Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 3 del 17/6/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Si consideri il dominio $\mathscr{D}$ nel piano (x,y) mostrato in Fig. 1.

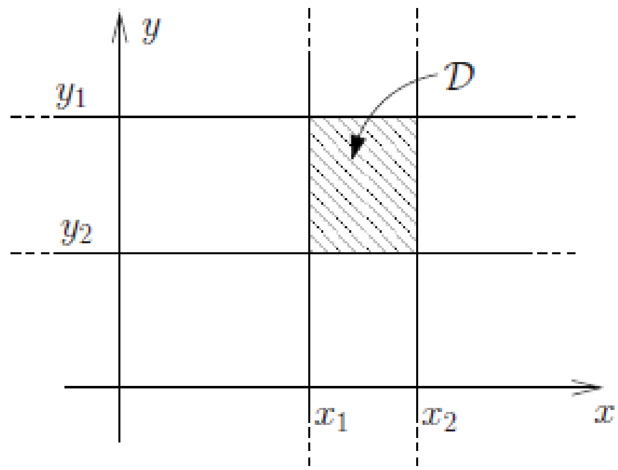

Figura 1: Densità di probabilità della v.a. X.

Data una coppia di variabili casuali (X,Y) con funzione di distribuzione congiunta $F_{XY}(x,y)$, si ricavi la $P\{(X,Y) \in \mathscr{D}\}$ in funzione di $F_{XY}(x,y)$.

2. **[12 punti]** Si considerino due variabili casuali X e Y indipendenti. Si assuma che X sia uniformemente distribuita in $[0,1]$ mentre Y sia uniformemente distribuita in $[0,2]$. Si calcoli la densità di probabilità della variabile casuale $Z = X + Y$ e se ne disegni il grafico.

3. **[12 punti]** Si consideri la trasformazione $Y = X^2 + X$ e si assuma X uniformemente distribuita in $[0,2]$. Si calcolino il valor medio e la varianza di Y.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. Come è noto, la densità di probabilità della variabile somma di due variabili casuali indipendenti è la convoluzione delle densità di probabilità. Pertanto, la densità di probabilità di Z è

$$f_Z(z) = f_X(z) \otimes f_Y(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(\alpha) f_Y(z-\alpha)\, d\alpha\,.$$

Le funzioni $f_X(\alpha)$ e $f_Y(-\alpha)$ sono mostrate in Fig. 2.

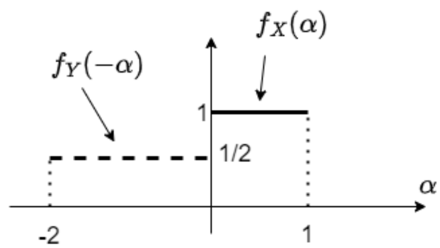

Figura 2: Funzioni $f_X(\alpha)$ e $f_Y(-\alpha)$.

Possiamo distinguere i seguenti casi:

- Per $z < 0$, e cioè quando trasliamo $f_Y(-\alpha)$ a sinistra, le due funzioni $f_X(\alpha)$ e $f_Y(z-\alpha)$ hanno supporto disgiunto. Quindi il loro prodotto è nullo e nullo sarà anche l'integrale.
- Per $0 \le z \le 1$
$$f_Z(z) = f_X(z) \otimes f_Y(z) = \int_0^z 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{z}{2}\,.$$
- Per $1 \le z \le 2$
$$f_Z(z) = f_X(z) \otimes f_Y(z) = \int_0^1 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{1}{2}\,.$$
- Per $2 \le z \le 3$
$$f_Z(z) = f_X(z) \otimes f_Y(z) = \int_{z-2}^1 1 \cdot \frac{1}{2}\, d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{z-2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{z}{2}\,.$$
- Per $z > 3$, le due funzioni $f_X(\alpha)$ e $f_Y(z-\alpha)$ hanno di nuovo supporto disgiunto. Quindi il loro prodotto è nullo e nullo sarà anche l'integrale.

La densità di probabilità di Z è mostrata in Fig. 3.

3. La densità di probabilità della v.a. X è ovviamente costante e pari a $1/2$ per $0 \le x \le 2$ e nulla altrove.

Per la linearità del valor medio

$$E\{Y\} = E\{X^2\} + E\{X\}$$

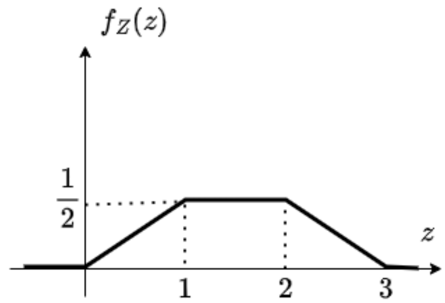

Figura 3: Densità di probabilità di Z.

Calcoliamo separatamente i singoli termini:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x\,dx = 1$$
$$E\{X^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^2\,dx = \frac{4}{3}$$

da cui si ottiene

$$E\{Y\} = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$$

Calcoliamo ora

$$E\{Y^2\} = E\{(X^2+X)^2\} = E\{X^4 + X^2 + 2X^3\} = E\{X^4\} + E\{X^2\} + 2E\{X^3\}\,.$$

Rimangono quindi da calcolare

$$E\{X^3\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^3\,dx = 2$$
$$E\{X^4\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2} x^4\,dx = \frac{16}{5}\,.$$

Otteniamo pertanto

$$E\{Y^2\} = \frac{16}{5} + \frac{4}{3} + 4 = \frac{128}{15}\,.$$

Infine

$$var\{Y\} = E\{Y^2\} - E\{Y\}^2 = \frac{128}{15} - \frac{49}{9} = \frac{139}{45}\,.$$