

1 Determinanti e matrici inverse

1. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a-b & a \\ b & a+b \end{pmatrix};$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & -2 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 1 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcolare l'inversa, quando esiste, delle matrici dell'esercizio 1.

3. Calcolare l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Dire per quali valori reali del parametro k le seguenti matrici sono invertibili:

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$(a) \det(AB^{-1}), \text{ con } A, B \in M_7(\mathbb{R}), \det(A) = 2, \det(B) = 7;$$

$$(b) \det(AC^TB^{-1}), \text{ con } A, B \in M_3(\mathbb{R}), \det(A) = 1, \det(B) = -2, C = 2A;$$

$$(c) \det(A(CB)^{-1}), \text{ con } A, B \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) = 3, \det(B) = -4, C = -3A;$$

$$(d) \det(-3(A^TB)^{-1}), \text{ con } A, B \in M_3(\mathbb{R}), \det(A) = 2, \det(B) = -1;$$

$$(e) \det((A^TB)^{-1}C), \text{ con } A, B \in M_2(\mathbb{R}), \det(A) = \frac{1}{2}, \det(B) = -\frac{1}{4}, C = 2A;$$

Soluzioni

1. (a) $-22, -14, a^2 - b^2 - ab$.

(b) $-5, -13, 0$.

(c) $-19, -171$.

2. (a) $-\frac{1}{22} \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{a^2-b^2-ab} \begin{pmatrix} a+b & -a \\ -b & a-b \end{pmatrix}$

(b) $-\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -6 & 5 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -17 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \text{ non esiste.}$

(c) $\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 23 & 9 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & 1 & 8 \\ -6 & -4 & 3 & 5 \\ -8 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \frac{1}{171} \begin{pmatrix} 76 & 19 & 0 & 0 \\ -76 & 38 & 0 & 0 \\ -29 & 31 & 9 & 27 \\ 7 & 22 & 45 & -36 \end{pmatrix}.$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

4. $k \neq 0, 2, k \neq 0, 1, k \neq \frac{1}{2}$.

5. (a) $\frac{2}{7}$, (b) -4 , (c) $-\frac{1}{36}$, (d) $\frac{27}{2}$, (e) -16 .