Metodi Probabilistici

Laurea Triennale in Ingegneria Elettronica, Informatica e delle Telecomunicazioni
Laurea Triennale in Tecnologie Informatiche

Prova parziale nr. 2 del 17/6/2024
Tempo a disposizione: 60 minuti

1. **[8 punti]** Calcolare la media della variabile aleatoria esponenziale (funzione di densità di probabilità: $f_X(x) = \mu e^{-\mu x} u(x)$ con $u(x)$ funzione gradino unitario) attraverso il calcolo della sua funzione generatrice dei momenti.

2. **[12 punti]** Sia $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, e $Y = g(x)$ con

$$g(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x \leq -1. \end{cases}$$

   Si determini la funzione di densità di probabilità di Y e la si disegni (si usi la funzione Q Gaussiana per indicare i valori degli integrali).

3. **[12 punti]** Si supponga che ci siano 5 lampadine etichettate da 1 a 5. Il tempo di vita T della lampadina n (in mesi) ha distribuzione esponenziale con parametro n [e cioè ha pdf $ne^{-nt}u(t)$], per $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Si seleziona una lampadina a caso e la si testa.
   a) Trovare la probabilità che la lampadina selezionata duri più di un mese.
   b) Dato che la lampadina dura più di un mese, trovare la probabilità condizionata di ciascuna lampadina.

Soluzione:

1. Domanda di teoria.

2. Per $|x| < 1$ si ha un tratto orizzontale di $y = g(x)$ nel quale $y = 0$, per cui si una delta di Dirac associata a una probabilità

$$P\{Y = 0\} = P\{-1 \leq X \leq 1\} = Q(-1) - Q(1) \simeq 0.68.$$

Per $x \leq -1$ si ha $-\infty < y \leq 0$, $g(x) = x + 1$ da cui la soluzione $x(y) = y - 1$, $g'(x) = 1$ per cui

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}$$

mentre per $x \geq 1$ si ha $0 \leq y < \infty$, $g(x) = x - 1$ da cui la soluzione $x(y) = y + 1$, $g'(x) = 1$ per cui

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y+1)^2}{2}}.$$

Quindi sostanzialmente la PDF di Y ha una delta nell'origine di peso $Q(-1) - Q(1)$, e due tratti continui dati dalle due repliche di PDF Gaussiane traslate di 1 e -1 rispettivamente a destra e sinistra dell'origine.

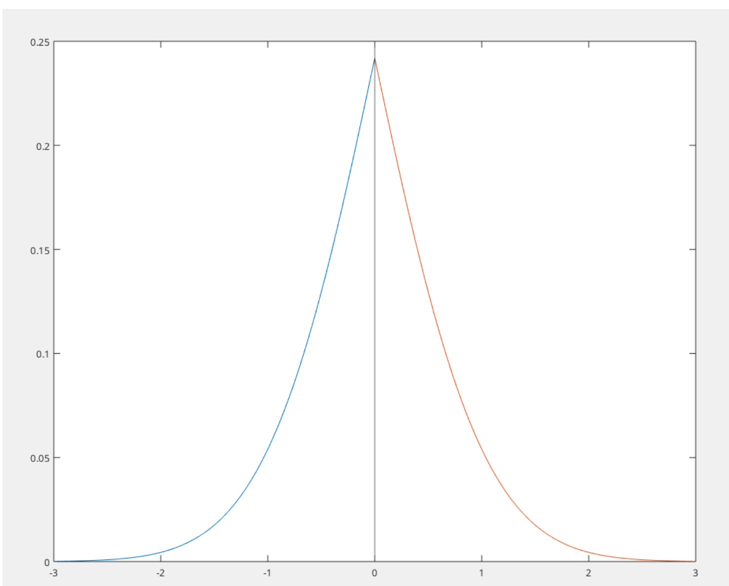

Figura 1: Densità di probabilità della VA Y.

3. Si consideri l'evento

$$L_n = \{\text{viene selezionata la lampadina n}\}.$$

Ovviamente è $P(L_n) = 1/5$. Inoltre, sappiamo che

$$f_T(t|L_n) = ne^{-nt}u(t)$$

da cui ricaviamo che

$$P\{T > 1|L_n\} = \int_1^{+\infty} ne^{-nt}dt = e^{-n}$$

Per il teorema della probabilità totale, si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} P(T > 1) = P\{T > 1|L_1\}P(L_1) + P\{T > 1|L_2\}P(L_2) + P\{T > 1|L_3\}P(L_3) \\ + P\{T > 1|L_4\}P(L_4) + P\{T > 1|L_5\}P(L_5) = 0.1156. \end{aligned}$$

Infine

$$p(L_n|T > 1) = \frac{P(T > 1|L_n)P(L_n)}{P(T > 1)} = \frac{e^{-n}}{0,578}$$

da cui si ottengono le probabilità richieste sostituendo i valori $n = 1,2,3,4,5$.