Risoluzione del compito n. 4 (Febbraio 2023)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z, w), con $z, w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} (4z + \mathrm{i})\Big(\mathrm{i}z + \dfrac{1 + \mathrm{i}}{w}\Big) = 2 \\ \dfrac{4z + \mathrm{i}}{w} = 1 - \mathrm{i}\ . \end{cases}$$

La prima equazione si riscrive

$$(4z+\mathrm{i})\mathrm{i}z + \frac{(4z+1)(1+\mathrm{i})}{w} = 2 \iff (4z+\mathrm{i})\mathrm{i}z + (1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 2 \iff \mathrm{i}z(4z+\mathrm{i}) = 0$$

da cui $z = 0$ oppure $4z + \mathrm{i} = 0$; la seconda scelta è da scartare perché rende impossibile la seconda equazione del sistema, quindi $z = 0$ e

$$\frac{\mathrm{i}}{w} = 1 - \mathrm{i} \qquad \iff \qquad w = \frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}\ .$$

La sola soluzione del sistema è allora

$$z = 0\ , \quad w = \frac{-1+\mathrm{i}}{2}\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = (2 + x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$.

a) **Calcolatene il dominio e i limiti agli estremi del dominio.**

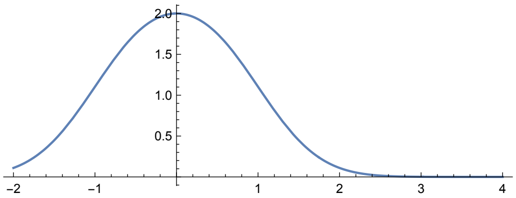
b) **Calcolate la derivata di f e i limiti di f' agli estremi del dominio, determinate gli intervalli di monotonia di f e gli eventuali punti di massimo o minimo locale.**

c) **Calcolate la derivata seconda di f e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .**

d) **Disegnate il grafico di f .**

e) **Determinate i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico di f nei punti di flesso di f e determinate (se esistono) massimo e minimo di $f'(x)$.**

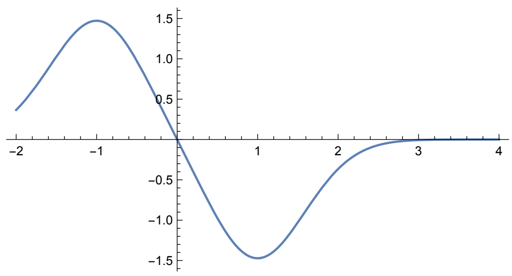
Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$, si tratta di una funzione pari, sempre positiva e che tende a 0^+ per $x \to \pm\infty$. Abbiamo poi $f'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x(2+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} = -2x(1+x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2}$ che tende a zero per $x \to \pm\infty$ e ha il segno opposto a quello di x , dunque f è strettamente crescente per $x \le 0$ e strettamente decrescente per $x \ge 0$. Non vi sono punti di minimo locale, e $\max f = f(0) = 2$.



Dato che

$$f''(x) = (-2 - 6x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2} - 2x(-2x - 2x^3)\,\mathrm{e}^{-x^2} = 2(2x^4 - x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-x^2}$$

e che $2t^2 - t - 1 = 0$ per $t = 1$ e $t = -1/2$, si ha $f''(x) > 0 \iff x^2 > 1$, dunque f è strettamente convessa per $x \le -1$, strettamente concava per $-1 \le x \le 1$ e strettamente convessa per $x \ge 1$. Dato che $f'(\pm 1) = \mp 4/\mathrm{e}$ e che f' (che tende a zero all' infinito) è crescente prima di -1 e dopo 1 , e decrescente in mezzo, il minimo e il massimo di f' sono $\pm 4/\mathrm{e}$, ed ecco un grafico approssimativo di f' (che è dispari).



PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \dfrac{1}{1 - x + x^2/3}$, $g(x) = \exp(x + x^2/6)$ **.**

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in** $x_0 = 0$ **di** $f(x)$ **.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 4 e centrato in** $x_0 = 0$ **di** $g(x)$ **.**

c) **Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per** $x \to 0$ **, della funzione** $h(x) = f(x) - g(x)$ **.**

c) **Calcolate al variare dell'esponente** $\alpha \in \mathbb{R}$ **il limite** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{h(x)}$ **.**

Usiamo lo sviluppo di $1/(1-t)$ con $t = x - x^3/3$; osserviamo che $x - x^2/3$ è un infinitesimo di ordine 1 , quindi $o(x - x^2/3)^k = o(x^k)$, quindi

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 + \left(x - \frac{x^2}{3}\right) + (\cdots)^2 + (\cdots)^3 + (\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^2}{3}\right) + \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{9}\right) + (x^3 - x^4) + x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{2x^2}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{9} + o(x^4)\ .
\end{aligned}
$$

Invece usando lo sviluppo di $\mathbf{e}^t$ con $t = x + x^2/6$, di nuovo infinitesimo di ordine 1 per cui $o(x + x^2/6)^k = o(x^k)$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 1 + \left(x + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{1}{2}(\cdots)^2 + \frac{1}{6}(\cdots)^3 + \frac{1}{24}(\cdots)^4 + o(\cdots)^4 \\
&= 1 + \left(x + \frac{x^2}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{36}\right) + \frac{1}{6}\left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{2x^2}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{36} + o(x^4)\ .
\end{aligned}
$$

Allora $h(x) = -x^4/36 + o(x^4)$ è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-x^4/36$ e

$$
\lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{h(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{-x^4/36 + o(x^4)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 4 \\ -36 & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 4. \end{cases}
$$

PROBLEMA 4

Considerate la funzione integrale $F(x) = \int_0^x \big(1 - \cos(2t) - t\,\mathrm{sen}(2t) + t^{100}\,\mathrm{e}^t\big)\,dt$.

a) **Spiegate perché $F(x)$ è infinitesima per $x \to 0$.**

b) **Motivando i passaggi eseguiti, calcolate al variare dell'esponente $\beta > 0$ il limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{x^\beta}$.**

c) **Usando queste informazioni, trovate l'ordine e la parte principale di infinitesimo per $x \to 0$ della funzione $F(x)$.**

La funzione integranda è continua su $\mathbb{R}$, quindi per il Teorema fondamentale del calcolo la funzione F , che è una sua primitiva, è derivabile e in particolare continua, quindi $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = 0$. Allora il limite di $F(x)/x^\beta$ si presenta nella forma $0/0$ con numeratore e denominatore derivabili, e possiamo provare ad applicare il Teorema di de l'Hôpital: la derivata di $F(x)$, per il Teorema fondamentale del calcolo, è

$$F'(x) = 1 - \cos(2x) - x\,\mathrm{sen}(2x) + x^{100}\,\mathrm{e}^x$$

e osserviamo che

$$\begin{aligned}
&1 - \cos(2x) - x\,\mathrm{sen}(2x) + x^{100}\,\mathrm{e}^x \\
&\quad = 1 - \Big(1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^4)\Big) - \Big(2x^2 - \frac{8x^4}{6} + o(x^4)\Big) + \big(x^{100} + o(x^{100})\big) \\
&\quad = \frac{2x^4}{3} + o(x^4)\ ,
\end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{x^\beta} &\underset{H}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(2x) - x\,\mathrm{sen}(2x) + x^{100}\,\mathrm{e}^x}{\beta x^{\beta-1}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^4/3 + o(x^4)}{\beta x^{\beta-1}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \beta - 1 < 4 \iff \beta < 5 \\ 2/15 & \text{se } \beta = 5 \\ +\infty & \text{se } \beta > 5. \end{cases}
\end{aligned}$$

Questo significa che $F(x) = 2x^5/15 + o(x^5)$, un infinitesimo di ordine 5 con parte principale $2x^5/15$.

Esercizio 1. Se $\begin{cases} z + 2w = 1 - \mathrm{i} \\ \bar{z} - \mathrm{i}\bar{w} = -1 \end{cases}$ allora

(A) $z = -1 - \mathrm{i}$.

(B) $z = 1 - \mathrm{i}$.

(C) $w = \mathrm{i}$.

(D) $w = -\mathrm{i}$.

Riscriviamo la seconda equazione come $z + \mathrm{i}w = -1$ da cui $z = -1 - \mathrm{i}w$ che sostituiamo nella prima equazione ottenendo

$$-1 - \mathrm{i}w + 2w = 1 - \mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad (2 - \mathrm{i})w = 2 - \mathrm{i} \quad \Longleftrightarrow \quad w = 1 \quad \Rightarrow \quad z = -1 - \mathrm{i}\,.$$

Esercizio 2. Quali sono i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } |x| < 1 \\ 2x^2 - 3x & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a = -3$, $b = 2$.

(B) $a = 3$, $b = -4$.

(C) $a = -2$, $b = 3$.

(D) $a = 2$, $b = 2$.

Osserviamo che $|x| < 1 \iff -1 < x < 1$, quindi

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{se } -1 < x < 1 \\ 2x^2 - 3x & \text{se } x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1. \end{cases}$$

Per il Teorema di località del limite, sappiamo già che la funzione è continua in tutti i punti tranne $x = -1$ e $x = 1$, indipendentemente da a e b ; resta da studiare la continuità in questi due punti. Abbiamo

$$f(-1) = \lim_{x \to (-1)^-} f(x) = 2 + 3 = 5\,, \qquad \lim_{x \to (-1)^+} f(x) = -a + b$$
$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 - 3 = -1\,, \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = a + b$$

quindi f è continua anche in questi due punti se e solo se

$$\begin{cases} -a + b = 5 \\ a + b = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = a + 5 \\ 2a + 5 = -1 \end{cases} \iff a = -3\,,\ b = 2\,.$$

Esercizio 3. Una primitiva di $(x + 1)\operatorname{sen} x + (x - 1)\cos x$ è

(A) $x \operatorname{sen} x - x \cos x$.

(B) $-\frac{(x+1)^2}{2} \cos x + \frac{(x-1)^2}{2} \operatorname{sen} x$.

(C) $-(x + 1)\cos x + (x - 1)\operatorname{sen} x$.

(D) $(x + 2)\cos x - (x - 2)\operatorname{sen} x$.

La funzione fra quelle proposte che ha derivata $(x + 1)\operatorname{sen} x + (x - 1)\cos x$ è $x \operatorname{sen} x - x \cos x$.

Esercizio 4. Lanciando due volte un dado con le facce numerate da 1 a 6, si vince se almeno una volta è uscito un 6. Qual è la probabilità di vincere?

(A) $11/36$.

(B) $5/36$.

(C) $1/6$.

(D) $1/3$.

Si vince se la prima volta è uscito un 6, il che accade in $1/6$ dei casi possibili, oppure se al primo lancio **non** è uscito 6 (il che accade in $5/6$ dei casi possibili) e al secondo lancio è uscito 6 (che accade in $1/6$ di questi $5/6$ dei casi). In totale

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36} .$$

Esercizio 5. La funzione $\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x^2 - 3x + 2}$ per $x \to 1$ ha limite

(A) $-\mathrm{e}$.

(B) e.

(C) $\mathrm{e}/2$.

(D) $(1 - \mathrm{e})/2$.

Scriviamo

$$\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}}{x^2 - 3x + 2} = \mathrm{e}\frac{\mathrm{e}^{x-1} - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\mathrm{e}}{x-2}\,\frac{\mathrm{e}^{x-1} - 1}{x-1} ,$$

e dato che la seconda frazione tende a 1 il limite vale $\mathrm{e}/(-1) = -\mathrm{e}$.

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integrale improprio $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\log_{\mathrm{e}}(1 + x^{-2})}{x^{-\alpha}}\, dx$

(A) converge se e solo se $\alpha < 1$.

(B) non esiste per qualche valore di α.

(C) diverge positivamente se $\alpha > 0$.

(D) converge se $\alpha = 1$.

Dato che l'argomento del logaritmo è sempre maggiore di 1, la funzione integranda è positiva, ed è continua anche per $x = 2$, dunque l'unica improprietà si ha all'infinito. Inoltre

$$\log\Bigl(1 + \frac{1}{x^2}\Bigr) = \frac{1}{x^2} + o\Bigl(\frac{1}{x^2}\Bigr)$$

dunque grazie al criterio del confronto asintotico l'integrale ha lo stesso carattere di $\int_2^{+\infty} 1/x^{2-\alpha}\, dx$, che converge se $2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1$ e diverge positivamente per $\alpha \geq 1$.

Esercizio 7. La successione $\Bigl(\dfrac{3n-1}{3n}\Bigr)^{4n}$ ha limite

(A) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}}$.

(B) $\mathrm{e}^{4/3}$.

(C) e^4.

(D) 1.

Basta riscriverla

$$\Bigl(\frac{3n-1}{3n}\Bigr)^{4n} = \Bigl[\Bigl(1 - \frac{1}{3n}\Bigr)^{3n}\Bigr]^{4/3} \to \Bigl(\frac{1}{\mathrm{e}}\Bigr)^{4/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}^4}} .$$