Soluzioni_ex_03

1)

SIA S LO SPAZIO DEGLI EVENTI E SIANO A E B DUE EVENTI.

SE VALE $P(A,B) = P(A)P(B)$

ALLORA DEVE VALERE $P(A,B^c) = P(A)P(B^c)$

È NOTO CHE:

$$A \cap S = A \quad e \quad B \cup B^c = S$$

$$\Rightarrow A = A \cap S = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

DISGIUNTI

DA CUI

$$P(A) = P(A,B) + P(A,B^c)$$

PER INDIPENDENZA

$$P(A) = P(A)P(B) + P(A,B^c)$$

$$P(A)\underbrace{[1 - P(B)]}_{P(B^c)} = P(A,B^c)$$

$$P(A)P(B^c) = P(A,B^c)$$

N.B.: INTERSEZIONE E VIRGOLA COINCIDONO

UNIONE E SOMMA COINCIDONO.

2)

SIA $N = 10^4$ IL NUMERO TOTALE DI STRINGHE.

SE SOLO M DI QUESTE SONO PASSWORD LA PROBABILITÀ DI TROVARE UNA PASSWORD SCEGLIENDO UNA STRINGA A CASO (UN TENTATIVO) È: $p = \frac{M}{N}$

INFATTI LO SPAZIO SI PUÒ ASSUMERE UNIFORME DATE LE CONDIZIONI DEL PROBLEMA.

NATURALMENTE LA PROB. DI NON TROVARE UNA PASSWORD FACENDO UN TENTATIVO È : $q = 1 - p = 1 - \frac{m}{N}$

LA PROB. CHE SI VUOLE ESSERE $< 10^{-2}$ È LA PROB. DI TROVARE ALMENO UNA PASSWORD FACENDO K TENTATIVI (INDIPENDENTI) CHE È :

$$P = 1 - \text{PROB.}\{\text{NON TROVARE ALCUNA PASSWORD IN K TENTATIVI}\}$$
$$= 1 - q^k$$

SI CERCA QUINDI IL MINIMO VALORE DI N (E QUINDI DI n) CHE SODDISFI :

$$P = 1 - q^k < 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \left(1 - \frac{m}{N}\right)^k < 10^{-2}$$

$$\Rightarrow N > \frac{m}{1 - (1 - 10^{-2})^{1/k}} = \frac{100}{1 - 0{,}99^{1/10}} = 0{,}99 \cdot 10^5 \simeq 10^5$$

$n \geq 5$ PASSWORD DI ALMENO 5 CIFRE

3)

SIA D IL PUNTEGGIO OTTENUTO COL DADO E SIA T IL # DI TESTE OTTENUTO CON LE 4 MONETE. SI CHIEDE DI CALCOLARE LA PROBABILITÀ :

$$P(D=T) = P(D=1, T=1) + P(D=2, T=2) + $$
$$+ P(D=3, T=3) + P(D=4, T=4)$$

LE PROBABILITÀ SI SOMMANO PERCHÉ GLI EVENTI SONO DISGIUNTI, L'INDIPENDENZA FRA I LANCI PERMETTE DI SCRIVERE:

$$P(D=T) = \underbrace{P(D=1)}_{1/6} P(T=1) + \ldots + \underbrace{P(D=4)}_{1/6} P(T=4) = \ldots$$

DOVE $P(T=k)$ È LA PROB. DI AVERE k TESTE (SUCCESSI) SU $n=4$ MONETE (PROVE), DOVE INOLTRE LA PROB. DI SUCCESSO È $p = \frac{1}{2}$.

QUINDI:

$$P(D=T) = \frac{1}{6}\Big[\binom{4}{1} \underbrace{p^1(1-p)^{4-1}}_{(1/2)^4} + \binom{4}{2} \underbrace{p^2(1-p)^{4-2}}_{(1/2)^4} + $$
$$+ \binom{4}{3} p^3(1-p)^{4-3} + \binom{4}{4} p^4(1-p)^{4-4} \Big] =$$
$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4 \left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}\right] =$$
$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{16} \left[4 + 6 + 4 + 1\right] = \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{16} \simeq 0{,}16$$

4)

CONVIENE CAMBIARE FUCILE SE, DATO IL RISULTATO

DEI 10 TIRI, È PIÙ PROBABILE CHE IL FUCILE USATO SIA IL B (PEGGIORE).

QUINDI, DEFINITI GLI EVENTI:

A = {IL FUCILE SCELTO È A}

B = { " " " " B}

C = {7 CENTRI SU 10 COLPI}

CONVIENE CAMBIARE SE:

$$P(A/C) < P(B/C) \quad \text{CIOÈ SE} \quad \frac{P(A/C)}{P(B/C)} < 1$$

POICHÉ È:

$$P(A/C) = \frac{P(C/A)P(A)}{P(C)} = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 \cdot \frac{P(A)}{P(C)}$$

$$P(B/C) = \ldots = \binom{10}{7} P_B^7 (1-P_B)^3 \frac{P(B)}{P(C)}$$

ASSUMENDO $P(A) = P(B) = 1/2$ (SCELTA A CASO), SI HA:

$$\frac{P(A/C)}{P(B/C)} = \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^7 \left(\frac{1-P_A}{1-P_B}\right)^3 = \left(\frac{0,8}{0,6}\right)^7 \Big/ \left(\frac{0,2}{0,3}\right)^3 \simeq 0,94 < 1$$

QUINDI CONVIENE CAMBIARE.

VOLENDO CALCOLARE LE DUE PROB. SI HA:

$$P(C/A) = \binom{10}{7} P_A^7 (1-P_A)^3 = 120 \cdot 0,8^7 0,2^3 = 0,2013$$

$$P(C/B) = \ldots = 0,215$$

$$P(C) = P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) = 0,2081$$

DA CUI

... cui:

$$P(A/C) = \frac{P(C/A)P(A)}{P(C)} \simeq 0{,}48$$

$$P(B/C) = \frac{P(C/B)P(B)}{P(C)} \simeq 0{,}52$$

5)

PROBLEMA DI PROVE RIPETUTE IN CUI IL "SUCCESSO" È L'EVENTO $B = \{$RISPOSTA FAVOREVOLE AL CANDIDATO B$\}$.
DETTI n_A E n_B I NUMERI DELLE RISPOSTE FAVOREVOLI AD A E B RISPETTIVAMENTE, SI CERCA:

$$P\{\text{ESITO FALLACE}\} = P\{n_B > n_A\} = P\{4 \leq n_B \leq 7\}$$

SI CERCA CIOÈ LA PROB. CHE IL # DI SUCCESSI SIA COMPRESO TRA 4 E 7, ESTREMI INCLUSI.
DAL TESTO SI PUÒ ASSUMERE CHE LA PROB. DI SUCCESSO SIA $p = P(B) = 0{,}35$.
SI HA:

$$P\{n_B > n_A\} = \sum_{i=4}^{7} \binom{7}{i} p^i (1-p)^{7-i} =$$

$$= \binom{7}{4} 0{,}35^4\, 0{,}65^3 + \binom{7}{5} 0{,}35^5\, 0{,}65^2 + \binom{7}{6} 0{,}35^6\, 0{,}65 + \binom{7}{7} 0{,}35^7 =$$

$$\simeq 0{,}197 \simeq 20\%$$

6)

SI DEFINISCONO I SEGUENTI EVENTI:

$A = \{$IL TIRATORE È DI SERIE A$\}$

$D = \{$IL " " DILETTANTE$\}$

$M = \{6 \text{ GOL SU } 8 \text{ TIRI}\}$

SI CERCA $P(A/M)$ E $P(D/M)$ $(= 1 - P(A/M))$

$$P(A/M) = \frac{P(M/A)\,P(A)}{P(M)}$$

DOVE $P(M)$ (FATTORIZZAZIONE O PROB. TOTALE):

$$P(M) = P(M/A)\,P(A) + P(M/D)\,P(D)$$

E DOVE $P(A) = \frac{2}{10}$, $P(D) = \frac{8}{10}$.

$$P(M/A) = \binom{8}{6} p_A^6 (1-p_A)^{8-6} = 0{,}294$$

$$P(M/D) = \binom{8}{6} p_D^6 (1-p_D)^{8-6} = 0{,}109$$

QUINDI:

$$P(M) = 0{,}294 \cdot 0{,}2 + 0{,}109 \cdot 0{,}8 = 0{,}146$$

E INFINE:

$$P(A/M) = \frac{0{,}29 \cdot 0{,}2}{0{,}146} \simeq 0{,}4 \qquad P(D/M) \simeq 1 - 0{,}4 = 0{,}6$$

7)

SI CONSIDERINO I LANCI COME UNA SERIE DI PROVE RIPETUTE ESEGUITE A TURNO DAI DUE GIOCATORI. INDICHIAMO CON $i = 1, 2, \ldots$ L'i-ESIMO LANCIO (CHIUNQUE SIA IL GIOCATORE), SI HA LA SEGUENTE UGUAGLIANZA

$\{I\} \doteq \{$VINCE IL GIOCATORE CHE LANCIA PER PRIMO$\} =$

$= \{$ESCE SOMMA 7 AL 1° LANCIO$\} \cup$

$\cup$ { ESCE SOMMA 7 AL 3° LANCIO , SOMMA $\neq$ 7 NEI PRIMI 2 } $\cup$
$\cup$ { " " 5° " , " " " 4 }
— — —
$\cup$ { " " LANCIO i , " " " $(i-1)$ LANCI }

SI TRATTA DELL'UNIONE DI INFINITI EVENTI MUTUAMENTE ESCLUSIVI CIASCUNO DEI QUALI (TRANNE IL PRIMO) È L'INTERSEZIONE DI EVENTI INDIPENDENTI (LE USCITE NELLE SINGOLE PROVE RIPETUTE).
DETTA $p = 1-q$ LA PROB. DI OTTENERE SOMMA 7 NEL GENERICO LANCIO SI PUÒ QUINDI SCRIVERE:

$$P(I) = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{\infty} p \cdot q^{(i-1)}$$

CHE COL CAMBIO DI INDICE: $i = 2 \cdot k + 1$ CON $k = 0, 1, 2 \ldots$ SI PUÒ SCRIVERE:

$$P(I) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} p \cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot q^{2k} = p \sum_{k=0}^{\infty} (q^2)^k = p \cdot \frac{1}{1-q^2}$$

DOVE SI È USATA LA SOMMA DI UNA SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE q^2 (<1).
ESSENDO:

$$p = P\{\text{ESCE SOMMA 7 NEL GENERICO LANCIO}\} =$$
$$= \frac{(\#\text{ COPPIE CHE DANNO 7})}{(\#\text{ COPPIE TOTALI})} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad (= 1-q)$$

SI HA:

$$P(I) = p \cdot \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{6}{11} = 0,\overline{54}$$

LA PROB. CHE VINCA CHI LANCIA PER SECONDO È OVVIAMENTE IL COMPLEMENTO A 1:

$$P(II) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11} \simeq 0,\overline{45}$$

QUESTA SI POTEVA CALCOLARE ANCHE ANALOGAMENTE ALLA PRIMA, CON i CHE ASSUME SOLO VALORI

$$P(II) = \sum_{i=2,4,6}^{\infty} p \cdot q^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} p \cdot q^{(2k+1)} = pq \sum_{k=0}^{\infty} (q^2)^k = pq \frac{1}{1-q^2}$$

CON IL CAMBIO INDICE $i = 2k+2 \quad k = 0, 1, 2 \ldots$

8)

SIA P_n LA PROB. CHE UN EVENTO DI PROB. p SI VERIFICHI ALMENO UNA VOLTA IN n PROVE.

SI PUÒ SCRIVERE:

$$P_n = P\{\text{ALMENO UNA VOLTA IN } n \text{ PROVE}\} =$$

$$= 1 - P\{\emptyset \text{ VOLTE SU } n \text{ PROVE}\} = 1 - (1-p)^n$$

E SE LA PROB. È $p = \frac{1}{n}$ SI HA

$$P_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

SI CHIEDE DI CONFRONTARE P_3 CON P_{10^6}.

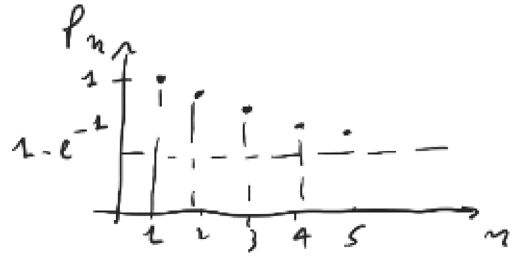
$$P_3 = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 \simeq 0,703$$

$$P_{10^6} = 1 - \left(1 - 10^{-6}\right)^{10^6} \simeq 0,632$$

QUINDI $P_3 > P_{10^6}$

SI OSSERVI CHE: $P_\infty \doteq \lim_{n \to \infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \overbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}^{\text{LIMITE NOTEVOLE}}\right] =$

$$= 1 - e^{-1} \simeq 0{,}632$$



9)

PER COMODITÀ INDICHIAMO CON $\{i,k\}$ L'EVENTO CONGIUNTO: $\{n_A = i,\ n_B = k\}$ OSSIA:
$\{$A FA i CENTRI E B FA k CENTRI$\}$

GLI EVENTI DI QUESTO TIPO SONO TUTTI MUTUALMENTE ESCLUSIVI

QUINDI LA PROBABILITÀ CERCATA SI PUÒ SCRIVERE COSÌ:

$$P\{n_A > n_B\} = P\{3,2\} + P\{3,1\} + P\{3,0\} + P\{2,1\} + P\{2,0\} + P\{1,0\}$$

ESSENDO I TIRATORI DISTINTI SI PUÒ ASSUMERE INDIPENDENZA FRA GLI EVENTI DEL TIPO $\{n_A = i\}$ E $\{n_B = k\}$ QUINDI:

$$P\{n_A > n_B\} = P\{n_A = 3\}\, P\{n_B = 2\} + \dots$$

OGNI PROB. DEL TIPO $P\{n = i\}$ SI PUÒ SCRIVERE COME:

$P\{n = i\} = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i}$ CON p PROB. DI COLPIRE IL BERSAGLIO CON UN COLPO E $q = 1-p$ IL COMPLEMENTO.

QUINDI:

$$P\{n_A > n_B\} = P\{n_A = 3\}\left[P\{n_B = 2\} + P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}\right] +$$

$$+ P\{n_A = 2\}\left[P\{n_B = 1\} + P\{n_B = 0\}\right] +$$

$$+ P\{n_A = 2\} P\{n_B = \emptyset\} =$$

$$= \binom{3}{3} p_A^3 q_A^0 \left[\binom{3}{2} p_B^2 q_B + \binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 \right] +$$

$$+ \binom{3}{2} p_A^2 q_A \left[\binom{3}{1} p_B q_B^2 + \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 \right] +$$

$$+ \binom{3}{1} p_A q_A^2 \binom{3}{0} p_B^0 q_B^3 =$$

$$= p_A^3 \left[3 p_B^2 q_B + 3 p_B q_B^2 + q_B^3 \right] + 3 p_A^2 q_A \left[3 p_B q_B^2 + q_B^3 \right] + 3 p_A q_A^2 q_B^3$$

SI PUÒ RISCRIVERE IN VARI MODI TRA CUI

$$P\{n_A > n_B\} = \sum_{i=1}^{3} \left[\binom{3}{i} p_A^i q_A^{3-i} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \binom{3}{k} p_B^k q_B^{3-k} \right]$$

USANDO $p_A = 0{,}6$ E $p_B = 0{,}5$ SI OTTIENE

$$P\{n_A > n_B\} = 0{,}441$$

LA PROB. CHE VINCA A È QUINDI DEL 44,1 %.

IL COMPLEMENTO A 1 (55,9%) È LA PROB. CHE VINCA B <u>PIÙ</u> LA PROB. DI PAREGGIO.

10)

SI DEFINISCONO I SEGUENTI EVENTI:

A = {IL LOTTO SCELTO PROVIENE DALL'IMPIANTO A}

B = { " " " " B}

C = {DUE COMPONENTI DEL LOTTO SCELTO SONO DIFETTOSI}

SI CERCANO LE PROB.: $P(A/C)$ E $P(B/C) = 1 - P(A/C)$

$$\Rightarrow P(A/C) \quad P(C/A)P(A)$$

$$\Rightarrow \quad P(A/C) = \frac{P(C/A)\,P(A)}{P(C)}$$

DAL TESTO SI PUÒ ASSUMERE $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$

SIANO INOLTRE $p_A = 0{,}05$ E $p_B = 0{,}01$ LE PROB. CHE UN COMPONENTE ESCA DIFETTOSO DAL CORRISPONDENTE IMPIANTO.

SI PUÒ QUINDI SCRIVERE (PROVE RIPETUTE):

$$P(C/A) = \binom{60}{2} p_A^2 (1-p_A)^{58} = \frac{60 \cdot 59}{1 \cdot 2} (0{,}05)^2 (0{,}95)^{58} \simeq 0{,}226$$

$$P(C/B) = \binom{60}{2} p_B^2 (1-p_B)^{58} = \frac{60 \cdot 59}{1 \cdot 2} (0{,}01)^2 (0{,}99)^{58} \simeq 0{,}0988$$

E INFINE (FATTORIZZAZIONE)

$$P(C) = P(C/A)P(A) + P(C/B)P(B) = 0{,}226 \cdot \tfrac{1}{2} + 0{,}0988 \cdot \tfrac{1}{2} \simeq 0{,}162$$

E

$$P(A/C) = \frac{0{,}226 \cdot 1/2}{0{,}162} \simeq 0{,}696 \qquad P(B/C) = 1 - P(A/C) \simeq 0{,}304$$