

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA - C. L. IN INGEGNERIA I. E. T.  
ANALISI MATEMATICA - PROF. DOMENICO MUCCI  
ESERCIZI PROPOSTI SUL CAP. 6 : FUNZIONI DERIVABILI

### Calcolo di derivate di funzioni

$$x^2 e^x + \sin x \cos x, \quad \frac{x^4}{x^2 + 1}, \quad \frac{x + \cos x}{x - \sin x}, \quad \cos(x^3 \sin x),$$

$$\sqrt{2 + \sin^2(3x)}, \quad 2^{\sin x}, \quad x^{\log x}, \quad (\sin x)^{\cos x}, \quad (x^2)^{(x^3)}.$$

### Applicazioni del teorema sulla derivata dell'inversa e del teorema di Lagrange

- i) Data la funzione  $f(x) = \log x + e^{x^2}$ , trovatene il dominio e l'immagine, dimostrate che è invertibile e che l'inversa  $f^{-1}$  è derivabile.  
Calcolate la derivata  $(f^{-1})'(x_0)$  della funzione inversa nel punto  $x_0 = e$ .  
Scrivete l'equazione della retta tangente al grafico di  $f^{-1}$  nel punto  $(e, f^{-1}(e))$ .
- ii) Provate che  $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$  per ogni  $x > 0$ .
- iii) Trovate il numero di soluzioni  $x \in \mathbb{R}$  dell'equazione  $e^x - x = k$  al variare di  $k \in \mathbb{R}$ .
- iv) Determinate l'estremo superiore e inferiore della funzione  $f(x) = x^3 - 5x^2/2 - 2x$  su  $A = ] - 3/2, 2[$ , specificando se sono massimo e/o minimo.
- v) Determinate l'estremo superiore e inferiore della funzione  $g(x) = e^{-x^2}(x^2 - 1)$  su  $A = \mathbb{R}$ , specificando se sono massimo e/o minimo.
- vi) Trovate gli intervalli di monotonia della funzione  $f(x) = |x|e^x$ .
- vii) Trovate gli intervalli di monotonia della funzione  $g(x) = \arctan(2x) - \log x$ .

### Applicazioni del teorema di de l'Hôpital

Determinate i valori di  $a, b \in \mathbb{R}$  per i quali la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(1 + ax) - b \log(x + e) & \text{se } x > 0 \\ (b - 2)x^2 + \cos(bx) + \pi/4 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

risulta derivabile su tutto  $\mathbb{R}$ .

### Funzioni convesse

Determinate gli intervalli di convessità e/o concavità delle seguenti funzioni:

$$\frac{1}{1 + x^2}, \quad \frac{|x|}{1 + x^2}, \quad |x|^4 + 6|x|^3 + 12|x|^2 - 5x + 1.$$