Risoluzione del compito n. 6 (Giugno 2023)

PROBLEMA 1

Trovate le soluzioni (z,w), con $z,w\in\mathbb{C}$, del sistema

$$\begin{cases} z-\bar{z}w=4+2\mathrm{i}\\ z+z\bar{w}=-4+2\mathrm{i}\\ |z|=2\,. \end{cases}$$

Coniugando ambo i membri della seconda equazione, le prime due diventano

$$z-\bar{z}w=4+2\mathrm{i}\,,\qquad \bar{z}+\bar{z}w=-4-2\mathrm{i}$$

da cui sommando membro a membro $z+\bar{z}=2\Re z=0$, dunque z è immaginario puro, $z=\mathrm{i}b$. Ma la terza equazione del sistema dice che $b=\pm2$, quindi $z=\pm2\mathrm{i}$. Sostituendo nella prima equazione del sistema di partenza questa diviene

$$\pm2\mathrm{i}-(\mp2\mathrm{i})w=4+2\mathrm{i}\Rightarrow\pm2\mathrm{i}w=4+2\mathrm{i}\mp2\mathrm{i}\Rightarrow2\mathrm{i}w=\pm(4+2\mathrm{i})-2\mathrm{i}=\begin{cases}4\\-4-4\mathrm{i}\end{cases}$$

e quindi dividendo per 2 e moltiplicando per $-\mathrm{i}$ ricaviamo i due valori di w. Le due soluzioni del sistema sono dunque

$$z=+2\mathrm{i}\,,\quad w=-2\mathrm{i}\qquad z=-2\mathrm{i}\,,\quad w=2\mathrm{i}-2\,.$$

PROBLEMA 2

Considerate la funzione $f(x) = x^3 + 5x^2 - 8|x|$.

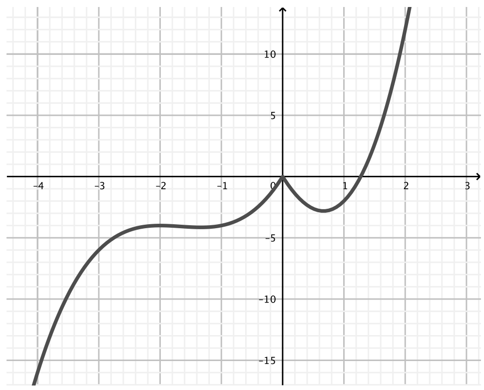
a) **Calcolatene i limiti agli estremi del dominio ed il numero di zeri.**

b) **Determinate gli intervalli di monotonia di f e i punti di massimo o minimo locale.**

c) **Determinate gli intervalli di convessità e/o concavità di f e i punti di flesso.**

d) **Disegnate il grafico di f .**

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$ ed ha limite $\pm\infty$ per $x \to \pm\infty$. Inoltre si annulla in zero, mentre vale $x(x^2 + 5x - 8)$ per $x > 0$ e $x(x^2 + 5x + 8)$ per $x < 0$. Dato che il polinomio $x^2 + 5x - 8$ ha coefficiente di x^2 positivo e terzo coefficiente negativo, l'equazione $x^2 + 5x - 8 = 0$ ha una soluzione negativa e una positiva, quindi l'equazione $f(x) = 0$ ha una soluzione positiva x_0 . Invece, il polinomio x^2+5x+8 ha discriminante negativo, dunque l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni negative. Quindi la funzione ha due zeri, $x = 0$ e $x = x_0 = (\sqrt{57} - 5)/2$.



La funzione è sicuramente derivabile per $x \neq 0$. Per $x > 0$ ha derivata

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 8 = (3x - 2)(x + 4)$$

che è negativa per $0 < x < 2/3$, nulla per $x = 2/3$ e positiva per $x > 2/3$. Invece, per $x < 0$ ha derivata

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 8 = (3x + 4)(x + 2)$$

che è negativa per $-2 < x < -4/3$, nulla per $x = -2$ e $x = -4/3$, positiva per $x < -2$ o per $-4/3 < x < 0$. Inoltre, dato che $f'(x) \to \mp 8$ per $x \to 0^{\pm}$, per un corollario del teorema di de L'Hôpital deduciamo che $f'_-(0) = 8$ e $f'_+(0) = -8$, dunque la funzione non è derivabile in $x = 0$, dove ha un punto angoloso.
Allora f è strettamente crescente in $]-\infty, -2]$, in $[-4/3, 0]$ e in $[2/3, +\infty[$, mentre è strettamente decrescente in $[-2, -4/3]$ e in $[0, 2/3]$. I punti $x = -4/3$ e $x = 2/3$ sono di minimo locale stretto, mentre $x = -2$ e $x = 0$ sono di massimo locale stretto.

Notiamo che grazie all' informazione sugli intervalli di monotonia possiamo usare un'altra strada per rispondere alla domanda sugli zeri di f diversi da $x = 0$. Infatti, dato che $f(-2) = -4$, la funzione è sempre negativa per $x < 0$, mentre dal segno $f(2/3) < f(0) = 0$ e dall'andamento a $+\infty$, per il teorema dei valori intermedi otteniamo che il grafico di f interseca l'asse delle ascisse in uno e un solo punto x_0 maggiore di $2/3$.
Per $x \neq 0$ risulta $f''(x) = 6x + 10 = 6(x + 5/3)$, dunque la derivata seconda di f è negativa per $x < -5/3$, positiva per $-5/3 < x < 0$ e per $x > 0$, mentre ovviamente non esiste per $x = 0$. Quindi la funzione è strettamente concava in $]-\infty, -5/3]$ e strettamente convessa in $[-5/3, 0]$ e in $[0, +\infty[$, ma non nella loro unione in quanto $f'_{\pm}(0) = \mp 8$ e quindi $f'_{-}(0) > f'_{+}(0)$; il grafico di f ha un punto di flesso in corrispondenza di $x = -5/3$.

PROBLEMA 3

Considerate le funzioni $f(x) = \mathrm{sen}(\log(\cos(2x)))$ e $g(x) = \mathrm{sen}(\cos(2x) - 1)$.

a) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $f(x)$.

b) Scrivete lo sviluppo di Taylor di ordine 6 e centrato in $x_0 = 0$ di $g(x)$.

c) Determinate l'ordine di infinitesimo e la parte principale per $x \to 0$ della funzione $f(x) - g(x)$.

c) Calcolate, per tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste, il limite

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x) + \alpha x^4}{x^6}.$$

Sappiamo che

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{6!} + o(t^6), \quad \log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$$

dove $6! = 720 = 45 \cdot 2^4$, dunque con $t = 2x$ abbiamo

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + o((2x)^6) = 1 + \Big(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Big).$$

Poiché $o(-2x^2 + o(x^2))^3 = o(x^6)$,

$$\begin{aligned}\log(\cos(2x)) &= \log\Big(1 + \Big(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Big)\Big)\\ &= -2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6) - \frac{1}{2}\Big(4x^4 - \frac{8x^6}{3}\Big) + \frac{1}{3}\left(-8x^6\right)\\ &= -2x^2 - \frac{4x^4}{3} - \frac{64x^6}{45} + o(x^6).\end{aligned}$$

Da questo, dato che $\mathrm{sen}\, t = t - t^3/6 + o(t^3)$, segue

$$f(x) = -2x^2 - \frac{4x^4}{3} - \frac{64x^6}{45} + o(x^6) - \frac{1}{6}(-2x^2)^3 = -2x^2 - \frac{4x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6).$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}(\cos(2x) - 1) &= \mathrm{sen}\Big(-2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6)\Big)\\ &= -2x^2 + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^6}{45} + o(x^6) - \frac{1}{6}\left(-8x^6\right)\\ &= -2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{56x^6}{45} + o(x^6).\end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) - g(x) = -2x^4 - \frac{4x^6}{3} + o(x^6) = -2x^4 + o(x^4)$$

è un infinitesimo di ordine 4 con parte principale $-2x^4$. Infine, per $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - g(x) + \alpha x^4}{x^6} = \frac{(\alpha - 2)x^4 - 4x^6/3 + o(x^6)}{x^6} = (\alpha - 2)x^{-2} - \frac{4}{3} + \frac{o(x^6)}{x^6}$$

da cui otteniamo che il limite ℓ_α esiste per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e vale

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 2\\ -4/3 & \text{se } \alpha = 2\\ -\infty & \text{se } \alpha < 2.\end{cases}$$

PROBLEMA 4

Sia $\boldsymbol{a_n = n \int_{1/n^2}^{1/n} (-1 - \log x)\, dx}$ **.**

a) **Calcolate** $\boldsymbol{a_n}$ **.**

b) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} a_n}$ **.**

c) **Calcolate** $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n}}{n}}$ **.**

Ricordiamo che una primitiva di $\log x$ è $x \log x - x$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \Big[-x - x\log x + x\Big]_{1/n^2}^{1/n} = \Big[-x\log x\Big]_{1/n^2}^{1/n} = \frac{1}{n}\log n - \frac{1}{n^2}\log n^2 \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\log n = \frac{n-2}{n^2}\log n \, . \end{aligned}$$

perciò

$$a_n = \frac{n-2}{n}\log n \to +\infty \, .$$

Inoltre riscrivendo

$$a_n = \log\left(n^{(n-2)/n}\right) = \log\left(n \cdot n^{-2/n}\right)$$

abbiamo subito

$$\frac{e^{a_n}}{n} = \frac{n \cdot n^{-2/n}}{n} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \to 1$$

dato che $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Esercizio 1. Se z_1 e z_2 sono le soluzioni di $z^2-(2-2\mathrm{i})z+3-6\mathrm{i}=0$ allora z_1+z_2 vale

(A) $2-2\mathrm{i}$.	(C) $5-8\mathrm{i}$.
(B) $3-6\mathrm{i}$.	(D) $1-4\mathrm{i}$.

Non serve risolvere l'equazione; infatti se z_1 e z_2 sono le radici di un trinomio di secondo grado az^2+bz+c allora

$$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)=az^2-a(z_1+z_2)z+az_1z_2\ ,$$

quindi la somma delle radici è $-b/a$ e il prodotto delle radici è c/a . Nel nostro caso la somma vale dunque $2-2\mathrm{i}$. Naturalmente si può anche risolvere l'equazione ricavando le soluzioni $z_1=-3\mathrm{i}$ e $z_2=2+\mathrm{i}$.

Esercizio 2. Quali sono i valori di $a,b\in\mathbb{R}$ per i quali la funzione

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{se } |2-x|\geq 3 \\ 2x^2 & \text{se } |2-x|<3 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$?

(A) $a=8\ ,\ b=10$.	(C) $a=-6\ ,\ b=-10$.
(B) $a=-10\ ,\ b=6$.	(D) $a=10\ ,\ b=-8$.

Osserviamo che $|2-x|<3 \iff -1<x<5$, quindi

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{se } x\leq -1 \text{ oppure } x\geq 5 \\ 2x^2 & \text{se } -1<x<5. \end{cases}$$

Per il Teorema di località del limite, sappiamo già che la funzione è continua in tutti i punti tranne $x=-1$ e $x=5$, indipendentemente da a e b ; resta da studiare la continuità in questi due punti. Abbiamo

$$f(-1)=\lim_{x\to(-1)^-}f(x)=-a+b\ ,\qquad \lim_{x\to(-1)^+}f(x)=2$$
$$f(5)=\lim_{x\to 5^+}f(x)=5a+b\ ,\qquad \lim_{x\to 5^-}f(x)=50$$

quindi f è continua anche in questi due punti se e solo se

$$\begin{cases} -a+b=2 \\ 5a+b=50 \end{cases} \iff \begin{cases} b=a+2 \\ 6a+2=50 \end{cases} \iff a=8\ ,\ b=10\ .$$

Esercizio 3. Se $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ hanno derivata continua e $f'(x)\leq g'(x)$ per ogni x allora

(A) $g(a) - g(b) \le f(a) - f(b)$.	(C) $f(x) + g(x)$ è crescente.
(B) $f(x) \le g(x)$ per ogni x .	(D) $f''(x) \le g''(x)$ per ogni x .

Dato che
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt \le \int_a^b g'(t)\,dt = g(b) - g(a)\ ,$$
la risposta corretta è che
$$g(b) - g(a) \ge f(b) - f(a) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(a) - g(b) \le f(a) - f(b)\ .$$
Controlliamo comunque con un esempio che le altre risposte sono errate: se $f(x) = x^2+1$ e $g(x) = 0$ su $[-1, 0]$, è vero che $f' \le g'$ ma $f(x) > g(x)$, $f + g$ è decrescente e $f'' > g''$.

Esercizio 4. Un cameriere apparecchia una tavola per 10 persone, usando 3 tovaglioli bianchi e 7 color crema. In quanti modi diversi potrà apparecchiare la tavola?

(A) 120 .	(C) 21 .
(B) $\binom{7}{3}$.	(D) $\dfrac{7!}{3!}$.

Si tratta di scegliere dove mettere i 3 tovaglioli bianchi, e questo si può fare in $\binom{10}{3} = 120$ modi diversi.

Esercizio 5. La funzione $2x^2 - x^3 \operatorname{sen}(2/x)$ per $x \to +\infty$ ha limite

(A) $4/3$.	(C) $+\infty$.
(B) $2/3$.	(D) 0 .

Osserviamo che $1/x \to 0^+$ per $x \to +\infty$, quindi
$$\lim_{x\to+\infty}\Big(2x^2 - x^3 \operatorname{sen}\frac{2}{x}\Big) = \lim_{t\to0^+}\Big(\frac{2}{t^2} - \frac{1}{t^3}\operatorname{sen}(2t)\Big) = \lim_{t\to0^+}\frac{2t - \operatorname{sen}(2t)}{t^3}\ .$$
Dato che $\operatorname{sen}(2t) = 2t - (8t^3)/6 + o(t^3)$, proseguiamo con
$$\cdots = \lim_{t\to0^+}\frac{4t^3/3 + o(t^3)}{t^3} = \frac{4}{3}\ .$$

Esercizio 6. L'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\ \mathrm{e}^{-5x^3}\,dx$

(A) vale $\dfrac{1}{15\ \mathrm{e}^5}$.	(C) vale $+\infty$.
(B) vale e^{-5} .	(D) vale $1/15$.

Dato che ci viene chiesto un valore preciso, dobbiamo trovare una primitiva di $x^2\ \mathrm{e}^{-5x^3}$, ma si vede subito che sarà del tipo $k\cdot\ \mathrm{e}^{-5x^3}$, e la costante giusta per far tornare come derivata $x^2\,\mathrm{e}^{-5x^3}$ è $k=-1/15$. Allora una primitiva è $-\,\mathrm{e}^{-5x^3}/15=-1/\bigl(15\,\mathrm{e}^{5x^3}\bigr)$ e

$$\int_1^{+\infty} x^2\ \mathrm{e}^{-5x^3}\,dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^2\ \mathrm{e}^{-5x^3}\,dx=\lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{15\,\mathrm{e}^{5x^3}}\right]_1^M=\frac{1}{15\ \mathrm{e}^5}\,.$$

Esercizio 7. La successione $\dfrac{n-\sqrt{n^2-3n+4}}{n-\sqrt{n^2+5n-7}}$

(A) tende a $-3/5$.	(C) tende a $-5/3$.
(B) tende a $-4/7$.	(D) tende a 1.

Sia il numeratore che il denominatore sono forme $\infty-\infty$, ma senza troppe difficoltà

$$\begin{aligned}\frac{n-\sqrt{n^2-3n+4}}{n-\sqrt{n^2+5n-7}}&=\frac{n^2-(n^2-3n+4)}{n^2-(n^2+5n-7)}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+5n-7}}{n+\sqrt{n^2-3n+4}}\\&=\frac{3n+4}{-5n+7}\,\frac{1+\sqrt{1+5/n-7/n^2}}{1+\sqrt{1-3/n+4/n^2}}\to-\frac{3}{5}\,.\end{aligned}$$
