Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 1 del 17/6/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Si fornisca la definizione della funzione delta di Dirac e se ne illustri il significato e l'utilità.

2. **[12 punti]** In un primo turno elettorale il candidato A ha avuto il 45% dei voti, il candidato B il 55%. Al secondo turno vengono ripetute con gli stessi elettori, e dagli exit-poll risulta che: 1) il 10% di quelli che avevano votato A ora hanno votato B; 2) il 20% di chi aveva votato B ora ha votato A. Chi ha vinto (secondo gli exit-poll) il secondo turno?

3. **[12 punti]** Sia X una variable aleatoria definita nell'intervallo $[-1,1]$ con funzione di densità di probabilità
$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
Si supponga che $Y = X^4$. Trovare la densità $f_Y(y)$ usando il metodo grafico (attraverso l'uso della funzione di distribuzione).

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2.

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \{\text{voto per } A \text{ al primo turno}\}: \ P(A_1) = 0.45 \\
B_1 &= \{\text{voto per } B \text{ al primo turno}\}: \ P(B_1) = 0.55 \\
E &= \{\text{voto cambiato}\}: \ P(E|A_1) = 0.1, \ P(E|B_1) = 0.2.
\end{aligned}
$$

La probabilità che gli elettori abbiano votato A al secondo turno è

$$P(A_2) = P(A_1)[1-P(E|A_1)] + P(B_1)P(E|B_1) = 0.45*0.9 + 0.55*0.2 = 0.515$$

E quindi A al secondo turno ha avuto il 51.5% mentre B ha avuto il 48.5%.

3.

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-t^2)dt = \frac{1}{4}(2+3x-x^3)$$

Quindi

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4}(2+3x-x^3) & -1 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

Y è definita nell'intervallo $[0,1]$, e usando il metodo grafico:

$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(X^4 \le y) = P(-\sqrt[4]{y} \le X \le \sqrt[4]{y}) \\
&= P(X \le \sqrt[4]{y}) - P(X \le -\sqrt[4]{y}) = F_X(\sqrt[4]{y}) - F_X(-\sqrt[4]{y}) \\
&= \frac{1}{4}(2+3\sqrt[4]{y} - \sqrt[4]{y}^3) - \frac{1}{4}(2+3(-\sqrt[4]{y}) - (-\sqrt[4]{y})^3)
\end{aligned}
$$

Da cui

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{6}{16}(y^{-3/4} - y^{-1/4})$$