

Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova del 16/5/2024

Tempo a disposizione: 90 minuti

1. **[6 punti]** Si spieghi la differenza tra disposizioni semplici, disposizioni con ripetizione, permutazioni e combinazioni.
2. **[6 punti]** Definire la funzione di distribuzione cumulativa e illustrarne le principali proprietà.
3. **[10 punti]** Un'urna contiene 5 palline bianche e 5 nere. Si lancia un dado non truccato, e si estraggono (senza reimmetterle) un numero di palline dall'urna pari al punteggio del dado.
 - a) Qual è la probabilità che tutte le palline estratte siano nere?
 - b) Qual è la probabilità che il punteggio del dado sia pari a r dato che tutte le palline estratte sono nere?
4. **[10 punti]** Si consideri la funzione

$$g(x) = \begin{cases} x & |x| \geq 2 \\ 0 & |x| < 2 \end{cases}$$

e una generica funzione di distribuzione cumulativa (CDF) della variabile aleatoria X come in figura.

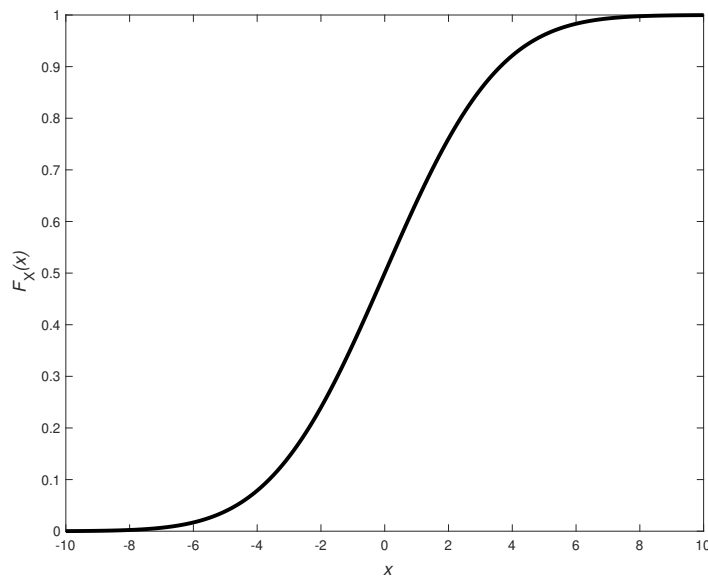


Figura 1: Funzione $F_X(x)$.

Lavorando solo con la CDF (metodo grafico), si determini qualitativamente la CDF di $Y = g(X)$, tracciandone un grafico.

Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova del 16/5/2024
Available time: 90 min.

1. **[6 punti]** Explain the differences among permutations, k -permutations (partial permutation without repetition), permutation with repetition and combinations.
2. **[6 punti]** Define the cumulative distribution function and provide its main properties.
3. **[10 punti]** An urn contains 5 white balls and 5 black balls. A fair die is tossed and a number of balls equal to the score is drawn from the urn.
 - a) What is the probability that all the drawn balls are black?
 - b) What is the probability that the score of the die is equal to r given that all the drawn balls are black?
4. **[10 punti]** Consider the function

$$g(x) = \begin{cases} x & |x| \geq 2 \\ 0 & |x| < 2 \end{cases}$$

and a generic cumulative distribution function of the random variable X as in figure.

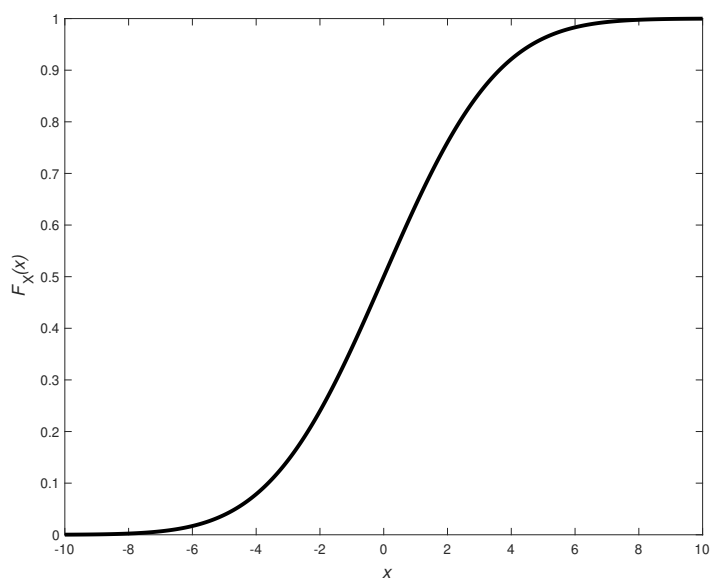


Figura 2: Function $F_X(x)$.

Using the "graphical" method, find qualitatively the cumulative distribution function of $Y = g(X)$, and draw its graph.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.
2. Domanda di teoria.
- 3.

$A = \{\text{tutte le palline estratte sono nere}\}$

$B_i = \{\text{il punteggio del dado è } i\} \quad i = 1, \dots, 6$

a) Dalla probabilità condizionata

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A|B_i)P(B_i)$$

in cui ovviamente

$$P(B_i) = 1/6$$

e

$$P(A|B_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P(A|B_3) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

$$P(A|B_4) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{42}$$

$$P(A|B_5) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{252}$$

$$P(A|B_6) = 0$$

da cui si ottiene

$$P(A) = \sum_{i=1}^6 P(A|B_i)P(B_i) = \frac{5}{36}$$

b)

$$P(B_r|A) = \frac{P(A|B_r)P(B_r)}{P(A)}$$

che vale $\frac{3}{5}, \frac{4}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{35}, \frac{1}{210}$ e 0 per $r = 1, \dots, 6$.

4. Se $y \geq 2$ si ha $g(x) \leq y$ per $x \leq y$, quindi $F_Y(y) = F_X(y)$.
Se $0 \leq y < 2$ si ha $g(x) \leq y$ per $x < 2$, quindi $F_Y(y) = F_X(2)$.
Se $-2 < y < 0$ si ha $g(x) \leq y$ per $x \leq -2$, quindi $F_Y(y) = F_X(-2)$.
Se $y \leq -2$ si ha $g(x) \leq y$ per $x \leq y$, quindi $F_Y(y) = F_X(y)$.

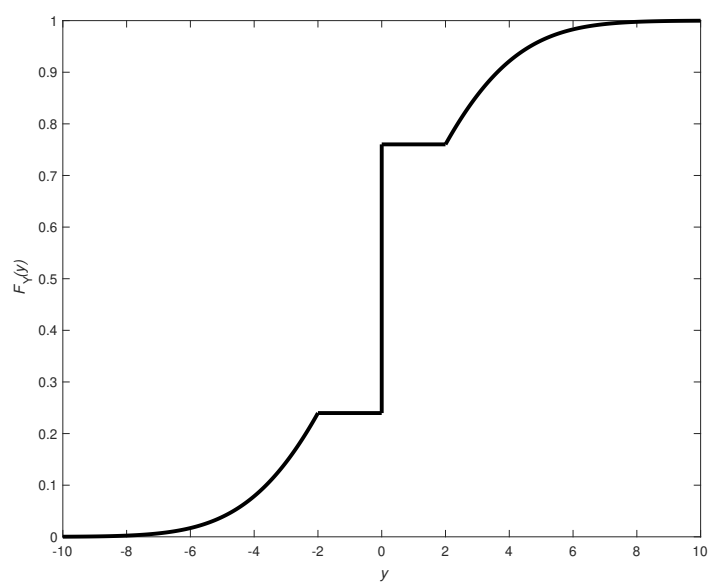


Figura 3: Funzione $F_Y(y)$.