Esercizio 1

Un componente in garanzia viene sostituito gratuitamente se si guasta entro un anno dall'acquisto.

Se il tempo di guasto del componente è una variabile aleatoria esponenziale negativa con valore medio 5 anni (ovvero di parametro $\lambda = 1/5$) , quant'è la probabilità che su un lotto di 20 componenti ne debbano essere sostituiti in un anno 2 o più?

Esercizio 2

La vita di un certo tipo di lampade è rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$ ($u(x)$ funzione a gradino: vale 0 da -∞ a 0, 1 da 0 a +∞).
Due di tali lampade vengono accese contemporaneamente in una stanza.
Si calcoli la probabilità che:

a) all'istante generico t_0 le lampade siano entrambe accese;
b) all'istante t_0 siano entrambe spente;
c) le lampade siano entrambe accese osservando che all'istante t_0 nella stanza c'è luce.

Esercizio 3

Il sig. Rossi ha l’abitudine di entrare ogni giorno del bar *B1* o nel bar *B2* (scelto a caso) in un istante a caso fra le 10 e le 11 e di intrattenervisi esattamente 10 min per prendere un caffè. Un giorno il sig. Bianchi entra nel bar *B1* alle 10:30 e osserva che il sig. Rossi non c’è.

- E’ più probabile che il sig. Rossi sia già uscito o che non sia mai entrato? (Si assuma indipendenza fra gli eventi {Scelta del bar} e {Istante di entrata del sig. Rossi}).

Esercizio 4

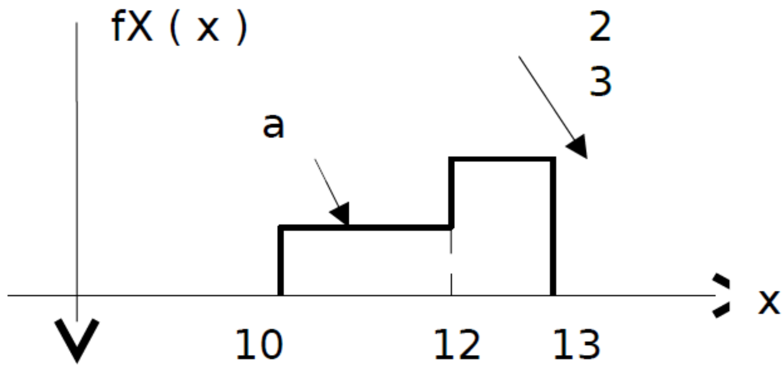
La durata di una conversazione telefonica è una v.a. con funzione di distribuzione
$F_x(x) = (1 - e^{-\lambda x})\, u(x)$.
Quanto vale la probabilità che una telefonata in atto all’istante t_0 termini entro i successivi t secondi?

Esercizio 5

Sulle facce di un disco di colore rosso sono impressi i numeri 1 e 3. Sulle facce di un altro disco di colore bianco (ma per il resto identico al primo) sono impressi i numeri 3 e 5. Si sceglie un disco a caso e lo si lancia come una moneta. Sia X la v.a. {Numero che si legge sul disco lanciato}. Si consideri l'evento A = {Si è scelto il disco rosso}.
Si trovino la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della v.a. X e le stesse condizionate dall'evento A (o dato l'evento A), ossia $F_X(x|A)$ e $f_X(x|A)$.

Esercizio 6

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_x(x)$ come nella figura seguente.
Si dica quanto vale a.
Si trovi la funzione di distribuzione $F_x(x)$ tracciandone un grafico accurato.
Si dica quanto vale $F_x(12)$.



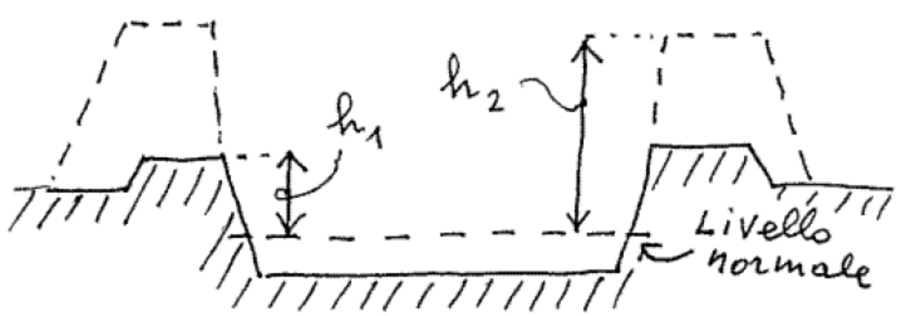
Esercizio 7
Il livello massimo che un certo fiume raggiunge in un anno (misurato in metri oltre il livello normale del fiume) è una v.a. *X* con densità di probabilità:

$f_X(x) = a(x-10)^4 \prod((x-5)/10)$

Esiste un argine alto h_1 = 2 m (rispetto al livello normale del fiume) quindi se *X* supera tale livello si verifica un'alluvione.
- Si trovi la funzione di distribuzione $F_x(x)$ di *X* e si trovi il valore della costante *a*.
- Si calcoli la probabilità che si abbiano una o più alluvioni in 6 anni.
- Poiché il rischio di alluvioni è ritenuto troppo elevato si vuole innalzare l'argine in modo che la probabilità di non avere alluvioni in 50 anni sia 0,9. Quale deve essere la nuova altezza h_2 dell'argine?

{Si assuma che si verifichi una sola piena all'anno e che il livello massimo raggiunto sia indipendente da un anno all'altro}.

N.B.: $\prod(x)$ = 1 per $-1/2<x<1/2$, ½ per $x=\pm1/2$, 0 altrimenti.



Esercizio 8
Dato un gruppo di n = 100 persone formato da italiani e stranieri si scelgono a caso due persone. Sapendo che la probabilità che una sola di esse sia straniera è $p \approx 0,18$ si individui una possibile composizione del gruppo (numero di italiani n_I e numero di stranieri n_S).

Esercizio 9

Una commissione di n membri è convocata per le ore 10:00.

I partecipanti arrivano indipendentemente con un ritardo che è una v.a R avente densità $f_R(x)$ uniforme fra i valori $a = -5$ e $b = 15$ minuti, uguale per tutti

(Nota: ritardo negativo = anticipo).

La riunione ha inizio non appena arriva l'ultimo membro.

a) Si trovi la funzione di distribuzione $F_x(x)$ e la densità di probabilità $f_x(x)$ della v.a.
X = {Ritardo di inizio della riunione (rispetto alle ore 10:00)}

b) Si traccino i grafici di $F_x(x)$ e di $f_x(x)$ nel caso $n = 2$.

Esercizio 10

Una fabbrica di elettrodomestici monta sui suoi frigoriferi termostati di tipo A o di tipo B indifferentemente.

Un termostato mantiene nel frigorifero una temperatura a regime il cui valore è rappresentato da una variabile casuale uniformemente distribuita fra $(T - \Delta)$ e $(T + \Delta)$, essendo T la temperatura impostata dall'utente.

Nel caso in esame, per i termostati di tipo A si ha $\Delta = 1^\circ$ C e per i termostati di tipo B si ha $\Delta = 2^\circ$ C.

Si sceglie a caso un frigorifero e si imposta la temperatura $T = 2^\circ$ C.

Si trovi in tal caso la funzione di distribuzione e la densità di probabilità della variabile casuale X = {temperatura a regime nel frigorifero}.

Osservato che in tale frigorifero la a temperatura a regime è di 2,5° C, si calcoli la probabilità che il termostato sia di tipo A.

Esercizio 11

Un satellite artificiale deve svolgere una missione di osservazione della Terra di durata T = 6 mesi. Se l'apparecchiatura di osservazione ha una vita rappresentata da una v.a. X con densità di probabilità $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x}u(x)$, quale deve essere il valore di λ (espresso con l'appropriata unità di misura) necessario affinchè la probabilità che l'apparecchiatura funzioni almeno per tutta la durata della missione sia P = 0,9? Qual è il corrispondente valor medio della vita dell'apparecchiatura, $E[X]$?

La missione viene effettuata con un'apparecchiatura avente proprio il valore di λ trovato sopra, ma purtroppo al termine della missione l'apparecchiatura risulta non funzionante: qual è la probabilità che abbia funzionato per almeno T_1 = 5 mesi?

Esercizio 12

a) Sia X una generica v.a con funzione di distribuzione $F_x(x)$. Fissato un generico numero reale t si trovi l'espressione analitica della funzione di distribuzione condizionata $F_x(x|X > t)$ esprimendola utilizzando la funzione $F_x(x)$.

b) Successivamente si applichi quanto trovato al caso in cui la v.a. X sia uniformemente distribuita nell'intervallo $0 < x < 4$, e sia: $t = 3$. Si traccino anche i grafici di $F_x(x)$ e di $F_x(x|X > t)$.

Esercizio 13

Un certo giorno voi entrate nella vostra banca all'istante t_2 e trovate che allo sportello c'è già un cliente entrato ad un istante incognito $t_1 < t_2$. Sapendo che la v.a. X = {Tempo di permanenza allo sportello di un generico cliente} è di tipo esponenziale negativo con valor medio η_X = 5 minuti, qual è la probabilità che dobbiate attendere più di 5 minuti prima che sia il vostro turno?
{Si troverà che tale probabilità non dipende dai valori di t_1 e t_2}.

Esercizio 13

Un certo tipo di sfere ha diametro che è una variabile aleatoria D uniforme fra 1 e 4 cm. Avete bisogno di tre sfere di diametro compreso fra 2 e 3 cm.
- Qual è la probabilità che dobbiate misurare almeno 10 sfere per trovare le tre desiderate?
- Definita la v.a. N = {Numero di sfere da misurare per ottenere le tre desiderate}, si trovi la distribuzione di probabilità della variabile N, ossia la probabilità $P\{N = n\}$ per ogni n, e se ne tracci un grafico accurato per $n < 5$. (Alternativamente si tracci un grafico della funzione di distribuzione (CDF) o della densità di probabilità (PDF) della variabile N vista come continua).

Esercizio 14

a) Si definisca la varianza σ^2_x di una variabile aleatoria X.
b) Si scriva la relazione che esiste fra la varianza, il valore quadratico medio e il valore medio di una variabile aleatoria e si dimostri tale relazione.
c) Si trovino il valor medio e la varianza di una variabile aleatoria esponenziale negativa con densità di probabilità $f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$, con $\lambda > 0$.

Esercizio 15

Una variabile casuale X ha densità di probabilità $f_x(x)$ come in figura.

a) Si trovi il valore di a.
b) Si trovi la funzione di distribuzione $F_x(x)$ e se ne tracci un grafico.
c) Si trovi il valor medio di X.