Risoluzione del compito n. 1 (Dicembre 2022)

A dicembre 2022 si è svolta solo la parte a risposta multipla

Esercizio 1. Se $z = 2 - 3\mathrm{i}$ e $w = \dfrac{z^2 - \mathrm{i}\bar{z}}{z - |z|^2}$ allora

(A) $\Im w = 74/65$.	(C) $\Im w = 32/65$.
(B) $\Re w = -74/65$.	(D) $\Re w = -32/65$.

Abbiamo

$$z^2 - \mathrm{i}\bar{z} = 4 - 9 - 12\mathrm{i} - \mathrm{i}(2 + 3\mathrm{i}) = -2 - 14\mathrm{i}\ , \qquad z - |z|^2 = 2 - 3\mathrm{i} - (4 + 9) = -11 - 3\mathrm{i}\ ,$$

quindi

$$w = \frac{(-2 - 14\mathrm{i})(-11 + 3\mathrm{i})}{(-11 - 3\mathrm{i})(-11 + 3\mathrm{i})} = \frac{22 - 6\mathrm{i} + 154\mathrm{i} + 42}{121 + 9} = \frac{64 + 148\mathrm{i}}{130} = \frac{32}{65} + \frac{74}{65}\mathrm{i}\ .$$

Esercizio 2. Se f è continua su $\mathbb{R}$ ed $f(1) < 2 < f(3)$ allora

(A) $\log|2 - f(x)|$ non può essere definita su tutto $\mathbb{R}$.	(C) f è iniettiva su $[1, 3]$.
(B) f è monotona crescente su $[1, 3]$.	(D) f' si annulla in almeno un punto.

Per il Teorema dei valori intermedi f assume in qualche punto $c \in]1, 3[$ anche il valore 2 , ma allora $|2 - f(c)| = 0$ dunque $\log|2 - f(x)|$ non può essere definita nel punto c . Le altre risposte sono errate. Ad esempio $f(x) = x$ verifica $f(1) < 2 < f(3)$ ma f' non si annulla mai, e $f(x) = 2(x - 2)^3 - (x - 2)$ — il cui grafico è come quello di $2x^3 - x$ ma spostato a destra di 2 — verifica $f(1) < 2 < f(3)$ ma non è monotona nè iniettiva su $[1, 3]$.

Esercizio 3. Nell' intervallo $[-1, 3]$ la funzione $x^2 - 4x + 2$ ha immagine

(A) $[-2, 7]$.	(C) $[-1, 7]$.
(B) $[-7, 1]$.	(D) $[-1, 3]$.

La funzione è continua su un intervallo chiuso e limitato, quindi per il Teorema di Weierstraß ha massimo e minimo. Agli estremi la funzione vale rispettivamente 7 e -1 . Poi la derivata si annulla per $x = 2$, dove la funzione vale -2 . Per il Teorema di Fermat il massimo e il minimo si trovano fra questi valori, dunque il minimo è -2 e il massimo 7 . Dato che è una funzione continua su un intervallo, per il Teorema dei valori intermedi la sua immagine è $[-2.7]$.

Esercizio 4. Un mazzo di carte contiene 16 carte rosse e 16 nere. Qual è la probabilità che pescando 3 carte a caso siano tutte rosse?

(A) $7/62$.	(C) $5/44$.
(B) $5/31$.	(D) $3/22$.

I casi possibili sono tanti quante le scelte di 3 carte fra le 32 totali, e quelli favorevoli le scelte di 3 carte fra le 16 rosse, quindi la probabilità è

$$\frac{\binom{16}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{32 \cdot 31 \cdot 30} = \frac{7}{2 \cdot 31} \ .$$

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\log_{\mathrm{e}}(x^2 + 3x - 4) \leq \log_{\mathrm{e}}(11 + x)$. Allora:

(A) $]-5, -4[\subset S$.

(B) S è un intervallo.

(C) $1 \in S$.

(D) $]-\infty, -11[\subset S$.

Occorre che gli argomenti dei logaritmi siano positivi, e (per la monotonia del logaritmo) che l'argomento del logaritmo al secondo membro sia maggiore o uguale dell'argomento del logaritmo al primo membro, dunque che

$$0 < x^2 + 3x - 4 \leq 11 + x \iff \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0 \\ x^2 + 2x - 15 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -4 \text{ oppure } x > 1 \\ -5 \leq x \leq 3 \end{cases} ,$$

pertanto $S = [-5, -4[\cup]1, 3]$ e la sola risposta esatta è $]-5, -4[\subset S$.

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_n \left(\alpha^2 - 5\right)^n$

(A) converge se $-\sqrt{6} < \alpha < -2$.

(B) diverge positivamente se $|\alpha| \leq 2$.

(C) converge se $\alpha^2 < 6$.

(D) è indeterminata se $\alpha = \sqrt{6}$.

È una serie geometrica di ragione $\alpha^2 - 5$, che converge se e solo se

$$|\alpha^2 - 5| < 1 \iff 4 < \alpha^2 < 6 \iff [-\sqrt{6} < \alpha < -2 \text{ oppure } 2 < \alpha < \sqrt{6}] \ ,$$

diverge positivamente se e solo se

$$\alpha^2 - 5 \geq 1 \iff [\alpha \leq -\sqrt{6} \text{ oppure } \alpha \geq \sqrt{6}]$$

ed è indeterminata per

$$\alpha^2 - 5 \leq -1 \iff -2 \leq \alpha \leq 2 \ ,$$

perciò la sola risposta corretta è che converge se $-\sqrt{6} < \alpha < -2$.

Esercizio 7. La successione $\dfrac{n - \sqrt{n^2 - 3}}{\operatorname{sen}(5/n)}$ ha limite

(A) $3/10$.

(B) $3/5$.

(C) 0 .

(D) $+\infty$.

Al numeratore abbiamo una (nota) forma $\infty - \infty$ che trattiamo scrivendo

$$\frac{n - \sqrt{n^2 - 3}}{\operatorname{sen}(5/n)} = \frac{n^2 - (n^2 - 3)}{n + \sqrt{n^2 - 3}} \cdot \frac{n}{5} \cdot \frac{5/n}{\operatorname{sen}(5/n)} = \frac{3}{5} \cdot \frac{n}{n + n\sqrt{1 - 3/n^2}} \cdot \frac{5/n}{\operatorname{sen}(5/n)}$$

e il limite è $3/10$ dato che la frazione centrale tende a $1/2$.
