ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস ও পরিমিতি

লেখক: সৈয়দ ইমাদ উদ্দিন শুভ

বাংলাদেশ প্রকৌশল বিশ্ববিদ্যালয়ের তড়িৎ ও ইলেক্ট্রনিক কৌশল বিভাগে অধ্যয়নরত

ইন্টিগ্রাল ক্যালকুলাস দুই অর্থে ব্যবহার হতে পারে। একটা হল অন্তরিকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া, আর একটা হল সমষ্টি। এই দুটি যে মুলত একই জিনিস তার প্রমান কঠিন না।

প্রথমে আমরা দেখব *ইন্টিগ্রেশন অন্তরিকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া* এর অর্থ কি!

আমরা জানি (না জানলে জেনে নিন, এই পোষ্টে অন্তরিকলন কী তা বলব না, তবে পড়তে পড়তে কিছু ধারণা পাবেন)-

$$\frac{d}{dx}(d.x^m) = d.m.x^{m-1}$$

এখন m=n+1 এবং d=$\frac{c}{n+1}$ বসিয়ে পাই, (বুঝতেই পারছেন, n$\neq -1$)

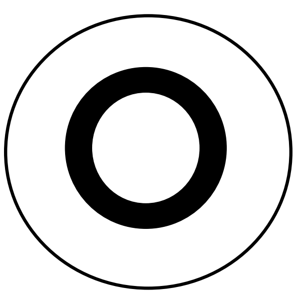
$$\frac{d}{dx}\left(c\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = c.x^n$$

এই কথাটাকেই অন্যভাবে বলা যায় – (বিপরীতভাবে)

$$\int c.x^n dx = c\frac{x^{n+1}}{n+1} \text{.............(i)}$$

এখানে c, n ধ্রুবক। অর্থাৎ এটা অন্তরিকলনের বিপরীত প্রক্রিয়া (সংজ্ঞা)

এখন নিচে একটি R ব্যাসার্ধের বড় বৃত্তের মাঝে একটি বৃত্তাকার রিং আছে (কালো রঙ করা), যার ভেতরের ব্যাসার্ধ x এবং বাইরের ব্যাসার্ধ (x+∂x)



এখন যদি ∂x খুব ক্ষুদ্র হয়, তবে রিং এর ক্ষেত্রফল ∂A হলে আমরা রিংকে একটি আয়তক্ষেত্র এর মত ভাবতে পারি, যার দৈর্ঘ্য রিং এর পরিধি $(\approx 2\pi x)$ আর প্রস্থ রিং এর পুরুত্ব $(= \partial x)$ এর সমান।

তাহলে, $\partial A \approx 2\pi x . \partial x$ বা, $\frac{\partial A}{\partial x} \approx 2\pi x$

এখানে ≈ চিহ্নের বদলে = লেখা যাবে যখন $\partial x \rightarrow 0$, আর $\lim_{\partial x \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dx}$

কাজেই, $\frac{dA}{dx} = 2\pi x$

তাহলে আমরা আগের ধারনা মতে বলতে পারি,

$$A = \int 2\pi x dx \text{ ....(ii)}$$

এবার চিন্তা করুন, বৃত্তের ক্ষেত্রফল আর কিছুই না, ছোট ছোট পুরুত্বের অসংখ্য রিং এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টি!

তাহলে A হল এক ধরনের অসীম সংখ্যক পদের সমষ্টি , যাকে অন্তরিকলনের বিপরীত নিয়ম বলা যায়!   আর এটাই আমরা লেখার শুরুতে দাবী করেছিলাম !

আমরা চাইলে (i) এর সাহায্যে (ii) এর মান বের করে বলতে পারি।

$$A = \int 2\pi x dx = 2\pi \frac{x^2}{2} = \pi . x^2$$

যখন x=0 তখন A=0

আবার x=R যখন তখন A=πR^2

কাজেই পুরো বৃত্তের ক্ষেত্রফল হল πR^2 , ঠিক যা আমরা চেয়েছিলাম !!

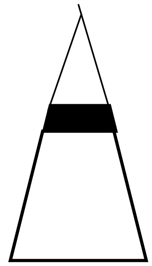
আচ্ছা, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কি ক্যাল্‌কুলাস দিয়ে পাওয়া যাবে?

হ্যাঁ ! এটাও পাওয়া যাবে!

এর জন্য আপনাকে কল্পনা করতে হবে h উচ্চতা এবং b ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজ , যার শীর্ষ থেকে x দূরত্বে একটি প্রায় আয়তাকার ক্ষেত্র আছে!

এর দৈর্ঘ্য a এবং প্রস্থ ∂x

নীচের ছবিটা দেখুন – প্রায় আয়তকে কালো করা হয়েছে।



খেয়াল করুন, উচ্চতা, ভূমি সমানুপাতি।

তাহলে, $\frac{a}{b} = \frac{x}{h}$ বা $\mathrm{a} = \frac{b}{h}x$

তাহলে, একইভাবে, পুরো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$A = \int adx = \frac{b}{h}\int_0^h xdx = \frac{b}{h} \times \frac{h^2}{2} = \frac{1}{2}bh$$

মিলে গেল?

যারা গোলক জানো তারা জানো এর পৃষ্ঠতল $A = 4\pi r^2$

আর গোলকের পৃষ্ঠতলকে ইন্টিগ্রেশন করলে পাবে,

$$\int 4\pi r^2\, dr = \frac{4\pi r^3}{3}$$

আর এটাই কিনা গোলকের আয়তন!

কিন্তু কেন এমন হল?? আর পৃষ্টতল এর সুত্র আসল কোথা থেকে? আর যেকোনো বস্তুর পৃষ্ঠতলকে ইন্টিগ্রেশন করলে কি আয়তন পাবো ???

উত্তরটা এই লেখায় না হয় দিলাম না। এটা আগ্রহী পাঠকের জন্য অনুশীলনী হিসেবে থাকল!