathbb{R}^n$, e $v \in \mathbb{R}^n$, come faccio a capire se $v \in \mathcal{L}(v_1 \ldots v_k)$?

$$v \in \mathcal{L}(v_1 \ldots v_k) \iff \exists\, c_1 \ldots c_k \text{ tc}$$

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_k v_k$$

$\iff$ il sistema

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ | \\ c_k \end{pmatrix} = v \quad \text{ha sol. con}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ es $\mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \ni \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$?

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 17 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 17 & 15 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathrm{rg} A = 2$

$\mathrm{rg}(A|b) = 3$ $\Rightarrow$ non comp.

Risposta $v \in \mathcal{L}(v_1 \ldots v_k)$, $\in \mathbb{R}^n$, $\iff$ il sistema

$$A X = v \quad \text{è compatibile}, \quad A = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$$

coefficienti.

n righe
k colonne

(dim. prop.)

Oss: se A è invertibile (che può succedere solo se $k=n$)

$\Rightarrow$ $AX = v$ ha soluzione $\forall v$, e pure unica $\neq$

le colonne di ogni matrice invertibile $A \in M_{n\times n}$ sono generatori di $\mathbb{R}^n$
e i coefficienti che determinano ogni vettore sono unici.

Generatori canonici

- $\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ $\quad e_1, e_2, \dots e_n$ generano $\mathbb{R}^n$

  e_i è il vettore in cui tutte le coordinate sono 0 tranne la coordinata i

$\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^4$: ...

- $M_{m\times n}$ $\quad \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\quad E_{ij}$, $(E_{ij})_{k\ell} = 1$ se $k=i$, $\ell=j$
  $= 0$ altrimenti

$M_{2\times 2}$ $\quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M_{2\times 3}$ $\quad E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• poly: $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$

$1, t, t^2, \dots \dots t^n, \dots$

Per generare i poly $\mathbb{R}[t]$ servono ∞ vettori

[Per generare $\mathbb{R}_n[t]$ ne bastano $n+1$]