Risoluzione del compito n. 3 (Gennaio 2023/2)

PROBLEMA 1

Determinate le soluzioni (z,w), con $z,w \in \mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4-3\mathrm{i}}{5}zw + \dfrac{4+3\mathrm{i}}{5}z\bar{w} = 2+4\mathrm{i} \\ (3\mathrm{i}-1)z = (3\mathrm{i}+1)w\ . \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo

$$w = \frac{3\mathrm{i}-1}{3\mathrm{i}+1}z = \frac{(3\mathrm{i}-1)(1-3\mathrm{i})}{(1+3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})}z = \frac{6\mathrm{i}+8}{10}z = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}z\ ,$$

per cui sostituendo nella prima equazione questa diventa

$$\frac{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{25}z^2 + \frac{(4+3\mathrm{i})(4-3\mathrm{i})}{25}z\bar{z} = 2+4\mathrm{i} \Rightarrow z^2 + z\bar{z} = 2+4\mathrm{i}\ .$$

A questo punto possiamo sostituire subito $z = x + \mathrm{i}y$, o anche proseguire con

$$z(z+\bar{z}) = 2+4\mathrm{i} \iff z\cdot 2\Re z = 2+4\mathrm{i} \iff z\,\Re z = 1+2\mathrm{i}\ ,$$

quindi $(\Re z)^2 = 1$ e $\Re z\,\Im z = 2$, da cui $\Re z = \pm 1$ e $\Im z = 2/\Re z$, e ricaviamo

$$z_1 = 1+2\mathrm{i}\ , \qquad z_2 = -1-2\mathrm{i} = -z_1$$

da cui sostituendo nell'equazione per w

$$w_1 = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}z_1 = \frac{(4+3\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i}\ ,$$

e

$$w_2 = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}z_2 = \frac{4+3\mathrm{i}}{5}(-z_1) = -w_1\ .$$

Le due soluzioni del sistema sono

$$z_1 = 1+2\mathrm{i}\ , \quad w_1 = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i} \qquad \text{e} \qquad z_2 = -z_1\ , \quad w_2 = -w_1\ .$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = \log_{\mathrm{e}}(x^2 + x - 2) + \dfrac{x}{2} - \log_{\mathrm{e}} 18$.

a) **Calcolatene il dominio e i limiti agli estremi del dominio.**

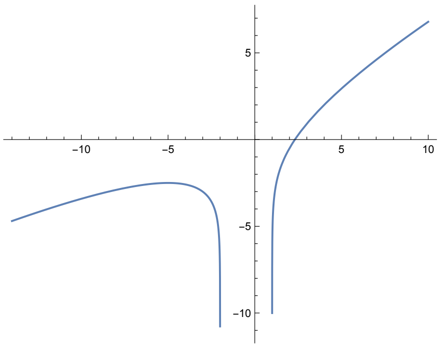
b) **Calcolate la derivata di f e i limiti di f' agli estremi del suo dominio.**

c) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e il numero di zeri di f .**

d) **Calcolate la derivata seconda di f e determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f .**

e) **Disegnate il grafico di f e determinate al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.**

La funzione è definita per $x^2 + x - 2 > 0$, cioè per $x < -2$ e per $x > 1$, tende a $-\infty$ per $x \to (-2)^-$ e per $x \to 1^+$ mentre all'infinito il termine dominante è $x/2$ per cui $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.



La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2} + \frac{1}{2} = \frac{x^2+5x}{2(x^2+x-2)}$$

che (ricordando che siamo nel dominio di f , in cui il denominatore è positivo) è positiva per $x > 0$ e per $x < -5$, negativa per $-5 < x < -2$ e si annulla per $x = -5$ dove

$$f(-5) = \log 18 - \frac{5}{2} - \log 18 = -\frac{5}{2} \, .$$

Inoltre

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \frac{1}{2} \, , \qquad \lim_{x\to(-2)^-} f'(x) = -\infty \, , \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = +\infty \, .$$

La funzione f è strettamente crescente in $]-\infty, -5]$ e anche in $]1, +\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $[-5, -2[$. Visti i limiti agli estremi e il valore in -5 , nell'intervallo aperto $]-\infty, -5[$ e nell'intervallo aperto $[-5, -2[$ assume una volta (in ciascun intervallo) ogni valore minore di $-5/2$, nel punto -5 vale $-5/2$ e nell'intervallo

$]1, +\infty[$ assume una volta ogni valore reale. In particolare f si annulla una sola volta (in un punto maggiore di 1), e l'equazione $f(x) = k$ ha

$$\begin{aligned} &\text{tre soluzioni se } k < -5/2 \\ &\text{due soluzioni se } k = -5/2 \\ &\text{una soluzione se } k > -5/2\,. \end{aligned}$$

La derivata seconda di f è

$$f''(x) = \frac{(2x+5)(x^2+x-2) - (x^2+5x)(2x+1)}{2(x^2+x-2)^2} = -\frac{2x^2+2x+5}{(x^2+x-2)^2}\,.$$

Dato che $2x^2+2x+5 > 0$ per ogni x, la derivata seconda è negativa in tutto il dominio di f, quindi f è strettamente concava sia per $x < -2$ che per $x > 1$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \log_e(1 - x^2)$, $g(x) = e^{-x^2}$.

a) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 8 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.**

b) **Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 8 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.**

c) **Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale, per $x \to 0$, della funzione $h(x) = f(x) + 1 + x^4 - g(x)$.**

c) **Determinate per quale valore del coefficiente $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite ℓ per $x \to 0$ della funzione**

$$\frac{x^8}{h(x) + \alpha x^6}$$

è reale e diverso da zero. Calcolate poi tale limite ℓ .

Abbiamo subito dagli sviluppi di $\log(1 - t)$ e di e^t

$$f(x) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + o(x^9)$$
$$g(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^9)$$

per cui

$$h(x) = -\frac{x^6}{6} - \frac{7x^8}{24} + o(x^9) \ ,$$

un infinitesimo di ordine 6 con parte principale $-x^6/6$. Allora

$$\frac{x^8}{h(x) + \alpha x^6} = \frac{x^8}{(\alpha - \frac{1}{6})x^6 - \frac{7}{24}x^8 + o(x^9)} \begin{cases} \to 0 & \text{se } \alpha - 1/6 \neq 0 \iff \alpha \neq 1/6 \\ \to -24/7 & \text{se } \alpha = 1/6. \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia $\{a_n\}_n$ una successione tale che $na_n = \mathrm{e} + o(1/n)$.
a) Provate che definitivamente $a_n > 0$.
b) Calcolate $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{a_{n+1}}^{a_n} (3n^2 + 2x)\, dx$.

Visto che $na_n \to \mathrm{e} > 0$, per il Teorema di permanenza del segno definitivamente $na_n > 0$ e quindi definitivamente $a_n > 0$. Poi $a_n = \mathrm{e}/n + o(1/n^2)$; intanto questo implica $a_n \to 0$, quindi

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} 2x\, dx = a_n^2 - a_{n+1}^2 \to 0 ,$$

mentre

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} 3n^2\, dx = 3n^2(a_n - a_{n+1}) = 3n^2\,\mathrm{e}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) + n^2 o(1/n^2)$$
$$= \frac{3\,\mathrm{e} n^2}{n^2+n} + \frac{o(1/n^2)}{1/n^2} \to 3\,\mathrm{e} .$$

Esercizio 1. Le radici quadrate di $33-56\mathrm{i}$ sono

(A) $\pm(7-4\mathrm{i})$.	(C) $\pm(8-7\mathrm{i})$.
(B) $\pm\big(\sqrt{33}-\mathrm{i}\sqrt{56}\,\big)$.	(D) $\pm\big(\sqrt{33}+\mathrm{i}\sqrt{56}\,\big)$.

Potremmo anche (è un po' faticoso) cercare le radici, ma visto che ci sono quattro risposte proviamo se ne possiamo scartare qualcuna; tenendo conto che $(a+\mathrm{i}b)^2=(a^2-b^2)+2\mathrm{i}ab$ e quindi il prodotto ab deve valere $-56/2=-28$, se ne scartano istantaneamente tre, e rimane solo $\pm(7-4\mathrm{i})$.

Esercizio 2. Se f non è monotona su $[a,b]$

(A) può ugualmente essere iniettiva.	(C) $f(a)=f(b)$.
(B) $f([a,b])$ non è un intervallo.	(D) f ha un punto di massimo interno.

Se f fosse continua, sarebbe iniettiva se e solo se strettamente monotona, ma anche se non è continua può comunque essere iniettiva: ad esempio la funzione su $[0,1]$ che vale x per $0\le x<1$ e -100 per $x=1$ è iniettiva ma non monotona. Le altre risposte sono errate, ad esempio la funzione x^2 su $[-1,2]$ non è monotona, però ha come immagine un intervallo, non ha massimi interni e non verifica $f(-1)=f(2)$.

Esercizio 3. Se $f(x)=2\log|x|-3x^3$ allora

(A) $f''(-1)=16$.	(C) $f'(-2)=f'(2)$.
(B) $f''(1)=-20/2!$.	(D) f'' è dispari.

Calcoliamo per $x\neq 0$

$$f'(x)=\frac{2}{x}-9x^2 \quad\Rightarrow\quad f'(-2)=-37\neq f'(2)=-35$$
$$f''(x)=-\frac{2}{x^2}-18x \quad\Rightarrow\quad f''(1)=-20\,,\quad f''(-1)=16$$

ed essendo $f''(-1)\neq -f''(1)$ la derivata seconda non è dispari.

Esercizio 4. Il valore di $\left[\binom{5}{3}+\binom{7}{2}\right]\cdot\binom{6}{4}$ è

(A) 465 .	(C) 225 .
(B) 324 .	(D) 210 .

Calcoliamo

$$\left[\binom{5}{3}+\binom{7}{2}\right]\cdot\binom{6}{4}=\left[\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2}+\frac{7\cdot6}{2}\right]\cdot\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2}=[10+21]\cdot15=31\cdot15\qquad\{=465\}$$

(osserviamo che $31\cdot15>30\cdot15=450$ quindi la risposta giusta è chiara anche senza fare il calcolo esatto).

Esercizio 5. Sia S l'insieme delle soluzioni della disequazione $\sqrt{x^2-4} \le \dfrac{x}{2}+1$. Allora:

(A) $]2,10/3[\subset S$.

(B) S è un intervallo.

(C) $-2 \notin S$.

(D) S non è limitato superiormente.

Intanto occorre che sia $x^2-4 \ge 0$ ossia $x \le -2$ oppure $x \ge 2$. Inoltre il secondo membro non può essere negativo, dunque $x \ge -2$. Ora che ambo i membri esistono e sono non negativi, eleviamoli al quadrato (il quadrato è crescente sui non negativi) e abbiamo

$$x^2-4 \le \frac{x^2}{4}+x+1 \iff -2 \le x \le \frac{10}{3} \,,$$

e mettendo insieme le tre condizioni otteniamo $S=\{-2\}\cup[2,10/3]$, e la sola risposta esatta è che $]2,10/3[\subset S$.

Esercizio 6. Dato il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{2n^4+3n^2}{5n+7}\cdot \operatorname{sen}(1/n)$

(A) converge se e solo se $\alpha > 3$.

(B) converge per ogni $\alpha > 2$.

(C) ha somma $2/5$ se $\alpha = 2$.

(D) è indeterminata per almeno un valore di α .

Si tratta di una serie a termini positivi, e dato che

$$\frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{2n^4+3n^2}{5n+7}\cdot\operatorname{sen}(1/n) = \frac{1}{n^\alpha}\cdot\frac{n^4(2+3/n^2)}{n(5+7/n)}\cdot\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{2+3/n^2}{5+7/n}\cdot\frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-2}}$$

e che il prodotto delle prime due frazioni tende a $2/5$, per il criterio del confronto asintotico la serie ha lo stesso carattere di $\sum 1/n^{\alpha-2}$, dunque converge se e solo se $\alpha-2>1 \iff \alpha>3$, e diverge positivamente per $\alpha \le 3$.

Esercizio 7. La successione $\dfrac{\sqrt[n]{2n!}}{3n-\sqrt[n]{7n}}$ ha limite

(A) $\dfrac{1}{3\,\mathrm{e}}$.

(B) $\dfrac{2}{3\,\mathrm{e}}$.

(C) $-\dfrac{1}{4\,\mathrm{e}}$.

(D) $+\infty$.

Sappiamo che per $a>0$ qualsiasi $\sqrt[n]{a}\to 1$ e che $\sqrt[n]{n}\to 1$, quindi

$$\frac{\sqrt[n]{2n!}}{3n-\sqrt[n]{7n}} = \frac{\sqrt[n]{2}}{3-\frac{1}{n}\sqrt[n]{7n}}\cdot\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{2}}{3-\frac{1}{n}\sqrt[n]{7n}}\cdot\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \to \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\mathrm{e}} \,.$$