Risoluzione del compito n. 3 (Gennaio 2024/2)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \boldsymbol{w^2 - 2\mathrm{i}\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-6}{2}\mathrm{i}} \\ \boldsymbol{z + \mathrm{i}\bar{w}^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,,} \end{cases}$$

specificando chiaramente quante sono.

Riscriviamo la seconda equazione

$$\bar{z} = \mathrm{i}w^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i} \iff 2\mathrm{i}\bar{z} = -2w^2 + \big(3+\sqrt{3}\big)\mathrm{i} - 2$$

e sostituiamolo nella prima che dà

$$w^2 + 2w^2 - \big(3+\sqrt{3}\big)\mathrm{i} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-6}{2}\mathrm{i} \iff 3w^2 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \iff w^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\,,$$

un numero complesso di modulo 1 e argomento $2\pi/3$. Allora per w vi sono due possibilità,

$$w_{1,2} = \pm\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)$$

mentre dalla seconda equazione del sistema

$$z = -\mathrm{i}\bar{w}^2 + \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} = -\mathrm{i}\Big(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big) + \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} = \frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i} = \frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,.$$

Le due soluzioni (z,w) del sistema sono allora

$$\Big(\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)\,, \qquad \Big(\frac{3}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2},\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\Big)\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $\boldsymbol{f(x) = \log|x^2 + x - 2| - \log|x - 1| + \frac{x^2 - x}{2}}$ **.**

a) **Calcolatene il dominio e i limiti agli estremi del dominio.**

b) **Calcolate la derivata di** $\boldsymbol{f}$ **e determinate gli intervalli di monotonia di** $\boldsymbol{f}$ **e i punti di massimo o minimo locale.**

c) **Calcolate la derivata seconda e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di** $\boldsymbol{f}$ **.**

d) **Disegnate il grafico di** $\boldsymbol{f}$ **.**

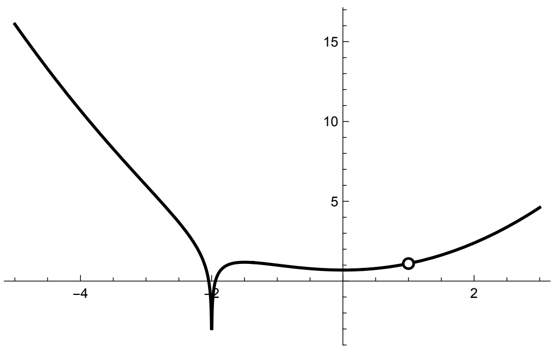
e) **Sapendo che** $\boldsymbol{e^{15/8} > 6}$ **, trovate al variare di** $\boldsymbol{k \in \mathbb{R}}$ **il numero di soluzioni dell'equazione** $\boldsymbol{f(x) = k}$ **.**

Poiché $(x^2 + x - 2) = (x + 2)(x - 1)$, la funzione è definita su $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. Grazie alla formula $\log t_1 - \log t_2 = \log(t_1/t_2)$, valida per $t_1, t_2 > 0$, riscriviamo

$$f(x) = \log|x + 2| + \frac{x^2 - x}{2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} ,$$

e dato che la potenza domina sul logaritmo all' infinito, risulta

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty , \quad \lim_{x \to -2} f(x) = -\infty , \quad \lim_{x \to 1} f(x) = \log 3 .$$



Per $x \neq -2$ e $x \neq 1$, ricordando che $D \log|t| = 1/t$ risulta

$$f'(x) = \frac{1}{x + 2} + \frac{2x - 1}{2} = \frac{2x^2 + 3x}{2(x + 2)} = \frac{x(2x + 3)}{2(x + 2)}$$

e dallo studio del segno della derivata risulta che f è decrescente su $(-\infty, -2[$, crescente su $] - 2, -3/2]$, decrescente su $[-3/2, 0]$, crescente su $[0, 1[\cup]1, +\infty)$. Abbiamo quindi un punto di massimo locale per $x = -3/2$ e uno di minimo locale per $x = 0$.

Per $x \neq -2$ e $x \neq 1$, calcoliamo poi

$$f''(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \frac{2x^2 + 3x}{x + 2} = \frac{1}{2} \frac{2x^2 + 8x + 6}{(x + 2)^2} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 2)^2}$$

e dal segno della derivata seconda segue che f è (strettamente) convessa su $(-\infty,-3]$, concava su $[-3,-2[$ e su $]-2-1]$, convessa su $[-1,1[$ e su $]1,+\infty)$.
Infine, dalla monotonia risulta $\log 2 = f(0) < f(-3/2) = 15/8 - \log 2 =: k_0$, dove $k_0 > \log 3 = \lim_{x\to 1} f(x)$ in quanto $15/8 > \log 2 + \log 3 = \log 6$ dall' informazione sul testo. Ricordando che $1 \notin \operatorname{dom} f$, grazie al teorema dei valori intermedi (applicato su ogni intervallo massimale di monotonia di f) otteniamo che l'equazione $f(x) = k$ ha due soluzioni per $k < \log 2$ o $k_0 < k < \log 3$, tre soluzioni per $k = \log 2$ o $k = k_0$ o $k = \log 3$, quattro soluzioni per $\log 2 < k < \log 3$ o $\log 3 < k < k_0$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x - x}}$ e $\boldsymbol{g(x) = e^{x - \operatorname{sen} x}}$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $\boldsymbol{x_0 = 0}$ di $\boldsymbol{f(x)}$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $\boldsymbol{x_0 = 0}$ di $\boldsymbol{g(x)}$.

c) Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $\boldsymbol{x \to 0}$, della funzione $\boldsymbol{f(x) - g(x)}$.

d) Calcolate al variare di $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ il limite $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - g(x)}{(ax + x^2)^3}}$.

Posto $t = x - \operatorname{sen} x$, risulta $f(x) = \dfrac{1}{1-t}$. Poiché dallo sviluppo della funzione seno

$$x - \operatorname{sen} x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6) \ ,$$

partendo dallo sviluppo al secondo ordine

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + o(t^2)$$

otteniamo

$$f(x) = 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{36} + o(x^6) \ .$$

Inoltre, ancora con $t = x - \operatorname{sen} x$ partiamo dallo sviluppo al secondo ordine

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e otteniamo rapidamente

$$g(x) = 1 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{72} + o(x^6) \ .$$

Dunque la funzione differenza

$$f(x) - g(x) = \frac{x^6}{72} + o(x^6)$$

è un infinitesimo di ordine sei con parte principale $x^6/72$. Infine, se $a \neq 0$ il denominatore $(ax + x^2)^3$ ha la stessa velocità di a^3x^3 ed il limite vale zero, mentre se $a = 0$ il denominatore vale x^6 e il limite vale $1/72$.

PROBLEMA 4

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f(x) = \dfrac{(\arctan x)^{2\alpha^2-8\alpha-4}}{(1+x^2)^{4+2\alpha-\alpha^2} x^{\alpha^2-4\alpha-3}}$.

a) Determinate al variare di α il carattere dell' integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Determinate al variare di α il carattere dell' integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

c) Determinate al variare di α il carattere dell' integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

Iniziamo osservando che la funzione integranda è continua e positiva su $]0,+\infty[$ pertanto gli integrali esistono per ogni α e sono convergenti oppure divergenti positivamente. Per $x \to 0$ si ha

$$\frac{\arctan x}{x} \to 1\ , \quad (1+x^2) \to 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^p \to 1\ , \quad (1+x^2)^q \to 1$$

per ogni p,q , dunque per il criterio del confronto asintotico l' integrale vicino a zero ha lo stesso carattere dell' integrale di

$$\frac{x^{2\alpha^2-8\alpha-4}}{1\cdot x^{\alpha^2-4\alpha-3}} = \frac{1}{x^{-\alpha^2+4\alpha+1}}\ ,$$

pertanto $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge se e solo se

$$-\alpha^2+4\alpha+1<1 \iff \alpha(\alpha-4)>0 \iff [\alpha<0 \ \textbf{o}\ \alpha>4]\ .$$

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\arctan x \to \pi/2\ , \quad \frac{1+x^2}{x^2} \to 1 \quad \Rightarrow \quad (\arctan x)^p \to (\pi/2)^p\ , \quad \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^q \to 1$$

per ogni p,q , pertanto per il criterio del confronto asintotico $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ ha lo stesso carattere dell' integrale di

$$\frac{1}{(x^2)^{4+2\alpha-\alpha^2} x^{\alpha^2-4\alpha-3}} = \frac{1}{x^{-\alpha^2+5}}\ ,$$

dunque converge se e solo se

$$-\alpha^2+5>1 \iff \alpha^2<4 \iff -2<\alpha<2\ .$$

Infine l' integrale fra 0 e $+\infty$ converge per $-2<\alpha<0$ e diverge positivamente altrimenti.

Esercizio 1. I valori di $\alpha > 0$ per i quali converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-2} + n^{1-3\alpha}}{n+1}$ sono

(A) $1/3 < \alpha < 2$.	(C) $\alpha < 0$ oppure $\alpha > 3$.
(B) $0 < \alpha < 1$.	(D) $2 < \alpha < 3$.

Dato che tutti i termini presenti sono positivi, possiamo tranquillamente scrivere la serie come somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-2}}{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-3\alpha}}{n+1}$$

e la serie convergerà se e solo se convergono entrambe; possiamo applicare il criterio del confronto asintotico a ciascuna, confrontandole rispettivamente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha-2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1-3\alpha}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3\alpha}} \, .$$

Sono due serie armoniche generalizzate: la prima converge se e solo se $3 - \alpha > 1 \iff \alpha < 2$ e la seconda converge se e solo se $3\alpha > 1 \iff \alpha > 1/3$, dunque le due serie addendi convergono entrambe se e solo se $1/3 < \alpha < 2$.

Esercizio 2. L'integrale $\int_1^4 |x^2 - 4| \, dx$ vale

(A) $37/3$.	(C) 21 .
(B) 9 .	(D) -9 .

Dobbiamo spezzare l'intervallo di integrazione perché $x^2 - 4$ cambia segno per $x = 2$, quindi

$$\int_1^4 |x^2 - 4| \, dx = \int_1^2 (4 - x^2) \, dx + \int_2^4 (x^2 - 4) \, dx = \Big[4x - \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 + \Big[\frac{x^3}{3} - 4x\Big]_2^4 = \frac{37}{3} \, .$$

Esercizio 3. Un sacchetto contiene 25 palline di cui alcune rosse. Pescando due palline, la probabilità che siano entrambe rosse è $1/20$. Quante sono le palline rosse?

(A) 6 .	(C) 10 .
(B) 5 .	(D) 2 .

I casi possibili sono le scelte di due elementi a caso su 25 , quindi sono $\binom{25}{2}$. Se n è il numero di palline rosse, i casi favorevoli sono le scelte di due elementi su n , quindi sono $\binom{n}{2}$. Allora

$$\frac{1}{20} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{25}{2}} = \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \cdot \frac{2! \cdot (25-2)!}{25!} = \frac{n(n-1)}{25 \cdot 24}$$

quindi

$$n(n-1) = \frac{25 \cdot 24}{20} = 30 \quad \Rightarrow \quad n = 6 \, .$$

In alternativa si può ragionare anche così: detto n il numero incognito delle palline rosse, la probabilità che la prima pallina estratta sia rossa è $n/25$, dopo di che la probabilità che anche la seconda (sulle 24 restanti) sia rossa è $(n-1)/24$ e si ritorna a $1/20 = n(n-1)/25 \cdot 24$.

Esercizio 4. Se $z+w$ è reale, $z-w$ può essere immaginario puro?

(A) Sì, ma solo se z e w hanno la stessa parte reale.
(B) Sì, sempre.
(C) No, mai.
(D) Sì, ma solo se uno dei due è immaginario puro.

Che $z+w$ sia reale non serve: infatti posto $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = x + \mathrm{i}y$ è $z - w = (a-x) + \mathrm{i}(b-y)$, che è immaginario puro se e solo se $a = x$ ossia i due numeri hanno la stessa parte reale. In alternativa, senza fare calcoli, pensate che nel parallelogrammo generato da z e w una diagonale è $z+w$ e l'altra $z-w$, che è verticale (cioè immaginario puro) se e solo se z e w sono sulla stessa retta verticale, ossia hanno la stessa parte reale.

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni di $\sqrt{5x^2+7x+2} < \sqrt{x^2+3x+5}$. Allora:

(A) $[-3/10, 3/8] \subset S$.
(B) $]-1, 1/2[\subset S$.
(C) $1 \in S$.
(D) S non è limitato superiormente.

Il polinomio x^2+3x+5 ha discriminante negativo, quindi la radice a secondo membro è definita su tutto $\mathbb{R}$. Invece, dalla fattorizzazione $5x^2+7x+2 = (x+1)(5x+2)$ segue che la radice a primo membro esiste se e solo se $x \le -1$ o $x \ge -2/5$. Per tali valori di x, possiamo elevare al quadrato ambo i membri ottenendo la disequazione equivalente

$$5x^2 + 7x + 2 < x^2 + 3x + 5 \iff 4x^2 + 4x - 3 < 0 \iff (2x+3)(2x-1) < 0$$

che ha soluzione $-3/2 < x < 1/2$. Da questo ricaviamo che $S =]-3/2, -1] \cup [-2/5, 1/2[$, dunque $[-3/10, 3/8] \subset S$. Inoltre, S è limitato superiormente, mentre $1 \notin S$ ed è falso che $]-1/2, 1[\subset S$.

Esercizio 6. La retta tangente il grafico della funzione $f(x) = \arctan(\pi x)$ in corrispondenza del punto $(1/\pi,\ f(1/\pi))$ ha equazione:

(A) $2\pi x - 4y + \pi = 2$.
(B) $2\pi x - 4y + 2 = \pi$.
(C) $2x - 4y = \dfrac{2-\pi^2}{\pi}$.
(D) $2\pi x - 4y - 1 = 0$.

Abbiamo $f(1/\pi) = \arctan 1 = \pi/4$, mentre

$$f'(x) = \frac{\pi}{1+(\pi x)^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1/\pi) = \frac{\pi}{2}.$$

Dalla formula $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 1/\pi$ otteniamo dunque

$$y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\Big(x - \frac{1}{\pi}\Big) \iff 4y = \pi + 2\pi x - 2,$$

dove abbiamo moltiplicato ambo i membri per 4, da cui otteniamo l'unica risposta corretta $2\pi x - 4y + \pi = 2$.

Esercizio 7. La successione $n\,\dfrac{\log_e(2n+3) - \log_e(2n)}{\log_e(2n+3) - \log_e n}$ ha limite

(A) $\dfrac{3}{2\log_e 2}$.	(C) $\dfrac{3}{2\log_e 3}$.
(B) 0 .	(D) $+\infty$.

Per $n \geq 1$, a numeratore abbiamo

$$\log(2n+3) - \log(2n) = \log\Big(\frac{2n+3}{2n}\Big) = \log\Big(1 + \frac{3}{2n}\Big) \sim \frac{3}{2n} \ ,$$

per il limite fondamentale del logaritmo naturale, mentre a denominatore

$$\log(2n+3) - \log n = \log\Big(\frac{2n+3}{n}\Big) = \log\Big(2 + \frac{3}{n}\Big) \to \log 2 \ ,$$

per la continuità del logaritmo in $x = 2$, dunque

$$n\,\frac{\log(2n+3) - \log(2n)}{\log(2n+3) - \log n} \sim \frac{n}{\log 2} \cdot \frac{3}{2n} \to \frac{3}{2\log 2} \ .$$