Risoluzione del compito n. 8 (Settembre 2023)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \Re z = 3 + \Re w \\ |z - w| = 5 \\ z + w = 7 + 2\mathrm{i}\ . \end{cases}$$

Dalla prima equazione $\Re(z-w) = \Re z - \Re w = 3$, ed essendo $25 = |z-w|^2 = [\Re(z-w)]^2 + [\Im(z-w)]^2 = 9 + [\Im(z-w)]^2$ ricaviamo $\Im(z-w) = \pm 4$. Allora abbiamo due casi:

$$\Im(z-w) = +4 \Rightarrow z - w = 3 + 4\mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} z - w = 3 + 4\mathrm{i} \\ z + w = 7 + 2\mathrm{i} \end{cases} \Rightarrow z = 5 + 3\mathrm{i}\ ,\ w = 2 - \mathrm{i}$$

$$\Im(z-w) = -4 \Rightarrow z - w = 3 - 4\mathrm{i} \Rightarrow \begin{cases} z - w = 3 - 4\mathrm{i} \\ z + w = 7 + 2\mathrm{i} \end{cases} \Rightarrow z = 5 - \mathrm{i}\ ,\ w = 2 + 3\mathrm{i}$$

e il sistema ha due soluzioni,

$$z = 5 + 3\mathrm{i}\ ,\ w = 2 - \mathrm{i}\ , \qquad z = 5 - \mathrm{i}\ ,\ w = 2 + 3\mathrm{i}\ .$$

Per gli appassionati dei mucchi di conti, si può tranquillamente risolvere il sistema persino sostituendo $z = a + \mathrm{i}b$ e $w = x + \mathrm{i}y$. Ad esempio dalla prima e dalla terza equazione si ricava

$$\begin{cases} a = 3 + x \\ (a + x) + \mathrm{i}(b + y) = 7 + 2\mathrm{i} \end{cases} \iff \begin{cases} a - x = 3 \\ a + x = 7 \\ b + y = 2 \end{cases}$$

da cui $a = 5$, $x = 2$ e $b + y = 2$. Usando la seconda equazione del sistema dato si ricavano i valori mancanti.

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = 3\arctan(x{+}1){+}2\log(x^2{+}2x{+}2){+}3\arctan(3/4){-}4\log(5/4)$.

a) Calcolatene il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

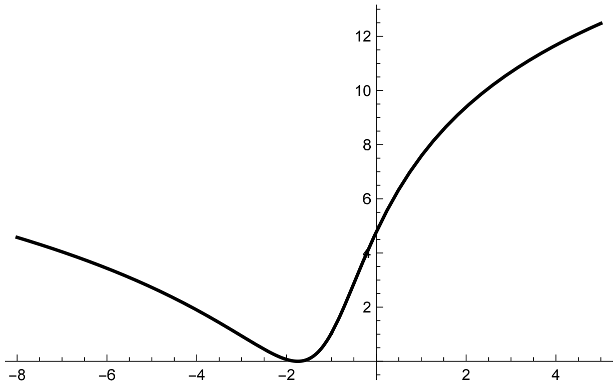
b) Determinate gli intervalli di monotonia di f e i suoi punti di massimo o minimo locale.

c) Determinate il segno di f e il numero degli zeri di f .

d) Calcolate la derivata seconda e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .

e) Disegnate il grafico di f .

Dato che il polinomio $x^2 + 2x + 2$ è sempre positivo, la funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, dall'andamento del logaritmo a $+\infty$ e dell'arcotangente a $\pm\infty$ segue che la funzione ha limite $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.



La funzione è continua e derivabile (infinite volte), e per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2+1} + 2\,\frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{4x+7}{x^2+2x+2}\ .$$

Dal segno del numeratore si deduce che f è strettamente crescente su $[-7/4, +\infty[$ e strettamente decrescente su $]-\infty, -7/4]$, quindi ha minimo assoluto in $x_0 = -7/4$ dove

$$\min f = f(-7/4) = 3\arctan(-3/4) + 2\log\Big(\frac{49}{16} - \frac{7}{2} + 2\Big) + 3\arctan(3/4) - 4\log(5/4) = 0$$

in quanto $\arctan$ è una funzione dispari mentre

$$2\log\Big(\frac{49}{16} - \frac{7}{2} + 2\Big) = 2\log\Big(\frac{25}{16}\Big) = 4\log\Big(\frac{5}{4}\Big)\ .$$

Allora la funzione ha uno solo zero, nel punto di minimo, ed è positiva per $x \neq -7/4$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la derivata seconda di f vale

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{4x+7}{x^2+2x+2} = \frac{4(x^2+2x+2) - (4x+7)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2(2x^2+7x+3)}{(x^2+2x+2)^2}$$

ed ovviamente il suo segno dipende dal segno del numeratore. Poiché l'equazione $2x^2 + 7x + 3 = 0$ ha soluzione $x = -3$ o $x = -1/2$, deduciamo che $f''(x) > 0$ se $-3 < x < -1/2$, $f''(x) = 0$ se $x = -3$ o $x = -1/2$, $f''(x) < 0$ altrove. Quindi la funzione è (strettamente) concava su $(-\infty, -3]$, convessa su $[-3, -1/2]$, concava $[-1/2, +\infty)$. In particolare, f ha due punti di flesso in corrispondenza dei punti di ascissa $x_1 = -3$ e $x_2 = -1/2$, dove $x_1 < x_0 < x_2$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$, $g(x) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) - \cos x^2$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**
b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**
c) **Trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = f(x) + g(x)$.**
d) **Calcolate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{h(x) - \alpha x^3}$.**

Scriviamo

$$f(x) = \frac{2}{2 + (\mathrm{e}^x - 1)} = \frac{1}{1+t}\,, \quad t = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{2}$$

dove dallo sviluppo dell'esponenziale

$$t = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4)$$

e dunque $o(t^k) = o(x^k)$ per ogni k naturale. Quindi partendo dallo sviluppo

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + o(t^4)$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
f(x) =& 1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) \\
&+ \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^4}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(x^3 + \frac{3x^4}{2}\right) + \frac{x^4}{16} \\
=& 1 - \frac{x}{2} + x^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + x^3\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\
&+ x^4\left(-\frac{1}{48} + \frac{1}{16} + \frac{1}{12} - \frac{3}{16} + \frac{1}{16}\right) + o(x^4)\ . \\
=& 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + o(x^4)\ .
\end{aligned}$$

Inoltre, dagli sviluppi di seno e coseno ricaviamo facilmente

$$g(x) = \frac{1}{4}\left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) - 1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

da cui segue che

$$h(x) = -\frac{7x^3}{24} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine tre con parte principale $-7x^3/24$. Infine, per $x > 0$ risulta

$$\frac{x^4}{h(x) - \alpha x^3} = \frac{x^4}{(-7/24 - \alpha)x^3 + x^4/2 + o(x^4)} = \frac{x}{(-7/24 - \alpha) + x/2 + o(x)}$$

dove abbiamo usato che $o(x^4)/x^3 = o(x)$, da cui concludiamo che il limite ℓ_α esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e vale

$$\ell_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = -7/24 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq -7/24\ . \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Siano

$$\boldsymbol{a_n = 3 + \frac{2}{n} + \frac{124}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\,, \qquad b_n = \frac{a_n^2}{3}\,.}$$

a) **Determinate per quale valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ la serie**

$$\sum_n \Big|a_n - b_n + \frac{c}{n}\Big|$$

risulta convergente.

b) **Per il valore di c così determinato, studiate al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della serie**

$$\sum_n \Big|a_n - b_n + \frac{c}{n}\Big|^{\alpha}\,.$$

Dobbiamo calcolare il quadrato di a_n, e osserviamo che dal doppio prodotto di 3 con l'o piccolo rimarrà un $o\big(1/n\sqrt{n}\big)$, quindi non ci sono troppi conti da fare per avere

$$a_n^2 = 9 + \frac{12}{n} + \frac{3\cdot 248}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)$$

da cui

$$b_n = 3 + \frac{4}{n} + \frac{248}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\,.$$

Allora

$$a_n - b_n + \frac{c}{n} = \frac{c-2}{n} - \frac{124}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\;:$$

per $c \neq 2$ il termine che domina è $(c-2)/n$, e applicando il criterio del confronto asintotico alla serie (a termini positivi!) del punto a) otteniamo che questa diverge positivamente. Invece per $c = 2$

$$\Big|a_n - b_n + \frac{2}{n}\Big| = \Big|-\frac{124}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\Big| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

e per il criterio del confronto asintotico la serie del punto a) converge.
A questo punto

$$\Big|a_n - b_n + \frac{2}{n}\Big|^{\alpha} = \Big|-\frac{124}{n\sqrt{n}} + o\Big(\frac{1}{n\sqrt{n}}\Big)\Big|^{\alpha} \sim \frac{1}{n^{3\alpha/2}}$$

e per il criterio del confronto asintotico la serie (anch'essa a termini positivi) del punto b) converge per $3\alpha/2 > 1 \iff \alpha > 2/3$ e diverge positivamente altrimenti.

Esercizio 1. Se $z = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ allora

(A) $z^3 = -8$.	(C) $z^2 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
(B) $z^3 = -1$.	(D) $z^4 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Osserviamo che $|z| = 2$, quindi $|z^2| = 4$ e $|z^3| = 8$, dunque le risposte $z^3 = -1$ e $z^4 = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ (che ha modulo 2) sono da scartare. Poi l'argomento di z è $\pi/3$ quindi quello di z^2 è $2\pi/3$, e scartiamo anche la risposta $z^2 = 2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ (che ha argomento $-\pi/3$). La rimanente $z^3 = -8$ è corretta.

Esercizio 2. Se $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ sono continue e verificano $f(-1) = g(1)$ e $g(-1) = f(1)$ allora

(A) $\exists c \in [-1, 1] : f(c) - g(c) = 0$.	(C) se f è crescente, g è decrescente.
(B) sia f che g si annullano in almeno un punto.	(D) la funzione $f(x) - g(-x)$ è identicamente nulla.

Quel che sappiamo è solo che f parte in $x = -1$ da una certa quota $A = f(-1)$ e arriva in $x = 1$ alla quota $B = f(1)$, mentre g parte dalla quota B e arriva alla quota A. Dunque la funzione continua $f - g$ passa dalla quota $A - B$ alla quota opposta $B - A$, e per il Teorema di esistenza degli zeri si annulla in qualche punto. Le altre risposte sono errate, ad esempio $f(x) = x + 10$ e $g(x) = x - 2x^3 + 10$ verificano le ipotesi, ma non si annullano mai, g non è monotona anche se f è crescente, e chiaramente $f(x)$ non è $g(-x)$.

Esercizio 3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $1/2 \le f'(x) \le 2$ per ogni x allora

(A) f è biunivoca.	(C) f non può essere dispari.
(B) f è lipschitziana di costante $1/2$.	(D) $f(3) - f(2) \ge 5/2$.

La funzione f, essendo derivabile, è continua; inoltre ha derivata positiva dunque è strettamente crescente e quindi iniettiva. Infine per il Teorema di Lagrange

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(\xi) \ge \frac{1}{2}$$

per qualche ξ fra 0 ed x, pertanto

$$\begin{aligned} x > 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \ge f(0) + \frac{1}{2}x \to +\infty \quad \text{per } x \to +\infty \\ x < 0 \quad &\Rightarrow \quad f(x) \le f(0) + \frac{1}{2}x \to -\infty \quad \text{per } x \to -\infty \end{aligned}$$

dunque per il Teorema dei valori intermedi l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$: allora essendo iniettiva e surgettiva è biunivoca. Se poi vogliamo controllare che le altre risposte siano sbagliate, basta osservare che $f(x) = x$ ha derivata (che vale 1) fra $1/2$ e 2, ma non è Lipschitziana di costante $1/2$ (la costante è 1), è dispari, e $f(3) - f(2) = 1 < 5/2$.

Esercizio 4. Da un mazzo di 32 carte da poker si scelgono a caso 8 carte. Qual è la probabilità che fra di esse vi sia la donna di quadri?

(A) $1/4$.	(C) $8!/32!$.
(B) $1/8$.	(D) $1/8!$.

I mucchietti diversi di 8 carte scelte fra le 32 di partenza sono $\binom{32}{8}$. Di questi, quelli favorevoli sono quelli che contengono la donna di quadri e 7 delle altre 31 carte, quindi sono $\binom{31}{7}$. La probabilità è quindi

$$\frac{\binom{31}{7}}{\binom{32}{8}} = \frac{31 \cdot 30 \cdots 25}{7!} \cdot \frac{8!}{32 \cdot 31 \cdots 25} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \, .$$

In alternativa, possiamo pensare che le carte scelte siano le prime 8 del mazzo, quindi i casi favorevoli sono quelli in cui la donna di quadri occupa le prime 8 delle 32 posizioni possibili, cioè $1/4$ dei casi.

Esercizio 5. Per $x \to +\infty$, la funzione $\sqrt{x^4+5x^2} - \sqrt{x^4+3x}$ ha limite

(A) $5/2$.	(C) $-3/2$.
(B) 5 .	(D) $+\infty$.

Gli argomenti di entrambe le radici tendono a $+\infty$, quindi scriviamo

$$\sqrt{x^4+5x^2} - \sqrt{x^4+3x} = \frac{(x^4+5x^2)-(x^4+3x)}{\sqrt{x^4+5x^2}+\sqrt{x^4+3x}} = \frac{5x^2-3x}{x^2\Big(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^3}}\Big)} \to \frac{5}{2} \, .$$

Esercizio 6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3-2)^{3/2}}\,dx$ vale

(A) $2/15$.	(C) $2/5$.
(B) $+\infty$.	(D) $2/3$.

Abbiamo

$$\int \frac{x^2}{(x^3-2)^{3/2}}\,dx \underset{x^3-2=t}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^{3/2}}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{-3/2}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{-1/2}}{-1/2} \underset{t=x^3-2}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{-2}{3\sqrt{x^3-2}} \, .$$

Allora

$$\int_3^M \frac{x^2}{(x^3-2)^{3/2}}\,dx = -\frac{2}{3}\Big[\frac{1}{\sqrt{x^3-2}}\Big]_3^M = -\frac{2}{3}\Big[\frac{1}{\sqrt{M^3-2}} - \frac{1}{5}\Big] \to \frac{2}{15}$$

per $M \to +\infty$, e l'integrale generalizzato vale $2/15$.

Esercizio 7. La successione $\log_{\mathrm{e}}\Big(\dfrac{1+\,\mathrm{e}^2 n}{\sqrt{n}+n}\Big) + \exp\Big(\dfrac{n^2\log_{\mathrm{e}} 5}{n+n^2}\Big)$

(A) tende a 7.	(C) diverge positivamente.
(B) tende a 5.	(D) tende a 2.

Abbiamo subito

$$\frac{1+\,\mathrm{e}^4 n}{\sqrt{n}+n} \to \mathrm{e}^4\ , \qquad \frac{n^2\log 3}{n+n^2} \to \log 3$$

e quindi per la continuità di logaritmo ed esponenziale

$$\log\Big(\frac{1+\,\mathrm{e}^4 n}{\sqrt{n}+n}\Big) + \exp\Big(\frac{n^2\log 3}{n+n^2}\Big) \to \log\,\mathrm{e}^4 + \exp(\log 3) = 4+3 = 7\ .$$