Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 3 del 07/07/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Si definisca il concetto di indipendenza per le variabili casuali e si dica cosa ne consegue per le loro funzioni di distribuzioni e di densità di probabilità.

2. **[12 punti]** Nel piano (x,y), si consideri il dominio $\mathscr{D}$ mostrato in figura e definito come

$$\mathscr{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\}$$

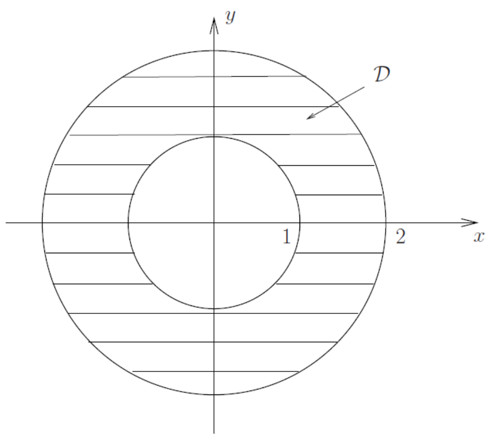

Figura 1: Dominio $\mathscr{D}$.

Si consideri una coppia di variabili aleatorie X e Y con densità di probabilità costante sul dominio $\mathscr{D}$ e nulla altrove. Si determinino le funzioni densità di probabilità marginali $f_X(x)$ ed $f_Y(y)$. Si dica se X e Y sono indipendenti oppure no.

3. **[12 punti]** Con riferimento all'esercizio precedente, si definiscano le variabili aleatorie $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ e $\Theta = \arctan 2(X,Y)$ (passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari). Si determini la densità di probabilità congiunta di R e Θ.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. La densità di probabilità congiunta $f_{XY}(x,y)$ può essere espressa come

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\text{Area}(\mathscr{D})} & (x,y) \in \mathscr{D} \\ 0 & (x,y) \notin \mathscr{D}. \end{cases}$$

Poiché Area$(\mathscr{D}) = 4\pi - \pi = 3\pi$, abbiamo

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi} & (x,y) \in \mathscr{D} \\ 0 & (x,y) \notin \mathscr{D}. \end{cases}$$

Cominciamo a calcolare la densità di probabilità marginale di X. Poiché è

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

avremo

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 2 \\ 2\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}(\sqrt{4-x^2} - \sqrt{1-x^2}) & 1 \leq |x| \leq 2 \\ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}\sqrt{4-x^2} & |x| < 1 \end{cases}$$

Per la simmetria del problema sarà

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & |y| > 2 \\ \frac{2}{3\pi}(\sqrt{4-y^2} - \sqrt{1-y^2}) & 1 \leq |y| \leq 2 \\ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{3\pi}\,dy = \frac{2}{3\pi}\sqrt{4-y^2} & |y| < 1 \end{cases}$$

X e Y non possono essere quindi indpendenti dal momento che $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ come si può facilmente verificare ad esempio per $(x,y) = (0,0)$.

3. Il dominio $\mathscr{D}$ in coordinate polari può essere espresso come

$$\mathscr{D} = \{(r,\theta) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Pertanto, $f_{R\Theta}(r,\theta) = 0$ per $0 \leq r < 1$ e per $r > 2$. Per $1 \leq r \leq 2$, fissata la coppia (r,θ), la corrispondente coppia (x,y) è

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta)\,. \end{cases}$$

Come si è visto a lezione

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = r f_{XY}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

e quindi

$$f_{R\Theta}(r,\theta) = \begin{cases} 0 & 0 \leq r < 1 \text{ e } r > 2 \\ \frac{r}{3\pi} & 1 \leq r \leq 2 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi\,. \end{cases}$$