Risoluzione del compito n. 2 (Gennaio 2023/1)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \bar{w} + 2\mathrm{i}\bar{z} = 0 \\ w^2 z = 32\,\mathrm{i}\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione ricaviamo $w - 2\mathrm{i}z = 0$ e quindi $w = 2\mathrm{i}z$, che sostituito nella seconda ci dà

$$-4z^3 = 32\mathrm{i} \iff z^3 = -8\mathrm{i}\,.$$

Una delle radici cubiche di $-8\mathrm{i}$ è $z_0 = 2\mathrm{i}$, e le altre (un disegnino aiuta) sono

$$z_1 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}\,, \qquad z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$$

per cui ricavando i valori di $w = 2\mathrm{i}z$ abbiamo le tre soluzioni del sistema, che sono

$$\begin{cases} z_0 = 2\mathrm{i} \\ w_0 = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = -\sqrt{3} - \mathrm{i} \\ w_1 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i} \\ w_2 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

a) **Calcolatene il dominio, i limiti agli estremi del dominio, gli asintoti ed il segno.**

b) **Calcolate la derivata di f e i limiti di f' agli estremi del dominio.**

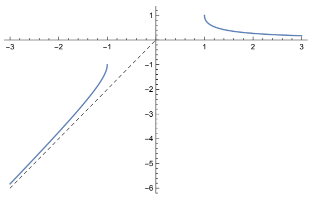
c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f.**

d) **Calcolate la derivata seconda e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f.**

e) **Disegnate il grafico di f.**

La funzione f è definita per $x^2 - 1 \geq 0 \iff [x \leq -1 \;\; \mathbf{o} \;\; x \geq 1]$, quindi il dominio è $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Dato che è continua abbiamo

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1) = -1 \,, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1 \,.$$



Non c'è alcun problema per dire che $f(x) \to -\infty$ per $x \to -\infty$; invece a $+\infty$ abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0^+ \,.$$

Non ci sono asintoti verticali, a $+\infty$ c'è l'asintoto orizzontale $y = 0$ e vediamo che a $-\infty$ c'è un asintoto obliquo: infatti (ricordiamo che per $x < 0$ è $\sqrt{x^2} = |x| = -x$)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{-\sqrt{x^2}}\right) = 1 + \lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 + 1/x^2} = 2$$

e dunque l'eventuale asintoto obliquo ha coefficiente angolare 2, e lavorando come prima

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right) = -\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

dunque l'asintoto obliquo c'è ed ha equazione $y = 2x$. Avremmo potuto arrivarci anche ricordando che $\sqrt{1 + t} = 1 + t/2 + o(t)$ e quindi per $x < 0$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2}\sqrt{1 - 1/x^2} = |x|\left(1 - 1/2x^2 + o(1/x^2)\right) = -x + 1/2x + o(1/x)$$
$$\Rightarrow f(x) = -2x - 1/2x + o(1/x) \,.$$

La derivata di f esiste certamente per $|x|>1$, ed è

$$f'(x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1-\frac{x}{|x|\sqrt{1-1/x^2}}\ .$$

Intanto osserviamo che ha limite per $x\to\pm1$, quindi

$$f'_-(-1)=+\infty\ ,\quad f'_+(1)=-\infty\ .$$

Poi subito

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=2\ ,\quad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=0\ .$$

Abbiamo anche

$$f'(x)>0\iff\sqrt{x^2-1}-x>0\iff\sqrt{x^2-1}>x\ ,$$

che per $x<-1$ è certamente vera, e per $x>1$ certamente falsa dato che $x=\sqrt{x^2}>\sqrt{x^2-1}$. Allora f cresce in $]-\infty,-1]$ e decresce in $[1,+\infty[$. La derivata seconda è

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2-1}\Big(1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\Big)=\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$$

che è positiva in tutti i punti in cui esiste, ossia f è strettamente convessa sia in $]-\infty,-1]$ che in $[1,+\infty[$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $g(x) = \log(\cos x - \operatorname{sen} x)$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Determinate per quale valore del coefficiente $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite ℓ per $x \to 0$ della funzione**

$$\frac{x^4}{f(x) + g(x) + \alpha x^3}$$

è reale e diverso da zero. Calcolate poi tale limite ℓ.

Abbiamo

$$f(x) = x \cdot \frac{1}{1-x} = x\big(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)\big) = x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4) .$$

Poi dagli sviluppi di seno e coseno abbiamo

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 1 - \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) ;$$

osserviamo che la parte tra parentesi è un infinitesimo di ordine 1, quindi $o(\cdots)^4 = o(x^4)$. Dato che $\log(1-t) = -t - t^2/2 - t^3/3 - t^4/4 + o(t^4)$ abbiamo

$$\begin{aligned} g(x) &= -\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}(\cdots)^2 - \frac{1}{3}(\cdots)^3 - \frac{1}{4}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\ &= -\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^4}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2}\right) - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= -x - x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{2x^4}{3} + o(x^4) . \end{aligned}$$

Scriviamo allora

$$f(x) + g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) \quad \Rightarrow \quad f(x) + g(x) + \alpha x^3 = \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)x^3 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

pertanto il limite proposto vale zero se $\alpha + 1/3 \neq 0$, mentre se $\alpha = -1/3$ si riduce a

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4}{x^4/3 + o(x^4)} = 3 .$$

PROBLEMA 4

Calcolate l'area della parte di piano definita da

$$\boldsymbol{\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi^2 < x < \pi^2 \,,\; 0 \le y \le \cos(\sqrt{|x|/4})\ \right\} .}$$

Dato che

$$-\pi^2 < x < \pi^2 \Rightarrow 0 \le |x|/4 < \pi^2/4 \Rightarrow 0 \le \sqrt{|x|/4} < \pi/2 \Rightarrow \cos\sqrt{|x|/4} > 0 \ ,$$

si tratta di calcolare l'area del sottografico di $\cos\sqrt{|x|/4}$ sull' intervallo $[-\pi^2, \pi^2]$; inoltre si tratta di una funzione pari perciò

$$\int_{-\pi^2}^{\pi^2} \cos\sqrt{\frac{|x|}{4}}\, dx = 2\int_0^{\pi^2} \cos\sqrt{\frac{x}{4}}\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ x=4t^2}}{=} 16\int_0^{\pi/2} t\cos t\, dt$$

visto che il cambiamento dei differenziali associato a $x = 4t^2$ è $dx = 8t\,dt$. Ricavando

$$\int t\cos t\, dt = t \operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\, dt = t\operatorname{sen} t + \cos t + c \ ,$$

abbiamo

$$\cdots = 16\Big[t\operatorname{sen} t + \cos t\Big]_0^{\pi/2} = 8\pi - 16 \ .$$

Esercizio 1. Se $z = 4\mathrm{i} - 3$ e $w = \dfrac{3\bar{z} - (1+\mathrm{i})z}{|z| + \mathrm{i}\bar{z}}$ allora

(A) $\Re w = 7/30$.	(C) $\Im w = 41/30$.
(B) $\Re w = 7/24$.	(D) $\Im w = -41/24$.

Dato che $|z|^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$ e quindi $|z| = 5$, abbiamo

$$\begin{aligned} w &= \frac{3(-3-4\mathrm{i}) - (1+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{5 + \mathrm{i}(-3-4\mathrm{i})} = \frac{-9 - 12\mathrm{i} + 3 - 4\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + 4}{5 - 3\mathrm{i} + 4} = \frac{-2-13\mathrm{i}}{3(3-\mathrm{i})} \cdot \frac{3+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} \\ &= \frac{-6 - 2\mathrm{i} - 39\mathrm{i} + 13}{3(9+1)} = \frac{7}{30} - \frac{41}{30}\mathrm{i} \,. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Quali sono i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x^2 - 3x + 2 > 0 \\ x^2 + ax + b & \text{se } x^2 - 3x + 2 \leq 0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a = 0$, $b = 1$.	(C) $a = -2$, $b = 5$.
(B) $a = -1$, $b = 0$.	(D) $a = 2$, $b = -5$.

Osserviamo che $x^2 - 3x + 2 \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 2$, quindi

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{se } x < 1 \text{ oppure } x > 2 \\ x^2 + ax + b & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Per il Teorema di località del limite, sappiamo già che la funzione è continua in tutti i punti tranne $x = 1$ e $x = 2$, indipendentemente da a e b ; resta da studiare la continuità in questi due punti. Abbiamo

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 - 1 = 2 \,, \qquad f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 + a + b \\ &\lim_{x\to 2^+} f(x) = 6 - 1 = 5 \,, \qquad f(2) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 + 2a + b \end{aligned}$$

quindi f è continua anche in questi due punti se e solo se

$$\begin{cases} 1 + a + b = 2 \\ 4 + 2a + b = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \iff a = 0 \,,\ b = 1 \,.$$

Esercizio 3. Per quale di queste coppie è vero che $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f'(x)g'(x)$ per ogni x ?

(A) $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$ e $g(x) = 7\,\mathrm{e}^{2x}$.	(C) la formula è sempre vera.
(B) $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{x}$.	(D) $f(x) = 7 \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 4\cos x$.

Si verifica subito che l'ugaglianza proposta è vera per $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{2x}$ e $g(x) = 7\,\mathrm{e}^{2x}$ [quindi qualche volta è vera] e falsa sia per $f(x) = g(x) = \mathrm{e}^{x}$ che per $f(x) = 7 \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 4\cos x$ [quindi qualche volta è falsa].

Esercizio 4. Una fabbrica di scatole permette ai clienti di scegliere fra alcune misure. Per l'altezza si può scegliere 10 cm oppure 12 cm, per la larghezza 15 o 16 o 19 cm e per la lunghezza 27 o 33 cm. Fra quanti tipi diversi di scatola si può dunque scegliere?

(A) 12 .	(C) 64 .
(B) 7 .	(D) 81 .

Abbiamo 2 possibilità per l'altezza, per ciascuna di queste ne abbiamo 3 per la larghezza, e per ciascuna scelta di altezza e larghezza ne abbiamo 2 per la lunghezza, quindi in totale $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ tipi diversi di scatola.

Esercizio 5. Il limite per $x \to 0^+$ di $\dfrac{x^{2x} - 1}{\operatorname{sen}(3x) \cdot \log_{\mathrm{e}} x}$ vale

(A) $2/3$.	(C) $-\infty$.
(B) $+\infty$.	(D) 0 .

Come per ogni forma esponenziale scriviamo $x^{2x} = \mathrm{e}^{2x\log x}$ e osserviamo che $2x \log x \to 0$ per $x \to 0^+$, così grazie ai limiti notevoli

$$\frac{x^{2x}-1}{\operatorname{sen}(3x)\cdot \log x} = \frac{\mathrm{e}^{2x\log x}-1}{2x\log x}\cdot\frac{2x\log x}{\operatorname{sen}(3x)\log x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2x\log x}-1}{2x\log x}\cdot\frac{3x}{\operatorname{sen}(3x)} \to \frac{2}{3}\,.$$

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{1/x^3}}{1+x^{2\alpha}}\,dx$

(A) converge se $\alpha > 1/2$.	(C) converge per ogni $\alpha > -1$.
(B) non esiste per qualche valore di α .	(D) converge se $\alpha = 0$.

La funzione integranda è positiva, ed è continua anche per $x = 1$, dunque l'unica improprietà si ha all'infinito. Dato che $\mathrm{e}^{1/x^3} \to 1$ per $x \to +\infty$, per il criterio del confronto asintotico l'integrale ha lo stesso carattere di $\int_1^{+\infty} 1/(1+x^{3\alpha})\,dx$. Questo è certamente divergente per $\alpha \le 0$, dato che la funzione integranda tende a 1 (o a $1/2$ se $\alpha = 0$), mentre per $\alpha > 0$ per il criterio del confronto asintotico ha lo stesso carattere di $\int_1^{+\infty} 1/x^{3\alpha}\,dx$, ossia converge se $3\alpha > 1 \iff \alpha > 1/3$ e diverge positivamente per $\alpha \le 1/3$ (che comprende anche il caso già studiato $\alpha \le 0$).

Esercizio 7. La successione $n^2 \log_{\mathrm{e}}\bigl(\cos(3/n)\bigr)$ ha limite

(A) $-9/2$.	(C) $-1/2$.
(B) $9/2$.	(D) $-\infty$.

Scrivendo $\cos(3/n) = 1 + [\cos(3/n) - 1]$ e osservando che la quantità fra parentesi quadre tende a zero, grazie ai limiti notevoli abbiamo

$$n^2 \log\bigl(\cos(3/n)\bigr) = n^2 \cdot \frac{\log\{1 + [\cos(3/n) - 1]\}}{\cos(3/n) - 1} \cdot \frac{\cos(3/n) - 1}{(3/n)^2} \cdot \frac{9}{n^2} \to -\frac{9}{2} \,.$$
