Simon [redacted]
[redacted] 790122

SERIE SCHAUM

FRANK AYRES JR.

Dickinson College

MATRICES

COURS ET PROBLEMES

McGraw-Hill International Book Company, New York, USA
McGraw-Hill Ryerson Limitée, Montréal, Canada
Ediscience S.A., Paris, France

MATRICES, Cours et problèmes, est traduit de :
Theory and Problems of Matrices, by Frank Ayres Jr,
Copyright © McGraw-Hill Inc, New York, 1973

Préface

Le calcul matriciel fait partie de l'outillage mathématique indispensable à l'étude de domaines aussi divers que l'électricité ou la chimie, la sociologie ou les statistiques, et bien sûr les mathématiques pures. Ce livre, qui en donne les éléments essentiels, est conçu comme un complément des ouvrages usuels et comme un livre de référence pour ceux qui ont besoin de connaître et d'employer ces méthodes. Par ailleurs, les rappels théoriques sont suffisants pour permettre de l'employer pour un cours.

Le sujet est divisé en vingt-six chapitres, ce qui ne nuit pas à la logique de l'exposé et ce qui augmente l'utilité du livre. Ceci permet aussi de séparer l'étude des matrices réelles, —qui intéressent la plupart des lecteurs, —de celle des matrices à éléments complexes. Chaque chapitre contient un rappel des définitions, des théorèmes et des principes avec de nombreux exemples. Ceux-ci sont à leur tour suivis de problèmes résolus et d'un nombre très important d'exercices supplémentaires.

L'étudiant qui aborde le calcul matriciel trouvera vite que les solutions des exercices numériques sont d'une désarmante simplicité. Mais des difficultés peuvent surgir au niveau des définitions, théorèmes et démonstrations. Le manque d'expérience mathématique peut causer alors des problèmes, et c'est normal, puisque très souvent l'étudiant a eu jusqu'alors à résoudre des applications numériques dont les principes de base et les théorèmes n'étaient énoncés et démontrés que plus tard. Ce livre a l'ambition, si le lecteur persiste dans la lecture des rappels et des problèmes de chaque chapitre, de lui donner au contraire une certaine assurance quant à la compréhension du contenu.

Les problèmes résolus, —donnant plus de variété aux exemples qui illustrent les théorèmes, —contiennent la plupart des démonstrations importantes si elles sont longues, et d'autres plus brèves. Les problèmes supplémentaires exigent que l'étudiant trouve lui-même la démonstration et la solution numérique. Quelquefois, ces démonstrations ne sont que des variations de celles données antérieurement. Cependant, pour certains théorèmes, la démonstration ne demande que quelques lignes, —et peut à tort sembler triviale, —alors que pour d'autres, il faut beaucoup plus d'ingéniosité. Aucune de ces démonstrations ne doit être traitée à la légère, car c'est précisément à cause de l'abondance de ces théorèmes que le calcul matriciel offre une base naturelle d'étude à ceux qui veulent atteindre une certaine maturité mathématique. Bien que le nombre élevé des problèmes supplémentaires rende difficile leur solution, il faut cependant donner une attention toute spéciale à ceux des deux premiers chapitres. Après les avoir maîtrisés, le lecteur se sentira beaucoup plus en confiance pour continuer.

L'auteur remercie les collaborateurs de Schaum Publishing Company pour leur excellente coopération

FRANK AYRES, Jr.

Table des matières

Index des symboles

CHAPITRE 1

Matrices

DEFINITION : On appelle "matrice" un tableau rectangulaire de nombres écrit entre crochets tel que :

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix},$$

et soumis à certaines règles d'opérations qui seront données plus loin. La matrice (a) pourrait être considérée comme la matrice des coefficients du système linéaire homogène suivant : $\begin{cases} 2x + 3y + 7z = 0 \\ x - y + 5z = 0 \end{cases}$ ou encore comme la matrice obtenue en ajoutant à la matrice des coefficients du système non homogène : $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 5 \end{cases}$ une dernière colonne formée des constantes des seconds membres. Nous verrons plus loin comment on peut utiliser les matrices pour résoudre ces systèmes. On pourrait donner une interprétation semblable à la matrice (b) ou considérer ses lignes comme les coordonnées des points $(1,3,1)$, $(2,1,4)$ et $(4,7,6)$ dans l'espace ordinaire R^3. Nous utiliserons également les matrices pour démontrer que trois points sont ou ne sont pas dans un même plan contenant l'origine ou encore qu'ils sont alignés ou non avec l'origine.

Dans la matrice

$$(1.1)\qquad \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, a_{m2}\, a_{m3} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

les nombres ou les fonctions a_{ij} sont appelés "éléments". Le premier indice i de a_{ij} indique le numéro de la ligne et le deuxième indice j celui de la colonne dans laquelle se trouve l'élément a_{ij}. Ainsi tout élément de la deuxième ligne aura 2 comme premier indice et tout élément de la cinquième colonne aura 5 comme deuxième indice. Une matrice de m lignes et n colonnes est dite d'ordre : "$m \times n$" (lu : d'ordre "m,n", ou d'ordre "m croix n").

La notation des matrices par des parenthèses, ( ), ou des doubles barres, || ||, est aussi utilisée, mais en ce qui nous concerne, nous n'utiliserons que les crochets.

De temps en temps la matrice (1.1) sera dite "la matrice $m \times n$ $[a_{ij}]$" ou "la matrice $m \times n$ $A = [a_{ij}]$". Lorsque l'ordre aura été établi auparavant, nous écrirons simplement "la matrice A".

MATRICES CARREES. Lorsque $m = n$ la matrice (1.1) est dite "carrée" ou "matrice carrée" d'ordre n ou encore une "n-matrice carrée".

Dans une matrice carrée, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés éléments diagonaux.

La somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée A est appelée la "trace de A".

MATRICES EGALES. Deux matrices $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont dites "égales" $(A = B)$ si et seulement si elles sont de même ordre et si chaque élément de l'une est égal à l'élément correspondant de l'autre, c'est-à-dire, si et seulement si :

$$a_{ij} = b_{ij}\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m\ ;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

Ainsi, deux matrices sont égales si et seulement si l'une est la copie de l'autre.

MATRICE NULLE. La matrice dont tous les éléments sont nuls est appelée la matrice nulle. Quand A est la matrice nulle et lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur son ordre, nous écrirons $A = 0$ au lieu de reproduire le tableau $m \times n$ où tous les éléments sont nuls.

SOMME DE MATRICES. Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont deux matrices $m \times n$, leur somme (resp. différence) $A \pm B$ est définie par la matrice $C = [c_{ij}]$ dans laquelle tout élément est la somme (resp. différence) des éléments correspondants de A et B. Ainsi $A \pm B = [a_{ij} \pm b_{ij}]$.

Exemple 1. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

alors $$A + B = \begin{bmatrix} 1+2 & 2+3 & 3+0 \\ 0+(-1) & 1+2 & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

et $$A - B = \begin{bmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-0 \\ 0-(-1) & 1-2 & 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

On ne peut faire la somme ou la différence de deux matrices que si elles sont de même ordre. Par exemple, on ne peut pas ajouter ni retrancher les matrices (a) et (b).

La somme de k matrices A est une matrice de même ordre que A dans laquelle chaque élément est k-fois l'élément correspondant de A. Si k est un scalaire (nous appelons k un scalaire pour le distinguer de $[k]$ la matrice 1×1 dont le seul élément est k) nous définissons par $kA = Ak$ la matrice obtenue en multipliant tout élément de A par k.

Exemple 2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ alors

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 3A = A \cdot 3$$

et $$-5A = \begin{bmatrix} -5(1) & -5(-2) \\ -5(2) & -5(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

En particulier, la matrice $-A$ appelée "opposée de A" est obtenue en multipliant tout élément de A par -1, ou simplement en changeant les signes de tous les éléments de A. Quelle que soit A nous avons : $A + (-A) = 0$ où 0 représente ici la matrice nulle de même ordre que A.

Si les matrices A, B, C sont de même ordre, nous avons :

(a) $A + B = B + A$ (loi commutative)

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (loi associative)

(c) $k(A + B) = kA + kB = (A + B)k$, k est un scalaire

(d) Il existe une matrice D telle que $A + D = B$.

Ces lois résultent des lois de l'algèbre élémentaire dans l'ensemble des nombres et des polynômes. Elles montrent en outre :

Théorème 1. Que les matrices de même ordre obéissent aux mêmes lois pour l'addition que les éléments de ces matrices.

MULTIPLICATION DE MATRICES. Le produit AB dans cet ordre de la matrice ligne $1 \times m$ $A = [a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots a_{1m}]$ par la matrice colonne $m \times 1$ $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix}$ est défini par la matrice 1×1 $C = [a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + \cdots + a_{1m}\, b_{m1}]$.

C'est-à-dire $[a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m}] \times \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{m1} \end{bmatrix} = [a_{11}\, b_{11} + a_{12} b_{21} + \cdots + a_{1m} b_{m1}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{1k}\, b_{k1} \right]$.

On a multiplié une ligne par une colonne en multipliant chaque élément de la ligne par l'élément correspondant de la colonne et en faisant la somme des termes obtenus.

Exemple 3. (*a*) $\quad [2 \;\; 3 \;\; 4] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [2(1) + 3(-1) + 4(2)] = [7]$

(*b*) $\quad [3 \;\; -1 \;\; 4] \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = [-6 - 6 + 12] = 0$

Le produit AB dans cet ordre, de la matrice $m \times p$ $A = [a_{ij}]$ par la matrice $p \times n$ $B = [b_{ij}]$ est défini par la matrice $m \times n$ $C = [c_{ij}]$ où

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{ip}\, b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}$$

$(i = 1, 2, \ldots m \;\; ; \;\; j = 1, 2, \ldots n)$.

A possède m lignes et B n colonnes. Pour obtenir la matrice $C = AB$ on multiplie chaque ligne de A par chacune des colonnes de B. L'élément c_{ij} de C est alors le produit de la $i^{ème}$ ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B.

Exemple 4.

$$A\;B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \\ a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} & a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} \end{bmatrix}$$

Le produit AB n'a de sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, (AB est défini). Le produit AB peut être défini sans que le produit BA le soit.

Voir les Problèmes 3-4.

Dans le cas où l'on peut additionner et multiplier les matrices A, B, C entre elles on aura :

(*e*) $A(B + C) = AB + AC$ (la multiplication est distributive par rapport à l'addition)
(*f*) $(A + B)C = AC + BC$ (deuxième distributivité)
(*g*) $A(BC) = (AB)C$ (la multiplication est associative).

Cependant :

(*h*) $AB \neq BA$ en général
(*i*) $AB = 0$ n'entraîne pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$
(*j*) $AB = AC$ n'entraîne pas nécessairement $B = C$.

Voir les Problèmes 3-8.

PRODUITS PAR BLOCS ou partition d'une matrice. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice d'ordre $m \times p$ et $B = [b_{ij}]$ une matrice d'ordre $p \times n$.

A peut être considérée comme m matrices d'ordre $1 \times p$ et B comme n matrices d'ordre $p \times 1$. D'autres subdivisions peuvent être utilisées. On peut subdiviser A et B de la façon suivante :

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} (m_1 \times p_1) & (m_1 \times p_2) & (m_1 \times p_3) \\ \hline (m_2 \times p_1) & (m_2 \times p_2) & (m_2 \times p_3) \end{array}\right], \quad \text{et } B = \left[\begin{array}{c|c} (p_1 \times n_1) & (p_1 \times n_2) \\ \hline (p_2 \times n_1) & (p_2 \times n_2) \\ \hline (p_3 \times n_1) & (p_3 \times n_2) \end{array}\right]$$

ou encore
$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ \hline B_{31} & B_{32} \end{array}\right]$$

Ceci s'appelle une partition ou subdivision en blocs des matrices A et B. On peut effectuer le produit AB des deux matrices A et B par blocs, mais il est nécessaire que les colonnes de A soient subdivisées exactement de la même façon que les lignes de B. Par contre, m_1, m_2, n_1 et n_2 peuvent être des entiers positifs ou nuls quelconques, à la condition que $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n$, et l'on a :

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

Exemple 5. Calculer AB sachant que $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En effectuant une partition de A nous obtenons :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

Nous avons $AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2 \;\; 3 \;\; 1] & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}[2] \\ [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + [1][2 \;\; 3 \;\; 1] & [1 \;\; 0]\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [1][2] \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [1 \;\; 1 \;\; 1] + [2 \;\; 3 \;\; 1] & [0] + [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 7 & 5 & 5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ [3 \;\; 4 \;\; 2] & [2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Soient $A, B, C, \ldots$ des matrices carrées d'ordre n. Divisons A de la façon suivante :

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} (p_1 \times p_1) & (p_1 \times p_2) & \ldots & (p_1 \times p_s) \\ \hline (p_2 \times p_1) & (p_2 \times p_2) & \ldots & (p_2 \times p_s) \\ \hline \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \hline (p_s \times p_1) & (p_s \times p_2) & \ldots & (p_s \times p_s) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{s1} & A_{s2} & \ldots & A_{ss} \end{bmatrix}$$

où A_{ij} est une matrice d'ordre $p_i \times p_j$. Divisons $B, C, \ldots$ de la même façon exactement. On pourra calculer les sommes, les différences et les produits de ces matrices en fonction de $A_{11}, A_{12}, \ldots ; B_{11}, B_{12}, \ldots ; C_{11}, C_{12}, \ldots$

PROBLEMES RESOLUS

1. (a) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 0 & 2 & 1\\2 & -5 & 1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\1 & 5 & 0 & 3\\2 & -2 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3 & 2+(-4) & -1+1 & 0+2\\4+1 & 0+5 & 2+0 & 1+3\\2+2 & -5+(-2) & 1+3 & 2+(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2 & 0 & 2\\5 & 5 & 2 & 4\\4 & -7 & 4 & 1\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 0 & 2 & 1\\2 & -5 & 1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -4 & 1 & 2\\1 & 5 & 0 & 3\\2 & -2 & 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-3 & 2+4 & -1-1 & 0-2\\4-1 & 0-5 & 2-0 & 1-3\\2-2 & -5+2 & 1-3 & 2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -2 & -2\\3 & -5 & 2 & -2\\0 & -3 & -2 & 3\end{bmatrix}$

(c) $3\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 0 & 2 & 1\\2 & -5 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6 & -3 & 0\\12 & 0 & 6 & 3\\6 & -15 & 3 & 6\end{bmatrix}$

(d) $-\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\4 & 0 & 2 & 1\\2 & -5 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\-4 & 0 & -2 & -1\\-2 & 5 & -1 & -2\end{bmatrix}$

2. Si $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$ et $B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\1 & -5\\4 & 3\end{bmatrix}$, trouver $D=\begin{bmatrix}p & q\\r & s\\t & u\end{bmatrix}$ tel que $A+B-D=0$.

Si $A+B-D=\begin{bmatrix}1-3-p & 2-2-q\\3+1-r & 4-5-s\\5+4-t & 6+3-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2-p & -q\\4-r & -1-s\\9-t & 9-u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $-2-p=0$ et $p=-2$, $4-r=0$ et $r=4$, ... Ainsi $D=\begin{bmatrix}-2 & 0\\4 & -1\\9 & 9\end{bmatrix}=A+B$.

3. (a) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4(2)+5(3)+6(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix}2\\3\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(4) & 2(5) & 2(6)\\3(4) & 3(5) & 3(6)\\-1(4) & -1(5) & -1(6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\\-4 & -5 & -6\end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -6 & 9 & 6\\0 & -7 & 10 & 7\\5 & 8 & -11 & -8\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1(4)+2(0)+3(5) & 1(-6)+2(-7)+3(8) & 1(9)+2(10)+3(-11) & 1(6)+2(7)+3(-8)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}19 & 4 & -4 & -4\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+3(2)+4(3)\\1(1)+5(2)+6(3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\29\end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\4 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 5\\-2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1(3)+2(1)+1(-2) & 1(-4)+2(5)+1(2)\\4(3)+0(1)+2(-2) & 4(-4)+0(5)+2(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 8\\8 & -12\end{bmatrix}$

4. Soit $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Alors

$A^2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\2 & 1 & 4\\3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ et $A^3=A^2 . A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 1\\2 & 1 & 4\\3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -8 & 0\\8 & -1 & 8\\8 & -4 & 3\end{bmatrix}$

le lecteur pourra montrer que $A^3=A . A^2$ et $A^2 . A^3=A^3 . A^2$.

5. Montrer que :

(a) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}$,

(b) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}$,

(c) $\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}$.

(a) $$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) = (a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}) + (a_{i1}c_{1j}+a_{i2}c_{2j})$$
$$= \sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{2} a_{ik}c_{kj}.$$

(b) $$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} = \sum_{i=1}^{2}(a_{i1}+a_{i2}+a_{i3}) = (a_{11}+a_{12}+a_{13}) + (a_{21}+a_{22}+a_{23})$$
$$= (a_{11}+a_{21}) + (a_{12}+a_{22}) + (a_{13}+a_{23})$$
$$= \sum_{i=1}^{2} a_{i1} + \sum_{i=1}^{2} a_{i2} + \sum_{i=1}^{2} a_{i3} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{2} a_{ij}.$$

Ceci montre simplement que pour faire la somme de tous les éléments d'une matrice, on peut commencer par faire la somme des éléments de chaque ligne ou des éléments de chaque colonne d'abord.

(c) $$\sum_{k=1}^{2} a_{ik}(\sum_{h=1}^{3} b_{kh}c_{hj}) = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}(b_{k1}c_{1j} + b_{k2}c_{2j} + b_{k3}c_{3j})$$
$$= a_{i1}(b_{11}c_{1j} + b_{12}c_{2j} + b_{13}c_{3j}) + a_{i2}(b_{21}c_{1j} + b_{22}c_{2j} + b_{23}c_{3j})$$
$$= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21})c_{1j} + (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22})c_{2j} + (a_{i1}b_{13} + a_{i2}b_{23})c_{3j}$$
$$= (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + (\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{k3})c_{3j}$$
$$= \sum_{h=1}^{3}(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kh})c_{hj}.$$

6. Montrer que si $A = [a_{ij}]$ est d'ordre $m \times n$ et si $B = [b_{ij}]$ et $C = [c_{ij}]$ sont d'ordre $n \times p$, alors $A(B+C) = AB + AC$.

Les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A sont $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ et les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de $B+C$ sont $b_{1j}+c_{1j}, b_{2j}+c_{2j}, \ldots, b_{nj}+c_{nj}$. Ainsi l'élément qui se trouve à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $A(B+C)$ est :

$$a_{i1}(b_{1j}+c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j}+c_{2j}) + \cdots + a_{in}(b_{nj}+c_{nj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj},$$

qui est la somme des éléments se trouvant à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de AB et de AC.

7. Montrer que si $A = [a_{ij}]$ est d'ordre $m \times n$, si $B = [b_{ij}]$ est d'ordre $n \times p$ et si $C = [c_{ij}]$ est d'ordre $p \times q$ alors $A(BC) = (AB)C$.

Les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A sont $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ et les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne de BC sont $\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj}, \sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj}, \ldots, \sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj}$; ainsi l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $A(BC)$ est

$$a_{i1}\sum_{h=1}^{p} b_{1h}c_{hj} + a_{i2}\sum_{h=1}^{p} b_{2h}c_{hj} + \ldots + a_{in}\sum_{h=1}^{p} b_{nh}c_{hj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\sum_{h=1}^{p} b_{kh}c_{hj})$$
$$= \sum_{h=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kh})c_{hj} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1})c_{1j} + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2})c_{2j} + \ldots + (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp})c_{pj}$$

c'est l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de $(AB)C$ d'où l'on déduit que $A(BC) = (AB)C$.

8. Sachant que l'on peut additionner et multiplier les matrices A, B, C, D entre elles, montrer de deux façons différentes que $(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$.

En utilisant la propriété (e) puis la propriété (f) on a :

$$(A+B)(C+D) = (A+B)C + (A+B)D = AC + BC + AD + BD.$$

Par contre en utilisant d'abord (f) puis (e) on a :

$$(A+B)(C+D) = A(C+D) + B(C+D) = AC + AD + BC + BD.$$
$$= AC + BC + AD + BD.$$

9. (*a*)

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 3&1&2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[3\ \ 1\ \ 2]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&4\\9&3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&1&2\\6&3&4\\9&3&7\end{bmatrix}$$

(*b*)

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&0&0&0\\0&0&0&4&0&0\\\hline 0&0&0&0&5&0\\0&0&0&0&0&6\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\\hline 0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}&[0]&[0]\\[0]&\begin{bmatrix}3&0\\0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}&[0]\\[0]&[0]&\begin{bmatrix}5&0\\0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&3&0&0&0\\0&0&0&12&0&0\\0&0&0&0&10&0\\0&0&0&0&0&18\end{bmatrix}$$

(*c*)

$$\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&3&1&2&0\\0&0&1&2&1&0\\0&0&0&1&1&0\\\hline 0&0&0&0&0&1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc|c}1&2&3&4&5&6\\2&3&4&5&6&7\\\hline 3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&9\\9&8&7&6&5&4\\\hline 8&7&6&5&4&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}1&1\\2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\7\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4\\4&5\\9&8\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&7\\6&7&8\\7&6&5\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}3&1&2\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}8\\9\\4\end{bmatrix}\\ [1]\cdot[8\ \ 7]&[1]\cdot[6\ \ 5\ \ 4]&[1]\cdot[1]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}3&5\\4&7\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}7&9&11\\10&13&16\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}13\\19\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}31&33\\20&22\\13&13\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}35&37&39\\24&26&28\\13&13&13\end{bmatrix}&\begin{bmatrix}41\\30\\13\end{bmatrix}\\ [8\ \ 7]&[6\ \ 5\ \ 4]&[1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&5&7&9&11&13\\4&7&10&13&16&19\\31&33&35&37&39&41\\20&22&24&26&28&30\\13&13&13&13&13&13\\8&7&6&5&4&1\end{bmatrix}$$

10. Soient $\begin{cases}x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2\\x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2\\x_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2\end{cases}$ trois formes linéaires en y_1 et y_2 et soit $\begin{cases}y_1 = b_{11}z_1 + a_{12}y_2\\y_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2\end{cases}$ une application linéaire qui transforme les coordonnées (y_1, y_2) en les nouvelles coordonnées (z_1, z_2). Cette transformation appliquée aux formes linéaires précédentes donne les formes suivantes :

$$\begin{cases}x_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})z_2\\x_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})z_2\\x_3 = (a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21})z_1 + (a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22})z_2\end{cases}$$

En notation matricielle, les trois formes nous donnent : $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ et l'application linéaire $\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$. En appliquant la transformation linéaire aux trois formes on obtient :

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$$

Ainsi une application linéaire de matrice B transforme un ensemble de m formes linéaires à n variables de matrice A en un ensemble de m formes linéaires de matrice $C = AB$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

11. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$,

(*a*) Calculer : $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $A - C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(*b*) Calculer : $-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $0 . B = 0$

(*c*) Vérifier : $A + (B - C) = (A + B) - C$.

(*d*) Trouver la matrice D telle que $A + D = B$. Vérifier que $D = B - A = -(A - B)$.

12. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calculer $AB = 0$ et $BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Vérifier ainsi que $AB \neq BA$ en général.

13. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, et $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $AB = AC$. En déduire que $AB = AC$ n'entraîne pas nécessairement que $B = C$.

14. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que $(AB)C = A(BC)$.

15. En reprenant les matrices du problème 11, montrer que $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$.

16. Expliquer pourquoi en général $(A \pm B)^2 \neq A^2 \pm 2AB + B^2$ et $A^2 - B^2 \neq (A - B)(A + B)$.

17. On donne $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

(*a*) Montrer que $AB = BA = 0$, $AC = A$, $CA = C$.

(*b*) Utiliser les résultats de (*a*) pour montrer que $ACB = CBA$, $A^2 - B^2 = (A - B)(A+B)$, $(A \pm B)^2 = A^2 + B^2$.

18. On donne $A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ où $i^2 = -1$. Trouver une formule de récurrence pour les puissances positives de A.

Réponse : $A^n = I, A, -I, -A$ suivant que $n = 4p, 4p+1, 4p+2, 4p+3$ où $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

19. Montrer que le produit de deux ou plusieurs matrices quelconques de l'ensemble $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ est encore une matrice de l'ensemble.

20. Etant données les matrices A d'ordre $m \times n$, B d'ordre $n \times p$ et C d'ordre $r \times q$, quelles conditions doivent vérifier p, q, r pour que les produits suivants existent (*a*) ABC, (*b*) ACB, (*c*) $A(B + C)$? Donner l'ordre des matrices produit.

Réponse : (*a*) $p = r$; $m \times q$ (*b*) $r = n = q$; $m \times p$ (*c*) $r = n$, $p = q$; $m \times q$.

21. Calculer AB sachant que :

(a) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ et $B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$ *Réponse :* $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ et $B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -1 & 2 \end{array}\right]$ *Réponse :* $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$ et $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$ *Réponse :* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. Montrer que : (a) trace $(A + B)$ = trace A + trace B, (b) trace $(kA) = k$ trace A.

23. Si $\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + y_3 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 \\ y_2 = 2z_1 - z_2 \\ y_3 = 2z_1 + 3z_2 \end{cases}$, vérifier que $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -z_1 + 7z_2 \\ -2z_1 - 6z_2 \end{bmatrix}$.

24. Si $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ sont d'ordre $m \times n$ et si $C = [c_{ij}]$ est d'ordre $n \times p$, montrer que $(A+B)C = AC + BC$.

25. Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{jk}]$ où $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, p$; $k = 1, 2, \ldots, n$. On note β_j la somme des éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de B, c'est-à-dire : $\beta_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}$. Montrer que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne du produit $A \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_p \end{bmatrix}$ est la somme des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB. Utiliser cette méthode pour calculer les produits figurant dans les problèmes 12 et 13.

26. Une relation (telle que le parallélisme ou la congruence) entre des éléments mathématiques possédant les propriétés suivantes :

(i) alternative ou bien a est en relation avec b, ou bien a n'est pas en relation avec b,

(ii) réflexivité a est en relation avec a, pour tout a,

(iii) symétrie si a est en relation avec b alors b est en relation avec a,

(iv) transitivité si a est en relation avec b et b en relation avec c, alors a est en relation avec c,

est appelée une "relation d'équivalence".

Montrer que le parallélisme des droites, la similitude des triangles et l'égalité des matrices sont des relations d'équivalence. Montrer que l'orthogonalité des droites n'est pas une relation d'équivalence.

27. Montrer que la relation "... peut être additionnée à ..." dans l'ensemble des matrices est une relation d'équivalence, tandis que la relation "... peut être multipliée à ..." ne l'est pas.

28. Montrer que si A, B, C sont des matrices telles que $AC = CA$ et $BC = CB$ alors $(AB \pm BA) = C(AB \pm BA)$.

CHAPITRE 2

Quelques types de matrices

LA MATRICE IDENTITE (UNITE). Une matrice carrée A dont les éléments $a_{ij} = 0$ pour $i > j$ est appelée triangulaire supérieure ; une matrice carrée A dont les éléments $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ est appelée triangulaire inférieure.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{est triangulaire supérieure}$$

$$\text{et} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{est triangulaire inférieure.}$$

La matrice $D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ qui est à la fois triangulaire supérieure et inférieure

est dite "matrice diagonale". On l'écrira souvent

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

Voir le Problème 1.

Si dans une matrice diagonale D on a $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = k$ on dira que D est une matrice scalaire. Si de plus $k = 1$, la matrice est appelée "matrice identité" ou "matrice unité" et est notée I_n. Par exemple :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quand l'ordre de la matrice est évident ou sans importance, la matrice identité sera notée I. $I_n + I_n + \ldots + I_n$, somme de p termes égaux à I_n est égale à $p \cdot I_n = \text{diag}(p, p, \ldots, p)$ et $I^p = I \times I \times \cdots \times I$, produit de p facteurs égaux à I est égal à I. Certaines propriétés de l'entier 1 sont valables pour la matrice identité. Par exemple si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, alors $I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = I_2 A I_3 = A$ comme le lecteur peut le vérifier facilement.

MATRICES CARREES PARTICULIERES. Si A et B sont des matrices carrées telles que $AB = BA$, alors on dit que A et B commutent, ou qu'elles sont commutables. Il est facile de montrer qu'une matrice carrée A d'ordre n commute avec elle-même ainsi qu'avec I_n.

Voir Problème 2.

Si A et B sont telles que $AB = -BA$ on dit que A et B anti-commutent.

Une matrice A pour laquelle $A^{k+1} = A$, où k est un entier positif est dite "périodique". Si k est le plus petit entier positif pour lequel $A^{k+1} = A$ alors A est de "période k".

Si $k = 1$, c'est-à-dire $A^2 = A$ alors A est "idempotente".

Voir Problèmes 3-4.

Une matrice A telle que $A^p = 0$ où p est un entier positif est dite nilpotente. Si p est le plus petit entier positif pour lequel $A^p = 0$ alors on dit que A est nilpotente d'indice p.

Voir Problèmes 5-6.

MATRICES INVERSES. Si A et B sont des matrices carrées telles que $AB = BA = I$ alors B est dite inverse de A et nous écrirons $B = A^{-1}$ (B égal à l'inverse de A). La matrice B aura pour inverse la matrice A et nous écrirons $A = B^{-1}$.

Exemple 1. Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$, chaque matrice du produit est la matrice inverse de l'autre.

Nous verrons plus loin (chapitre 7) que toute matrice n'a pas nécessairement d'inverse. Nous pouvons montrer cependant que si une matrice A a une inverse alors cette matrice inverse est unique.

Voir Problème 7.

Si A et B sont des matrices carrées de même ordre ayant des inverses A^{-1} et B^{-1} respectivement, alors $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ ou encore :

Théorème I. L'inverse d'un produit de deux matrices inversibles est le produit, dans l'ordre inversé, des matrices inverses.

Une matrice A telle que $A^2 = I$ est dite "involutive". La matrice identité, par exemple, est involutive. Une matrice involutive est sa propre inverse.

TRANSPOSEE D'UNE MATRICE. La matrice d'ordre $n \times m$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes d'une matrice $m \times n$ A est appelée la transposée de A et notée ${}^tA$ (A transposée). Par exemple la transposée de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ est ${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. On peut remarquer que l'élément a_{ij} des $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de A se trouve aux $j^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$.

Si ${}^tA$ et ${}^tB$ sont les transposées de A et B respectivement et si k est un scalaire, nous avons immédiatement :

$$(a) \quad {}^t({}^tA) = A \qquad \text{et} \qquad (b) \quad {}^t(kA) = k\,{}^tA .$$

Dans les problèmes 10 et 11, nous démontrons les théorèmes suivants :

Théorème II. La transposée d'une somme de deux matrices est la somme de leurs transposées, c'est-à-dire :

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB .$$

Théorème III. La transposée d'un produit de deux matrices est le produit, dans l'ordre inversé, de leurs transposées, c'est-à-dire :

$$^t(AB) = {^tB} \cdot {^tA}$$

Voir les problèmes 10-12.

MATRICES SYMETRIQUES. Une matrice carrée A telle que $^tA = A$ est dite "symétrique". Ainsi, une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et j. Par exemple : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ est symétrique ainsi que la matrice kA où k est un scalaire quelconque. Dans le problème 13, nous démontrons le résultat suivant :

Théorème IV. Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors la matrice $A + {^tA}$ est symétrique.

Une matrice carrée A telle que $^tA = -A$ est dite "anti-symétrique". Ainsi une matrice carrée A est anti-symétrique pourvu que $a_{ij} = -a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et j. De ce fait les éléments de la diagonale sont tous nuls. Par exemple $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ est anti-symétrique ainsi que kA pour tout scalaire k.

Ainsi en changeant quelque peu la démonstration du problème 13, nous pouvons démontrer :

Théorème V. Si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $A - {^tA}$ est anti-symétrique.

Des théorèmes IV et V nous déduisons:

Théorème VI. Toute matrice carrée A peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique $B = \frac{1}{2}(A + {^tA})$ et d'une matrice anti-symétrique $C = \frac{1}{2}(A - {^tA})$.

Voir les problèmes 14-15.

CONJUGUEE D'UNE MATRICE. Soit a et b deux nombres réels et $i = \sqrt{-1}$; alors $z = a + ib$ est appelé "nombre complexe". Les nombres complexes $a + ib$ et $a - ib$ sont dits "conjugués", chacun étant le conjugué de l'autre. Si $z = a + ib$, on notera son conjugué $\overline{z} = \overline{a + ib}$.

Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = \overline{z}_1 = a - ib$ alors $\overline{z}_2 = \overline{\overline{z}}_1 = \overline{a - ib} = a + ib$ c'est-à-dire que le conjugué du conjugué d'un complexe z est z lui-même.

Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ alors

(i) $\quad z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d) \quad$ et $\quad \overline{z_1 + z_2} = (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

c'est-à-dire que le conjugué d'une somme de deux complexes est la somme de leurs conjugués.

(ii) $\quad z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) \quad$ et $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - i(ad + bc) = (a - ib)(c - id) = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$

c'est-à-dire que le conjugué d'un produit de deux complexes est le produit de leurs conjugués.

Si A est une matrice dont tous les éléments sont des nombres complexes, on appelle conjuguée de A et on note $\overline{A}$ (A conjuguée) la matrice obtenue en remplaçant tous les éléments de A par leurs conjugués.

Exemple 2. Si $A = \begin{bmatrix} 1 + 2i & i \\ 3 & 2 - 3i \end{bmatrix}$ alors $\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2i & -i \\ 3 & 2 + 3i \end{bmatrix}$

Si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont les conjuguées des matrices A et B et si k est un scalaire quelconque, nous avons immédiatement :

$$(c) \quad \overline{\overline{A}} = A \qquad \text{et} \qquad (d) \quad \overline{(kA)} = \overline{k} \cdot \overline{A}$$

En utilisant (i) et (ii) ci-dessus, nous obtenons :

Théorème VII. La conjuguée d'une somme de deux matrices est la somme de leurs conjuguées, c'est-à-dire : $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$.

Théorème VIII. La conjuguée d'un produit de deux matrices est le produit, **dans le même ordre**, de leurs conjuguées, c'est-à-dire $\overline{(AB)} = \bar{A} \,.\, \bar{B}$.

La transposée de $\bar{A}$ est notée ${}^t\bar{A}$ (transposée de la conjuguée) on écrit quelquefois A^*. Nous avons :

Théorème IX. La transposée de la conjuguée de A est égale à la conjuguée de la transposée de A, c'est-à-dire : ${}^t(\bar{A}) = \overline{({}^tA)}$.

Exemple 3. En reprenant l'exemple 2 :

$$ {}^t(\bar{A}) = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 1+2i & 3 \\ i & 2-3i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{({}^tA)} = \begin{bmatrix} 1-2i & 3 \\ -i & 2+3i \end{bmatrix} = {}^t(\bar{A}) $$

MATRICES HERMITIENNES. Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ telle que ${}^t\bar{A} = A$ est dite **hermitienne.** Ainsi, A est hermitienne pourvu que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ pour toutes les valeurs de i et j. De ce fait, les éléments de la diagonale d'une matrice hermitienne sont des réels.

Exemple 4. La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ est hermitienne.

Si k est un nombre réel (resp. complexe) est-ce que kA est hermitienne ?

Une matrice carrée $A = [a_{ij}]$ telle que ${}^t\bar{A} = -A$ est dite **anti-hermitienne**. Ainsi, A est anti-hermitienne pourvu que $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$ pour tout i, j. Les éléments de la diagonale d'une matrice anti-hermitienne sont soit des zéros soit des imaginaires purs.

Exemple 5. La matrice $A = \begin{bmatrix} i & 1-i & 2 \\ -1-i & 3i & i \\ -2 & i & 0 \end{bmatrix}$ est anti-hermitienne. Si k est un réel (resp. complexe ou imaginaire pur) kA est-elle anti-hermitienne ?

En changeant quelque peu la démonstration du problème 13 nous pouvons démontrer :

Théorème X. Si A est une matrice carrée d'ordre n alors $A + {}^t\bar{A}$ est hermitienne et $A - {}^t\bar{A}$ est anti-hermitienne.

Du théorème X nous déduisons :

Théorème XI. Toute matrice carrée A dont les éléments sont complexes peut être écrite comme la somme d'une matrice hermitienne $B = \frac{1}{2}(A + {}^t\bar{A})$ et d'une matrice anti-hermitienne $C = \frac{1}{2}(A - {}^t\bar{A})$.

SOMME DIRECTE DE MATRICES. [Notation diag $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$]. Supposons que $A_1, A_2, \ldots, A_s$, soient des matrices d'ordre respectivement $m_1, m_2, \ldots, m_s$. On notera diag $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ la matrice A suivante :

$$ A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_s \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s) $$

qui est aussi appelée leur **somme directe.**

Exemple 6. Soit $A_1 = [2]$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

La somme directe de A_1, A_2, A_3 est $\text{diag}(A_1, A_2, A_3) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Le problème $9(b)$ du chapitre 1 est une illustration du théorème suivant :

Théorème XII. Si $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ et $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ où A_i et B_i sont de même ordre pour $(i = 1, 2, \ldots, s)$ alors $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$.

PROBLEMES RESOLUS

1. Puisque $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \ldots & a_{11}b_{1n} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & \ldots & a_{22}b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mm}b_{m1} & a_{mm}b_{m2} & \ldots & a_{mm}b_{mn} \end{bmatrix}$, le produit AB de la matrice diagonale d'ordre m $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm})$ par une matrice $m \times n$ B quelconque est obtenu en multipliant la première ligne de B par a_{11}, la deuxième ligne par a_{22}, etc.

2. Montrer que les matrices $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ commutent pour toute valeur de a, b, c, d.

   En effet $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

3. Montrer que $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ est idempotente.

   $$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = A$$

4. Montrer que si $AB = A$ et $BA = B$ alors A et B sont idempotentes.

$ABA = (AB)A = A \cdot A = A^2$ et $ABA = A(BA) = AB = A$ ainsi $A^2 = A$ et A est idempotente. Utiliser BAB pour montrer que B est idempotente.

5. Montrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ est nilpotente d'ordre 3.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

6. Si A est nilpotente d'ordre 2, montrer que $A(I \pm A)^n = A$ pour tout entier n positif.

Puisque $A^2 = 0$, $A^3 = A^4 \ldots = A^n = 0$. Alors $A(I \pm A)^n = A(I \pm nA) = A \pm nA^2 = A$.

7. Soient A, B, C des matrices carrées telles que $AB = I$ et $CA = I$. Alors $(CA)B = C(AB)$ de sorte que $B = C$. Ainsi $B = C = A^{-1}$ est l'unique inverse de A. (Qu'est-ce que B^{-1} ?).

8. Montrer que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Par définition $(AB)^{-1}AB = I = (AB)(AB)^{-1}$.

Or $$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

et $$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

D'après le problème 7, $(AB)^{-1}$ est unique ; par conséquent $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

9. Montrer qu'une matrice A est involutive si et seulement si $(I - A)(I + A) = 0$.

1) Supposons que $(I - A)(I + A) = I - A^2 = 0$; alors $A^2 = I$ et A est involutive.
2) Supposons A involutive ; alors $A^2 = I$ et ainsi $(I - A)(I + A) = I - A^2 = I - I = 0$.

10. Montrer que ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

Soit $A = [a_{ij}]$ et soit $B = [b_{ij}]$. Il nous suffit de démontrer que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA + {}^tB$ est le même que celui de ${}^t(A + B)$. Or ces derniers sont respectivement $a_{ji} + b_{ji}$ et $a_{ji} + b_{ji}$.

11. Montrer que ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Soient $A = [a_{ij}]$ une matrice d'ordre $m \times n$ et $B = [b_{ij}]$ d'ordre $n \times p$. Alors $C = AB = [c_{ij}]$ est d'ordre $m \times p$, l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ et c'est aussi l'élément de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^t(AB)$.

Les éléments de la $j^{\text{ème}}$ ligne de ${}^tB$ sont $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ et les éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$ sont $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$. Ainsi l'élément de la $j^{\text{ème}}$ ligne et $i^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tB.{}^tA$ est :

$$\sum_{k=1}^{n} b_{kj} \cdot a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = c_{ij}.$$

D'où ${}^t(AB) = {}^tB \cdot {}^tA$.

32. Montrer que (*a*) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ est l'inverse de $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

33. Calculer $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour trouver l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *Rép.* : $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

34. Montrer que l'inverse d'une matrice diagonale A dont aucun élément diagonal n'est nul est une matrice diagonale où les éléments diagonaux sont les inverses de ceux de A, dans le même ordre. Ainsi l'inverse de I_n est I_n.

35. Montrer que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ sont involutives.

36. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & -1 & 0 \\ c & d & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ A_{21} & -I_2 \end{bmatrix}$ en divisant la matrice A en blocs. Montrer que $A^2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = I_4$

37. Montrer que : (*a*) ${}^t({}^tA) = A$, (*b*) ${}^t(kA) = k\,{}^tA$, (*c*) ${}^t(A^p) = ({}^tA)^p$ pour p entier positif.

38. Montrer que : $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$, [écrire $ABC = (AB)C$].

39. Montrer que : (*a*) $(A^{-1})^{-1} = A$, (*b*) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, (*c*) $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ pour p entier positif.

40. Montrer que toute matrice symétrique réelle est hermitienne.

41. Montrer que : (*a*) $\overline{(\bar{A})} = A$, (*b*) $\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B}$, (*c*) $\overline{(kA)} = \bar{k}\,\bar{A}$, (*d*) $\overline{(AB)} = \bar{A}\,\bar{B}$.

42. Montrer que : (*a*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{bmatrix}$ est hermitienne.

(*b*) $B = \begin{bmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{bmatrix}$ est anti-hermitienne.

(*c*) iB est hermitienne,

(*d*) $\bar{A}$ est hermitienne et $\bar{B}$ anti-hermitienne.

43. Si A est carrée d'ordre n, montrer que : (*a*) $A\,{}^tA$ et ${}^tAA$ sont symétriques, (*b*) $A + {}^t\bar{A}$, $A\,{}^t\bar{A}$, et ${}^t\bar{A}A$ sont hermitiennes.

44. Montrer que si H est hermitienne et si A peut être multiplié par H alors ${}^t\bar{A}HA$ est hermitienne.

45. Montrer que toute matrice hermitienne A peut être écrite $B + iC$ où B est une matrice symétrique réelle et C une matrice réelle anti-symétrique.

46. Montrer que : (*a*) Toute matrice anti-hermitienne A peut s'écrire $A = B + iC$ où B est réelle et anti-symétrique et C est réelle symétrique. (*b*) ${}^t\bar{A}A$ est réelle si et seulement si B et C vérifient : $BC = -CB$.

47. Montrer que si A et B commutent alors A^{-1} et B^{-1}, ${}^tA$ et ${}^tB$, ${}^t\bar{A}$ et ${}^t\bar{B}$ commutent

48. m et n étant des entiers positifs, montrer que A^m et B^n commutent si A et B commutent.

49. Montrer (a) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

50. Montrer que si A est symétrique ou anti-symétrique alors $A\,{}^tA = {}^tAA$ et A^2 sont symétriques.

51. Soient $a, b, c, \ldots, g$ des scalaires et p un entier positif. Montrer que si A est symétrique alors $aA^p + bA^{p-1} + \cdots + gI$ est également symétrique.

52. Montrer que toute matrice carrée A peut s'écrire $A = B + C$ où B est hermitienne et C anti-hermitienne.

53. Montrer que si A est réelle anti-symétrique ou si A est complexe anti-hermitienne alors iA et $-iA$ sont hermitiennes.

54. Montrer que le théorème du problème 52 peut s'énoncer de la façon suivante :
Toute matrice carrée A peut s'écrire $A = B + iC$ où B et C sont hermitiennes.

55. Montrer que si A et B sont telles que $AB = A$ et $BA = B$ alors (a) ${}^tB\,{}^tA = {}^tA$ et ${}^tA\,{}^tB = {}^tB$, (b) ${}^tA$ et ${}^tB$ sont idempotentes, (c) $A = B = I$ si A admet une inverse.

56. Si A est involutive, montrer que $\frac{1}{2}(I + A)$ et $\frac{1}{2}(I - A)$ sont idempotentes ; et de plus $\frac{1}{2}(I + A)\cdot\frac{1}{2}(I - A) = 0$.

57. Si une matrice carrée A d'ordre n admet une inverse A^{-1} montrer que :
(a) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$, (b) $(\bar{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$, (c) $(\overline{{}^tA})^{-1} = \overline{{}^t(A^{-1})}$
(a) on pourra calculer la transposée de $AA^{-1} = I$ et obtenir ${}^t(A^{-1})$ comme l'inverse de ${}^tA$.

58. Trouver toutes les matrices qui commutent avec : (a) diag $(1, 1, 2, 3)$, (b) diag $(1, 1, 2, 2)$.
Réponses : (a) diag (A, b, c), (b) diag (A, B) où A et B sont des matrices carrées d'ordre 2 arbitraires et où b et c sont des scalaires.

59. Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont des matrices scalaires d'ordre $m_1, m_2, \ldots, m_s$ respectivement, trouver toutes les matrices qui commutent avec diag $(A_1, A_2, \ldots, A_s)$.
Réponse : diag $(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ où $B_1, B_2, \ldots, B_s$ sont des matrices d'ordre $m_1, m_2, \ldots, m_s$ respectivement.

60. Si $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ (A et B étant des matrices carrées d'ordre n) alors A et B sont appelées "diviseurs de zéro". Montrer que les matrices A et B du problème 21 sont des diviseurs de zéro.

61. Si $A = \text{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ et $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_s)$ où A_i et B_i sont de même ordre $(i = 1, 2, \ldots, s)$, montrer que :
(a) $A + B = \text{diag}(A_1+B_1, A_2+B_2, \ldots, A_s+B_s)$
(b) $AB = \text{diag}(A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_sB_s)$
(c) trace AB = trace A_1B_1 + trace $A_2B_2 + \cdots +$ trace A_sB_s.

62. Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n anti-symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

63. Si A est une matrice carrée d'ordre n et $B = rA + sI$ où r et s sont des scalaires, montrer que A et B commutent.

64. Soient A et B deux matrices carrés d'ordre n ; r_1, r_2, s_1, s_2 des scalaires tels que $r_1s_2 \neq r_2s_1$. Montrer que $C_1 = r_1A + s_1B$ et $C_2 = r_2A + s_2B$ commutent si et seulement si A et B commutent.

65. Montrer qu'une matrice carrée A d'ordre n n'a pas d'inverse lorsque (a) A a une ligne (colonne) de zéros ou (b) A a deux lignes (colonnes) identiques, ou (c) A a une ligne (colonne) qui est la somme de deux autres de ses lignes (colonnes).

66. Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n et si A a une inverse, montrer que :
$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B).$$

CHAPITRE 3

Déterminant d'une matrice carrée

PERMUTATIONS. Considérons les $3! = 6$ permutations des entiers $1, 2, 3$ pris dans leur ensemble :

(3.1) $$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

et huit des $4! = 24$ permutations des entiers $1, 2, 3, 4$ pris dans leur ensemble :

(3.2) $$\begin{matrix} 1234 & 2134 & 3124 & 4123 \\ 1324 & 2314 & 3214 & 4213 \end{matrix}$$

Si, dans une permutation donnée, un entier supérieur précède un entier inférieur, nous dirons qu'il y a une inversion. Si, dans une permutation donnée, le nombre d'inversions est pair (impair), nous dirons que la permutation est paire (impaire). Par exemple : Dans (3.1) la permutation 123 est paire puisqu'il n'y a pas d'inversion, la permutation 132 est impaire puisque 3 précède 2, la permutation 312 est paire puisque 3 précède 1 et 3 précède 2. Dans (3.2) la permutation 4213 est paire puisque 4 précède 2, 4 précède 1, 4 précède 3, et 2 précède 1.

DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE. Considérons la matrice carrée d'ordre n :

(3.3) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

et un produit

(3.4) $$a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \dots a_{nj_n}$$

de n de ses éléments obtenus de la façon suivante : on choisit dans chaque ligne et dans chaque colonne un élément et un seul. Pour simplifier l'écriture, les facteurs du produit (3.4) ont été rangés de façon que les premiers indices soient dans l'ordre naturel : $1, 2, 3, \dots, n$; la suite des seconds indices est l'une des $n!$ permutations de l'ensemble $1, 2, \dots, n$. (A titre d'exercice, le lecteur pourra refaire les démonstrations de ce chapitre en utilisant des produits tels que les seconds indices soient rangés dans l'ordre naturel). Etant donnée une permutation $j_1, j_2, \dots, j_n$ des seconds indices, définissons $\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} = +1$ ou -1 suivant que la permutation est paire ou impaire, et formons le produit suivant affecté d'un signe :

(3.5) $$\epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

On appelle "déterminant de A" et on note $|A|$ ou dét A la somme de tous les produits de la forme (3.5) que l'on peut former à partir des éléments de A. Chaque produit de la forme (3.5) est appelé "terme" du déterminant. Ainsi

(3.6) $$\text{dét } A = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

où la sommation est étendue aux $n!$ permutations $j_1 j_2 \dots j_n$ de l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, n$.

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n est appelé "déterminant d'ordre n".

DETERMINANTS D'ORDRE DEUX ET TROIS. D'après (3.6) nous avons pour $n = 2$ et $n = 3$:

(3.7) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12}\, a_{11}a_{22} + \epsilon_{21}\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

et

(3.8) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \epsilon_{123}\, a_{11}a_{22}a_{33} + \epsilon_{132}\, a_{11}a_{23}a_{32} + \epsilon_{213}\, a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + \epsilon_{231}\, a_{12}a_{23}a_{31} + \epsilon_{312}\, a_{13}a_{21}a_{32} + \epsilon_{321}\, a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &\quad + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Exemple 1.

(*a*) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2$

(*b*) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - (-1)3 = 0 + 3 = 3$

(*c*) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(0\cdot 0 - 1\cdot 1) - 3(1\cdot 0 - 1\cdot 2) + 5(1\cdot 1 - 0\cdot 2) = 2(-1) - 3(-2) + 5(1) = 9 \end{aligned}$$

(*d*) $$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & -6 \end{vmatrix} &= 2\{0(-6) - (-2)(-5)\} - (-3)\{1(-6) - (-2)0\} + (-4)\{1(-5) - 0\cdot 0\} \\ &= -20 - 18 + 20 = -18 \end{aligned}$$

voir le problème 1.

PROPRIETES DES DETERMINANTS. Dans toute la suite de ce paragraphe, A sera une matrice carrée dont le déterminant, dét A, est donné par (3.6). Supposons que tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. tous les éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne) soient nuls. Puisque chaque terme de (3.6) contient un élément de cette ligne, chaque terme de la somme est nul et par conséquent :

Théorème I. Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice carrée A sont nuls, alors dét $A = 0$. Considérons ${}^tA$ la transposée de A.

On peut voir facilement que chaque terme de (3.6) peut être obtenu à partir de ${}^tA$ en choisissant correctement dans l'ordre les facteurs dans la première, la deuxième, . . . la dernière colonnes. Ainsi,

Théorème II. Si A est une matrice carrée, alors dét ${}^tA$ = dét A, c'est-à-dire que tous les théorèmes concernant les lignes d'un déterminant seront valables également pour les colonnes et vice versa.

Soit B la matrice obtenue en multipliant tous les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par un scalaire k. Comme chaque terme figurant dans le déterminant de B contient un et un seul élément de cette $i^{\text{ème}}$ ligne, chacun des termes possède un facteur et un seul ayant k comme coefficient, ainsi on pourra mettre k en facteur dans la somme $\sum_p$:

$$\text{dét } B = k \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, a_{1j_2}\; a_{2j_2} \;\ldots\; a_{nj_n} = k \text{ dét } A$$

d'où

Théorème III. Si tout élément d'une ligne (colonne) d'un déterminant $|A|$ est multiplié par un scalaire k, le déterminant est multiplié par k. Si tout élément d'une ligne (colonne) d'un déterminant $|A|$ admet k comme facteur commun alors k peut être mis en facteur commun dans $|A|$. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

Soit B la matrice obtenue à partir de A en échangeant les $i^{\text{ème}}$ et $(i+1)^{\text{ème}}$ lignes ; chaque produit dans (3.6) de $|A|$ est un produit de $|B|$ et vice versa ; par suite, à l'exception éventuelle des signes, (3.6) est le développement de $|B|$. En comptant les inversions dans chacun des termes de (3.6) considéré comme terme de $|B|$, l'écriture de i avant celle de $i+1$ est une inversion supplémentaire ; ainsi l'opposé de chaque terme de (3.6) est le terme correspondant de $|B|$ et donc $|B| = -|A|$. Par suite :

Théorème IV. Si B est obtenue à partir de A en échangeant tout couple de deux lignes consécutives (colonnes), alors $|B| = -|A|$.

Le théorème IV a pour conséquence :

Théorème V. Si B est obtenue à partir de A en échangeant deux de ses lignes (colonnes), alors $|B| = -|A|$.

Théorème VI. Si B est obtenue à partir de A en faisant passer la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) par-dessus p lignes (colonnes), alors $|B| = (-1)^p\,|A|$.

Théorème VII. Si deux lignes de A (colonnes) sont identiques alors $|A| = 0$.

Supposons que tout élément de la $1^{\text{ère}}$ ligne de A puisse s'exprimer comme un binôme $a_{1j} = b_{1j} + c_{1j}$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Alors :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{p} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, (b_{1j_1} + c_{1j_1})\, a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n} \\ &= \sum_{p} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, b_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n} + \sum_{p} \epsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n}\, c_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \ldots a_{nj_n} \\ &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

De façon générale :

Théorème VIII. Si tout élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) de A est la somme de p termes. Alors $|A|$ peut s'exprimer comme la somme de p déterminants. Les éléments des $i^{\text{èmes}}$ lignes (colonnes) de ces p déterminants sont respectivement les premiers, seconds, ... $p^{\text{ièmes}}$ termes des sommes, et toutes les autres lignes (colonnes) sont celles de A.

Le théorème le plus utilisé est le suivant :

Théorème IX. Si B est obtenue à partir de A en ajoutant à la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) le produit d'un scalaire par une autre ligne (colonne), alors $|B| = |A|$. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix}$$

Voir problèmes 2-7.

MINEURS ET COFACTEURS. Soit A la matrice carrée d'ordre n (3.3) dont le déterminant $|A|$ est donné par (3.6). Si on enlève à A les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, le déterminant de la matrice d'ordre $(n-1)$ nouvellement construite est appelé "mineur de a_{ij}" de A. On le note $|M_{ij}|$. L'expression $(-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$ est appelée "cofacteur de a_{ij}" et on le note α_{ij}.

Exemple 2. Si $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

et

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = |M_{11}|, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = -|M_{12}|,$$
$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = |M_{13}|$$

Alors (3.8) devient

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} \end{aligned}$$

Dans le problème 9 nous démontrons :

Théorème X. Si A est la matrice de (3.3), la valeur du déterminant de A soit $|A|$ est la somme des produits obtenus en multipliant tout élément d'une ligne (colonne) de $|A|$ par son cofacteur, c'est-à-dire :

(3.9) $$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\,\alpha_{i2} + \cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}$$

(3.10) $$|A| = a_{1j}\alpha_{1j} + a_{2j}\alpha_{2j} + \cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj} \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n)$$

En utilisant le théorème VII, nous pouvons démontrer :

Théorème XI. La somme des produits obtenus en multipliant tout élément d'une ligne (colonne) d'une matrice A carrée d'ordre n par les cofacteurs correspondants d'une autre ligne (colonne) de A est nulle.

Exemple 3. Si A est la matrice de l'exemple 2, nous avons :

$$a_{31}\alpha_{31} + a_{32}\alpha_{32} + a_{33}\alpha_{33} = |A|$$

et

$$a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = |A|$$

tandis que

$$a_{31}\alpha_{21} + a_{32}\alpha_{22} + a_{33}\alpha_{23} = 0$$

et

$$a_{12}\alpha_{13} + a_{22}\alpha_{23} + a_{32}\alpha_{33} = 0$$

Voir problème 10-11.

MINEURS ET COMPLEMENTS ALGEBRIQUES. Considérons la matrice (3.3). Supposons que $i_1, i_2, \ldots, i_m$, rangés par ordre croissant, soient m indices d'une ligne choisis parmi $1, 2, \ldots, n$; $(1 \leqslant m < n)$. Supposons que $j_1, j_2, \ldots, j_m$, rangés par ordre croissant, soient m indices d'une colonne. Supposons que les indices ligne et colonne restants, soient également rangés par ordre croissant : $i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n$ et $j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n$. Une telle séparation des indices ligne et colonne détermine, de façon unique, deux matrices :

(3.11) $$A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \begin{bmatrix} a_{i_1, j_1} & a_{i_1, j_2} & \cdots & a_{i_1, j_m} \\ a_{i_2, j_1} & a_{i_2, j_2} & \cdots & a_{i_2, j_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_m, j_1} & a_{i_m, j_2} & \cdots & a_{i_m, j_m} \end{bmatrix}$$

et

$$(3.12) \qquad A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n} = \begin{bmatrix} a_{i_{m+1},j_{m+1}} & a_{i_{m+1},j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+1},j_n} \\ a_{i_{m+2},j_{m+1}} & a_{i_{m+2},j_{m+2}} & \dots & a_{i_{m+2},j_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_n,j_{m+1}} & a_{i_n,j_{m+2}} & \dots & a_{i_n,j_n} \end{bmatrix}$$

appelées sous-matrices de A.

Le déterminant de chacune de ces deux sous-matrices est encore appelé mineur de A et les deux mineurs suivants :

$$\left| A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m} \right| \quad \text{et} \quad \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n} \right|$$

sont appelés mineurs complémentaires de A ; chacun d'eux étant le complément de l'autre.

Exemple 3. Pour la matrice carrée d'ordre 5, $A = \left[a_{ij} \right]$,

$$\left| A^{1,3}_{2,5} \right| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{51} & a_{53} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} & a_{15} \\ a_{32} & a_{34} & a_{35} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \end{vmatrix}$$

sont des mineurs complémentaires.

Soit

$$(3.13) \qquad p = i_1 + i_2 + \dots + i_m + j_1 + j_2 + \dots + j_m$$

et

$$(3.14) \qquad q = i_{m+1} + i_{m+2} + \dots + i_n + j_{m+1} + j_{m+2} + \dots + j_n$$

Le mineur affecté de son signe $(-1)^p \left| A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m} \right|$ est appelé "le complément algébrique" de

$$\left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n} \right|$$

et $(-1)^q \left| A^{j_{m+1},j_{m+2},\dots,j_n}_{i_{m+1},i_{m+2},\dots,i_n} \right|$ est appelé "le complément algébrique" de

$$\left| A^{j_1,j_2,\dots,j_m}_{i_1,i_2,\dots,i_m} \right|$$

Exemple 4. Pour les mineurs de l'exemple 3, $(-1)^{2+5+1+3} \left| A^{1,3}_{2,5} \right| = -\left| A^{1,3}_{2,5} \right|$ est le complément algébrique de $\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right|$ et $(-1)^{1+3+4+2+4+5} \left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right| = -\left| A^{2,4,5}_{1,3,4} \right|$ est le complément algébrique de $\left| A^{1,3}_{2,5} \right|$. Remarquer que les signes attribués aux deux mineurs complémentaires sont les mêmes. Est-ce toujours vrai ?

Quand $m = 1$, (3.11) devient $A^{j_1}_{i_1} = \left[a_{i_1 j_1} \right]$ et $\left| A^{j_1}_{i_1} \right| = a_{i_1 j_1}$, un élément de A. Le mineur complémentaire $\left| A^{j_2,j_3,\dots,j_n}_{i_2,i_3,\dots,i_n} \right|$ est $|M_{i_1,j_1}|$, avec la notation du paragraphe précédent, et le complément algébrique est le cofacteur $\alpha_{i_1 j_1}$.

Un mineur de A dont les éléments diagonaux sont aussi des éléments diagonaux de A est appelé "mineur principal" de A. Le complément d'un mineur principal de A est aussi un mineur principal de A. Le complément algébrique d'un mineur principal est son propre complément.

Exemple 5. Pour la matrice carrée d'ordre 5, $A = [a_{ij}]$,

$$|A_{1,3}^{1,3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{and} \quad |A_{2,4,5}^{2,4,5}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & a_{44} & a_{45} \\ a_{52} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

sont des mineurs principaux complémentaires de A. Quel est le complément algébrique de chacun d'eux ?

On utilisera également les termes de mineurs, mineurs complémentaires, compléments algébriques et mineurs principaux pour $|A|$.

Voir problème 12-13.

PROBLEMES RESOLUS

1. (a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4 - 3(-1) = 11$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)(4\cdot7 - 5\cdot6) - 0 + 2(3\cdot6 - 4\cdot5) = -2 - 4 = -6$$

(c) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1(4\cdot21 - 15\cdot6) + 6(3\cdot6 - 4\cdot5) = -18$$

(d) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(3\cdot3 - 5\cdot1) = 4$$

2. Ajoutons aux éléments de la première colonne les éléments correspondants des autres colonnes, nous obtenons :

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

d'après le théorème I.

3. Ajoutons la seconde colonne à la troisième, mettons en facteur commun dans la troisième colonne et utilisons le théorème VII.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4. Ajoutons à la troisième ligne la première et la deuxième lignes, mettons 2 en facteur commun ; soustrayons la deuxième ligne de la troisième ; soustrayons la troisième ligne de la première ; soustrayons la première ligne de la seconde ; faisons passer la troisième ligne au-dessus des autres, nous trouvons :

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ c_1+a_1 & c_2+a_2 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & b_3+c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

5. Sans développer, montrer que $|A| = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$.

Soustraire la seconde ligne de la première. Ainsi

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1^2-a_2^2 & a_1-a_2 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)\begin{vmatrix} a_1+a_2 & 1 & 0 \\ a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^2 & a_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{d'après le théorème III}$$

et a_1-a_2 est un facteur de $|A|$. De même, a_2-a_3 et a_3-a_1 sont des facteurs. Or $|A|$ est de degré 3 par rapport à l'ensemble des lettres ; par suite

(i) $$|A| = k(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$$

Le produit des éléments diagonaux, $a_1^2 a_2$ est un terme de $|A|$. De (i), ce terme est $-ka_1^2 a_2$. Ainsi, $k=-1$ et $|A| = -(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$. Remarquer que $|A|$ s'annule si et seulement si deux des trois éléments a_1, a_2, a_3 sont égaux.

6. Montrer que si A est anti-symétrique et d'ordre impair $2p-1$, alors $|A|=0$.

Puisque A est anti-symétrique, ${}^tA = -A$; ainsi $|{}^tA| = |-A| = (-1)^{2p-1}|A| = -|A|$. Mais, d'après le théorème II, $|{}^tA| = |A|$; par suite $|A| = -|A|$ et $|A| = 0$.

7. Montrer que si A est hermitienne, alors $|A|$ est réel.

Puisque A est hermitienne $\bar{A} = {}^tA$ et $|\bar{A}| = |{}^tA| = |A|$ d'après le théorème II. Mais si

$$|A| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} = a + bi$$

alors
$$|\bar{A}| = \sum_p \epsilon_{j_1 j_2 \dots j_n} \bar{a}_{1j_1} \bar{a}_{2j_2} \dots \bar{a}_{nj_n} = a - bi$$

Or $|\bar{A}| = |A|$ entraîne $b=0$; par suite $|A|$ est réel.

8. Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad \alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$$

Remarquer que les signes attribués aux mineurs des éléments pour former les cofacteurs vérifient le tableau

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

où chaque signe occupe la même place que l'élément dans A, dont le cofacteur dépend. Ecrire le tableau des signes analogues pour une matrice carrée d'ordre 5.

9. Montrer que la valeur du déterminant $|A|$ d'une matrice A carrée d'ordre n est la somme des produits obtenus en multipliant tout élément d'une ligne (colonne) de A par son cofacteur.

Nous le démontrerons pour une ligne. Les termes de (3-6) ayant a_{11} comme facteur sont

(a) $$a_{11} \sum \epsilon_{1,\, j_2 j_3 \ldots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

Or $\epsilon_{1, j_2 j_3 \ldots j_n} = \epsilon_{j_2 j_3 \ldots j_n}$ puisque dans une permutation $1, j_1, j_2, \ldots, j_n$, le 1 est dans l'ordre naturel. Ainsi on peut écrire (a) de la façon suivante :

(b) $$a_{11} \sum_{\sigma} \epsilon_{j_2 j_3 \ldots j_n} a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n}$$

où la sommation est étendue aux $\sigma = (n-1)!$ permutations des entiers $2, 3, \ldots, n$, et par suite, comme

(c) $$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} |M_{11}|$$

Considérons la matrice B obtenue à partir de A en déplaçant sa $s^{\text{ième}}$ colonne par-dessus les $s-1$ premières colonnes. D'après le théorème **VI**, $|B| = (-1)^{s-1}|A|$. Cependant, l'élément de la première ligne, première colonne de B est a_{1s} et le mineur de a_{1s} dans B est précisément le mineur $|M_{1s}|$ de a_{1s} dans A. En reprenant la démonstration précédente de (c), les termes de $a_{1s}|M_{1s}|$ sont tous les termes de $|B|$ ayant a_{1s} comme facteur et, ainsi, tous les termes de $(-1)^{s-1}|A|$ ayant a_{1s} comme facteur. Par suite les termes de $a_{1s}\{(-1)^{s-1}|M_{1s}|\}$ sont tous les termes de $|A|$ ayant a_{1s} comme facteur. Ainsi

(3.15) $$\begin{aligned} |A| &= a_{11}\{(-1)^{1+1}|M_{11}|\} + a_{12}\{(-1)^{1+2}|M_{12}|\} \\ &\quad + \cdots + a_{1s}\{(-1)^{1+s}|M_{1s}|\} + \cdots + a_{1n}\{(-1)^{1+n}|M_{1n}|\} \\ &= a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + \cdots + a_{1n}\alpha_{1n} \end{aligned}$$

puisque $(-1)^{s-1} = (-1)^{s+1}$. Nous avons (3.9) avec $i = s$. On dira que (3.15) est le développement de $|A|$ suivant sa première ligne. Le développement de $|A|$ suivant sa $r^{\text{ième}}$ ligne (c'est-à-dire (3.9) avec $i = r$) est obtenu en reprenant la démonstration précédente. Soit B la matrice obtenue à partir de A en déplaçant la $r^{\text{ième}}$ ligne au-dessus des $r-1$ premières lignes et ensuite sa $s^{\text{ième}}$ colonne par-dessus les $s-1$ premières colonnes. Alors

$$|B| = (-1)^{r-1} \cdot (-1)^{s-1}|A| = (-1)^{r+s}|A|$$

L'élément de la première ligne, première colonne de B est a_{rs} et le mineur de a_{rs} dans B est précisément le mineur de a_{rs} dans A. Par suite les termes de

$$a_{rs}\{(-1)^{r+s}|M_{rs}|\}$$

sont tous les termes de $|A|$ ayant a_{rs} comme facteur. Ainsi :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\{(-1)^{r+k}|M_{rk}|\} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}\alpha_{rk}$$

et nous avons (3.9) pour $i = r$.

10. Si α_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans la matrice A carrée d'ordre n, $A = [a_{ij}]$, montrer que :

(i) $$k_1\alpha_{1j} + k_2\alpha_{2j} + \cdots + k_n\alpha_{nj} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & k_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & k_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & k_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Cette relation est obtenue à partir de (**3.10**) en remplaçant a_{1j} par k_1, a_{2j} par $k_2, \ldots, a_{nj}$ par k_n. En faisant ces transformations aucun des cofacteurs $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \ldots, \alpha_{nj}$ figurant dans l'expression n'est changé puisque aucun ne contient un élément de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

D'après le théorème VII, le déterminant dans (i) est nul quand $k_r = a_{rs}$, ($r = 1, 2, \ldots, n$ et $s \neq j$). D'après les théorèmes VIII et VII le déterminant dans (i) est $|A|$ quand $k_r = a_{rj} + k a_{rs}$, ($r = 1, 2, \ldots, n$ et $s \neq j$).

Ecrire l'égalité analogue à celle de (i) à partir de (**3.9**) en remplaçant les éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

11. Calculer : (a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ (e) $|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix}$

(b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (d) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(a) Développer suivant la deuxième colonne (voir théorème X)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = a_{12}\alpha_{12} + a_{22}\alpha_{22} + a_{32}\alpha_{32} = 0\cdot\alpha_{12} + 0\cdot\alpha_{22} + (-5)\alpha_{32}$$

$$= -5(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5(4-6) = -10$$

(b) Soustraire deux fois la seconde colonne de la troisième (voir théorème IX)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8-2\cdot4 \\ -2 & 1 & 5-2\cdot1 \\ -3 & 2 & 4-2\cdot2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(14) = -42$$

(c) En soustrayant de la première ligne trois fois la seconde et en ajoutant deux fois la seconde à la troisième

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-3(1) & 4-3(2) & 5-3(3) \\ 1 & 2 & 3 \\ -2+2(1) & 5+2(2) & -4+2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(-4+36) = -32$$

(d) En soustrayant la première colonne de la seconde et en procédant ensuite comme en (c)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 5 & -11 & 3 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2(1) & 1 & -4+4(1) \\ 5-2(-11) & -11 & 3+4(-11) \\ 4-2(-2) & -2 & -3+4(-2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 27 & -11 & -41 \\ 8 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 27 & -41 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = -31$$

(e) En mettant 14 en facteur commun dans la première colonne et en utilisant le théorème IX pour réduire les éléments des colonnes restantes

$$|A| = \begin{vmatrix} 28 & 25 & 38 \\ 42 & 38 & 65 \\ 56 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25 & 38 \\ 3 & 38 & 65 \\ 4 & 47 & 83 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 2 & 25-12(2) & 38-20(2) \\ 3 & 38-12(3) & 65-20(3) \\ 4 & 47-12(4) & 83-20(4) \end{vmatrix}$$

$$= 14\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14\begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -14(-1-54) = 770$$

12. Montrer que p et q, introduits dans (3.13) et (3.14) sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs.

Puisque tout indice ligne (colonne) est soit dans p soit dans q mais non dans les deux à la fois

$$p+q \;=\; (1+2+\cdots+n)+(1+2+\cdots+n) \;=\; 2\cdot\tfrac{1}{2}n(n+1) \;=\; n(n+1)$$

Ainsi $p+q$ est pair (car n ou $n+1$ est nécessairement pair) ; par suite, p et q sont soit tous les deux pairs, soit tous les deux impairs. Donc $(-1)^p = (-1)^q$; il suffit de calculer l'un d'eux.

13. Pour la matrice $A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{bmatrix}$, le complément algébrique de $|A^{2,4}_{2,3}|$ est

$$(-1)^{2+3+2+4}|A^{1,3,5}_{1,4,5}| \;=\; -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \qquad \text{(voir problème 12)}$$

et le complément algébrique de $|A^{1,3,5}_{1,4,5}|$ est $-|A^{2,4}_{2,3}| = -\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix}$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

14. Montrer que la permutation 12534 des entiers 1, 2, 3, 4, 5 est paire, 24135 est impaire, 41532 est paire, 53142 est impaire, et 52314 est paire.

15. Donner toutes les permutations de 1, 2, 3, 4 ; montrer qu'il y en a autant de paires que d'impaires.

16. Supposons que les éléments diagonaux d'une matrice A carrée d'ordre 5 soient a, b, c, d, e. Montrer, en utilisant (3.6), que lorsque A est diagonale, triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure alors $|A| = abcde$.

17. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ montrer que $AB \neq BA \neq {}^tAB \neq A\,{}^tB \neq {}^tA\,{}^tB \neq {}^tB\,{}^tA$ mais que le déterminant de chaque produit est 4.

18. Calculer comme dans le problème 1 :

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$ $\qquad$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$ $\qquad$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$

19. (a) Calculer $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -4$.

(b) Notons $|B|$ le déterminant obtenu à partir de $|A|$ en multipliant les éléments de la seconde colonne par 5. Calculer $|B|$ pour vérifier le théorème III.

(*c*) Notons $|C|$ le déterminant obtenu à partir de $|A|$ en échangeant la première colonne et la troisième. Calculer $|C|$ pour vérifier le théorème **V**.

(*d*) Montrer que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ ce qui illustre le théorème **VIII**.

(*e*) Obtenir à partir de $|A|$ le déterminant $|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ en soustrayant de la troisième colonne trois fois la première. Calculer $|D|$ pour vérifier le théorème **IX**.

(*f*) Dans $|A|$ soustraire deux fois la première ligne de la deuxième et quatre fois la première de la troisième. Calculer le déterminant résultant.

(*g*) Dans $|A|$ multiplier la première colonne par trois et du résultat soustraire la troisième. Calculer le nouveau déterminant et vérifier qu'il vaut trois fois le premier. Comparer avec (*e*). Ne pas confondre (*e*) et (*g*).

20. Si A est une matrice carrée d'ordre n et k un scalaire, utiliser (**3.6**) pour montrer que $|kA| = k^n|A|$.

21. Montrer que : (*a*) Si $|A| = k$, alors $|\bar{A}| = \bar{k} = |{}^t\bar{A}|$

(*b*) Si A est anti-hermitienne, alors $|A|$ est soit réel soit un imaginaire pur.

22. (*a*) Compter le nombre de fois que l'on a échangé deux lignes (colonnes) consécutives pour obtenir B à partir de A dans le théorème **V** et ainsi démontrer ce théorème.

(*b*) Faire la même chose pour le théorème **VI**.

23. Démontrer le théorème **VII**. Indication : échanger les lignes identiques et utiliser le théorème **V**.

24. Montrer que si deux lignes (colonnes) d'une matrice carrée A sont proportionnelles, alors $|A| = 0$.

25. Utiliser les théorèmes **VIII**, **III** et **VII** pour démontrer le théorème **IX**.

26. Calculer les déterminants du problème 18 comme ceux du problème 11.

27. Utiliser (**3.6**) pour calculer $|A| = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{vmatrix}$ et vérifier alors que $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$. Ainsi, si $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ où A_1 et A_2 sont deux matrices carrées d'ordre 2, $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$.

28. Montrer que le cofacteur de tout élément de $\begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ est égal à cet élément.

29. Montrer que le cofacteur d'un élément d'une ligne de $\begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ est égal à l'élément correspondant de la colonne qui a le même indice que la ligne.

30. Montrer que (*a*) Si A est symétrique, alors $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ lorsque $i \neq j$.

(*b*) Si A est carrée d'ordre n et anti-symétrique, alors $\alpha_{ij} = (-1)^{n-1}\alpha_{ji}$ lorsque $i \neq j$.

31. Pour la matrice A du problème 8 ;

(*a*) Montrer que $|A| = 1$

(*b*) Former la matrice $C = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$ et montrer que $AC = I$.

(*c*) Expliquer pourquoi le résultat de (*b*) est connu dès que l'on connaît (*a*).

32. Multiplier les colonnes de $|A| = \begin{vmatrix} bc & a^2 & a^2 \\ b^2 & ca & b^2 \\ c^2 & c^2 & ab \end{vmatrix}$ respectivement par a, b, c ; mettre en facteur commun dans chacune des lignes et montrer que $|A| = \begin{vmatrix} bc & ab & ca \\ ab & ca & bc \\ ca & bc & ab \end{vmatrix}$.

33. Sans calcul montrer que : $\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$

34. Montrer que le déterminant carré d'ordre n $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1).$

35. Démontrer $\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2} & \dots & a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2} & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} = \{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_n)\}\{(a_2-a_3)(a_2-a_4)\dots(a_2-a_n)\} \dots \{a_{n-1}-a_n\}.$

36. Sans développer, montrer que $\begin{vmatrix} na_1+b_1 & na_2+b_2 & na_3+b_3 \\ nb_1+c_1 & nb_2+c_2 & nb_3+c_3 \\ nc_1+a_1 & nc_2+a_2 & nc_3+a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2-n+1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$

37. Sans développer, montrer que l'équation $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ admet 0 comme racine.

38. Démontrer $\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = b^{n-1}(na+b).$

CHAPITRE 4

Calcul de déterminants

Les méthodes de calcul des déterminants d'ordre 2 et 3 sont exposées dans le chapitre 3. Dans le problème 11 de ce chapitre, on a donné deux applications du théorème 9 : (*a*) afin d'obtenir un élément 1 ou -1 si le déterminant donné ne contient pas un tel élément, (*b*) afin de remplacer un élément d'un déterminant donné par 0.

Pour des déterminants d'ordres plus élevés, la méthode générale consiste à remplacer, à l'aide de l'utilisation répétée du théorème IX du chapitre 3, le déterminant donné $\det A$ par un autre déterminant, $\det B = \det b_{ij}$ ayant la propriété suivante : tous les éléments de l'une des lignes (resp. colonnes) sauf un est égal à 0. Si b_{pq} est cet élément non nul et si β_{pq} est son cofacteur,

$$|A| \quad = \quad |B| \quad = \quad b_{pq}\cdot\beta_{pq} \quad = \quad (-1)^{p+q}b_{pq}\cdot \text{ mineur de } b_{pq}.$$

Alors le mineur de b_{pq} est traité de façon similaire et on poursuit le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne un déterminant d'ordre 2 ou 3.

Exemple 1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3+2(-2) & -2+2(1) & 4+2(2) \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3-3(3) & 2-3(-2) & 3-3(1) & 4-3(2) \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8+8(-1) & -1 & 8+8(-1) \\ -6+8(8) & 8 & -2+8(8) \\ -2+8(4) & 4 & 5+8(4) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 58 & 8 & 62 \\ 30 & 4 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= -(-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 58 & 62 \\ 30 & 37 \end{vmatrix} = -286$$

voir problèmes 1-3

Pour des déterminants ayant des éléments correspondants à ceux de l'exemple 2 ci-dessous, on peut utiliser la variante suivante : diviser la première ligne par l'un de ses éléments non nuls et essayer d'obtenir des éléments nuls dans une ligne ou dans une colonne.

Exemple 2.

$$\begin{vmatrix} 0{,}921 & 0{,}185 & 0{,}476 & 0{,}614 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921\begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0{,}782 & 0{,}157 & 0{,}527 & 0{,}138 \\ 0{,}872 & 0{,}484 & 0{,}637 & 0{,}799 \\ 0{,}312 & 0{,}555 & 0{,}841 & 0{,}448 \end{vmatrix} = 0{,}921\begin{vmatrix} 1 & 0{,}201 & 0{,}517 & 0{,}667 \\ 0 & 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0 & 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0 & 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921\begin{vmatrix} 0 & 0{,}123 & -0{,}384 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0 & -0{,}320 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}196 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}680 & 0{,}240 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0{,}309 & 0{,}265 & 0{,}217 \\ 0{,}492 & 0{,}757 & 0{,}240 \end{vmatrix} = 0{,}921(-0{,}384)\begin{vmatrix} 0{,}309 & 0{,}265 \\ 0{,}492 & 0{,}757 \end{vmatrix}$$

$$= 0{,}921(-0{,}384)(0{,}104) = -0{,}037$$

DEVELOPPEMENT DE LAPLACE. Le développement d'un déterminant d'ordre n det A selon une ligne (resp. colonne) est un cas particulier du développement de Laplace. Au lieu de choisir une ligne de det A, considérons m lignes choisies, numérotées $i_1, \ldots, i_m$, celles-ci étant rangées par ordre de grandeur. A partir de ces m lignes, on peut former

$$\rho = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2 \ldots . m} \quad \text{mineurs} \quad \left| A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right|$$

en effectuant tous les choix possibles de m colonnes parmi n colonnes. En utilisant les mineurs et leurs compléments algébriques, nous avons le développement de Laplace

$$(4.1) \qquad |A| = \sum_{\rho} (-1)^s \left| A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m} \right| \cdot \left| A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n} \right|$$

où $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. La somme porte sur les ρ-choix des indices des colonnes prises m à la fois.

Exemple 3.

Calculer $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, en utilisant les mineurs des deux premières lignes.

D'après (4-1)

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2} |A_{1,2}^{1,2}| \cdot |A_{3,4}^{3,4}| + (-1)^{1+2+1+3} |A_{1,2}^{1,3}| \cdot |A_{3,4}^{2,4}| \\ &\quad + (-1)^{1+2+1+4} |A_{1,2}^{1,4}| \cdot |A_{3,4}^{2,3}| + (-1)^{1+2+2+3} |A_{1,2}^{2,3}| \cdot |A_{3,4}^{1,4}| \\ &\quad + (-1)^{1+2+2+4} |A_{1,2}^{2,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,3}| + (-1)^{1+2+3+4} |A_{1,2}^{3,4}| \cdot |A_{3,4}^{1,2}| \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= (-13)(15) - (8)(-6) + (-8)(-12) + (-1)(23) - (14)(6) + (-8)(16) \\ &= -286 \end{aligned}$$

Voir problèmes 4-6.

DETERMINANT D'UN PRODUIT. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$(4.2) \qquad |AB| = |A| \cdot |B|$$

Voir Problème 7 .

DEVELOPPEMENT SELON LA PREMIERE LIGNE ET LA PREMIERE COLONNE. Si $A = [a_{ij}]$ est une matrice carrée d'ordre n, alors

$$(4.3) \qquad |A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

où α_{11} désigne le cofacteur de a_{11} et α_{ij}^{i1} est le complément algébrique du mineur $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ de A.

DERIVEE D'UN DETERMINANT. Supposons que les éléments de la matrice carrée d'ordre n $A = [a_{ij}]$ soient des fonctions dérivables de la variable x. Alors :

Théorème I. La dérivée par rapport à x de det A, $\frac{d}{dx}(\det A)$, est la somme de n déterminants obtenus en remplaçant de toutes les manières possibles les éléments de l'une des lignes (colonnes) de det A par leurs dérivées par rapport à x.

Exemple 4.

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 2 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 + 4x - 12x^2 - 6x^5$$

Voir problème 8.

PROBLEMES RESOLUS

1. $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7 & 4 & -3 & 10 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 7-2(2) & 4-2(3) & -3-2(-2) & 10-2(4) \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -286 \qquad \text{(Voir exemple 1)}$$

Il y a bien sûr beaucoup d'autres façons d'obtenir un élément $+1$ ou -1 ; par exemple, en soustrayant la première colonne de la seconde, la quatrième de la seconde, la première ligne de la seconde, etc.

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1+1 & 2-2(1) \\ 2 & 3 & 2+2 & -2-2(2) \\ 2 & 4 & 2+2 & 1-2(2) \\ 3 & 1 & 5+3 & -3-2(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(4) & 4-2(4) & -6-2(-3) \\ 4 & 4 & -3 \\ 1-3(4) & 8-3(4) & -9-3(-3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -3 \\ -11 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ -11 & -4 \end{vmatrix} = -72$$

3. Calculer $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 0 & 2-3i \\ 1-2i & 2+3i & 0 \end{vmatrix}$.

Multiplions la seconde ligne par $1+i$ et la troisième par $1+2i$; nous avons

$$(1+i)(1+2i)|A| = (-1+3i)|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 5 & -4+7i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 2 & 0 & 5-i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i & 1+2i \\ 0 & 8-14i & 25-5i \\ 1 & -4+7i & -10+2i \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+i & 1+2i \\ 8-14i & 25-5i \end{vmatrix} = -6 + 18i$$

et $|A| = 6$.

4. Obtenir le développement de Laplace de det A = det a_{ij} (A étant d'ordre n) en utilisant les mineurs d'ordre $m < n$.

Considérons le mineur d'ordre m $\left|A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{j_1,j_2,\ldots,j_m}\right|$ de det A dans lequel les indices des lignes et des colonnes sont rangés par ordre de grandeur. Alors, par $i_1 - 1$ changements de lignes consécutives de A, on peut considérer que la ligne numérotée i_1 est en fait la première ; par $i_2 - 2$ changements de lignes consécutives, la ligne numérotée i_2 est en fait considérée comme étant la seconde ; par $i_m - m$ changements de lignes consécutives, on peut considérer que la ligne numérotée i_m est en fait la $m^{\text{ème}}$. Ainsi, après $(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_m-m) = i_1+i_2+\cdots+i_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ changements de lignes consécutives les lignes numérotées $i_1 \ldots i_{n1}$ occupent la position des m premières lignes. De même, après $j_1+j_2+\cdots+j_m-\frac{1}{2}m(m+1)$ échanges de colonnes consécutives, les colonnes numérotées $j_1 \ldots j_m$ occupent la position des m premières colonnes. Par suite des changements de lignes et de colonnes consécutives, le mineur choisi occupe le coin supérieur gauche et son complément occupe le coin inférieur droit du déterminant ; de plus, det A a changé de signe $\sigma = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m - m(m+1)$ fois, ce qui est équivalent à $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$ changements. Ainsi,

$$\left|A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{j_1,j_2,\ldots,j_m}\right| \cdot \left|A_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}\right| \text{ donne } m!\ (n-m)! \text{ termes de det } A\,.\,(-1)^s\text{, ou}$$

$$(a)\qquad (-1)^s\left|A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{j_1,j_2,\ldots,j_m}\right| \cdot \left|A_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}\right| \text{ fournit } m!\ (n-m)! \text{ termes de det } A.$$

Soient $i_1 \ldots i_m$ fixés. A partir de ces lignes $\rho = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ mineurs carrés d'ordre m distincts peuvent être choisis. Chacun de ces mineurs lorsqu'il est multiplié par son complément algébrique donne $m!\,(n-m)!$ termes de det A. Puisque, par leur formation, il n'y a pas parmi ces produits de termes doubles de det A,

$$|A| = \sum_{\rho} (-1)^s\left|A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{j_1,j_2,\ldots,j_m}\right| \cdot \left|A_{i_{m+1},i_{m+2},\ldots,i_n}^{j_{m+1},j_{m+2},\ldots,j_n}\right|$$

où $s = i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m$ et où la somme s'étend sur les ρ choix distincts $j_1 \ldots j_m$ des indices des colonnes.

5. Calculer $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, en utilisant les mineurs des deux premières colonnes.

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4+1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(1) + (-2)(1) - (5)(-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

6. Si A, B et C sont des matrices carrées d'ordre n, démontrer

$$|P| = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

A partir des n premières lignes de det P, un seul mineur carré d'ordre n non nul peut être formé. Son complément algébrique est det B. A partir de là, par le développement de Laplace, on a det P = det A . det B.

7. Démontrer que det (AB) = det A . det B.

Supposons que $A = [a_{ij}]$ et $B = [b_{ij}]$ soient des matrices carrées d'ordre n. Soit $C = [c_{ij}] = AB$ telle que $c_{ij} = \sum_{1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. D'après le problème 6,

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$$

A la $(n+1)^e$ colonne de det P, ajoutons b_{11} fois la première colonne, b_{21} fois la seconde colonne,... b_{n1} fois la $n^{\text{ème}}$ colonne. Nous avons

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Puis, à la $(n+2)^e$ colonne de det P, ajoutons b_{12} fois la première colonne, b_{22} fois la seconde colonne,... b_{n2} fois la $n^{\text{ème}}$ colonne. Nous avons

$$|P| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

En poursuivant ce procédé, nous obtenons finalement $|P| = \begin{vmatrix} A & C \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}$. A partir des n dernières lignes de det P, un seul mineur carré d'ordre n det $(-I_n) = (-1)^n$ peut être formé. Son complément algébrique est $(-1)^{1+2+\cdots+n+(n+1)+\cdots+2n}|C| = (-1)^{n(2n+1)}|C|$. D'où $|P| = (-1)^n(-1)^{n(2n+1)}|C| = |C|$ et $|C| = |AB| = |A|\cdot|B|$.

8. Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ où $a_{ij} = a_{ij}(x)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, sont des fonctions de x dérivables par rapport à x.

Alors,

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

et en notant $\dfrac{d}{dx}a_{ij}$ par a'_{ij},

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}|A| &= a'_{11}a_{22}a_{33} + a'_{22}a_{11}a_{33} + a'_{33}a_{11}a_{22} + a'_{12}a_{23}a_{31} + a'_{23}a_{12}a_{31} + a'_{31}a_{12}a_{23} \\ &\quad + a'_{13}a_{32}a_{21} + a'_{32}a_{13}a_{21} + a'_{21}a_{13}a_{32} - a'_{11}a_{23}a_{32} - a'_{23}a_{11}a_{32} - a'_{32}a_{11}a_{23} \\ &\quad - a'_{12}a_{21}a_{33} - a'_{21}a_{12}a_{33} - a'_{33}a_{12}a_{21} - a'_{13}a_{22}a_{31} - a'_{22}a_{13}a_{31} - a'_{31}a_{13}a_{22} \\ &= a'_{11}\alpha_{11} + a'_{12}\alpha_{12} + a'_{13}\alpha_{13} + a'_{21}\alpha_{21} + a'_{22}\alpha_{22} + a'_{23}\alpha_{23} + a'_{31}\alpha_{31} + a'_{32}\alpha_{32} + a'_{33}\alpha_{33} \\ &= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

d'après le problème 10 chapitre 3.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

9. Calculer

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 156$ $\qquad$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -304$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 41$ $\qquad$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 118$

10. Si A est une matrice carrée d'ordre n, montrer que det $(\overline{{}^tA}.A)$ est réel et non négatif.

11.. Calculer le déterminant du problème 9(a) en utilisant les mineurs des deux premières lignes. Même question en utilisant les mineurs des deux premières colonnes.

12. (a) Soient $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{bmatrix}$.

Utiliser $|AB| = |A|\cdot|B|$ pour démontrer : $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2) = (a_1b_1-a_2b_2)^2 + (a_2b_1+a_1b_2)^2$.

(b) Soient $A = \begin{bmatrix} a_1+ia_3 & a_2+ia_4 \\ -a_2+ia_4 & a_1-ia_3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1+ib_3 & b_2+ib_4 \\ -b_2+ib_4 & b_1-ib_3 \end{bmatrix}$.

Utiliser det (AB) = (det A) (det B) pour exprimer $(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)$ comme somme de quatre carrés.

13. Calculer $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ en utilisant les mineurs des trois premières lignes. *Réponse :* -720

14. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en utilisant les mineurs des deux premières colonnes. *Réponse* : 2.

15. Si $A_1 \ldots A_s$ sont des matrices carrées d'ordre n, utiliser le développement de Laplace pour démontrer

$$|\operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_s)| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

16. Développer $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$ en utilisant les mineurs des deux premières lignes et montrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

17. Utiliser le développement de Laplace pour montrer que le déterminant carré d'ordre n $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & C \end{vmatrix}$, où 0 est un carré d'ordre k, est nul lorsque $k > \frac{n}{2}$.

18. Dans $|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} + a_{14}\alpha_{14}$ exprimer chacun des cofacteurs α_{12}, α_{13}, α_{14} selon ses premières colonnes pour montrer

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} - \sum_{i=2}^{4} \sum_{j=2}^{4} a_{i1} a_{1j} \alpha_{1j}^{i1}$$

où α_{ij}^{i1} désigne le complément algébrique du mineur $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix}$ de det A.

19. Si α_{ij} désigne le cofacteur de a_{ij} dans la matrice carrée d'ordre n $A = [a_{ij}]$, montrer que le déterminant "bordé" est égal à

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & p_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & p_n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j \alpha_{ij}$$

Indication : utiliser (4.3).

20. Pour chacun des déterminants det A, trouver la dérivée

(*a*) $\begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x+1 \end{vmatrix}$ (*b*) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ x^2 & 2x+1 & x^3 \\ 0 & 3x-2 & x^2+1 \end{vmatrix}$ (*c*) $\begin{vmatrix} x^2-1 & x-1 & 1 \\ x^4 & x^3 & 2x+5 \\ x+1 & x^2 & x \end{vmatrix}$

Réponse : (*a*) $2x + 9x^2 - 8x^3$. (*b*) $1 - 6x + 21x^2 + 12x^3 - 15x^4$. (*c*) $6x^5 - 5x^4 - 28x^3 + 9x^2 + 20x - 2$

21. Démontrer que si A et B sont des matrices carrées réelles d'ordre n où A n'est pas singulière et si $H = A + iB$ est hermitienne, alors, on a

$$|H|^2 = |A|^2 \cdot |I + (A^{-1}B)^2|.$$

CHAPITRE 5

Equivalence

RANG D'UNE MATRICE. On dit qu'une matrice $A \neq 0$ est de rang r si au moins l'un de ses mineurs carrés d'ordre r est $\neq 0$ tandis que chaque mineur carré d'ordre $(r+1)$ est nul. Une matrice nulle est de rang 0.

Exemple 1. Le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ est $r = 2$ car $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ tandis que $|A| = 0$.

Voir problème 1.

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n est non singulière si son rang $r = n$ c'est-à-dire si $\det A \neq 0$. Dans le cas contraire, A est dite singulière. La matrice de l'exemple 1 est singulière. D'après la propriété $|AB| = |A|\cdot|B|$ on peut énoncer :

Théorème I. Le produit de deux ou de plusieurs matrices carrées d'ordre n non singulières est une matrice non singulière. Le produit de deux ou plusieurs matrices carrées d'ordre n donne une matrice singulière si au moins l'une des matrices est singulière.

TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES. Les opérations suivantes, appelées transformations élémentaires, sur une matrice ne changent ni son ordre ni son rang :

(1) Echange de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ ligne, transformation notée H_{ij} .
Echange de la $i^{\text{ème}}$ colonne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne, transformation notée K_{ij}.

(2) Multiplication de chaque élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne par un scalaire $k \neq 0$, transformation notée $H_i(k)$.
Multiplication de chaque élément de la $i^{\text{ème}}$ colonne par un scalaire $k \neq 0$, transformation notée $K_i(k)$.

(3) Addition aux éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de k fois les éléments correspondants de la $j^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) transformation notée $H_{ij}(k)$ (resp. $K_{ij}(k)$), k désignant un scalaire.

Les transformations H (resp. K) sont appelées transformations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes).

Il est clair qu'une transformation élémentaire ne peut changer l'ordre de la matrice. Dans le problème 2, on montre qu'une transformation élémentaire n'agit pas sur le rang d'une matrice.

INVERSE D'UNE TRANSFORMATION ELEMENTAIRE. L'inverse d'une transformation élémentaire est une opération qui annule l'effet de cette transformation c'est-à-dire, si l'on soumet A à l'une des transformations élémentaires, puis la matrice résultante de A à la transformation inverse de cette transformation, le résultat final redonne la matrice A.

Exemple 2. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

En appliquant la transformation élémentaire sur les lignes $H_{21}(-2)$, on obtient $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

La transformation élémentaire $H_{21}(+2)$ sur les lignes de B redonne A.

Ainsi, $H_{21}(-2)$ et $H_{21}(+2)$ sont des transformations élémentaires inverses sur les lignes.

Les transformations élémentaires inverses sont :

(1′) $\quad H_{ij}^{-1} = H_{ij} \qquad K_{ij}^{-1} = K_{ij}$

(2′) $\quad H_i^{-1}(k) = H_i(1/k) \qquad K_i^{-1}(k) = K_i(1/k)$

(3′) $\quad H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(-k) \qquad K_{ij}^{-1}(k) = K_{ij}(-k)$

Théorème II. L'inverse d'une transformation élémentaire est une transformation élémentaire de même type.

MATRICES EQUIVALENTES. Deux matrices A et B sont équivalentes si l'une d'entre elles peut s'obtenir à partir de l'autre par une suite de transformations élémentaires.

Des matrices équivalentes ont même ordre et même rang.

Exemple 3. En appliquant successivement les transformations $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $H_{32}(-1)$, on a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Puisque tous les mineurs carrés d'ordre 3 sont nuls tandis que $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, le rang de B est égal à 2. Ainsi, le rang de A est égal à 2. On comparera les deux méthodes de détermination du rang de A. a) Déterminer une matrice B équivalente, dont le rang est évident par simple lecture. b) Calculer divers mineurs de A jusqu'à l'obtention du résultat.

Voir problème 3.

EQUIVALENCE SUR LES LIGNES. Si une matrice A est réduite à B par l'utilisation de transformations élémentaires sur les lignes seules, on dit que B est équivalente par les lignes ou l-équivalente à A et réciproquement. Les matrices A et B de l'exemple 3 sont l-équivalentes.

Toute matrice $A \neq 0$ de rang r est l-équivalente à une matrice canonique C dans laquelle :

(a) Un ou plusieurs éléments de chacune des r premières lignes sont non nuls tandis que toutes les autres lignes n'ont que des éléments nuls.

(b) Le premier élément non nul dans la $i^{\text{ème}}$ ligne ($i = 1 \ldots r$) est égal à 1. Soit j_i la colonne sur laquelle cet élément est situé.

(c) $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

(d) le seul élément non nul de la colonne j_i ($i = 1, \ldots, r$) est l'élément 1 de la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Pour réduire A à C, on suppose que j_1 désigne la première colonne non nulle de A.

(i$_1$) Si $a_{1j_1} \neq 0$, utiliser $H_1(1/a_{1j_1})$ pour réduire ce terme à 1 si cela est nécessaire.

(i$_2$) Si $a_{1j_1} = 0$ mais que $a_{pj_1} \neq 0$, utiliser H_{1p} et procéder comme dans (i$_1$).

(ii) Utiliser des transformations sur les lignes du type 3 avec des multiples appropriés de la première ligne afin d'obtenir des zéros ailleurs dans la $j_1^{\text{ème}}$ colonne.

Si des éléments non nuls de la matrice résultante B apparaissent uniquement dans la première ligne, alors $B = C$. Sinon, soit j_2 la première colonne dans laquelle cela ne peut se produire. Si $b_{2j_2} \neq 0$, utiliser $H_2(1/b_{2j_2})$ comme dans (i$_1$). Si $b_{2j_2} = 0$, mais que $b_{qj_2} \neq 0$, utiliser H_{2q} et opérer comme dans (i$_1$).

Si des éléments non nuls de la matrice résultante apparaissent seulement dans les deux premières lignes, nous obtenons C. Dans le cas contraire, le procédé est renouvelé jusqu'à ce que l'on obtienne C.

Exemple 4. La suite des transformations sur les lignes $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$; $H_2(1/5)$; $H_{12}(1)$, $H_{32}(-5)$ appliquée à A de l'exemple 3 conduit à

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 17/5 \\ 0 & 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= C$$

C ayant les propriétés $(a)-(d)$.

FORME NORMALE D'UNE MATRICE. Au moyen de transformations élémentaires, toute matrice A de rang $r > 0$ peut être réduite à l'une des formes

$$I_r, \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I_r \;\; 0], \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

appelée forme normale de A. Une matrice nulle est sa propre forme normale.

Puisque l'on peut utiliser à la fois des transformations sur les lignes et sur les colonnes, l'élément 1 de la première ligne obtenu dans le paragraphe ci-dessus peut être placé dans la première colonne. Alors, la première ligne et la première colonne peuvent être exemptes d'autres éléments non nuls. De même, l'élément 1 de la seconde ligne peut être introduit dans la seconde colonne, et ainsi de suite.

Par exemple, la suite $H_{21}(-2)$, $H_{31}(1)$, $K_{21}(-2)$, $K_{31}(1)$, $K_{41}(-4)$, K_{23}, $K_2(1/5)$, $H_{32}(-1)$, $K_{42}(3)$ appliquée à la matrice A de l'exemple 3 donne la forme normale $\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Voir problème 5.

MATRICES ELEMENTAIRES. La matrice résultant d'une transformation sur les lignes (resp. colonnes) appliquée à la matrice identité I_n est une matrice appelée matrice ligne (resp. colonne) élémentaire (ou l_c-élémentaire). On utilisera ici le même symbole pour désigner la matrice élémentaire et la transformation élémentaire qui produit cette matrice.

Exemple 5. Des exemples de matrices élémentaires obtenues à partir de $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont :

$$H_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{12}, \qquad H_3(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = K_3(k), \qquad H_{23}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = K_{32}(k)$$

Toute matrice élémentaire est non singulière (pourquoi ?).

On peut appliquer une transformation élémentaire à une matrice A $m \times n$ en multipliant A par une matrice élémentaire.

Pour effectuer une transformation élémentaire donnée sur les lignes (resp. sur les colonnes) de A, A étant une matrice d'ordre $m \times n$ appliquer la transformation à I_m (resp. I_n) afin de former la matrice élémentaire correspondante H (resp. K) et multiplier A à gauche (resp. à droite) par H (resp. par K).

Exemple 6. Lorsque $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $H_{13} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ échange la première et la troisième lignes de A ; $AK_{13}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 16 & 5 & 6 \\ 25 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ additionne à la première colonne de A deux fois la troisième colonne.

SOIENT A et B DES MATRICES EQUIVALENTES. On considère les l et c-matrices élémentaires correspondant aux transformations élémentaires l et c qui réduisent A à B. Ces transformations sont désignées par $H_1, \ldots, H_s$; $K_1, \ldots, K_t$ où H_1 est la première l-transformation, H_2 la seconde, ... K_1 la première c-transformation, K_2 la seconde, etc . Alors,

$$H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = PAQ = B \tag{5.2}$$

où

$$P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \quad \text{et} \quad Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$$

Théorème III. Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si il existe des matrices non singulières P et Q définies par (5.3) et telles que $PAQ = B$.

Exemple 7. Quand $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-2) \cdot A \cdot K_{21}(-2) \cdot K_{31}(1) \cdot K_{41}(-2) \cdot K_{42}(1) \cdot K_3(\tfrac{1}{2})$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Puisque toute matrice est équivalente à sa forme normale, on a :

Théorème IV. Si A est une matrice carrée d'ordre n non singulière, il existe des matrices non singulières P et Q définies par (5.3) telle que $PAQ = I_n$.

Voir problème 6 .

INVERSE D'UN PRODUIT DE MATRICES ELEMENTAIRES.

Soit $\quad P = H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \quad$ et $\quad Q = K_1 \cdot K_2 \ldots K_t$

définies par (5.3). Puisque H et K possèdent toutes deux un inverse et puisque l'inverse d'un produit est le produit des inverses des facteurs dans l'ordre contraire, on a

(5.4) $$P^{-1} = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \ldots H_s^{-1} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = K_t^{-1} \ldots K_2^{-1} \cdot K_1^{-1}.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n non singulière ; soient P et Q définis précédemment et tels que $PAQ = I_n$. Alors

(5.5) $$A = P^{-1}(PAQ)Q^{-1} = P^{-1} \cdot I_n \cdot Q^{-1} = P^{-1} \cdot Q^{-1}$$

Nous avons ainsi démontré le

Théorème V. Toute matrice non singulière peut s'exprimer comme un produit de matrices élémentaires.

voir problème 7.

Ceci a pour conséquence les théorèmes suivants :

Théorème VI. Si A est non singulière, le rang de AB (ou celui de BA) est égal au rang de B.

Théorème VII. Si P et Q ne sont pas singulières, le rang de PAQ est égal au rang de A.

ENSEMBLES CANONIQUES RELATIFS A L'EQUIVALENCE. Dans le problème 8, on démontre :

Théorème VIII. Deux matrices $m \times n$ A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Un ensemble de matrices $m \times n$ est appelé ensemble canonique relatif à l'équivalence si chaque matrice $m \times n$ est équivalente à une et une seule matrice de l'ensemble. Un tel ensemble canonique est déterminé par (5.1) où r prend les valeurs $1, \ldots, m$ ou bien $1, \ldots, n$ selon que m est plus petit que n ou vice versa.

voir problème 9.

RANG D'UN PRODUIT. Soit A une matrice $m \times p$ de rang r. D'après le théorème III, il existe des matrices non singulières P et Q telles que

$$PAQ = N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors $A = P^{-1}NQ^{-1}$. Soit B une matrice $p \times n$. Considérons le rang de

(5.6) $$AB = P^{-1}NQ^{-1}B$$

D'après le théorème VI, le rang de AB est celui de $NQ^{-1}B$. Alors, les lignes de $NQ^{-1}B$ se composent des r premières lignes de $Q^{-1}B$ et des $m-r$ lignes formés de zéros. Le rang de AB ne peut donc dépasser r = rang de A. De même, le rang de AB ne peut dépasser celui de B. Nous venons donc de démontrer le

Théorème IX. Le rang du produit de deux matrices ne peut dépasser le rang de chacun des facteurs.

Supposons que $AB = 0$. Alors, d'après (5.6), $NQ^{-1}B = 0$. Ceci exige que les r premières lignes de $Q^{-1}B$ soient formées de zéros mais que les lignes restantes soient arbitraires. Ainsi, le rang de $Q^{-1}B$, et par suite le rang de B, ne peut dépasser $p-r$. Nous venons de démontrer le

Théorème X. Si la matrice A $m \times p$ est de rang r et si la matrice B $p \times n$ vérifie $AB = 0$, alors le rang de B ne peut dépasser $p-r$.

PROBLEMES RESOLUS

1. (*a*) Le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ est 2 car $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ et il n'y a pas de mineurs d'ordre 3.

(*b*) Le rang de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ est 2 puisque $|A| = 0$ et $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$.

(*c*) Le rang de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ est 1 car $\det A = 0$, chacun des neuf mineurs carrés d'ordre 2 est nul mais tous les éléments ne sont pas nuls.

2. Montrer que les transformations élémentaires ne changent pas le rang d'une matrice.

Nous ne considérerons ici que les transformations sur les lignes et laisserons à titre d'exercice le raisonnement concernant les transformations sur les colonnes. Soit r le rang de la matrice A $m \times n$. Supposons que tout mineur carré d'ordre $r+1$ de A, s'il y en a, soit nul. Soit B la matrice obtenue à partir de A par une transformation sur les lignes. Notons $\det R$ un mineur carré d'ordre $r+1$ de A et $\det S$ le mineur carré d'ordre $r+1$ de B ayant la même position que $\det R$.

Désignons par H_{ij} la transformation effectuée sur les lignes. Son effet sur $\det R$ est soit (i) de le laisser inchangé ; soit (ii) d'échanger deux de ses lignes ; soit (iii) d'échanger l'une de ses lignes avec une ligne ne figurant pas dans $\det R$.

Dans le cas (i) $\det S = \det R = 0$, dans le cas (ii) $\det S = -\det R = 0$, dans le cas (iii) $\det S$ est, au signe près, un autre mineur carré d'ordre $r+1$ de $\det A$, et par suite, il est nul.

Soit $H_i(k)$ la transformation effectuée sur les lignes. Son effet sur $\det R$ est soit (i) de le laisser inchangé, soit (ii) de multiplier l'une de ses lignes par k. Alors, respectivement, $\det S = \det R = 0$ ou $\det S = k \det R = 0$.

Soit $H_{ij}(k)$ la transformation effectuée sur les lignes. Son effet sur $\det R$ est soit (i) de le laisser inchangé, soit (ii) d'ajouter à l'une de ses lignes k fois une autre de ses lignes, soit (iii) d'ajouter à l'une de ses lignes k fois une ligne n'appartenant pas à $\det R$. Dans les cas (i) et (ii), $\det S = \det R = 0$. Dans le cas (iii), $\det S = \det R \pm k$ (autre mineur de A d'ordre $r+1) = 0 \pm k \cdot 0 = 0$.

Ainsi, une transformation élémentaire sur les lignes ne peut élever le rang d'une matrice. Mais une telle transformation ne peut abaisser ce rang, car si cela était, la transformation inverse augmenterait le rang. Ainsi, une transformation élémentaire sur les lignes ne change pas le rang d'une matrice.

3. Trouver une matrice équivalente B à chacune des matrices A ci-dessous et en déduire le rang de A.

(*a*) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B$$

Les transformations utilisées ont été $H_{21}(-2)$, $H_{31}(-3)$; $H_2(-1/3)$, $H_3(-1/4)$; $H_{32}(-1)$; le rang est égal à 3.

(*b*) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -11 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$; le rang de A est 2.

(*c*) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & 1+2i & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 1 & i & 1+2i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1+2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$; le rang de A est 2.

Remarque : Les matrices équivalentes B obtenues ne sont pas uniques. En particulier, puisque dans (*a*) et dans (*b*) on n'a utilisé que des transformations sur les lignes, le lecteur peut en obtenir d'autres en utilisant les transformations sur les colonnes. Lorsque les éléments sont des nombres rationnels, il n'y a en général aucun avantage à mélanger les transformations sur les lignes et les transformations sur les colonnes.

4. Trouver la matrice canonique C l-équivalente à chacune des matrices A données.

(a) $$A = \begin{bmatrix} 0&0&1&3&-2\\ 0&1&2&6&0\\ 0&2&3&9&2\\ 0&1&1&3&2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0&1&1&3&2\\ 0&1&2&6&0\\ 0&2&3&9&2\\ 0&0&1&3&-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0&1&1&3&2\\ 0&0&1&3&-2\\ 0&0&1&3&-2\\ 0&0&1&3&-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0&1&0&0&4\\ 0&0&1&3&-2\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix} = C$$

(b) $$A = \begin{bmatrix} 1&2&-2&3&1\\ 1&3&-2&3&0\\ 2&4&-3&6&4\\ 1&1&-1&4&6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&2&-2&3&1\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&2\\ 0&-1&1&1&5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&-2&3&3\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&2\\ 0&0&1&1&4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&3&7\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&2\\ 0&0&0&1&2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&-1\\ 0&0&1&0&2\\ 0&0&0&1&2 \end{bmatrix} = C$$

5. Réduire à la forme normale :

(a) $$A = \begin{bmatrix} 1&2&0&-1\\ 3&4&1&2\\ -2&3&2&5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&2&0&-1\\ 0&-2&1&5\\ 0&7&2&3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-2&1&5\\ 0&7&2&3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&-2&5\\ 0&2&7&3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&-2&5\\ 0&0&11&-7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&11&-7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{bmatrix}$$
$$= [I_3 \ 0]$$

Les transformations élémentaires effectuées sont

$H_{21}(-3)$, $H_{31}(2)$; $K_{21}(-2)$, $K_{41}(1)$; K_{23}; $H_{32}(-2)$; $K_{32}(2)$, $K_{42}(-5)$; $K_3(1/11)$, $K_{43}(7)$.

(b) $$A = \begin{bmatrix} 0&2&3&4\\ 2&3&5&4\\ 4&8&13&12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2&3&5&4\\ 0&2&3&4\\ 4&8&13&12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&3&5&4\\ 0&2&3&4\\ 2&8&13&12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&3&5&4\\ 0&2&3&4\\ 0&2&3&4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&2&3&4\\ 0&2&3&4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&3&4\\ 0&1&3&4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&1&0&0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_2 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les transformations élémentaires sont

H_{12}; $K_1(\frac{1}{2})$; $H_{31}(-2)$; $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-5)$, $K_{41}(-4)$; $K_2(\frac{1}{2})$; $K_{32}(-3)$, $K_{42}(-4)$; $H_{32}(-1)$.

6. Réduire $A = \begin{bmatrix} 1&2&3&-2\\ 2&-2&1&3\\ 3&0&4&1 \end{bmatrix}$ à la forme normale N et calculer les matrices P_1 et Q_1 telles que $P_1 A Q_1 = N$.

Puisque A est une matrice 3 x 4, nous travaillerons avec $\begin{array}{cc} I_4 & \\ A & I_3 \end{array}$. Chaque transformation sur les lignes est exécutée sur une ligne de sept éléments et chaque transformation sur les colonnes sur une colonne à sept éléments.

$$\begin{array}{rrrrrrr} 1&0&0&0&&&\\ 0&1&0&0&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&2&3&-2&1&0&0\\ 2&-2&1&3&0&1&0\\ 3&0&4&1&0&0&1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1&0&0&0&&&\\ 0&1&0&0&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&2&3&-2&1&0&0\\ 0&-6&-5&7&-2&1&0\\ 0&-6&-5&7&-3&0&1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1&-2&-3&2&&&\\ 0&1&0&0&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&-6&-5&7&-2&1&0\\ 0&-6&-5&7&-3&0&1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1&-2&-3&2&&&\\ 0&1&0&0&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&-6&-5&7&-2&1&0\\ 0&0&0&0&-1&-1&1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1&1/3&-3&2&&&\\ 0&-1/6&0&0&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&-5&7&-2&1&0\\ 0&0&0&0&-1&-1&1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrrrr} 1&1/3&-4/3&-1/3&&&\\ 0&-1/6&-5/6&7/6&&&\\ 0&0&1&0&&&\\ 0&0&0&1&&&\\ 1&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&-2&1&0\\ 0&0&0&0&-1&-1&1 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{cc} Q_1 & \\ N & P_1 \end{array}$$

Ainsi, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_1AQ_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$.

7. Exprimer $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ comme produit de matrices élémentaires.

Les transformations élémentaires $H_{21}(-1)$, $H_{31}(-1)$; $K_{21}(-3)$, $K_{31}(-3)$ réduisent A à I_3 c'est-à-dire [voir (5.2)]:

$$I = H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 = H_{31}(-1) \cdot H_{21}(-1) \cdot A \cdot K_{21}(-3) \cdot K_{31}(-3)$$

D'après (5.5), $A = H_1^{-1} \cdot H_2^{-1} \cdot K_2^{-1} \cdot K_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. Démontrer que deux matrices $m \times n$ A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Si A et B ont même rang, elles sont toutes deux équivalentes à la même matrice (5.1) et sont équivalentes entre elles. Réciproquement, si A et B sont équivalentes, il existe des matrices non singulières P et Q telles que $B = PAQ$. D'après le théorème 7, A et B ont même rang.

9. Pour des matrices non nulles d'ordre 3 un ensemble canonique est constitué de

$$I_3, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[I_3 \ \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est un ensemble canonique pour des matrices 3×4 non nulles.

10. Si à partir d'une matrice carrée A d'ordre n et de rang r_A on choisit une sous-matrice B comprenant s lignes (resp. colonnes) de A, le rang de B est supérieur ou égal à $r_A + s - n$.

La forme normale de A possède $n - r_A$ lignes dont les éléments sont des zéros et la forme normale de B $s - r_B$ lignes dont les éléments sont des zéros. Alors,

$$n - r_A \geq s - r_B$$

d'où l'on déduit $r_B \geq r_A + s - n$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

11. Trouver le rang de (*a*) $\begin{bmatrix}1&2&3&2\\2&3&5&1\\1&3&4&5\end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix}1&2&1&2\\1&3&2&2\\2&4&3&4\\3&7&4&6\end{bmatrix}$, (*c*) $\begin{bmatrix}1&2&-2&3\\2&5&-4&6\\-1&-3&2&-2\\2&4&-1&6\end{bmatrix}$, (*d*) $\begin{bmatrix}3&4&5&6&7\\4&5&6&7&8\\5&6&7&8&9\\10&11&12&13&14\\15&16&17&18&19\end{bmatrix}$.

Réponses : (*a*) 2, (*b*) 3, (*c*) 4, (*d*) 2

12. Montrer, en considérant les mineurs, que A, ${}^tA$, $\bar{A}$ et $\overline{{}^tA}$ ont même rang.

13. Montrer que la matrice canonique C *l*-équivalente à une matrice donnée A est uniquement déterminée par A.

14. Trouver la matrice canonique *l*-équivalente à chacune des matrices suivantes :

(*a*) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&5&-4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-7\\0&1&2\end{bmatrix}$ (*b*) $\begin{bmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\\4&3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1/9\\0&1&0&1/9\\0&0&1&11/9\end{bmatrix}$ (*c*) $\begin{bmatrix}1&1&1&2\\2&1&-3&-6\\3&-3&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}$

(*d*) $\begin{bmatrix}1&2&1&0\\3&2&1&2\\2&-1&2&5\\5&6&3&2\\1&3&-1&-3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ (*e*) $\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\1&-1&2&3&1\\2&-2&1&0&2\\1&1&-1&-3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

15. Ecrire la forme normale de chacune des matrices du problème **14**.

Réponse : (*a*) $[I_2\ 0]$, (*b*), (*c*) $[I_3\ 0]$ (*d*) $\begin{bmatrix}I_3&0\\0&0\end{bmatrix}$ (*e*) $\begin{bmatrix}I_3&0\\0&0\end{bmatrix}$

16. Soit $A = \begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\end{bmatrix}$.

(*a*) A partir de I_3 former H_{12}, $H_2(3)$, $H_{13}(-4)$ et vérifier que chaque HA a subi à partir de A, la transformation sur les lignes correspondantes.

(*b*) A partir de I_4, former K_{24}, $K_3(-1)$, $K_{42}(3)$ et montrer que chaque AK a subi, à partir de A, la transformation sur les colonnes correspondantes.

(*c*) Ecrire les inverses H_{12}^{-1}, $H_2^{-1}(3)$, $H_{13}^{-1}(-4)$ des matrices élémentaires de (*a*) et vérifier que l'on a, pour tout H, $H\cdot H^{-1} = I$.

(*d*) Faire de même avec les matrices élémentaires de (*b*).

(*e*) Calculer $B = H_{12}\cdot H_2(3)\cdot H_{13}(-4) = \begin{bmatrix}0&3&0\\1&0&-4\\0&0&1\end{bmatrix}$ et $C = H_{13}^{-1}(-4)\cdot H_2^{-1}(3)\cdot H_{12}^{-1} = \begin{bmatrix}0&1&4\\1/3&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(*f*) Démontrer $BC = CB = I$.

17. (*a*) Montrer que ${}^tK_{ij} = H_{ij}$, ${}^tK_i(k) = H_i(k)$, et ${}^tK_{ij}(k) = H_{ij}(k)$.

(*b*) Montrer que si R est un produit de matrices colonnes élémentaires, ${}^tR$ est le produit, en ordre inverse, des mêmes matrices lignes élémentaires.

18. Démontrer que : (*a*) AB et BA ne sont pas singulières si A et B sont des matrices carrées d'ordre n non singulières.

(*b*) AB et BA sont singulières si au moins l'une des matrices carrées d'ordre n A ou B est singulière.

19. Si P et Q ne sont pas singulières, montrer que A, PA, AQ et PAQ ont même rang.

Indication : exprimer P et Q comme produit de matrices élémentaires.

20. Réduire $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ à la forme normale N et calculer les matrices P_2 et Q_2 telles que $P_2 BQ_2 = N$.

21. (*a*) Montrer que dans un ensemble canonique de matrices carrées d'ordre n le nombre des matrices est $n + 1$.
(*b*) Montrer que dans un ensemble canonique de matrices $m \times n$ le nombre des matrices est le plus petit des deux nombres $m + 1$ et $n + 1$.

22. Soit la matrice donnée de rang 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$. Trouver une matrice carrée $B \neq 0$, d'ordre 4, telle que $AB = 0$.
Indication : Suivre la démonstration du théorème 10 et prendre

$$Q^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$$

où $a, b, \ldots, h$ sont arbitraires.

23. La matrice A du problème 6 et la matrice B du problème 20 sont équivalentes. Trouver P et Q telles que $B = PAQ$.

24. Si les matrices A et B $m \times n$ sont de rangs respectifs r_A et r_B, montrer que le rang de $A + B$ ne peut dépasser $r_A + r_B$.

25. Soient A une matrice carrée d'ordre n arbitraire et B une matrice carrée élémentaire d'ordre n. En considérant chacun des six types différents de matrice B, montrer que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

26. Soient A et B des matrices carrées d'ordre n. (*a*) Si au moins l'une d'entre elles est singulière, montrer que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. (*b*) Si les deux matrices sont non singulières, utiliser (5.5) et le problème 25 pour montrer que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

27. Montrer que l'équivalence des matrices est une relation d'équivalence.

28. Montrer que la forme canonique l-équivalente d'une matrice A non singulière est I et réciproquement.

29. Montrer que toute matrice A ne peut être réduite à une forme normale par des transformations sur les lignes seules
Indication : Mettre en évidence une matrice qui ne puisse être réduite ainsi.

30. Montrer comment effectuer sur une matrice A la transformation H_{ij} en utilisant successivement des transformations sur les lignes (2) et (3).

31. Démontrer que si A est une matrice $m \times n$ $(m \leqslant n)$ de rang m alors $A \cdot {}^tA$ est une matrice symétrique non singulière. Enoncer le théorème lorsque le rang de A est $< m$.

CHAPITRE 6

Adjointe d'une matrice carrée

ADJOINTE. Soit $A = [a_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n et soit α_{ij} le cofacteur de a_{ij}. Alors, par définition

(6.1) $$\text{adjointe } A \quad = \quad \text{adj } A \quad = \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

On pourra remarquer que les cofacteurs des éléments de la $i^{\text{ème}}$ ligne (resp. colonne) de A sont les éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne (resp. ligne) de adj A.

Exemple 1. Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$,

$$\alpha_{11} = 6,\quad \alpha_{12} = -2,\quad \alpha_{13} = -3,\quad \alpha_{21} = 1,\quad \alpha_{22} = -5,\quad \alpha_{23} = 3,\quad \alpha_{31} = -5,\quad \alpha_{32} = 4,\quad \alpha_{33} = -1$$

et $$\text{adj } A \quad = \quad \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

voir problèmes 1 et 2.

En utilisant les théorèmes 10 et 11 du chapitre 3, nous avons

(6.2) $$A(\text{adj } A) \quad = \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \text{diag}(|A|, |A|, \ldots, |A|) \quad = \quad |A| \cdot I_n \quad = \quad (\text{adj } A)\,A$$

Exemple 2. Pour la matrice A de l'exemple 1, $|A| = -7$ et

$$A(\text{adj } A) \quad = \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \quad = \quad -7I$$

En prenant les déterminants de (6.2), on a

(6.3) $$|A| \cdot |\text{adj } A| \quad = \quad |A|^n \quad = \quad |\text{adj } A| \cdot |A|$$

Il s'en suit :

Théorème I. Si A est une matrice carrée d'ordre n non singulière, alors

(6.4) $$|\text{adj } A| \quad = \quad |A|^{n-1}$$

Théorème II. Si A est une matrice carrée d'ordre n, singulière, on a

$$A(\operatorname{adj} A) \quad = \quad (\operatorname{adj} A)A \quad = \quad 0$$

Si A est de rang strictement inférieur à $n - 1$, $\operatorname{adj} A = 0$. Si A est de rang $n - 1$, alors $\operatorname{adj} A$ est de rang 1.

voir problème 3.

ADJOINTE D'UN PRODUIT. Dans le problème 4, nous démontrons :

Théorème III. Si A et B sont des matrices carrées d'ordre n.

$$\operatorname{adj} AB \quad = \quad \operatorname{adj} B \cdot \operatorname{adj} A \tag{6.5}$$

MINEUR D'UNE ADJOINTE. Dans le problème 6, nous démontrons :

Théorème IV. Soit $\left|A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right|$ un mineur carré d'ordre m d'une matrice carrée $A = [a_{ij}]$, d'ordre n;

soit $\left|A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}\right|$ son complément dans A et

soit $\left|M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right|$ le mineur carré d'ordre m de $\operatorname{adj} A$ dont les éléments occupent la même position dans $\operatorname{adj} A$ que les éléments de $\left|A_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right|$ occupent dans A.

Alors,

$$|A| \cdot \left|M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right| \quad = \quad (-1)^s |A|^m \cdot \left|A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}\right| \tag{6.6}$$

où $\quad s \;=\; i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

Si dans (6.6), A n'est pas singulière, on a

$$\left|M_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^{j_1, j_2, \ldots, j_m}\right| \quad = \quad (-1)^s |A|^{m-1} \cdot \left|A_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}\right| \tag{6.7}$$

Lorsque $m = 2$, (6.7) devient

$$\begin{vmatrix} \alpha_{i_1, j_1} & \alpha_{i_2, j_1} \\ \alpha_{i_1, j_2} & \alpha_{i_2, j_2} \end{vmatrix} \quad = \quad (-1)^{i_1+i_2+j_1+j_2} |A| \cdot \left|A_{i_3, i_4, \ldots, i_n}^{j_3, j_4, \ldots, j_n}\right| \tag{6.8}$$

$$= \det A \cdot \text{complément algébrique de } \left|A_{i_1, i_2}^{j_1, j_2}\right|.$$

Lorsque $m = n - 1$, (6.7) devient

$$\left|M_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}}^{j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}}\right| \quad = \quad (-1)^{i_n + j_n} |A|^{n-2} a_{i_n, j_n} \tag{6.9}$$

Lorsque $m = n$, (6.7) devient (6.4).

PROBLEMES RESOLUS

1. L'adjointe de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

2. L'adjointe de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ et

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Démontrer que si A est d'ordre n et de rang $n-1$ alors adj A est de rang 1.

On remarque tout d'abord, puisque A est de rang $n-1$, qu'il y a au moins un cofacteur non nul et que le rang de adj A est au moins égal à 1. D'après le théorème X du Chapitre 5, le rang de adj A est au plus $n-(n-1) = 1$. Le rang est donc exactement égal à 1.

4. Démontrer: adj AB = adj $B \cdot$ adj A.

d'après (**6.2**) $$AB \,\text{adj}\, AB = |AB| \cdot I = (\text{adj}\, AB)AB$$

puisque $$AB \cdot \text{adj}\, B \cdot \text{adj}\, A = A(B \cdot \text{adj}\, B)\text{adj}\, A = A(|B| \cdot I)\text{adj}\, A = |B|(A \text{ adj}\, A) = |B| \cdot |A| \cdot I = |AB| \cdot I$$

et $$(\text{adj}\, B \cdot \text{adj}\, A)AB = \text{adj}\, B\{(\text{adj}\, A)A\}B = \text{adj}\, B \cdot |A| \cdot I \cdot B = |A|\{(\text{adj}\, B)B\} = |AB| \cdot I$$

on en déduit $$\text{adj}\, AB = \text{adj}\, B \cdot \text{adj}\, A$$

5. Démontrer que si $\det A \neq 0$, on a $\text{adj}(\text{adj}\, A) = |A|^{n-2} \cdot A$

D'après (**6.2**) et (**6.4**) :

$$\begin{aligned} \text{adj}\, A \cdot \text{adj}(\text{adj}\, A) &= \text{diag}(|\text{adj}\, A|, |\text{adj}\, A|, \ldots, |\text{adj}\, A|) \\ &= \text{diag}(|A|^{n-1}, |A|^{n-1}, \ldots, |A|^{n-1}) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} A \cdot \text{adj}\, A \cdot \text{adj}(\text{adj}\, A) &= |A|^{n-1} \cdot A \\ |A| \cdot \text{adj}(\text{adj}\, A) &= |A|^{n-1} \cdot A \end{aligned}$$

et $$\text{adj}(\text{adj}\, A) = |A|^{n-2} \cdot A$$

6. Soit $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ un mineur carré d'ordre m d'une matrice carrée d'ordre n $A = [a_{ij}]$,

soit $\left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ son complément dans A.

Notons $\left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ le mineur carré d'ordre m dont les éléments occupent la même position dans adj A que les éléments de $\left|A^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right|$ occupent dans A.

Démontrons $|A| \cdot \left|M^{j_1, j_2, \ldots, j_m}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}\right| = (-1)^s |A|^m \cdot \left|A^{j_{m+1}, j_{m+2}, \ldots, j_n}_{i_{m+1}, i_{m+2}, \ldots, i_n}\right|$ où $s = i_1 + i_2 + \cdots + i_m + j_1 + j_2 + \cdots + j_m$.

D'après

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_{i_1,j_1} & a_{i_1,j_2} & \cdots & a_{i_1,j_m} & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\
a_{i_2,j_1} & a_{i_2,j_2} & \cdots & a_{i_2,j_m} & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i_m,j_1} & a_{i_m,j_2} & \cdots & a_{i_m,j_m} & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\
\hline
a_{i_{m+1},j_1} & a_{i_{m+1},j_2} & \cdots & a_{i_{m+1},j_m} & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i_n,j_1} & a_{i_n,j_2} & \cdots & a_{i_n,j_m} & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
\alpha_{i_1,j_1} & \alpha_{i_2,j_1} & \cdots & \alpha_{i_m,j_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\alpha_{i_1,j_2} & \alpha_{i_2,j_2} & \cdots & \alpha_{i_m,j_2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{i_1,j_m} & \alpha_{i_2,j_m} & \cdots & \alpha_{i_m,j_m} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
\alpha_{i_1,j_{m+1}} & \alpha_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & \alpha_{i_m,j_{m+1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\alpha_{i_1,j_n} & \alpha_{i_2,j_n} & \cdots & \alpha_{i_m,j_n} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|ccc}
|A| & 0 & \cdots & 0 & a_{i_1,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_1,j_n} \\
0 & |A| & \cdots & 0 & a_{i_2,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_2,j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \cdots & |A| & a_{i_m,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_m,j_n} \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_{m+1},j_{m+1}} & \cdots & a_{i_{m+1},j_n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_n,j_{m+1}} & \cdots & a_{i_n,j_n}
\end{array}\right]$$

en prenant les déterminants des deux membres, on a

$$(-1)^s |A| \cdot \left| M_{i_1,\, i_2,\, \dots,\, i_m}^{j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_m} \right| \quad = \quad |A|^m \cdot \left| A_{i_{m+1},\, i_{m+2},\, \dots,\, i_n}^{j_{m+1},\, j_{m+2},\, \dots,\, j_n} \right|$$

où s est défini dans l'énoncé du théorème. D'où la conclusion.

7. Si A est une matrice antisymétrique d'ordre $2n$, montrer que $\det A$ est le carré d'un polynôme formé d'éléments de A.

Par définition, $\det A$ est un polynôme formé d'éléments de A. Nous devons montrer que, sous les hypothèses ci-dessus, ce polynôme est un carré parfait.

Le théorème est vrai pour $n = 1$ car, lorsque $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$, $\det A = a^2$.

Supposons maintenant le théorème vrai pour $n = k$ et considérons la matrice antisymétrique $A = [a_{ij}]$ d'ordre $2k+2$. En effectuant une partition, écrivons $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ où $E = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k+1,\,2k+2} \\ a_{2k+2,\,2k+1} & 0 \end{bmatrix}$ B est antisymétrique d'ordre $2k$ et, par hypothèse, $\det B = f^2$ où f est un polynôme formé d'éléments de B.

Si α_{ij} désigne le cofacteur de a_{ij} dans A, on a, d'après le problème 6 du chapitre 3 et (**6.8**):

$$\begin{vmatrix} \alpha_{2k+1,\,2k+1} & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & \alpha_{2k+2,\,2k+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{2k+2,\,2k+1} \\ \alpha_{2k+1,\,2k+2} & 0 \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|$$

De plus, $\alpha_{2k+2,\,2k+1} = -\alpha_{2k+1,\,2k+2}$. D'où

$$|A|\cdot f^2 = \alpha^2_{2k+1,\,2k+2} \qquad \text{et} \qquad |A| = \left\{\frac{\alpha_{2k+1,\,2k+2}}{f}\right\}^2$$

c'est-à-dire un carré parfait.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

8. Calculer l'adjointe de

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Réponse : (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 2 & 6 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 3 & -5 \\ -2 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

9. Vérifier les propriétés suivantes :
   (a) L'adjointe d'une matrice scalaire est une matrice scalaire.
   (b) L'adjointe d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.
   (c) L'adjointe d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.

10. Déterminer une matrice $A \neq 0$ d'ordre 3 telle que $\operatorname{adj} A = 0$.

11. Si A est une matrice carrée d'ordre 2, montrer que $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = A$.

12. Montrer que l'adjointe de $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ est $3\,{}^tA$ et l'adjointe de $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ est A elle-même.

13. Montrer que si une matrice carrée A d'ordre n est de rang $< n-1$, alors $\operatorname{adj} A = 0$.

14. Montrer que A symétrique entraîne $\operatorname{adj} A$ symétrique.

15. Montrer que A hermitienne entraîne $\operatorname{adj} A$ hermitienne.

16. Montrer que si A est d'ordre n et antisymétrique, alors $\operatorname{adj} A$ est symétrique ou antisymétrique selon que n est un entier impair ou pair.

17. A-t-on un théorème analogue à celui du problème 16 pour des matrices anti-hermitiennes ?

18. Démontrer les propriétés suivantes des matrices élémentaires :
   (a) $\operatorname{adj} H_{ij}^{-1} = -H_{ij}$
   (b) $\operatorname{adj} H_i^{-1}(k) = \operatorname{diag}(1/k, 1/k, \ldots, 1/k, 1, 1/k, \ldots, 1/k)$, où l'élément 1 est situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne
   (c) $\operatorname{adj} H_{ij}^{-1}(k) = H_{ij}(k)$, avec des résultats similaires en remplaçant H par K.

19. Démontrer que si A est une matrice carrée d'ordre n, de rang n ou $n-1$ et si $H_s \ldots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \ldots K_t = \lambda$ où λ désigne I_n ou $\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, on a : $\operatorname{adj} A = \operatorname{adj} K_1^{-1} \cdot \operatorname{adj} K_2^{-1} \ldots \operatorname{adj} K_t^{-1} \cdot \operatorname{adj} \lambda \cdot \operatorname{adj} H_s^{-1} \ldots \operatorname{adj} H_2^{-1} \cdot \operatorname{adj} H_1^{-1}$

20. Utiliser la méthode du problème 19 pour calculer l'adjointe de

(*a*) A du problème 7 chapitre 5, (*b*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

Réponse : (*a*) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (*b*) $\begin{bmatrix} -14 & 2 & -2 & 2 \\ 14 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

21. Soient $A = [a_{ij}]$ et $B = [k - a_{ij}]$ des matrices carrées d'ordre 3. Si $S(C)$ est la somme des éléments d'une matrice C, montrer que

$$S(\operatorname{adj} A) = S(\operatorname{adj} B) \quad \text{et} \quad |B| = k \cdot S(\operatorname{adj} A) - |A|$$

22. Si A est une matrice carrée d'ordre n, montrer $|\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)| = |A|^{(n-1)^2}$.

23. Soit $A_n = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ la matrice triangulaire inférieure dont le triangle est le triangle de Pascal. Par exemple,

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Définir $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ et vérifier pour $n = 2, 3, 4$ que

(i) $$\operatorname{adj} A_n = [b_{ij}] = A_n^{-1}$$

24. Soit B la matrice obtenue à partir de A en supprimant ses $i^{\text{ème}}$ et $p^{\text{ème}}$ lignes et ses $j^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ colonnes. Démontrer

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = (-1)^{i+p+j+q} |B| \cdot |A|$$

où α_{ij} désigne le cofacteur de a_{ij} dans $\det A$.

Inverse d'une matrice

SI A ET B sont des matrices carrées d'ordre n vérifiant $AB = BA = I$, B est l'inverse de A, $(B = A^{-1})$ et A est l'inverse de B, $(A = B^{-1})$.

Dans le problème 1, nous démontrons :

Théorème I. Une matrice carrée A d'ordre n possède un inverse si et seulement si elle n'est pas singulière.

L'inverse d'une matrice carrée d'ordre n non singulière est unique (Voir problème 7, chapitre 2).

Théorème II. Si A n'est pas singulière, la relation $AB = AC$ entraîne $B = C$.

L'inverse d'une matrice diagonale non singulière $\text{diag}\,(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est la matrice diagonale

$$\text{diag}\,(1/k_1, 1/k_2, \ldots, 1/k_n)$$

Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont des matrices non singulières, alors l'inverse de la matrice $\text{diag}\,(A_1, A_2, \ldots, A_s)$ est :

$$\text{diag}\,(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_s^{-1})$$

Les procédés pour calculer l'inverse d'une matrice non singulière tout à fait générale sont donnés ci-après.

METHODE PAR L'ADJOINTE. D'après (6.2), $A\,\text{adj}\,A = |A|\cdot I$. Si A n'est pas singulière,

$$(7.1) \qquad A^{-1} = \frac{\text{adj}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}/|A| & \alpha_{21}/|A| & \ldots & \alpha_{n1}/|A| \\ \alpha_{12}/|A| & \alpha_{22}/|A| & \ldots & \alpha_{n2}/|A| \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n}/|A| & \alpha_{2n}/|A| & \ldots & \alpha_{nn}/|A| \end{bmatrix}$$

Exemple 1. D'après le problème 2, Chapitre 6, l'adjointe de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ est $\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Puisque $\det A = -2$, $\quad A^{-1} = \dfrac{\text{adj}\,A}{|A|} = \begin{bmatrix} 7/2 & -3 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Voir problème 2.

METHODE DES TRANSFORMATIONS ELEMENTAIRES. Soit la matrice carrée d'ordre n non singulière A réduite à I par des transformations élémentaires telles que

$$H_s \dots H_2 \cdot H_1 \cdot A \cdot K_1 \cdot K_2 \dots K_t \;=\; PAQ \;=\; I$$

On a $A = P^{-1} \cdot Q^{-1}$ d'après (5.5) et puisque $(B^{-1})^{-1} = B$,

(7.2) $$A^{-1} \;=\; (P^{-1} \cdot Q^{-1})^{-1} \;=\; Q \cdot P \;=\; K_1 \cdot K_2 \dots K_t \cdot H_s \dots H_2 \cdot H_1$$

Exemple 2. D'après le problème 7 chapitre 5,

$$H_2 H_1 A K_1 K_2 \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; I$$

puis $$A^{-1} \;=\; K_1 K_2 H_2 H_1 \;=\; \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Au cours du Chapitre 5, on a montré qu'une matrice non singulière pouvait être réduite à la forme normale par des transformations sur les lignes uniquement. Donc, d'après (7.2), avec $Q = I$, on a

(7.3) $$A^{-1} \;=\; P \;=\; H_s \dots H_2 \cdot H_1$$

c'est-à-dire:

Théorème III. Si A est réduite à I par une suite de transformations uniquement sur les lignes, alors A^{-1} est égale au produit en ordre inverse des matrices élémentaires correspondantes.

Exemple 3. Trouver l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ de l'exemple 2 en utilisant seulement des transformations sur les lignes pour réduire A à I.

Ecrire la matrice $[AI_3]$ et effectuer la suite de transformations sur les lignes qui réduit A à I_3. On a

$$[A\,I_3] \;=\; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \; [I_3\, A^{-1}]$$

d'après (7.3). Ainsi, puisque A est réduite à I, I_3 est transformée en $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Voir problème 3.

CALCUL DE L'INVERSE EN UTILISANT UNE PARTITION. Soient la matrice $A = [a_{ij}]$ d'ordre n et son inverse $B = [b_{ij}]$ sur lesquelles on a effectué une partition en sous-matrices dont les ordres sont indiqués ci-dessous :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline A_{21} & A_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ (p \times p) & (p \times q) \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ (q \times p) & (q \times q) \end{array}\right] \qquad \text{où} \qquad p + q = n$$

Puisque $AB = BA = I_n$, on a

$$(7.4) \qquad \begin{cases} \text{(i)} \ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p & \text{(iii)} \ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)} \ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)} \ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \end{cases}$$

Alors si A_{11} n'est pas singulière,

$$(7.5) \qquad \begin{cases} B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}\,A_{12})\xi^{-1}(A_{21}\,A_{11}^{-1}) & B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}\,A_{11}^{-1}) \\ B_{12} = -\,(A_{11}^{-1}\,A_{12})\xi^{-1} & B_{22} = \xi^{-1} \end{cases}$$

où $\quad \xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}\,A_{12})$.

Voir problème 4.

En pratique, A_{11} est généralement d'ordre $n-1$. Pour obtenir A_{11}^{-1}, on utilise la méthode suivante :

soit $\quad G_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad G_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad \ldots$

Après avoir calculé G_2^{-1}, effectuer une partition de G_3 de sorte que l'on ait $A_{22} = [a_{33}]$ et utiliser (7.5) pour obtenir G_3^{-1}. Recommencer cette méthode avec G_4 après avoir effectué sa partition de sorte que l'on ait $A_{22} = [a_{44}]$, et ainsi de suite.

Exemple 4. Trouver l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, en utilisant une partition.

Prendre $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [1\ 3]$, et $A_{22} = [4]$. Alors,

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = [1\ 3]\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [1\ 0],$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [4] - [1\ 3]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [1], \quad \text{et} \quad \xi^{-1} = [1]$$

Puis

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}[1]\cdot[1\ 0]$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = [-1, 0]$$

$$B_{22} = \xi^{-1} = [1]$$

et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Voir problèmes 5 et 6.

INVERSE D'UNE MATRICE SYMETRIQUE. Lorsqu'une matrice est symétrique c'est-à-dire lorsque $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, on ne doit calculer que $\frac{1}{2}n(n+1)$ cofacteurs au lieu des n^2 habituels pour obtenir A^{-1} à partir de adj A.

S'il y a avantage à calculer A^{-1} comme produit de matrices élémentaires, les transformations élémentaires doivent être effectuées de façon à conserver la propriété de symétrie. Ceci exige que les transformations se produisent par couples, c'est-à-dire qu'une transformation sur les lignes soit immédiatement suivie de la même transformation sur les colonnes. Par exemple,

$$H_{12}\begin{bmatrix} 0 & b & c & \dots \\ b & a & \dots & \\ c & \dots & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} K_{12} = \begin{bmatrix} a & b & \dots & \\ b & 0 & c & \dots \\ \cdot & c & \dots & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

$$H_{21}(-\tfrac{b}{a})\begin{bmatrix} a & b & c & \dots \\ b & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix} K_{21}(-\tfrac{b}{a}) = \begin{bmatrix} a & 0 & c & \dots \\ 0 & & & \\ c & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \end{bmatrix}$$

Cependant, lorsque l'élément a de la diagonale est remplacé par 1, le couple des transformations est formé de $H_1(1/\sqrt{a})$ et $K_1(1/\sqrt{a})$. En général, $\sqrt{a}$ est soit irrationnel, soit imaginaire. Par suite, cette méthode n'est pas conseillée.

Le cas où cette méthode est avantageuse a lieu lorsque l'on utilise la méthode de partition car (7.5) se réduit à

(7.6)
$$\begin{aligned} B_{11} &= A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}\,{}^t(A_{11}^{-1}A_{12}), & B_{21} &= {}^tB_{12} \\ B_{12} &= -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}, & B_{22} &= \xi^{-1} \end{aligned}$$

où $\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12})$.

Voir problème 7.

Lorsque A n'est pas symétrique, la méthode ci-dessus peut être utilisée pour trouver l'inverse de ${}^tA \,.\, A$ qui est symétrique, l'inverse de A étant déterminé par

(7.7) $$A^{-1} = ({}^tAA)^{-1}\,{}^tA$$

PROBLEMES RESOLUS

1. Démontrer qu'une matrice carrée d'ordre n possède un inverse si et seulement si elle n'est pas singulière.

Supposons A non singulière. D'après le théorème IV du Chapitre 5, il existe des matrices non singulières P et Q telles que $PAQ = I$. On a alors $A = P^{-1}\cdot Q^{-1}$ et $A^{-1} = Q\cdot P$ existe.

Supposons l'existence de A^{-1}. Alors $A\cdot A^{-1} = I$ est de rang n. Si A était singulière, AA^{-1} serait de rang $<n$. Donc, A n'est pas singulière.

2. (*a*) Lorsque $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, alors $\det A = 5$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, et $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$.

(*b*) Lorsque $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, alors $\det A = 18$, $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$, et $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Trouver l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$.

$$[A\ I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 14 & 14 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 10 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7/2 & 11 & 5/2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -10 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 18 & 13 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{array}\right]$$

$$= [I_4\ A^{-1}]$$

L'inverse est

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -23 & 29 & -64/5 & -18/5 \\ 10 & -12 & 26/5 & 7/5 \\ 1 & -2 & 6/5 & 2/5 \\ 2 & -2 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

4. Résoudre $\begin{cases} \text{(i)}\ A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I & \text{(iii)}\ B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \\ \text{(ii)}\ A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 & \text{(iv)}\ B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I \end{cases}$ pour B_{11}, B_{12}, B_{21}, et B_{22}.

Posons $B_{22} = \xi^{-1}$. D'après **(ii)**, $B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}$; d'après **(iii)**, $B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$;

d'après **(i)**, $B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$.

Finalement en substituant dans **(iv)**,

$$-\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} + \xi^{-1}A_{22} = I \quad \text{et} \quad \xi = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12}$$

5. En utilisant la méthode de partition, trouver l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(*a*) Prendre $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ et effectuer une partition de la façon suivante :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \;\; 4], \quad \text{et} \quad A_{22} = [3]$$

Or, $A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_{21}A_{11}^{-1} = [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [2 \;\; 0]$,

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [3] - [2 \;\; 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = [-3], \quad \text{et} \quad \xi^{-1} = [-1/3]$$

Puis $B_{11} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \end{bmatrix}[2 \;\; 0] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})\xi^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = -\xi^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) = \frac{1}{3}[2 \;\; 0], \quad B_{22} = \xi^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

et
$$G_3^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(*b*) Faire une partition de A de la façon suivante $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = [1 \;\; 1 \;\; 1]$, et $A_{22} = [1]$.

Or,
$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21}A_{11}^{-1} = \frac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2],$$

$$\xi = [1] - [1 \;\; 1 \;\; 1](\tfrac{1}{3})\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{et} \quad \xi^{-1} = [3]$$

Puis
$$B_{11} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}[3]\frac{1}{3}[2 \;\; -3 \;\; 2] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-2 \;\; 3 \;\; -2], \quad B_{22} = [3]$$

et
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Trouver l'inverse de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ en effectuant une partition.

On ne peut prendre $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ car cette matrice est singulière.

D'après l'exemple 3, l'inverse de $H_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B$ est $B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Alors,

$$A^{-1} = B^{-1}H_{23} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, si le mineur carré d'ordre $n-1$, A_{11}, de la matrice carrée d'ordre n non singulière A est singulier, nous introduisons d'abord une matrice carrée d'ordre $n-1$ non singulière dans le coin supérieur gauche afin d'obtenir B, puis nous cherchons l'inverse de B et une transformation adéquate sur B^{-1}, nous obtenons alors A^{-1}.

7. Calculer l'inverse de la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Considérons d'abord la sous-matrice $G_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dont nous effectuons la partition suivante :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [-1 \ \ 2], \quad A_{22} = [1]$$

Or :

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\xi = A_{22} - A_{21}(A_{11}^{-1}A_{12}) = [1] - [-1 \ \ 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2] \qquad \text{et} \qquad \xi^{-1} = [-\tfrac{1}{2}]$$

Puis

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}[-\tfrac{1}{2}][-1 \ \ 1] = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B_{21} = [-\tfrac{1}{2} \ \ \tfrac{1}{2}], \quad B_{22} = [-\tfrac{1}{2}]$$

et

$$G_3^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant la matrice A dont la partition est effectuée ainsi :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = [2 \ \ -3 \ \ -1], \quad A_{22} = [4]$$

Alors

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_{11}^{-1}A_{12} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \xi = [18/5], \quad \xi^{-1} = [5/18].$$

Puis $B_{11} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 5 & -1 & 5 \\ -7 & 5 & 11 \end{bmatrix}$, $B_{12} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$, $B_{21} = \frac{1}{18}[1 \ -2 \ 10]$, $B_{22} = [5/18]$

et
$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 5 & -7 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & -2 \\ -7 & 5 & 11 & 10 \\ 1 & -2 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

8. Trouver l'adjoint et l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$(a)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (b)\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (c)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad (d)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Réponses : les inverses sont $(a)\ \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $(b)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -10 & 4 & 9 \\ 15 & -4 & -14 \\ -5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$, $(c)\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(d)\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

9. Trouver la matrice inverse de la matrice du problème 8 (d). La mettre sous la forme diag $(A_1, \ldots, A_s)$.

10. Obtenir les inverses des matrices du problème 8 en utilisant la méthode du problème 3.

11. Même question pour les matrices $(a)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 8 \end{bmatrix}$, $(b)\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $(c)\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $(d)\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Réponse : $(a)\ \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 & 4 \\ 22 & 41 & -30 & -1 \\ -10 & -44 & 30 & -2 \\ 4 & -13 & 6 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad (c)\ \frac{1}{48}\begin{bmatrix} -144 & 36 & 60 & 21 \\ 48 & -20 & -12 & -5 \\ 48 & -4 & -12 & -13 \\ 0 & 12 & -12 & 3 \end{bmatrix}$

$(b)\ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 11 & 7 & -26 \\ -1 & -7 & -3 & 16 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad (d)\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 30 & -20 & -15 & 25 & -5 \\ 30 & -11 & -18 & 7 & -8 \\ -30 & 12 & 21 & -9 & 6 \\ -15 & 12 & 6 & -9 & 6 \\ 15 & -7 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

12. Utiliser le résultat de l'exemple 4 pour obtenir l'inverse de la matrice du problème 11 (d) sur laquelle on effectuera une partition.

13. Obtenir, en utilisant une partition, les inverses des matrices des problèmes 8(a), 8(b), 11(a) – 11(c).

14. Même question pour les matrices symétriques (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Réponses : (a) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

15. Démontrer que si A n'est pas singulière, $AB = AC$ entraîne $B = C$.

16. Montrer que si les matrices non singulières A et B commutent, il en est de même de (a) A^{-1} et B, (b) A et B^{-1}, (c) A^{-1} et B^{-1}. *Indication :* (a) $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$.

17. Montrer que si la matrice non singulière A est symétrique, il en est de même de A^{-1}.
Indication : $A^{-1}A = I = {}^t(AA^{-1}) = {}^t(A^{-1})A$.

18. Montrer que si les matrices symétriques non singulières A et B commutent, alors (a) $A^{-1}B$, (b) AB^{-1}, et (c) $A^{-1}B^{-1}$ sont symétriques.
Indications : (a) ${}^t(A^{-1}B) = {}^t(BA^{-1}) = {}^t(A^{-1}){}^tB = A^{-1}B$.

19. On dit qu'une matrice A $m \times n$ possède un inverse à droite B si $AB = I$ et un inverse à gauche C si $CA = I$. Montrer que A possède un inverse à droite si et seulement si A est de rang m et un inverse à gauche si et seulement si A est de rang n.

20. Trouver s'il existe un inverse à droite de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Indications : si le rang de A est égal à 3 et la sous-matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ n'est pas singulière et possède un inverse S^{-1}

Un inverse à droite de A est la matrice 4×3 $B = \begin{bmatrix} S^{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & -9 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

21. Montrer que la sous-matrice $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ de A définie dans le problème 20 n'est pas singulière et montrer que $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est un autre inverse à droite de A.

22. Montrer que $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & a \\ -3 & 1 & 0 & b \\ -3 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$ est un inverse à gauche de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, où a, b, c sont arbitraires.

23. Montrer que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ ne possède ni inverse à droite ni inverse à gauche.

24. Démontrer que si det $A_{11} \neq 0$, on a $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}| \cdot |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$.

25. Si det $(I + A) \neq 0$, $(I + A)^{-1}$ et $(I - A)$ commutent.

26. Démontrer (i) du problème 23 du Chapitre 6.

CHAPITRE 8

Corps

ENSEMBLE STABLE par addition, soustraction, multiplication, division (sauf par 0). Un ensemble S de nombres réels ou complexes comprenant d'autres éléments que l'élément 0 est stable pour les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division (sauf par 0) si le résultat de l'une quelconque des opérations ci-dessus est encore dans S.

Exemples :

(a) l'ensemble de tous les nombres rationnels,

(b) l'ensemble de tous les nombres réels,

(c) l'ensemble de tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont rationnels.

(d) l'ensemble de tous les nombres complexes $a + ib$ où a et b sont réels.

Par contre, l'ensemble de tous les entiers et l'ensemble des nombres de la forme $b\sqrt{3}$ où b est rationnel n'en sont pas.

CORPS. Un espace S de deux ou plusieurs éléments muni de deux opérations appelées $+$ et $\times$ (ou .) est un corps F si les axiomes suivants sont vérifiés (où $a, b, c \dots$ sont des scalaires).

A_1: $a + b$ est un élément unique de F.

A_2: $a+b = b+a$ (pas nécessaire ?)

A_3: $a + (b+c) = (a+b) + c$

A_4: Il existe un élément 0 de F tel que $a+0 = 0+a = a$, pour tout élément a de F.

A_5: Pour tout élément a de F, il existe un élément unique $-a$ de F tel que $a+(-a) = 0$.

M_1: $ab = a \cdot b$ est un élément unique de F.

M_2: $ab = ba$

M_3: $(ab)c = a(bc)$

M_4: Il existe un élément $1 \neq 0$ tel que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, pour tout élément a de F.

M_5: Il existe un élément a^{-1} de F tel que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ pour tout élément $a \neq 0$ de F.

D_1: $a(b+c) = ab + ac$

D_2: $(a+b)c = ac + bc$

Exemples de corps :

(e) l'ensemble de tous les quotients $\dfrac{P}{Q}$ de polynômes en x à coefficients réels,

(f) l'ensemble de toutes les matrices 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ où a et b sont réels.

(g) l'ensemble dans lequel $a + a = 0$. Ce corps, dit de caractéristique 2, sera exclu par la suite. Dans ce corps, par exemple, la démonstration usuelle selon laquelle un déterminant ayant deux lignes identiques est nul n'est pas valable. En échangeant deux lignes identiques, nous sommes conduits à $D = -D$, c'est-à-dire $2D = 0$, mais D n'est pas nécessairement nul.

SOUS-CORPS. Si S et T sont deux ensembles et si tout élément de S est élément de T, alors S est un sous-ensemble de T.

Si S et T sont des corps et si S est un sous-ensemble de T, alors S est un sous-corps de T. Par exemple, le corps des nombres réels est un sous-corps du corps des nombres complexes ; le corps des nombres rationnels est un sous-corps du corps des nombres réels et du corps des nombres complexes.

MATRICES SUR UN CORPS. Lorsque tous les éléments d'une matrice A appartiennent à un corps F, on dit que A est sur F. Par exemple,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/4 & 2/3 \end{bmatrix} \text{ est sur le corps des rationnels et } B = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i \end{bmatrix} \text{ sur le corps des complexes.}$$

Ici, A est aussi sur le corps des réels, tandis que B n'y est pas. A est également sur le corps des complexes.

Soient des matrices A, B, C . . . sur un même corps et soit F le plus petit corps contenant tous les éléments ; si tous les éléments sont des nombres rationnels, le corps F est le corps des rationnels et non le corps des réels ou des complexes. Un examen des diverses opérations définies sur ces matrices individuellement ou non dans les chapitres précédents montre qu'aucun autre élément que ceux de F n'intervient. Par exemple :

la somme, la différence et le produit de matrices sont des matrices sur F.

Si $A \sim I$, il existe des matrices P et Q sur F telles que $PAQ = I$ et I est sur F.

Si A est sur le corps des rationnels et est de rang r, son rang est inchangé lorsqu'on la considère sur le corps des réels ou des complexes.

Désormais, lorsque l'on dira que A est sur F, on supposera que F est le plus petit corps contenant tous les éléments de A.

Dans les chapitres ultérieurs, il sera parfois nécessaire de restreindre le corps au corps des réels. A d'autres moments, le corps des éléments pourra être étendu du corps des rationnels au corps des réels. Parfois, l'expression "A sur F" n'impliquera aucune restriction sur le corps mais les corps de caractéristique 2 seront cependant exclus.

PROBLEMES RESOLUS

1. Vérifier que l'ensemble des nombres complexes constitue un corps.

Pour cela, vérifions les propriétés $A_1 - A_5$, $M_1 - M_5$, et $D_1 - D_2$. L'élément nul (A_4) est 0 et l'élément unité (M_4) est 1. Si $a + bi$ et $c + di$ sont deux éléments, l'opposé (A_5) de $a + bi$, est $-a - bi$; le produit (M_1) est $(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$; l'inverse (M_5) de $a + bi \neq 0$ est

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}$$

La vérification des autres propriétés est laissée au lecteur à titre d'exercice.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

2. Vérifier que (*a*) l'ensemble des nombres réels de la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont rationnels et

(*b*) l'ensemble des quotients de polynômes en x à coefficients réels $\frac{P}{Q}$, constituent des corps.

3. Vérifier que (*a*) l'ensemble des rationnels,

(*b*) l'ensemble des nombres $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont rationnels,

(*c*) l'ensemble des nombres $a + ib$ où a et b sont rationnels

sont des sous-corps du corps des complexes.

4. Vérifier que l'ensemble des matrices 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, où a et b sont rationnels constitue un corps.

Montrer que c'est un sous-corps du corps des matrices 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ où a et b sont réels.

5. Pourquoi l'ensemble des matrices 2×2 à éléments réels ne forme-t-il pas un corps ?

6. Un ensemble R d'éléments $a, b, c \ldots$ vérifiant les conditions $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5;\ M_1, M_3;\ D_1, D_2)$ de la page 64 est appelé un anneau. Afin d'insister sur le fait que la multiplication n'est pas commutative, on appelle R un anneau non commutatif. Lorsqu'un anneau vérifie (M_2), il est commutatif. Si un anneau R vérifie M_4, c'est un anneau unitaire.

Vérifier que

(*a*) l'ensemble des entiers pairs $0, \pm 2, \pm 4, \ldots$ est un anneau commutatif non unitaire,

(*b*) l'ensemble des entiers $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ est un exemple d'anneau commutatif unitaire,

(*c*) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur F est un exemple d'anneau non commutatif unitaire.

(*d*) l'ensemble de toutes les matrices de la forme $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, où a et b sont réels est un exemple d'anneau commutatif unitaire.

7. L'ensemble (*a*) du problème 6 peut-il devenir un anneau commutatif unitaire en ajoutant les éléments ± 1 à cet ensemble ?

8. D'après le problème 4, l'ensemble (*d*) du problème 6 est un corps. Ce corps est-il un anneau ? Tout anneau commutatif unitaire est-il un corps ?

9. Décrire l'anneau des matrices 2×2 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$, où a et $b \in F$. Si A est une matrice de l'anneau, montrer que $LA = A$ où $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. On dit que L est un élément unitaire à gauche. Y a-t-il un élément unitaire à droite ?

10. Soit C le corps des nombres complexes de la forme $p + iq$ et K le corps des matrices 2×2 de la forme $\begin{bmatrix} u & -v \\ v & u \end{bmatrix}$ où p, q, u, v sont réels. Le nombre complexe $a + ib$ et la matrice $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ sont des éléments correspondants dans les deux espaces et sont appelés image l'un de l'autre.

(*a*) Trouver l'image de $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$; $3 + 2i$, 5.

(*b*) Montrer que l'image de la somme (respectivement du produit) de deux éléments de K est la somme (le produit) de leurs images dans C.

(*c*) Quelle est l'image du conjugué de $a + ib$?

(*d*) Quelle est l'image de l'inverse de $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$?

Ceci est un exemple d'isomorphisme entre deux ensembles.

Dépendance linéaire des vecteurs Formes linéaires

LE COUPLE ORDONNE de nombres réels (x_1, x_2) désigne habituellement un point X du plan. Le même couple de nombres écrit $[x_1, x_2]$, désigne ici le vecteur à deux dimensions OX (voir fig. 9-1).

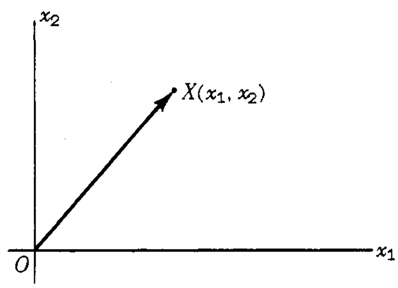

Fig. 9-1

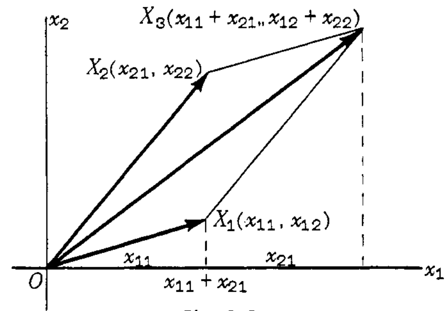

Fig. 9-2

Si $X_1 = [x_{11}, x_{12}]$ et $X_2 = [x_{21}, x_{22}]$ sont deux vecteurs distincts à deux dimensions, la somme régie par la loi du parallélogramme conduit à

$$X_3 \quad = \quad X_1 + X_2 \quad = \quad [x_{11} + x_{21},\ x_{12} + x_{22}]$$

En traitant X_1 et X_2 comme des matrices 1×2, nous voyons que ceci est simplement la règle d'addition des matrices données au Chapitre 1. De plus, si k est un scalaire quelconque

$$kX_1 \quad = \quad [kx_{11}, kx_{12}]$$

est la multiplication usuelle d'un vecteur par un nombre réel en physique.

VECTEURS. Se donner un vecteur à n dimensions X sur F, c'est se donner un ensemble ordonné de n éléments x_i de F tels que

$$(9.1) \qquad X \quad = \quad [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

Les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont respectivement les premières, secondes, etc, $n^{\text{ème}}$ composantes de X.

Par la suite, on trouvera plus commode d'écrire les composantes d'un vecteur en colonne

$$(9.1)' \qquad X = {}^t[x_1 \ldots x_n] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

Maintenant (9.1) et (9.1)$'$ désignent le même vecteur. Cependant, nous parlerons de vecteur ligne pour (9.1) et de vecteur colonne pour (9.1)$'$. Nous pouvons alors considérer que la matrice A $p \times q$ définit p vecteurs lignes (les éléments d'une ligne étant les composantes d'un vecteur à q dimensions) ou définit q vecteurs colonnes.

Le vecteur nul est le vecteur dont toutes les composantes sont nulles. Il est noté 0.

La somme, la différence de deux vecteurs lignes (respectivement colonnes) et le produit d'un vecteur par un scalaire obéissent aux règles gouvernant les matrices.

Exemple 1. Considérons les vecteurs à trois dimensions

$$X_1 = [3, 1, -4], \quad X_2 = [2, 2, -3], \quad X_3 = [0, -4, 1], \quad \text{et} \quad X_4 = [-4, -4, 6]$$

(*a*) $2X_1 - 5X_2 = 2[3, 1, -4] - 5[2, 2, -3] = [6, 2, -8] - [10, 10, -15] = [-4, -8, 7]$

(*b*) $2X_2 + X_4 = 2[2, 2, -3] + [-4, -4, 6] = [0, 0, 0] = 0$

(*c*) $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$

(*d*) $2X_1 - X_2 - X_3 + X_4 = 0$

Ces vecteurs sont des vecteurs lignes. On pourra remarquer que si l'on remplace ces vecteurs par leur transposée (cela correspond aux vecteurs colonnes), le résultat reste correct.

DEPENDANCE LINEAIRE DE VECTEURS. Les m vecteurs à n dimensions sur F

$$(9.2) \qquad \begin{aligned} X_1 &= [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}] \\ X_2 &= [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_m &= [x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}] \end{aligned}$$

sont linéairement dépendants sur F s'il existe m éléments $k_1 \ldots k_m$ de F non tous nuls tels que

$$(9.3) \qquad k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots k_mX_m = 0$$

Dans le cas contraire, les m vecteurs sont linéairement indépendants.

Exemple 2. Considérons les 4 vecteurs de l'exemple 1. D'après (*b*), les vecteurs X_2 et X_4 sont linéairement dépendants, (*c*), les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont linéairement dépendants, (*d*), les vecteurs X_1, X_2, X_3, X_4 sont linéairement dépendants.

Les vecteurs X_1 et X_2 cependant sont linéairement indépendants. En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire $\quad k_1X_1 + k_2X_2 = [3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2] = [0, 0, 0]$

Alors $3k_1 + 2k_2 = 0$, $k_1 + 2k_2 = 0$, et $-4k_1 - 3k_2 = 0$. D'après les deux premières relations $k_1 = 0$ d'où $k_2 = 0$.

Un vecteur quelconque à n dimensions X et le vecteur nul à n dimensions sont linéairement dépendants.

On dit que le vecteur X_{m+1} s'exprime comme combinaison linéaire de vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ s'il existe des éléments $k_1, k_2, \ldots, k_m$ de F tels que

$$X_{m+1} = k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m$$

THEOREMES FONDAMENTAUX. Si dans (9.3), $k_i \neq 0$, on peut résoudre pour X_i et

$$(9.4) \qquad \begin{aligned} X_i &= -\frac{1}{k_i}\{k_1X_1 + \cdots + k_{i-1}X_{i-1} + k_{i+1}X_{i+1} + \cdots + k_mX_m\} \quad \text{ou} \\ X_i &= s_1X_1 + \cdots + s_{i-1}X_{i-1} + s_{i+1}X_{i+1} + \cdots + s_mX_m \end{aligned}$$

Ainsi,

Théorème I. Si m vecteurs sont linéairement dépendants, l'un d'entre eux peut toujours s'exprimer comme combinaison linéaire des autres.

Théorème II. Si m vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont linéairement indépendants, tandis que l'ensemble obtenu en ajoutant un autre vecteur X_{m+1} conduit à des vecteurs linéairement dépendants, alors X_{m+1} peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Exemple 3. D'après l'exemple 2, les vecteurs X_1 et X_2 sont linéairement indépendants tandis que X_1, X_2 et X_3 sont linéairement dépendants et satisfont les relations $2X_1 - 3X_2 - X_3 = 0$; alors il est clair que $X_3 = 2X_1 - 3X_2$.

Théorème III. Si parmi un ensemble de m vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$, il y a un sous-ensemble de $r < m$ vecteurs linéairement dépendants, les vecteurs de l'ensemble entier sont linéairement dépendants.

Exemple 4. D'après (b) de l'exemple 1, les vecteurs X_2 et X_4 sont linéairement dépendants. D'après (d), l'ensemble des quatre vecteurs est linéairement dépendant.

Voir problème 1.

Théorème IV. Si le rang de la matrice

$$(9.5) \qquad A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \qquad m \leq n,$$

associée aux n vecteurs (9.2) est $r < m$, il y a exactement r vecteurs de l'ensemble linéairement indépendants, tandis que chacun des $m - r$ vecteurs restants peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces r vecteurs.

Voir problèmes 2-3.

Théorème V. Une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs (9.2) soient linéairement dépendants est que la matrice (9.5) des vecteurs soit de rang $r < m$. Si le rang est égal à m, les vecteurs sont linéairement indépendants.

L'ensemble des vecteurs (9.2) est nécessairement linéairement dépendant si $m > n$. Si l'ensemble des vecteurs (9.2) est linéairement indépendant, il en est ainsi pour tout sous-ensemble de ces vecteurs.

UNE FORME LINEAIRE sur F de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un polynôme du type

$$(9.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

où les coefficients appartiennent à F.

Considérons un système de m formes linéaires à n variables

$$(9.7) \qquad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

et la matrice associée

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

S'il existe des éléments $k_1, k_2, \ldots, k_m$, non tous nuls dans F tels que

$$k_1f_1 + k_2f_2 + \ldots + k_m f_m = 0$$

on dit que les formes (9.7) sont linéairement dépendantes. Dans le cas contraire, elles sont linéairement indépendantes. Ainsi, la dépendance ou l'indépendance linéaire des formes de (9.7) est équivalente à la dépendance ou à l'indépendance des vecteurs lignes de A.

Exemple 5. Les formes $f_1 = 2x_1 - x_2 + 3x_3$, $f_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_3$, $f_3 = 4x_1 - 7x_2 + x_3$ sont linéairement dépendantes car $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 2. Ici, $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$.

Le système (9.7) est nécessairement dépendant si $m > n$. Pour quelle raison ?

PROBLEMES RESOLUS

1. Démontrer que si parmi les m vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ il y a un sous-ensemble formé de r vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$, $r<m$, linéairement dépendants, alors les vecteurs $X_1 \ldots X_m$ sont linéairement dépendants.

Puisque par hypothèse $k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r = 0$ avec les k_i non tous nuls, on a alors

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_rX_r + 0 \cdot X_{r+1} + \cdots + 0 \cdot X_m = 0$$

où les k_i ne sont pas tous nuls et l'ensemble de ces vecteurs est linéairement dépendant.

2. Démontrer que si le rang de la matrice associée à l'ensemble des m vecteurs à n composantes est égal à r, avec $r < m$, alors exactement r vecteurs sont linéairement indépendants, tandis que les $m - r$ vecteurs restants peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

Soit **(9.5)** la matrice. Supposons d'abord $m \leqslant n$. Si le mineur d'ordre r dans le coin supérieur gauche est nul, nous échangeons lignes et colonnes afin d'amener un mineur non nul d'ordre r à cette position, puis nous renumérotons toutes les lignes et les colonnes selon l'ordre naturel. Ainsi, nous avons

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1r} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r1} & x_{r2} & \ldots & x_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Considérons maintenant un mineur d'ordre $r + 1$

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1r} & x_{1q} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2r} & x_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r1} & x_{r2} & \ldots & x_{rr} & x_{rq} \\ x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pr} & x_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

où les éléments x_{pj} et x_{iq} sont ceux d'une ligne et d'une colonne non inclus dans Δ. Soit $k_1, k_2, \ldots, k_{r+1} = \Delta$ les cofacteurs respectifs des éléments $x_{1q}, x_{2q}, \ldots, x_{rq}, x_{pq}$, de la dernière colonne de ∇. Alors, d'après **(3.10)**,

$$k_1x_{1i} + k_2x_{2i} + \cdots + k_rx_{ri} + k_{r+1}x_{pi} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et par hypothèse $\quad k_1x_{1q} + k_2x_{2q} + \cdots + k_rx_{rq} + k_{r+1}x_{pq} = \nabla = 0$

Soit maintenant la dernière colonne de ∇ que l'on a remplacée par une autre des colonnes restantes c'est-à-dire la colonne numérotée u, n'apparaissant pas dans Δ. Les cofacteurs des éléments de cette colonne sont précisément les k déjà obtenus ci-dessus, et ainsi

$$k_1 x_{1u} + k_2 x_{2u} + \cdots + k_r x_{ru} + k_{r+1} x_{pu} = 0$$

Donc, $$k_1 x_{1t} + k_2 x_{2t} + \cdots + k_r x_{rt} + k_{r+1} x_{pt} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n)$$

pour $t > r$. Mais le même résultat a lieu pour $1 \leqslant t \leqslant r$. (Pourquoi ?).

En sommant sur toutes les valeurs de t, on obtient

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_r X_r + k_{r+1} X_p = 0$$

Puisque $k_{r+1} = \Delta \neq 0$, X_p est une combinaison linéaire des r vecteurs linéairement indépendants $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Mais, X_p est l'un quelconque des $m - r$ vecteurs. $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_m$. Par suite, chacun d'eux peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Si $m > n$, considérons la matrice formée de la façon suivante : aux m vecteurs donnés, ajoutons $m - n$ composantes nulles. Cette matrice est $[A \mid 0]$. Evidemment, la dépendance ou l'indépendance linéaire des vecteurs ainsi que le rang de A n'ont pas été changés.

Ainsi, les vecteurs $X_{r+1}, \ldots, X_m$ sont combinaisons linéaires des vecteurs linéairement indépendants $X_1, X_2, \ldots, X_r$ ce qui est démontré.

3. Montrer, en utilisant une matrice, que chaque groupe des trois vecteurs

$$(a)\quad \begin{aligned} X_1 &= [1, 2, -3, 4] \\ X_2 &= [3, -1, 2, 1] \\ X_3 &= [1, -5, 8, -7] \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad (b)\quad \begin{aligned} X_1 &= [2, 3, 1, -1] \\ X_2 &= [2, 3, 1, -2] \\ X_3 &= [4, 6, 2, -3] \end{aligned}$$

sont linéairement dépendants. Dans chacun de ces cas, déterminer un sous-espace maximum de vecteurs linéairement indépendants et exprimer les autres vecteurs comme combinaison linéaire de ces vecteurs.

(*a*) Ici, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}$ est de rang 2 ; il y a deux vecteurs linéairement indépendants X_1 et X_2. Le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Considérons alors le mineur $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 8 \end{vmatrix}$; les cofacteurs des éléments de la troisième colonne sont respectivement $-14, 7$ et -7. Alors, $-14X_1 + 7X_2 - 7X_3 = 0$ et $X_3 = -2X_1 + X_2$.

(*b*) Ici $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ est de rang 2 ; il y a deux vecteurs linéairement indépendants X_1 et X_2. Maintenant, le mineur $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$. On échange les deuxième et quatrième colonnes, on obtient $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ pour laquelle $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$. Les cofacteurs des éléments de la dernière colonne de $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ sont respectivement $2, 2, -2$

Alors, $$2X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad X_3 = X_1 + X_2$$

4. Soient $P_1(1,1,1)$, $P_2(1,2,3)$, $P_3(3,1,2)$ et $P_4(2,3,4)$ des points de l'espace ordinaire. Les points P_1 et P_2 et l'origine des coordonnées déterminent un plan π d'équation

(i) $$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x - 2y + z = 0$$

en substituant les coordonnées de P_4 dans le membre de gauche de (i), nous avons

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Ainsi, $P_4 \in \pi$. Le fait marquant ici est que ${}^t[P_4, P_1, P_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ est de rang 2.

Nous venons de vérifier que trois points quelconques de l'espace ordinaire forment un plan passant par l'origine pourvu que la matrice de leurs coordonnées soit de rang 2.

Montrer que $P_3 \notin \pi$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

5. Démontrer que si m vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont linéairement indépendants, tandis que l'ensemble obtenu en ajoutant un autre vecteur X_{m+1} est un ensemble de vecteurs linéairement dépendants, alors X_{m+1} peut s'exprimer comme combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

6. Montrer que la représentation précédente (problème 5) est unique.

Indication : supposer $X_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} k_i X_i = \sum_{i=1}^{n} s_i X_i$ et considérer $\sum_{i=1}^{m} (k_i - s_i) X_i$.

7. Prouver qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs **(9.2)** soient linéairement dépendants est que la matrice **(9.5)** des vecteurs soit de rang $r < m$.

Indications : supposons les m vecteurs linéairement dépendants et supposons **(9.4)** réalisée. Dans **(9.5)**, soustrayons de la $i^{\text{ème}}$ ligne le produit de la 1^{re} ligne par s_1, le produit de la $2^{\text{ème}}$ ligne par s_2, ... ainsi qu'il est indiqué dans (9.4). Pour la réciproque, voir problème 2.

8. Examiner l'indépendance ou la dépendance linéaire des ensembles suivants de vecteurs sur le corps des réels. Dans chaque ensemble de vecteurs dépendants, choisir un sous-ensemble maximum formé d'éléments linéairement indépendants et exprimer chacun des vecteurs restant comme combinaison linéaire des autres.

(a) $X_1 = [2, -1, 3, 2]$, $X_2 = [1, 3, 4, 2]$, $X_3 = [3, -5, 2, 2]$

(b) $X_1 = [1, 2, 1]$, $X_2 = [2, 1, 4]$, $X_3 = [4, 5, 6]$, $X_4 = [1, 8, -3]$

(c) $X_1 = [2, 1, 3, 2, -1]$, $X_2 = [4, 2, 1, -2, 3]$, $X_3 = [0, 0, 5, 6, -5]$, $X_4 = [6, 3, -1, -6, 7]$

Réponse: (a) $X_3 = 2X_1 - X_2$ (b) $X_3 = 2X_1 + X_2$, $X_4 = 5X_1 - 2X_2$ (c) $X_3 = 2X_1 - X_2$, $X_4 = 2X_2 - X_1$

9. Pourquoi n'existe-t-il pas plus de n vecteurs à n composantes linéairement indépendants sur F ?

10. Montrer que si dans **(9.2)**, on a soit, $X_i = X_j$, soit $X_i = aX_j$, où $a \in F$, l'ensemble des vecteurs est linéairement dépendant. La réciproque est-elle vraie ?

11. Montrer que tout vecteur X à n composantes et le vecteur nul d'ordre n sont linéairement dépendants. Par suite, X et 0 sont considérés comme proportionnels.

Indication : considérer $k_1 X + k_2 \cdot 0 = 0$ où $k_1 = 0$ et $k_2 \neq 0$.

12. (*a*) Montrer que les vecteurs $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$ et $X_3 = [1+2i, 1-i, 2-i]$ sont linéairement dépendants sur le corps des rationnels et par suite sur le corps des complexes.

(*b*) Montrer que les vecteurs $X_1 = [1, 1+i, i]$, $X_2 = [i, -i, 1-i]$, et $X_3 = [0, 1-2i, 2-i]$ sont linéairement indépendants sur le corps des réels mais sont linéairement dépendants sur le corps des complexes.

13. Examiner la dépendance ou l'indépendance linéaire des formes linéaires

$$(a)\quad \begin{aligned} f_1 &= 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ f_2 &= 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \\ f_3 &= 5x_1 - 9x_2 + 8x_3 - x_4 \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} f_1 &= 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 \\ f_2 &= 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 \\ f_3 &= 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \end{aligned}$$

Réponse: (*a*) $3f_1 - 2f_2 - f_3 = 0$

14. Considérer la dépendance ou l'indépendance linéaire d'un système de polynômes

$$P_i = a_{i0}x^n + a_{i1}x^{n-1} + \cdots + a_{in-1}x + a_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et montrer que le système est linéairement dépendant ou indépendant selon que les vecteurs lignes de la matrice des coefficients

$$A = \begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants ou indépendants, c'est-à-dire selon que le rang r de A est inférieur à m ou égal à m.

15. Si les polynômes d'un système sont linéairement dépendants, trouver une combinaison linéaire qui soit identiquement nulle.

$$(a)\quad \begin{aligned} P_1 &= x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ P_2 &= 2x^2 - 6x + 4 \\ P_3 &= x^3 - 2x^2 + x \end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} P_1 &= 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3 \\ P_2 &= x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \\ P_3 &= x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

Réponse : (*a*) $2P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$ (*b*) $P_1 + P_2 - 2P_3 = 0$

16. Considérons la dépendance ou l'indépendance linéaire d'un ensemble de matrices 2 x 2 $M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $M_3 = \begin{bmatrix} p & q \\ s & t \end{bmatrix}$ sur F.

Montrer que $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = 0$, lorsque les vecteurs k (de F) ne sont pas tous nuls, exige que le rang de la matrice $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ p & q & s & t \end{bmatrix}$ soit < 3. (Remarquer que les matrices M_1, M_2, M_3 sont considérées comme définissant des vecteurs à 4 composantes).

Etendre le résultat précédent à un ensemble de matrices m x n.

17. Montrer que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendants.

18. Montrer que toute matrice 2×2 peut s'écrire comme combinaison linéaire des matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Généraliser au cas de matrices $m \times n$;

19. Si les vecteurs à n composantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont linéairement indépendants, montrer que les vecteurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, ou $Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j$, sont linéairement indépendants si et seulement si $A = [a_{ij}]$ est non singulière.

20. Si A est de rang r, comment construire une matrice B non singulière telle que $AB = [C_1, C_2, \ldots, C_r, 0, \ldots, 0]$ où $C_1, C_2, \ldots, C_r$ constituent un ensemble donné de colonnes linéairement indépendantes de A.

21. Soient les points donnés $P_1(1, 1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 3, 4)$, $P_3(2, 2, 2, 2)$, et $P_4(3, 4, 5, 6)$ d'un espace de dimension 4.

(a) Montrer que le rang de ${}^t[P_1, P_3]$ est égal à 1 et que les points forment une droite passant par l'origine.

(b) Montrer que ${}^t[P_1 \ldots P_4]$ est de rang 2 et que ces points forment un plan passant par l'origine.

(c) $P_5(2, 3, 2, 5)$ appartient-il au plan défini en (b) ?

22. Montrer que toute matrice carrée A d'ordre n sur F vérifie une équation de la forme

$$A^p + k_1 A^{p-1} + k_2 A^{p-2} + \ldots + k_{p-1}A + k_p I = 0$$

où les k_i sont des scalaires de F.

Indication : considérer $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$ à l'aide du problème 16.

23. Trouver l'équation de degré minimum (voir problème 22) qui est satisfaite par

$$(a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (c)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Réponse : (a) $A^2 - 2A = 0$, (b) $A^2 - 2A + 2I = 0$, (c) $A^2 - 2A + I = 0$

24. Dans le problème 23(b) et (c), multiplier chaque équation par A^{-1} pour obtenir (b) $A^{-1} = I - \frac{1}{2}A$, ($c$) $A^{-1} = 2I - A$, et vérifier ainsi : si A est sur F et est non singulière, A^{-1} peut s'exprimer comme un polynôme en A dont les coefficients sont des scalaire de F.

CHAPITRE 10

Systèmes d'équations linéaires

DEFINITIONS. Considérons un système de m équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$

$$(10.1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = h_m \end{cases}$$

dans lequel les coefficients a_{ij} et les termes constants h appartiennent à F.

On appelle *solution du système* tout ensemble de valeurs prises par $x_1, \ldots, x_n$ dans F et qui vérifie simultanément les m équations. On dit que le système est "*possible*" s'il admet au moins une solution. Dans le cas contraire, il est "*impossible*". Un système "possible" admet soit une solution unique, soit une infinité de solutions.

Deux systèmes d'équations linéaires sur F de même nombre d'inconnues sont dits *équivalents* si toute solution de l'un est solution de l'autre. On peut obtenir un système d'équations équivalent au système (10.1) en appliquant une ou plusieurs des transformations suivantes : (a) échanger deux des équations, (b) multiplier une équation par une constante non nulle de F, (c) ajouter à l'une des équations une combinaison linéaire des autres. Résoudre un système d'équations "possible" consiste à remplacer le système donné par un système équivalent, de forme particulière, ainsi qu'on le verra dans ce qui suit.

SOLUTION SOUS FORME MATRICIELLE. En notation matricielle, le système d'équations linéaires (10.1) s'écrit

$$(10.2) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ h_m \end{bmatrix}$$

ou d'une façon plus condensée

$$(10.3) \qquad AX = H$$

où $A = [a_{ij}]$ est la matrice des coefficients, $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$ et $H = {}^t[h_1, \ldots, h_m]$.

Considérons maintenant le système (10.1) et la matrice

$$(10.4) \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & h_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & h_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & h_m \end{bmatrix} = [A \quad H]$$

obtenue en ajoutant à la matrice A une dernière colonne égale à H. Chaque ligne de (10.4) correspond à une équation de (10.1). Pour retrouver ces équations, nous devons simplement ajouter les inconnues ainsi que les signes + et = .

Afin de résoudre le système (10.1) au moyen de (10.4), on procède par transformations élémentaires sur les lignes de A en remplaçant A par la matrice canonique équivalente introduite au chapitre 5.

Exemple 1. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$.

La matrice $[AH]$ correspondante est donnée par

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, le système donné est équivalent au système $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, qui admet une solution unique. Exprimée sous forme vectorielle, nous avons $X = {}^t[1, 0, 1]$.

THEOREMES FONDAMENTAUX. On suppose que la matrice A des coefficients du système (10.1) est réduite à sa forme canonique équivalente C par une série de transformations sur les lignes et que $[AH]$ est réduite à la forme $[CK]$ équivalente par des transformations analogues où $K = {}^t[k_1, \ldots, k_m]$. Si A est de rang r, les r premières lignes de C contiennent un ou plusieurs éléments non nuls. Le premier élément $\neq 0$ dans chacune de ces lignes est 1 et tous les autres éléments sont des zéros. Les lignes restantes ne comportent que des zéros. A partir des r premières lignes de $[C, K]$, on peut obtenir chacune des r variables $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ (la notation est celle du chapitre 5) en fonction des $n - r$ variables restantes $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_n}$ et d'au moins un des $k_1, \ldots, k_r$.

Si $k_{r+1} = k_{r+2} = \cdots = k_m = 0$, alors (10.1) est possible et une solution est obtenue avec un certain nombre de valeurs arbitraires de $x_{j_{r+1}}, \ldots, x_{j_r}$ et en calculant les valeurs correspondantes de $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$. Par contre, si au moins l'un des $k_{r+1}, \ldots, k_m$ est différent de zéro, soit $k_t \neq 0$, l'équation correspondante s'écrit

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = k_t \neq 0$$

et (10.1) est impossible.

Dans le cas où le système est possible, A et $[AH]$ sont de même rang. Dans le cas contraire, ils sont de rangs différents. On a ainsi les théorèmes suivants :

Théorème I. Un système $AX = H$ de m équations linéaires à n inconnues est possible si et seulement si les matrices A et $[AH]$ sont de même rang.

Théorème II. Dans un système possible (10.1) de rang $r < n$, $n - r$ inconnues peuvent être choisies de telle sorte que la matrice des coefficients des r inconnues restantes soit de rang r. Lorsque l'on fixe une valeur arbitraire à ces $n - r$ inconnues, les r autres inconnues sont complètement déterminées.

Exemple 2. Soit le système $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & -8 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -11 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [C\ K]$$

Puisque A et $[AH]$ sont chacune de rang $r = 3$, le système donné est possible. Cependant, la solution générale contient $n - r = 4 - 3 = 1$ constante arbitraire. A partir de la dernière ligne de $[CK]$ on déduit $x_4 = 0$. Prenons $x_3 = a$ où a est arbitraire. Alors $x_1 = 10 + 11a$ et $x_2 = -2 - 4a$. La solution du système est donnée par $x_1 = 10 + 11a$, $x_2 = -2 - 4a$, $x_3 = a$, $x_4 = 0$ soit $X = {}^t[10 + 11a, -2 - 4a, a, 0]$.

Si un système possible d'équations dans F admet une solution unique (exemple 1), alors cette solution appartient à F. Si le système a une infinité de solutions (exemple 2), ces solutions sont dans F lorsque les valeurs arbitraires appartiennent à F. Cependant, le système a une infinité de solutions dans tout corps $\mathfrak{F}$ dont F est un sous-corps. Par exemple, le système de l'exemple 2 a une infinité de solutions dans F (corps des rationnels) si a est rationnel, il a une infinité de solutions réelles si a appartient à **R**, il a une infinité de solutions complexes si a est un nombre complexe arbitraire.

Voir problèmes 1 et 2.

EQUATIONS NON HOMOGENES. Une équation linéaire

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = h$$

est dite *non homogène* si $h \neq 0$. Un système $AX = H$ est appelé système d'équations non homogènes si H est une matrice colonne différente de 0. Les systèmes des exercices 1 et 2 sont non homogènes.

Dans le problème 3, on démontre :

Théorème III. Un système de n équations non homogènes à n inconnues a une solution unique si le rang de la matrice A est égal à n, c'est-à-dire si $\det A \neq 0$.

En plus de la méthode de résolution précédente, nous allons donner deux autres procédés pour résoudre un système non homogène possible de n équations. La première de ces méthodes est celle des déterminants.

(a) Solution utilisant la règle de Cramer. Soit A_i, $(i = 1, \dots, n)$ la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la $i^{\text{ème}}$ colonne de A par la colonne des constantes (la colonne des h). Alors, si $\det A \neq 0$, le système $AX = H$ admet la solution unique

$$(10.5) \qquad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Voir problème 4.

Exemple 3. Résoudre le système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ en utilisant la règle de Cramer.

On trouve

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -120, \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -240$$

$$|A_2| = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = -24, \qquad |A_3| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = 0$$

et
$$|A_4| = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = -96$$

Alors $\quad x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{-240}{-120} = 2, \quad x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{-24}{-120} = \dfrac{1}{5}, \quad x_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{0}{-120} = 0,$

et $\quad x_4 = \dfrac{|A_4|}{|A|} = \dfrac{-96}{-120} = \dfrac{4}{5}.$

(*b*) Solution utilisant A^{-1}. Si $\det A \neq 0$, A^{-1} existe et la solution du système $AX = H$ est donnée par

(10.6) $$A^{-1}.AX = A^{-1}H$$

c'est-à-dire par $X = A^{-1}H$.

Exemple 4. La matrice des coefficients du système $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$ est $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

D'après le problème 2(*b*), chapitre 7, $A^{-1} = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

Alors $$A^{-1}\cdot AX = X = A^{-1}H = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 35 \\ 29 \\ 5 \end{bmatrix}$$

La solution du système est $x_1 = 35/18$, $x_2 = 29/18$, $x_3 = 5/18$.

Voir problème 5.

EQUATIONS HOMOGENES. Une équation de la forme

(10.7) $$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

est dite homogène. Un système d'équations linéaires de la forme

(10.8) $$AX = 0$$

est appelé un système homogène. Dans le cas du système (10.8) les matrices A et $[A, 0]$ ont mêmes rangs. Ainsi, le système est toujours possible. On remarque que $X = 0$ c'est-à-dire que $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ est toujours solution de ce système. Elle est appelée solution triviale.

Si A est de rang n, alors le système (10.8) peut être résolu par la règle de Cramer, d'où la solution unique $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ et le système ne possède que la solution triviale. Si A est de rang $r < n$, le théorème II affirme l'existence de solutions non triviales. Ainsi :

Théorème IV. Une condition nécessaire et suffisante pour que (10.8) possède une solution autre que la solution triviale est que le rang r de A soit strictement inférieur à n.

Théorème V. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de n équations homogènes à n inconnues ait une solution autre que la solution triviale est $\det A = 0$.

Théorème VI. Si le rang r de (10.8) est strictement inférieur à n, le système a exactement $n - r$ solutions linéairement indépendantes et toute solution est une combinaison linéaire de ces $n - r$ solutions. De plus, toute combinaison linéaire de solutions est encore solution.

Voir problème 6.

SOIENT X_1 et X_2 deux solutions distinctes de $AX = H$. On a donc $AX_1 = H$, $AX_2 = H$, et $A(X_1 - X_2) = AY = 0$. Alors, $Y = X_1 - X_2$ est une solution non triviale de $AX = 0$.

Réciproquement, si Z est une solution non triviale de $AX = 0$ et si X_p est une solution de $AX = H$, alors $X = X_p + Z$ est aussi solution de $AX = H$. Or Z représente la solution générale de $AX = 0$, par conséquent, $X_p + Z$ représente la solution générale de $AX = H$. Ainsi, on a :

Théorème VII. Si le système non homogène $AX = H$ est possible, une solution générale du système est donnée par la somme de la solution générale de $AX = 0$ et d'une solution particulière de $AX = H$.

Exemple 5. Dans le système $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$, posons $x_1 = 0$. Alors, $x_3 = 2$ et $x_2 = 1$. Une solution particulière est $X_p = {}^t[0,1,2]$. La solution générale de $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ est ${}^t[-7a, a, 3a]$ où a est arbitraire. Alors la solution générale du système donné est

$$X = {}^t[-7a, a, 3a] + {}^t[0, 1, 2] = {}^t[-7a,\ 1+a,\ 2+3a]$$

Remarque : La méthode précédente peut être étendue au cas de systèmes d'ordres plus élevés. Il est cependant nécessaire de montrer que le système est possible. Mais il est fastidieux de résoudre le système à l'aide de la matrice $[AH]$ précédemment introduite.

PROBLEMES RESOLUS

1. Résoudre le système $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$.

Solution :

La matrice $[AH]$ est

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors $x_1 = 1$, $x_2 - 2x_3 = 0$, et $x_4 + 3x_5 = 0$. Prenons $x_3 = a$ et $x_5 = b$, où a et b désignent des constantes arbitraires ; la solution générale est donnée par $x_1 = 1$, $x_2 = 2a$, $x_3 = a$, $x_4 = -3b$, $x_5 = b$ ou par $X = {}^t[1, 2a, a, -3b, b]$.

2. Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \phantom{{}+2x_4} = 7 \end{cases}$.

Solution :

$$[A\ H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 5 & 13 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

La dernière ligne s'écrit $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_4 = -5$; ainsi, le système donné est impossible et n'a donc pas de solution.

3. Démontrer qu'un système $AX = H$ de n équations non homogènes à n inconnues possède une solution unique si $\det A \neq 0$.

Si A n'est pas singulière A est équivalente à I. Supposons A réduite à I à l'aide de transformations sur les lignes et supposons que $[AH]$ soit réduite à $[IK]$. Alors $X = K$ est une solution du système.

Supposons que $X = L$ soit une seconde solution du système, alors $AK = H$, $AL = H$ et $AK = AL$. Puisque A n'est pas une matrice singulière, $K = L$, et la solution est unique.

4. Variante de la règle de Cramer.

Soit le système d'équations non homogènes

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = h_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = h_n \end{cases}$$

Notons A la matrice des coefficients $[a_{ij}]$ et soit α_{ij} le cofacteur de a_{ij} dans A. Multiplions la première équation de (1) par α_{11}, la seconde par $\alpha_{21}, \dots$, la dernière par α_{n1}, et additionnons. Nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}\alpha_{i1}x_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i2}\alpha_{i1}x_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} a_{in}\alpha_{i1}x_n = \sum_{i=1}^{n} h_i\alpha_i$$

qui se réduit par les théorèmes **X** et **XI** et le problème 10, du chapitre 3 à

$$|A|\cdot x_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ h_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ h_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_1| \quad \text{de telle sorte que} \quad x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}$$

Puis multiplions les équations de (1) respectivement par $\alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{n2}$ et additionnons les : nous obtenons

$$|A|\cdot x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & h_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{n1} & h_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |A_2| \quad \text{de sorte que} \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}$$

En poursuivant ce procédé, multiplions les équations de (1) respectivement par $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}$ et sommons. Nous obtenons :

$$|A|\cdot x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & h_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & h_2 \\ \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & h_n \end{vmatrix} = |A_n| \quad \text{de sorte que} \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

5. Résoudre le système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$ en utilisant la méthode de la matrice inverse.

Solution :

L'inverse de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ est $\dfrac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}$. Alors,

$$X = \frac{1}{120}\begin{bmatrix} 120 & 120 & 0 & -120 \\ -69 & -73 & 17 & 80 \\ -15 & -35 & -5 & 40 \\ 24 & 8 & 8 & -40 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}$$

(voir exemple 3).

6. Résoudre $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Solution :

$$[A \quad H] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solution générale du système est $x_1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $x_2 = -\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}b$, $x_3 = a$, $x_4 = b$. Puisque A est de rang 2, on obtient exactement $n - r = 4 - 2 = 2$ solutions linéairement indépendantes. Un tel couple obtenu en prenant tout d'abord $a = 1$, $b = 1$ puis $a = 3$, $b = 1$ est

$x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ et $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$

Que peut-on dire du couple de solutions obtenu en prenant $a = b = 1$ et $a = b = 3$?

7. Démontrer que dans une matrice carrée A d'ordre n, de rang $n - 1$, les cofacteurs des éléments de deux lignes quelconques (respectivement colonnes) sont proportionnels.

Puisque $\det A = 0$, les cofacteurs des éléments d'une ligne quelconque (resp. colonne) de A forment une solution X_1 du système $AX = 0$ (resp. ${}^tAX = 0$).

Or le système n'a qu'une solution linéairement indépendante puisque A (respt. ${}^tA$) est de rang $n - 1$. Donc, en ce qui concerne les cofacteurs d'une ligne (respt. colonne) de A (X_2 étant une autre solution du système) on a $X_2 = kX_1$.

8. Démontrer que si $f_1, f_2, \ldots, f_m$ constituent $m < n$ formes linéaires linéairement indépendantes de n variables sur F, alors les p formes linéaires

$$g_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} f_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

sont linéairement dépendantes si et seulement si la matrice $m \times p$ $[s_{ij}]$ est de rang $r < p$.

Les g_j sont linéairement dépendants si et seulement si il existe des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_p$ dans F non tous nuls tels que

$$\begin{aligned} a_1 g_1 + a_2 g_2 + \ldots + a_p g_p &= a_1 \sum_{i=1}^{m} s_{i1} f_i + a_2 \sum_{i=1}^{m} s_{i2} f_i + \ldots + a_p \sum_{i=1}^{m} s_{ip} f_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{1j}\right) f_1 + \left(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{2j}\right) f_2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{mj}\right) f_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{p} a_j s_{ij}\right) f_i = 0 \end{aligned}$$

Puisque les f sont linéairement indépendants, ceci exige

$$\sum_{j=1}^{p} a_j s_{ij} = a_1 s_{i1} + a_2 s_{i2} + \ldots + a_p s_{ip} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

alors d'après le théorème IV, le système de m équations homogènes à p inconnues $\sum_{j=1}^{p} s_{ij} x_j = 0$ possède une solution non triviale $X = {}^t[a_1, a_2, \ldots, a_p]$ si et seulement si $[s_{ij}]$ est de rang $r < p$.

9. On suppose que $A = [a_{ij}]$ est une matrice singulière d'ordre n. Montrer qu'il existe toujours une matrice $B = [b_{ij}] \neq 0$ d'ordre n telle que $AB = 0$.

Soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les vecteurs colonnes de B. Par hypothèse on a $AB_1 = AB_2 = \ldots = AB_n = 0$. Considérons l'une de ces équations, soit $AB_t = 0$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{11} b_{1t} + a_{12} b_{2t} + \ldots + a_{1n} b_{nt} = 0 \\ a_{21} b_{1t} + a_{22} b_{2t} + \ldots + a_{2n} b_{nt} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} b_{1t} + a_{n2} b_{2t} + \ldots + a_{nn} b_{nt} = 0 \end{cases}$$

Puisque la matrice A des coefficients est singulière, le système d'inconnues $b_{1t}, b_{2t}, \ldots, b_{nt}$ possède des solutions autres que la solution triviale. De même, $AB_1 = 0$, $AB_2 = 0$, ... a des solutions, chacune de ces relations représentant une colonne de B.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

10. Trouver toutes les solutions de

(a) $x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$

(b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

Réponse : (a) $x_1 = 1 + 2a - b + 3c$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = c$
(b) $x_1 = -7a/3 + 17/3$, $x_2 = 4a/3 - 5/3$, $x_3 = a$
(d) $x_1 = -x_2 = 1$, $x_3 = -x_4 = 2$

11. Trouver toutes les solutions non triviales de

(a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - 11x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 0 \end{cases}$

Réponse : (a) $x_1 = -3a$, $x_2 = 0$, $x_3 = a$
(b) $x_1 = -x_2 = -x_3 = a$
(d) $x_1 = -\frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$, $x_2 = a$, $x_3 = \frac{7}{4}a - \frac{5}{4}b$, $x_4 = b$

12. Comparer la solution de 10(d) avec la solution suivante $x_1 = c,\ x_2 = d,\ x_3 = -\frac{10}{3}c - \frac{d}{3},\ x_4 = \frac{8}{3}c + \frac{5}{3}d.$

13. Soit la matrice donnée $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$; trouver une matrice B de rang 2 telle que $AB = 0$. Indication : choisir les colonnes de B à partir des solutions de $AX = 0$.

14. Montrer qu'une matrice carrée est singulière si et seulement si ses lignes (resp. colonnes) sont linéairement dépendantes.

15. Soit $AX = 0$ un système de n équations homogènes à n inconnues. Supposons que A soit de rang $n - 1 = r$. Montrer que tout vecteur non nul de cofacteurs ${}^t[\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}]$ d'une ligne de A est solution de $AX = 0$.

16. Utiliser le problème 15 pour résoudre

$$(a) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}, \qquad (b) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \qquad (c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Indication : aux équations de (a), ajouter $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$ et trouver les cofacteurs des éléments de la troisième ligne de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Réponse : (a) $x_1 = -27a,\ x_2 = 0,\ x_3 = 9a$ ou ${}^t[3a, 0, -a]$, (b) ${}^t[2a, -7a, -17a]$, (c) ${}^t[11a, -2a, -4a]$

17. Soient la matrice A et la matrice AH du système de trois équations non homogènes à cinq inconnues $AX = H$. On suppose que les matrices sont de rang 2 et que la forme canonique de la matrice AH est

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} & b_{15} & c_1 \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où les coefficients $c_1\, c_2$ ne sont pas tous les deux nuls. Choisissons d'abord $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Alors, $X_1 = {}^t[c_1, c_2, 0, 0, 0]$ est solution de $AX = H$. Il suffit ensuite de choisir $x_3 = 1,\ x_4 = x_5 = 0$, ou $x_3 = x_5 = 0,\ x_4 = 1$ et $x_3 = x_4 = 0,\ x_5 = 1$ afin d'obtenir d'autres solutions X_2 , X_3 et X_4. Montrer que ces $5 - 2 + 1 = 4$ solutions sont linéairement indépendantes.

18. On considère une combinaison linéaire $Y = s_1X_1 + s_2X_2 + s_3X_3 + s_4X_4$ de solutions du problème 17. Montrer que Y est solution de $AX = H$ si et seulement si (i) $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$. Ainsi, Y est solution générale de $AX = H$ avec s_1 , s_2 , s_3 , s_4 liés uniquement par la relation (i).

19. Démontrer le théorème VI. Indication : considérer le problème 17 avec $c_1 = c_2 = 0$.

20. Démontrer que si A est une matrice (n, p) de rang r_1, B une matrice (p, n) de rang r_2 telle que $AB = 0$, on a $r_1 + r_2 \leqslant p$. Indication : utiliser le théorème VI.

21. En utilisant la matrice 4×5 $A = [a_{ij}]$ de rang 2, vérifier la propriété suivante : dans une matrice $m \times n$ de rang r, les déterminants d'ordre r formés à partir des colonnes d'une sous-matrice comprenant r lignes de A sont proportionnels aux déterminants d'ordre r formés à partir de toute autre sous-matrice comprenant r lignes de A.

Indication : supposons les deux premières lignes linéairement indépendantes. On a donc $a_{3j} = p_{31}a_{1j} + p_{32}a_{2j}$, $a_{4j} = p_{41}a_{1j} + p_{42}a_{2j}$, $(j = 1, 2, \ldots, 5)$. Puis évaluer les déterminants carrés d'ordre 2 :

$$\begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{2q} & a_{2s} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{1q} & a_{1s} \\ a_{3q} & a_{3s} \end{vmatrix}, \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} a_{3q} & a_{3s} \\ a_{4q} & a_{4s} \end{vmatrix}$$

22. Démontrer le théorème du problème 21.

23. A partir du problème 7, déduire la propriété suivante : si une matrice carrée d'ordre n est de rang $n - 1$, on a les relations suivantes entre ses cofacteurs

$$(a)\ \ \alpha_{ij}\alpha_{hk} = \alpha_{ik}\alpha_{hj}, \qquad (b)\ \ \alpha_{ii}\alpha_{jj} = \alpha_{ij}\alpha_{ji}$$

où $(h, i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$.

24. Montrer que $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est l-équivalente à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A partir de $B = [AH]$, déduire que le système de six équations linéaires à quatre inconnues possède cinq équations linéairement indépendantes. Démontrer qu'un système de $m > n$ équations linéaires à n inconnues peut avoir au plus $n + 1$ équations linéairement indépendantes. Montrer que lorsqu'il y en a exactement $n + 1$, le système est impossible.

25. Si le système $AX = H$ est possible et est de rang r, pour quels sous-ensembles de r inconnues peut-on le résoudre ?

26. Généraliser les résultats des problèmes 17 et 18 au cas de m équations non homogènes à n inconnues dont les matrices A et AH sont de même rang et prouver que si les matrices A et AH du système $AX = H$ de m équations non homogènes à n inconnues sont de rang r et si $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r+1}$ sont des solutions linéairement indépendantes du système alors

$$X = s_1X_1 + s_1X_2 + \ldots + s_{n-r+1}X_{n-r+1}$$

est une solution générale du système vérifiant la condition $\sum_{i=1}^{n-r+1} s_i = 1$.

27. Dans un réseau électrique, les quantités entrantes et sortantes E_1 et I_1 sont données en fonction des quantités sortantes E_2 et I_2 par

$$\begin{aligned} E_1 &= aE_2 + bI_2 \\ I_1 &= cE_2 + dI_2 \end{aligned} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} E_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} E_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Montrer que $\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} a & -|A| \\ 1 & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} E_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} b & |A| \\ 1 & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$.

Résoudre aussi pour E_2 et I_2, I_1 et I_2, I_1 et E_2.

28. Supposons que le système de n équations linéaires à n inconnues $AX = H$, $H \neq 0$, ait une solution unique. Montrer que le système $AX = K$ possède une solution unique pour tout vecteur K à n composantes.

29. Résoudre $AX = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ et écrire les x_i comme formes linéaires dont les y_j sont les variables. En déduire la solution de ${}^tAX = Y$.

30. Soit A une matrice carrée d'ordre n, non singulière. On suppose que S_i est solution de $AX = E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, où E_i désigne un vecteur à n composantes dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 et les autres nulles. Caractériser la matrice $[S_1, S_2, \ldots, S_n]$.

31. On suppose que A est une matrice $m \times n$, $m \leqslant n$, et que S_i est une solution de $AX = E_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, où E_i est le vecteur à m composantes dont la $i^{\text{ème}}$ est égale à 1 et les autres nulles. Si $K = {}^t[k_1, k_2, \ldots, k_m]$, démontrer que

$$k_1S_1 + k_2S_2 + \ldots + k_mS_m$$

est une solution de $AX = K$.

CHAPITRE 11

Espaces vectoriels

SAUF MENTION CONTRAIRE, tous les vecteurs seront dorénavant des vecteurs colonnes. Lorsque les composantes seront explicitées, nous écrirons $^t[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Le symbole $^t(\ )$ indique que les éléments doivent être écrits en colonne.

Un ensemble de tels vecteurs à n composantes sur F est stable pour l'addition si la somme de deux quelconques d'entre eux est encore un vecteur de l'ensemble. De même, l'ensemble est stable par multiplication par les scalaires si un vecteur quelconque de l'ensemble multiplié par un scalaire est encore un vecteur de l'ensemble.

Exemple 1. (*a*) l'ensemble de tous les vecteurs $^t[x_1, x_2, x_3]$ de l'espace ordinaire ayant des composantes égales $(x_1 = x_2 = x_3)$ est stable par addition et par multiplication par des scalaires. En effet, la somme de deux vecteurs de l'espace et la multiplication d'un tel vecteur par k (k réel) donnent encore des vecteurs ayant leurs composantes égales.

(*b*) L'ensemble de tous les vecteurs $^t[x_1, x_2, x_3]$ de l'espace ordinaire est stable par addition et par multiplication par les scalaires.

ESPACES VECTORIELS. Tout ensemble de vecteurs à n composantes sur F stable pour l'addition et pour la multiplication par les scalaires est appelé espace vectoriel. Ainsi, si $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont des vecteurs à n composantes sur F, l'ensemble de leurs combinaisons linéaires.

$$(11.1) \qquad k_1X_1 + k_2X_2 + \cdots + k_mX_m \quad (k_i \text{ dans } F)$$

est un espace vectoriel sur F. Par exemple, les ensembles de vecteurs (*a*) et (*b*) de l'exemple 1 sont des espaces vectoriels. Il est clair que tout espace vectoriel (11.1) contient le vecteur nul d'ordre n tandis que l'espace réduit au seul vecteur nul est un espace vectoriel. (L'espace (11.1) est également appelé espace vectoriel linéaire).

L'espace $V_n(F)$ de *tous* les vecteurs à n composantes sur F est appelé espace vectoriel à n dimensions sur F.

SOUS-ESPACES. Un ensemble V de vecteurs de $V_n(F)$ est un sous-espace de $V_n(F)$ si V est stable par addition et par multiplication par les scalaires. Ainsi, l'espace vectoriel nul à n dimensions est un sous-espace de $V_n(F)$. Il en est de même de $V_n(F)$ lui-même. L'ensemble (*a*) de l'exemple 1 est un sous-espace (une droite) de l'espace ordinaire. De manière générale, si $X_1, X_2, \dots, X_m$ appartient à $V_n(F)$, l'espace de toutes les combinaisons linéaires (11-1) est un sous-espace de $V_n(F)$.

Un espace vectoriel V est **engendré** par des vecteurs à n composantes $X_1, X_2, \dots, X_m$ si : (*a*) les X_i sont dans V, et (*b*) tout vecteur de V est une combinaison linéaire (11.1) des X_i. On pourra remarquer que l'on ne restreint pas les vecteurs $X_1, X_2, \dots, X_m$ a être linéairement indépendants.

Exemple 2. Soit F l'espace R des nombres réels des vecteurs à 3 composantes $X_1 = {}^t[1 . 1 . 1]$, $X_2 = {}^t[1 . 2 . 3]$, $X_3 = {}^t[1 . 3 . 2]$ et $X_4 = {}^t[3 . 2 . 1]$ appartiennent à l'espace $S = V_3(R)$. Tout vecteur $^t[a, b, c]$ de S peut s'exprimer sous la forme

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 + y_4X_4 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \end{bmatrix}$$

puisque le système d'équations

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 &= a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 &= b \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 &= c \end{aligned}$$

est possible. Ainsi, les vecteurs X_1, X_2, X_3, X_4 engendrent S.

Les vecteurs X_1 et X_2 sont linéairement indépendants. Ils engendrent un sous-espace (le plan π) de S qui contient tout vecteur $hX_1 + kX_2$, où h et k sont des nombres réels.

Le vecteur X_4 engendre un sous-espace (une droite L) de S qui contient tout vecteur hX_4 où h est un nombre réel.

Voir problème 1.

BASE ET DIMENSION. La dimension d'un espace vectoriel V est le nombre maximum de vecteurs linéairement indépendants dans V ou, ce qui est équivalent, le nombre minimum de vecteurs linéairement indépendants nécessaires pour engendrer V. En géométrie élémentaire, l'espace ordinaire est considéré comme un ensemble à 3 dimensions, de points (a, b, c). Ici, nous le considérerons comme un espace à 3 dimensions de vecteurs ${}^t[a, b, c]$. Le plan π de l'exemple 2 est de dimension 2 et la droite L est de dimension 1.

Un espace vectoriel de dimension r formé de vecteurs à n composantes sera noté $V_n^r(F)$. Si $r = n$, nous écrirons par convention $V_n(F)$ pour $V_n^n(F)$.

Un ensemble de r vecteurs linéairement indépendants de $V_n^r(F)$ est une base de $V_n^r(F)$. Chaque vecteur de l'espace s'écrit alors d'une façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de base. Toutes les bases de $V_n^r(F)$ ont exactement le même nombre d'éléments.

Exemple 3. Les vecteurs X_1, X_2, X_3 de l'exemple 2 engendrent S car tout vecteur ${}^t[a, b, c]$ de S peut s'exprimer par

$$y_1X_1 + y_2X_2 + y_3X_3 = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 + y_3 \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations qui en résulte $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = a \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 = b, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = c \end{cases}$ contrairement au système (i), a une solution unique. Les vecteurs X_1, X_2, X_3 forment une base de S tandis que les vecteurs X_1, X_2, X_3 ne constituent pas une base de S. (Le démontrer). Les vecteurs X_1, X_2, X_3 engendrent le sous-espace π de l'exemple 2 dont une base est l'ensemble X_1, X_2.

Les théorèmes I à V du chapitre 9 s'appliquent ici bien entendu. En particulier, le théorème IV peut s'énoncer ainsi :

Théorème I. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ forment un ensemble de vecteurs à n composantes sur F et si r est le rang de la matrice $n \times m$ de leurs composantes, on peut alors choisir dans cet espace r vecteurs linéairement indépendants. Ces r vecteurs engendrent un espace $V_n^r(F)$ qui contient les $m - r$ vecteurs restants.

Voir les problèmes 2-3.

Les théorèmes suivants sont très importants.

Théorème II. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont $m < n$ vecteurs de $V_n(F)$ à n composantes linéairement indépendants et si $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ sont $n-m$ vecteurs quelconques de $V_n(F)$ qui, avec $X_1, X_2, \ldots, X_m$, constituent un ensemble de vecteurs linéairement indépendants, alors, l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_n$ constitue une base de $V_n(F)$.

Voir problème 4.

Théorème III. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont $m < n$ vecteurs à n composantes linéairement indépendants, sur F, les p vecteurs

$$Y_j = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} X_i \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

sont linéairement dépendants si $p > m$ ou lorsque $p \leqslant m$ si $[s_{ij}]$ est de rang $r < p$.

Théorème IV. Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des vecteurs à n composantes linéairement indépendants sur F, alors les vecteurs

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont linéairement indépendants si et seulement si $[a_{ij}]$ n'est pas singulière.

SOUS-ESPACES IDENTIQUES. Si ${}_1V_n^r(F)$ et ${}_2V_n^r(F)$ sont 2 sous-espaces de $V_n(F)$, ces espaces sont identiques si et seulement si tout vecteur de ${}_1V_n^r(F)$ est vecteur de ${}_2V_n^r(F)$ et réciproquement, c'est-à-dire si et seulement si chacun d'eux est un sous-espace de l'autre.

Voir problème 5.

SOMME ET INTERSECTION DE DEUX ESPACES. Soit $V_n^h(F)$ et $V_n^k(F)$ deux espaces vectoriels. La somme de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel formé des vecteurs $X + Y$ où X appartient à $V_n^h(F)$ et Y à $V_n^k(F)$. Cet espace est appelé espace somme $V_n^s(F)$. La dimension s de l'espace somme de 2 espaces vectoriels est $\leqslant$ à la somme de leur dimension.

L'intersection de deux espaces vectoriels est formé de tous les vecteurs communs aux deux espaces. Si X appartient aux deux espaces, aX appartient également à l'intersection. De même, si X et Y appartiennent aux deux espaces, il en est de même de $aX + bY$. Ainsi, l'intersection de deux tels espaces est un espaces vectoriel. Nous l'appelons espace intersection $V_n^t(F)$. La dimension de $V_n^t(F)$ ne peut être supérieure à la plus petite des dimensions des deux espaces.

Théorème V. Si deux espaces vectoriels $V_n^h(F)$ et $V_n^k(F)$ admettent $V_n^s(F)$ pour espace somme et $V_n^t(F)$ pour espace intersection, alors $h + k = s + t$.

Exemple 4. Considérons le sous-espace π_1 engendré par X_1 et X_2 définis dans l'exemple 2 et le sous-espace π_2 engendré par X_3 et X_4. Puisque π_1 et π_2 ne sont pas identiques (le démontrer) et puisque les quatre vecteurs engendrent S, l'espace somme de π_1 et π_2 est égal à S.

Or, $4X_1 - X_2 = X_4$. Ainsi, X_4 appartient à la fois à π_1 et à π_2. Le sous-espace (la droite L) engendrée par X_4 est alors l'espace intersection de π_1 et de π_2. On remarque que π_1 et π_2 sont tous deux de dimension 2, S est de dimension 3 et L est de dimension 1. Ceci est en accord avec le théorème V.

Voir problèmes 6-8.

NOYAU D'UNE MATRICE. Pour un système d'équations homogènes $AX = 0$, l'ensemble des solutions X constitue un espace vectoriel appelé *noyau* de A, et noté Ker A. La dimension de cet espace sera notée N_A.

En rapprochant du théorème VI Chapitre 10, on a :

Théorème VI. Si N_A est la dimension de Ker A, alors $AX = 0$ a N_A solutions linéairement indépendantes

$X_1, X_2, \ldots, X_{N_A}$ telles que toute solution de $AX = 0$ soit combinaison linéaire des X_i et telle qu'une combinaison linéaire quelconque de solutions soit encore solution.

Une base de Ker A est un espace de N_A solutions linéairement indépendantes de $AX = 0$.

Voir problème 9.

Théorème VII. Pour une matrice A $m \times n$ de rang r_A dont le noyau a pour dimension N_A, on a

$$r_A + N_A = n \tag{11.2}$$

LES LOIS DE SYLVESTER SUR LA DIMENSION. Si A et B sont d'ordre n et de rangs respectifs r_A et r_B, le rang du produit AB et la dimension de Ker(AB) vérifient les inégalités

$$\begin{gathered} r_{AB} \geq r_A + r_B - n \\ N_{AB} > N_A, \quad N_{AB} > N_B \\ N_{AB} \leq N_A + N_B \end{gathered} \tag{11.3}$$

Voir problème 10.

BASES ET COORDONNEES. On appelle vecteurs élémentaires sur F les vecteurs à n composantes

$$E_1 = {}^t[1, 0, 0, \ldots, 0], \quad E_2 = {}^t[0, 1, 0, \ldots, 0], \quad \ldots, \quad E_n = {}^t[0, 0, 0, \ldots, 1]$$

Le vecteur élémentaire E_j dont la $j^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 est le $j^{\text{ème}}$ vecteur élémentaire. Les vecteurs élémentaires $E_1, E_2, \ldots, E_n$ constituent une base importante de $V_n(F)$. On l'appelle la base canonique de $V_n(F)$.

Tout vecteur $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ de $V_n(F)$ s'exprime de façon unique selon une somme

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \cdots + x_n E_n$$

de vecteurs élémentaires. Les composantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de X sont alors les coordonnées de X relatives à la base E. Désormais, sauf mention contraire, nous supposerons qu'un vecteur X est donné par rapport à cette base.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ une autre base de $V_n(F)$. Il existe alors des scalaires uniques dans F tels que $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i Z_i = a_1 Z_1 + a_2 Z_2 + \cdots + a_n Z_n$$

Ces scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ désignent les coordonnées de X par rapport à la base Z. En écrivant $X_Z = {}^t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, on a

$$X = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_n]X_Z = Z \cdot X_Z \tag{11.4}$$

où Z est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de base $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$.

Exemple 5. Si $Z_1 = {}^t[2, -1, 3]$, $Z_2 = {}^t[1, 2, -1]$, $Z_3 = {}^t[1, -1, -1]$ est une base de $V_3(F)$ et si $X_Z = {}^t[1, 2, 3]$ est un vecteur de $V_3(F)$ par rapport à cette base, on a

$$X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = {}^t[7, 0, -2]$$

par rapport à la base E.

Voir problème 11.

Soit $W_1, W_2, \ldots, W_n$ une autre base de $V_n(F)$. On suppose $X_W = {}^t[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ et

$$X = [W_1, W_2, \ldots, W_n]X_W = W \cdot X_W \tag{11.5}$$

D'après (11.4) et (11.5), $X = Z \cdot X_Z = W \cdot X_W$ et

(11.6) $$X_W = W^{-1} \cdot Z \cdot X_Z = PX_Z$$

où $P = W^{-1}Z$.

Ainsi,

Théorème VIII. Si un vecteur de $V_n(F)$ a pour coordonnées X_Z et X_W respectivement par rapport à deux bases de $V_n(F)$, alors il existe une matrice non singulière P uniquement déterminée par les deux bases et donnée par (11.6) avec $X_W = PX_Z$

Voir problème 12.

PROBLEMES RESOLUS

1. L'ensemble des vecteurs $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$, où $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est un sous-espace V de $V_4(F)$ car la somme de deux vecteurs de V et la multiplication par un scalaire d'un vecteur de V sont encore dans V (la somme de leurs composantes est nulle).

2. Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 2, les vecteurs $X_1 = {}^t[1, 2, 2, 1]$, $X_2 = {}^t[3, 4, 4, 3]$, et $X_3 = {}^t[1, 0, 0, 1]$ sont linéairement dépendants et engendrent un espace vectoriel $V_4^2(F)$.

   Mais deux quelconques de ces vecteurs sont linéairement indépendants. Par suite, nous pouvons prendre X_1 et X_2, X_1 et X_3 ou X_2 et X_3 comme base de $V_4^2(F)$.

3. Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ est de rang 2, les vecteurs $X_1 = {}^t[1, 1, 1, 0]$, $X_2 = {}^t[4, 3, 2, -1]$, $X_3 = {}^t[2, 1, 0, -1]$, et $X_4 = {}^t[4, 2, 0, -2]$ sont linéairement dépendants et engendrent un espace $V_4^2(F)$.

   Nous pouvons prendre pour base deux quelconques des vecteurs sauf X_3, X_4.

4. Les vecteurs X_1, X_2, X_3 du problème 2 appartiennent à $V_4(F)$. Trouver une base de cet espace.

   Nous pouvons prendre pour base $X_1, X_2, X_4 = {}^t[1, 0, 0, 0]$, et $X_5 = {}^t[0, 1, 0, 0]$ ou $X_1, X_2, X_6 = {}^t[1, 2, 3, 4]$ et $X_7 = {}^t[1, 3, 6, 8], \ldots$, puisque les matrices $[X_1, X_2, X_4, X_5]$ et $[X_1, X_2, X_6, X_7]$ sont de rang 4.

5. Soient $X_1 = {}^t[1\,,2\,,1]$, $X_2 = {}^t[1\,,2\,,3]$, $X_3 = {}^t[3\,,6\,,5]$, $Y_1 = {}^t[0\,,0\,,1]$, $Y_2 = {}^t[1\,,2\,,5]$ des vecteurs de $V_3(F)$. Montrer que l'espace engendré par X_1, X_2, X_3 et celui engendré par Y_1, Y_2 sont identiques.

Remarquons tout d'abord que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants et que $X_3 = 2X_1 + X_2$. Ainsi, les X_i engendrent un espace de dimension 2, soit ${}_1V_3^2(F)$. Il en est de même des Y_i qui sont linéairement indépendants et engendrent un ${}_2V_3^2(F)$ de dimension 2.

De plus, $Y_1 = \frac{1}{2}X_2 - \frac{1}{2}X_1$, $Y_2 = 2X_2 - X_1$; $X_1 = Y_2 - 4Y_1$, $X_2 = Y_2 - 2Y_1$. Ainsi, tout vecteur $aY_1 + bY_2$ de ${}_2V_3^2(F)$ est un vecteur $(\frac{1}{2}a + 2b)X_2 - (\frac{1}{2}a + b)X_1$ de ${}_1V_3^2(F)$ et tout vecteur $cX_1 + dX_2$ de ${}_1V_3^2(F)$ est un vecteur $(c+d)Y_2 - (4c + 2d)Y_1$ de ${}_2V_3^2(F)$. Ainsi, les deux espaces sont identiques.

6. (*a*) Si $X = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ appartient à $V_3^2(F)$, espace engendré par $X_1 = {}^t[1\,,-1\,,1]$ et $X_2 = {}^t[3\,,4\,,-2]$, alors

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 3 \\ x_2 & -1 & 4 \\ x_3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0.$$

(*b*) Si $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ appartient à $V_4^2(F)$, espace engendré par $X_1 = {}^t[1\,,1\,,2\,,3]$ et $X_2 = {}^t[1\,,0\,,-2\,,1]$,

alors $\begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \\ x_4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 2. Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$, ceci nécessite $\begin{bmatrix} x_1 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 2 & -2 \end{bmatrix} = -2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0$

et $\begin{bmatrix} x_4 & 1 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = x_1 + 2x_2 - x_4 = 0.$

Ces problèmes vérifient la propriété suivante : tout $V_n^k(F)$ peut être défini comme l'ensemble de toutes les solutions sur F d'un système de $n - k$ équations linéaires homogènes linéairement indépendantes sur F à n inconnues.

7. Démontrer que si deux espaces vectoriels $V_n^h(F)$ et $V_n^k(F)$ ont pour espace somme $V_n^S(F)$ et pour intersection $V_n^t(F)$, on a $h + k = s + t$.

Supposons $t = h$; alors $V_n^h(F)$ est un sous-espace de $V_n^k(F)$ et leur espace somme de $V_n^k(F)$ lui-même. Ainsi, $s = k$, $t = h$ et $s + t = h + k$. Le lecteur établira la même propriété si $t = k$.

Supposons maintenant que $t < h$, $t < k$ et que $X_1, X_2, \ldots, X_t$ engendrent $V_n^t(F)$. D'après le théorème II, il existe des vecteurs $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \ldots, Y_h$ tels que $X_1, X_2, \ldots, X_t, Y_{t+1}, \ldots, Y_h$ engendrent $V_n^h(F)$ et des vecteurs $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_k$ tels que $X_1, X_2, \ldots, X_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_k$ engendrent $V_n^k(F)$.

Supposons maintenant qu'il existe des scalaires a_i et b_i tels que

$$\textbf{(11.4)} \qquad \sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{h} a_i Y_i = \sum_{i=t+1}^{k} -b_i Z_i$$

Le vecteur du membre de gauche appartient à $V_n^h(F)$ et, à cause du membre de droite, il appartient également à $V_n^k(F)$. Ainsi, il appartient à $V_n^t(F)$. Mais $X_1, X_2, \ldots, X_t$ engendrent $V_n^t(F)$. D'où $a_{t+1} = a_{t+2} = \ldots = a_h = 0$.

D'après **(11.4)**,
$$\sum_{i=1}^{t} a_i X_i + \sum_{i=t+1}^{k} b_i Z_i = 0$$

Mais les vecteurs X et Z sont linéairement indépendants, donc $a_1 = a_2 = \ldots = a_t = b_{t+1} = b_{t+2} = \ldots = b_k = 0$. Ainsi, les vecteurs X, Y et Z forment un ensemble linéairement indépendant qui engendre $V_n^s(F)$. On a alors $s = h + k - t$.

8. Considérons ${}_1V_3^2(F)$ muni de la base $X_1 = {}^t[1,2,3]$ et $X_2 = {}^t[1,1,1]$ et ${}_2V_3^2(F)$ muni de la base $Y_1 = {}^t[3,1,2]$ et $Y_2 = {}^t[1,0,1]$. Puisque la matrice des composantes $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 3, l'espace somme est $V_3(F)$, que l'on pourra munir de la base X_1, X_2, et Y_1.

Puisque $h + k = s + t$, l'intersection est un $V_3^1(F)$. Afin de trouver une base, écrivons les combinaisons linéaires des vecteurs de base de ${}_1V_3^2(F)$ et de ${}_2V_3^2(F)$:

$$aX_1 + bX_2 = cY_1 + dY_2$$

Prenons $d = 1$ par commodité et résolvons $\begin{cases} a + b - 3c = 1 \\ 2a + b - c = 0 \\ 3a + b - 2c = 1 \end{cases}$. On obtient $a = 1/3$, $b = -4/3$, $c = -2/3$.

Alors $aX_1 + bX_2 = {}^t[-1, -2/3, -1/3]$ est une base de l'intersection des deux espaces. Le vecteur ${}^t[3,2,1]$ est également base de cet espace.

9. Déterminer une base du noyau de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Considérons le système d'équations $AX = 0$ qui s'écrit $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$.

Une base de Ker A est formée du couple de solutions linéairement indépendantes ${}^t[1,2,0,-1]$ et ${}^t[2,1,-1,0]$ de ces équations.

10. Démontrer : $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Supposons d'abord que A soit de la forme $\begin{bmatrix} I_{r_A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Alors, les r_A premières lignes de AB sont les r_A premières lignes de B tandis que les lignes restantes sont nulles. D'après le problème 10 du chapitre 5, le rang de AB est $r_{AB} \geq r_A + r_B - n$.

Supposons maintenant que A ne soit pas de la forme précédente. Il existe alors des matrices non singulières P et Q telles que PAQ ait cette forme tandis que le rang de $PAQB$ soit exactement égal à celui de AB. (Pourquoi ?).

Le lecteur pourra considérer le cas particulier où $B = \begin{bmatrix} I_{r_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

11. Soit $X = {}^t[1,2,1]$ dans la base E. Trouver ses nouvelles coordonnées dans la nouvelle base $Z_1 = {}^t[1,1,0]$, $Z_2 = {}^t[1,0,1]$ et $Z_3 = {}^t[1,1,1]$.

Solution (a). Ecrire

(i) $X = aZ_1 + bZ_2 + cZ_3$, c'est-à-dire $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Puis $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a \phantom{{}+b} + c = 2 \\ \phantom{a+{}} b + c = 1 \end{cases}$ et

$a = 0$, $b = -1$, $c = 2$. Ainsi, par rapport à la base Z, on a $X_Z = {}^t[0, -1, 2]$.

Solution (*b*). Ecrivons **(i)** de la façon suivante : $X = [Z_1, Z_2, Z_3]X_Z = ZX_Z$, on a

$$X_Z = Z^{-1}X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^t[0,-1,2]$$

12. Soient X_Z et X_W les coordonnées d'un vecteur X par rapport aux deux bases $Z_1 = {}^t[1,1,0]$, $Z_2 = {}^t[1,0,1]$, $Z_3 = {}^t[1,1,1]$ et $W_1 = {}^t[1,1,2]$, $W_2 = {}^t[2,2,1]$, $W_3 = {}^t[1,2,2]$. Déterminer la matrice P telle que $X_W = PX_Z$.

Ici, $Z = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, et $W^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

On a alors $P = W^{-1}Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ d'après **(11.6)**.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

13. Soit ${}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ un vecteur arbitraire de $V_4(R)$ où R désigne le corps des réels. Parmi les espaces suivants, lesquels sont des sous-espaces de $V_4(R)$:

(*a*) l'ensemble des vecteurs tels que $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$,

(*b*) l'ensemble des vecteurs tels que $x_1 = x_2$, $x_3 = 2x_4$,

(*c*) l'ensemble des vecteurs tels que $x_4 = 0$,

(*d*) l'ensemble des vecteurs tels que $x_1 = 1$,

(*e*) l'ensemble des vecteurs tels que x_1, x_2, x_3, x_4 soient entiers.

Réponse : Ils le sont tous sauf (*d*) et (*c*).

14. Montrer que ${}^t[1,1,1,1]$ et ${}^t[2,3,3,2]$ forment une base du $V_4^2(F)$, espace défini dans le problème 2.

15. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel engendré par chacun des ensembles de vecteurs ci-dessous. Trouver une base pour chacun d'entre eux.

(*a*) ${}^t[1,2,3,4,5]$, ${}^t[5,4,3,2,1]$, ${}^t[1,1,1,1,1]$

(*b*) ${}^t[1,1,0,-1]$, ${}^t[1,2,3,4]$, ${}^t[2,3,3,3]$

(*c*) ${}^t[1,1,1,1]$, ${}^t[3,4,5,6]$, ${}^t[1,2,3,4]$, ${}^t[1,0,-1,-2]$

Réponse : (*a*), (*b*), (*c*), $r = 2$

16. (*a*) Montrer que les vecteurs $X_1 = {}^t[1,-1,1]$ et $X_2 = {}^t[3,4,-2]$ engendrent le même espace que $Y_1 = {}^t[9,5,-1]$ et $Y_2 = {}^t[-17,-11,3]$.

(*b*) Montrer que les vecteurs $X_1 = {}^t[1,-1,1]$ et $X_2 = {}^t[3,4,-2]$ n'engendrent pas le même espace que $Y_1 = {}^t[-2,2,-2]$ et $Y_2 = {}^t[4,3,1]$.

17. Montrer que si l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_k$ est une base de $V_n^k(F)$, alors, un vecteur quelconque Y de l'espace peut se représenter de manière unique comme combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_k$.

Indication : supposer $$Y = \sum_{i=1}^{k} a_i X_i = \sum_{i=1}^{k} b_i X_i.$$

18. Considérons la matrice 4×4 dont les colonnes sont les vecteurs d'une base de l'espace $V_4^2(R)$ du problème 2 et d'une base de l'espace $V_4^2(R)$ du problème 3. Montrer que le rang de cette matrice est égal à 4. Par suite, $V_4(R)$ est l'espace somme et $V_4^0(R)$ est l'intersection des deux espaces donnés.

19. Prouver le théorème 3 en suivant pas à pas la démonstration donnée dans le problème 8 du chapitre 10.

20. Montrer que l'espace engendré par ${}^t[1,0,0,0,0]$, ${}^t[0,0,0,0,1]$, ${}^t[1,0,1,0,0]$, ${}^t[0,0,1,0,0]$, ${}^t[1,0,0,1,1]$ et celui engendré par ${}^t[1,0,0,0,1]$, ${}^t[0,1,0,1,0]$, ${}^t[0,1,-2,1,0]$, ${}^t[1,0,-1,0,1]$, ${}^t[0,1,1,1,0]$ sont respectivement de dimensions 4 et 3. Montrer que ${}^t[1,0,1,0,1]$ et ${}^t[1,0,2,0,1]$ forment une base de l'intersection des deux espaces.

21. Quelles sont, par rapport à la base $Z_1={}^t[1,1,2]$, $Z_2={}^t[2,2,1]$, $Z_3={}^t[1,2,2]$, les coordonnées des vecteurs $(a)\ {}^t[1,1,0]$, $(b)\ {}^t[1,0,1]$, $(c)\ {}^t[1,1,1]$.
Réponse : $(a)\ {}^t[-1/3,2/3,0]$, $(b)\ {}^t[4/3,1/3,-1]$, $(c)\ {}^t[1/3,1/3,0]$

22. Quelles sont, par rapport à la base $Z_1={}^t[0,1,0]$, $Z_2={}^t[1,1,1]$, $Z_3={}^t[3,2,1]$, les coordonnées des vecteurs $(a)\ {}^t[2,-1,0]$, $(b)\ {}^t[1,-3,5]$, $(c)\ {}^t[0,0,1]$.
Réponse : $(a)\ {}^t[-2,-1,1]$, $(b)\ {}^t[-6,7,-2]$, $(c)\ {}^t[-1/2,3/2,-1/2]$

23. Soient X_Z et X_W les coordonnées d'un vecteur X par rapport à un couple de bases données. Déterminer la matrice P vérifiant $X_W = PX_Z$.

(a) $Z_1={}^t[1,0,0]$, $Z_2={}^t[1,0,1]$, $Z_3={}^t[1,1,1]$; $W_1={}^t[0,1,0]$, $W_2={}^t[1,2,3]$, $W_3={}^t[1,-1,1]$

(b) $Z_1={}^t[0,1,0]$, $Z_2={}^t[1,1,0]$, $Z_3={}^t[1,2,3]$; $W_1={}^t[1,1,0]$, $W_2={}^t[1,1,1]$, $W_3={}^t[1,2,1]$

Réponse : $(a)\ P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $(b)\ P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. Démontrer que si P_j est solution de $AX = E_j \cdot (j = 1, 2, \ldots, n)$, alors $\sum_{i=1}^{n} h_j P_j$ est solution de $AX = H$ où $H = {}^t[h_1, h_2, \ldots, h_n]$.
Indication : $H = h_1E_1 + h_2E_2 + \cdots + h_nE_n$.

25. On appelle espace colonne de A l'espace vectoriel défini par l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des colonnes d'une matrice A. De même, l'espace ligne de A est l'espace vectoriel défini par toutes les combinaisons linéaires des lignes de A. Montrer que les colonnes de AB appartiennent à l'espace colonne de A et que les lignes de AB appartiennent à l'espace ligne de B.

26. Montrer que si $AX = H$, un système de m équations non homogènes à n inconnues est possible si et seulement si le vecteur H appartient à l'espace colonne de A.

27. Déterminer une base du noyau de $(a)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.
Réponse : $(a)\ {}^t[1,-1,-1]$, $(b)\ {}^t[1,1,-1,-1]$, ${}^t[1,2,-1,-2]$

28. Démontrer $(a)\ N_{AB} \geq N_A$, $N_{AB} \geq N_B$ $(b)\ N_{AB} \leq N_A + N_B$

Indications : $(a)\ N_{AB} = n - r_{AB}$; $r_{AB} \leq r_A$ et r_B.
(b) Considérer $n - r_{AB}$ en utilisant le théorème du problème 10.

29. Trouver un procédé de résolution du problème 16 en utilisant seulement les transformations sur les colonnes sur $A = [X_1, X_2, Y_1, Y_2]$. Puis résoudre le problème 5.

CHAPITRE 12

Applications linéaires

DEFINITION. Soient $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ et $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ deux vecteurs de $V_n(F)$, leurs coordonnées étant prises par rapport à la même base de l'espace. On suppose que les coordonnées de X et de Y sont reliées par

$$(12.1) \qquad \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

c'est-à-dire d'une façon plus condensée $\quad Y = AX$

où $A = [a_{ij}]$ est sur F. Alors, (12.1) est une application T qui transforme tout vecteur X de $V_n(F)$ en un autre vecteur Y (en général) du même espace, Y est appelé image de X.

Si (12.1) transforme X_1 en Y_1 et X_2 en Y_2, alors

(*a*) elle transforme kX_1 en kY_1, quel que soit le scalaire k ;

(*b*) elle transforme $aX_1 + bX_2$ en $aY_1 + bY_2$, pour tout couple de scalaires a et b. Pour cette raison, l'application est dite linéaire.

Exemple 1. Considérons l'application linéaire $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X$ dans l'espace ordinaire $V_3(R)$.

(*a*) L'image de $X = {}^t[2,0,5]$ est $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 27 \\ 17 \end{bmatrix} = {}^t[12,27,17]$.

(*b*) Le vecteur X dont l'image est $Y = {}^t[2,0,5]$ est obtenu en résolvant $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Puisque $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13/5 \\ 0 & 1 & 0 & 11/5 \\ 0 & 0 & 1 & -7/5 \end{bmatrix}$, $\quad X = {}^t[13/5, 11/5, -7/5]$.

THEOREMES FONDAMENTAUX. Si dans (12.1), $X = {}^t[1,0,\ldots,0] = E_1$ alors $Y = {}^t[a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{n1}]$ et, en général, si $X = E_j$ alors $Y = {}^t[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]$. D'où :

Théorème I. Une application linéaire (12.1) est déterminée de façon unique lorsque les images (c'est-à-dire les Y) des vecteurs de base sont connus, les colonnes respectives de A étant les coordonnées des images de ces vecteurs.

Voir problème 1.

Une application linéaire (12.1) est non singulière si les images de vecteurs distincts X_i sont des vecteurs distincts Y_i. Dans le cas contraire, l'application est dite singulière.

Théorème II. Une application linéaire (12.1) est non singulière si et seulement si la matrice A de l'application est non singulière.

Voir problème 2.

Théorème III. Une application linéaire non singulière transforme des vecteurs linéairement indépendants (resp. dépendants) en des vecteurs linéairement indépendants (resp. dépendants).

Voir problème 3.

Le théorème suivant est une conséquence du théorème III.

Théorème IV. L'image d'un espace vectoriel $V_n^k(F)$ par une application non singulière (12.1) est un espace vectoriel $V_n^k(F)$. (La dimension de l'espace vectoriel est conservée). En particulier, l'application est une application de $V_n(F)$ sur lui-même.

Lorsque A n'est pas singulière, l'inverse de (12.1)

$$X = A^{-1}Y$$

transforme l'ensemble des vecteurs $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dont les composantes sont les colonnes de A, en vecteurs de base de l'espace. C'est aussi une application linéaire.

Théorème V. Pour tout système de n vecteurs linéairement indépendants de $V_n(F)$, il existe une application linéaire non singulière pour laquelle ces n vecteurs sont les images des n vecteurs élémentaires E_i de $V_n(F)$. La réciproque est évidemment vraie.

Théorème VI. Si $Y = AX$ transforme un vecteur X en un vecteur Y, si $Z = BY$ transforme Y en Z et si $W = CZ$ transforme Z en W, alors $Z = BY = (BA)X$ transforme X en Z, et $W = (CBA)X$ transforme X en W.

Théorème VII. Soient deux ensembles donnés de n vecteurs à n composantes linéairement indépendants. Il existe une application linéaire non singulière qui transforme les vecteurs de l'un des ensembles en vecteurs de l'autre.

CHANGEMENT DE BASE. Soit $Y_Z = AX_Z$ une application linéaire de $V_n(F)$ relativement à une base Z. On suppose que l'on a effectué un changement de base et on désigne par X_W et Y_W les coordonnées respectives de X_Z et Y_Z par rapport à la nouvelle base. D'après le théorème VIII du Chapitre 11, il existe une matrice P non singulière telle que $X_W = PX_Z$ et $Y_W = PY_Z$ ou en posant $P^{-1} = Q$:

$$X_Z = QX_W \qquad \text{et} \qquad Y_Z = QY_W$$

alors

$$Y_W = Q^{-1}Y_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = BX_W$$

où

$$B = Q^{-1}AQ \tag{12.2}$$

Deux matrices A et B sont dites semblables s'il existe une matrice Q non singulière telle que $B = Q^{-1}AQ$. Nous venons de démontrer le

Théorème VIII. Si $Y_Z = AX_Z$ est une application linéaire de $V_n(F)$ relativement à une base donnée (base Z) et si $Y_W = BX_W$ est la même application linéaire relative à une autre base (base W), alors, A et B sont semblables.

Remarque : Puisque $Q = P^{-1}$, on aurait pu écrire (12.2) sous la forme $B = PAP^{-1}$. Une étude des matrices semblables sera faite ultérieurement. Alors, nous conviendrons d'écrire $B = R^{-1}AR$ plutôt que $B = SAS^{-1}$ mais cela par simple convention.

Exemple 2. Soit $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} X$ une application linéaire relativement à la base E et soit $W_1 = {}^t[1,2,1]$, $W_2 = {}^t[1,-1,2]$, $W_3 = {}^t[1,-1,-1]$ une nouvelle base. (*a*) Le vecteur $X = {}^t[3,0,2]$ étant donné, trouver les coordonnées de l'image de X par rapport à la base W. (*b*) Trouver l'application linéaire $Y_W = BX_W$ correspondant à $Y = AX$. (*c*) Utiliser le résultat de (*b*) pour déterminer l'image Y_W de $X_W = {}^t[1,3,3]$.

Ecrire $W = [W_1, W_2, W_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$; puis $W^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

(*a*) Relativement à la base W, le vecteur $X = {}^t[3,0,2]$ a pour coordonnées $X_W = W^{-1}X = {}^t[1,1,1]$. L'image de X est $Y = AX = {}^t[9,5,7]$ qui, dans la base W, devient $Y_W = W^{-1}Y = {}^t[14/3, 20/9, 19/9]$.

(*b*) $Y_W = W^{-1}Y = W^{-1}AX = (W^{-1}AW)X_W = BX_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix} X_W$

(*c*) $Y_W = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 36 & 21 & -15 \\ 21 & 10 & -11 \\ -3 & 23 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = {}^t[6,2,7]$.

Voir problème 5.

PROBLEMES RESOLUS

1. (*a*) Déterminer l'application linéaire $Y = AX$ qui transforme E_1 en $Y_1 = {}^t[1,2,3]$, E_2 en ${}^t[3,1,2]$, et E_3 en $Y_3 = {}^t[2,1,3]$.
   (*b*) Déterminer les images de $X_1 = {}^t[1,1,1]$, $X_2 = {}^t[3,-1,4]$, et de $X_3 = {}^t[4,0,5]$.
   (*c*) Montrer que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants et qu'il en est de même de leurs images.
   (*d*) Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont linéairement dépendants et qu'il en est de même de leurs images.

   (*a*) D'après le théorème I, $A = [Y_1, Y_2, Y_3]$; l'équation associée à l'application linéaire est $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$.

   (*b*) L'image de $X_1 = {}^t[1,1,1]$ est $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^t[6,4,8]$. L'image de X_2 est $Y_2 = {}^t[8,9,19]$ et l'image de X_3 est $Y_3 = {}^t[14,13,27]$.

   (*c*) $[X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ et $[Y_1, Y_2] = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 9 \\ 8 & 19 \end{bmatrix}$. sont de rang 2. Ainsi, X_1 et X_2 sont linéairement indépendants et il en est de même de leurs images.

   (*d*) Nous devons comparer les rangs de $[X_1, X_2, X_3]$ et $[Y_1, Y_2, Y_3]$. Cependant, $X_3 = X_1 + X_2$ et $Y_3 = Y_1 + Y_2$ de sorte que les deux ensembles de vecteurs sont linéairement dépendants.

2. Démontrer qu'une application linéaire (12.1) est non singulière si et seulement si A est non singulière.

Supposons A non singulière et supposons que les transformés de $X_1 \neq X_2$ soient $Y = AX_1 = AX_2$. Alors, $A(X_1 - X_2) = 0$ et le système d'équations homogènes $AX = 0$ possède la solution non triviale $X = X_1 - X_2$. Ceci est possible si et seulement si det $A = 0$, ce qui contredit l'hypothèse A non singulière.

3. Démontrer qu'une application linéaire non singulière transforme des vecteurs linéairement indépendants en vecteurs linéairement indépendants.

Supposons le contraire, c'est-à-dire supposons que les images $Y_i = AX_i$, $(i = 1,2,\ldots,p)$ des vecteurs linéairementsindépendants $X_1, X_2, \ldots, X_p$ soient linéairement dépendants. Il existe donc des scalaires $s_1, s_2, \ldots, s_p$, non tous nuls tels que

$$\sum_{i=1}^{p} s_i Y_i = s_1 Y_1 + s_2 Y_2 + \cdots + s_p Y_p = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{p} s_i(AX_i) = A(s_1 X_1 + s_2 X_2 + \cdots + s_p X_p) = 0$$

Puisque A est non singulière, $s_1X_1 + s_2X_2 + \cdots + s_p X_p = 0$. Mais ceci est contraire à l'hypothèse des X_i linéairement indépendants. Les Y_i sont donc linéairement indépendants.

4. Une certaine application linéaire $Y = AX$ transforme $X_1 = {}^t[1,0,1]$ en ${}^t[2,3,-1]$, $X_2 = {}^t[1,-1,1]$ en ${}^t[3,0,-2]$, et $X_3 = {}^t[1,2,-1]$ en ${}^t[-2,7,-1]$. Déterminer les images de E_1, E_2, E_3 et écrire les équations associées à l'application.

Soit $aX_1 + bX_2 + cX_3 = E_1$; alors $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$ et $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$. Ainsi, $E_1 = -\frac{1}{2}X_1 + X_2 + \frac{1}{2}X_3$

et son image est $Y_1 = -\frac{1}{2}{}^t[2,3,-1] + {}^t[3,0,-2] + \frac{1}{2}{}^t[-2,7,-1] = {}^t[1,2,-2]$. De même, l'image de E_2 est $Y_2 = {}^t[-1,3,1]$ et l'image de E_3 est $Y_3 = {}^t[1,1,1]$. L'équation associée à l'application est

$$Y = [Y_1, Y_2, Y_3]X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

5. Si $Y_Z = AX_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} X_Z$ est une application linéaire relativement à la base Z du problème 12 Chapitre 11, trouver la même application $Y_W = BX_W$ relativement à la base W de ce problème.

D'après le problème 12 du Chapitre 11 : $X_W = PX_Z = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} X_Z$. Puis

$$X_Z = P^{-1}X_W = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X_W = QX_W$$

et

$$Y_W = PY_Z = Q^{-1}AX_Z = Q^{-1}AQX_W = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 14 & -6 \\ 7 & 14 & 9 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} X_W$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. Dans le problème 1, montrer que : (*a*) l'application n'est pas singulière, (*b*) que $X = A^{-1}Y$ transforme les vecteurs colonnes de A en vecteurs élémentaires.

7. En utilisant l'application du problème 1, déterminer : (*a*) l'image de $X = {}^t[1,1,2]$, (*b*) le vecteur X dont l'image est ${}^t[-2,-5,-5]$. *Réponse* : (*a*) ${}^t[8,5,11]$, (*b*) ${}^t[-3,-1,2]$

8. Etudier les applications $Y = IX$ et $Y = kIX$.

9. Déterminer l'application linéaire qui transforme E_1 en ${}^t[1,2,3]$, E_2 en ${}^t[3,1,2]$, et E_3 en ${}^t[2,-1,-1]$. Montrer que cette application est singulière et que les vecteurs linéairement indépendants ${}^t[1,1,1]$ et ${}^t[2,0,2]$ ont même vecteur image par cette application.

10. On suppose que **(12.1)** n'est pas singulière. Montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont linéairement dépendants, il en est de même de leurs images $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

11. Utiliser le théorème III pour montrer que la dimension d'un espace vectoriel est inchangée par une application non singulière. *Indication* : Considérer les images d'une base de $V_n^k(F)$.

12. L'application linéaire $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} X$ étant donnée, montrer que : (*a*) elle est singulière. (*b*) les images des vecteurs linéairement indépendants $X_1 = {}^t[1,1,1]$, $X_2 = {}^t[2,1,2]$, et $X_3 = {}^t[1,2,3]$ sont linéairement dépendantes. (*c*) l'image de $V_3(R)$ est un $V_3^2(R)$.

13. L'application linéaire $Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$ étant donnée, montrer que (*a*) elle est singulière, (*b*) l'image de tout vecteur de $V_3^2(R)$ engendré par ${}^t[1,1,1]$ et ${}^t[3,2,0]$ appartient au $V_3^1(R)$ engendré par ${}^t[5,7,5]$.

14. Démontrer le théorème VII.
Indication : Soient X_i et Y_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ des ensembles de vecteurs donnés. $Z = AX$ transforme l'ensemble X_i en l'ensemble E_i, $Y = BZ$ transforme les E_i en Y_i.

15. Démontrer que des matrices semblables ont des déterminants égaux.

16. Soit $Y = AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ une application linéaire par rapport à la base E et soit $Z_1 = {}^t[1,1,0]$, $Z_2 = {}^t[1,0,1]$, $Z_3 = {}^t[1,1,1]$ une nouvelle base. Dans la base E, $X = {}^t[1,2,3]$, montrer que :
(*a*) $Y = {}^t[14,10,6]$ est l'image de X par cette application.
(*b*) Par rapport à la nouvelle base, X et Y ont pour coordonnées respectives $X_Z = {}^t[-2,-1,4]$ et $Y_Z = {}^t[8,4,2]$.
(*c*) $X_Z = PX$ et $Y_Z = PY$ où $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [Z_1, Z_2, Z_3]^{-1}$
(*d*) $Y_Z = Q^{-1}AQX_Z$, où $Q = P^{-1}$.

17. L'application linéaire $Y_W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_W$ étant donnée, par rapport à la base W : $W_1 = {}^t[0,-1,2]$, $W_2 = {}^t[4,1,0]$,

$W_3 = {}^t[-2,0,-4]$ trouver la représentation de Y dans la base Z : $Z_1 = {}^t[1,-1,1]$, $Z_2 = {}^t[1,0,-1]$, $Z_3 = {}^t[1,2,1]$.

Réponse : $Y_Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} X_Z$

18. Si dans l'application linéaire $Y = AX$, A est singulière, alors Ker A est l'espace vectoriel dont tous les vecteurs sont les vecteurs transformés en le vecteur nul. Déterminer le noyau de l'application :

(a) du Problème 12, (b) du Problème 13, (c) de $\quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} X$.

Réponses : (a) $V_3^1(R)$ engendré par ${}^t[1,-1,1]$
(b) $V_3^1(R)$ engendré par ${}^t[2,1,-1]$
(c) $V_3^2(R)$ engendré par ${}^t[2,-1,0]$ et ${}^t[3,0,-1]$

19. Si $Y = AX$ transforme tout vecteur d'un espace vectoriel V_n^h en un vecteur du même espace, on dit que V_n^h est un espace invariant par l'application. Montrer que dans l'espace $V_3(R)$, pour l'application linéaire

(a) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$, V_3^1 engendré par ${}^t[1,-1,0]$, V_3^1 engendré par ${}^t[2,-1,-2]$, V_3^1 engendré par ${}^t[1,-1,-2]$

sont des espaces vectoriels invariants.

(b) $Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X$, V_3^1 engendré par ${}^t[1,1,1]$, V_3^2 engendré par ${}^t[1,0,-1]$ et ${}^t[2,-1,0]$ sont des espaces invariants. (On remarquera que tout vecteur du V_3^2 se transforme en lui-même).

(c) $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix} X$, l'espace V_4^1 engendré par ${}^t[1,1,1,1]$ est un espace vectoriel invariant.

20. Considérons l'application linéaire $Y = PX$: $\quad y_i = x_{j_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dans laquelle $j_1, j_2, \ldots, j_n$ est une permutation de $1, 2, \ldots, n$.

(a) Déterminer la matrice P associée à la permutation.

(b) Montrer que l'on peut trouver $n\,!$ matrices d'ordre n de ce type.

(c) Si P_1 et P_2 sont des matrices du type P, il en est de même de $P_3 = P_1P_2$ et de $P_4 = P_2P_1$.

(d) Si P est une matrice associée à la permutation, il en est de même de ${}^tP$ et on a $P \,.\, {}^tP = I$.

(e) Montrer que toute matrice du type P peut s'exprimer comme produit d'un nombre fini de matrices opérant sur les colonnes élémentaires : $K_{12}, K_{23}, \ldots, K_{n-1,n}$

(f) Ecrire $P = [E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_n}]$ où $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est une permutation de $1, 2, \ldots, n$ et où E_{ij} sont des vecteurs élémentaires à n composantes. Trouver une loi (autre que $P^{-1} = {}^tP$) pour écrire P^{-1}. Par exemple, lorsque $n = 4$ et $P = [E_3, E_1, E_4, E_2]$, alors $P^{-1} = [E_2, E_4, E_1, E_3]$. Lorsque $P = [E_4, E_2, E_1, E_3]$, alors $P^{-1} = [E_3, E_2, E_4, E_1]$.

CHAPITRE 13

Vecteurs sur le corps des réels

PRODUIT SCALAIRE. Dans ce chapitre, tous les vecteurs considérés sont réels et $V_n(R)$ désigne l'ensemble de tous les vecteurs réels à n composantes. Si $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ et $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ sont deux vecteurs de $V_n(R)$, leur produit scalaire est défini par le scalaire

$$(13.1) \qquad X \cdot Y \;=\; x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Exemple 1. Soient les vecteurs $X_1 = {}^t[1,1,1]$, $X_2 = {}^t[2,1,2]$, $X_3 = {}^t[1,-2,1]$:

(a) $X_1 \cdot X_2 = 1\cdot2 + 1\cdot1 + 1\cdot2 = 5$

(b) $X_1 \cdot X_3 = 1\cdot1 + 1(-2) + 1\cdot1 = 0$

(c) $X_1 \cdot X_1 = 1\cdot1 + 1\cdot1 + 1\cdot1 = 3$

(d) $X_1 \cdot 2X_2 = 1\cdot4 + 1\cdot2 + 1\cdot4 = 10 = 2(X_1 \cdot X_2)$

Remarque : le produit scalaire est souvent défini par

$$(13.1)' \qquad X \cdot Y = {}^tXY = {}^tYX$$

L'utilisation de ${}^tXY$ et ${}^tYX$ est commode. Cependant ${}^tXY$ et ${}^tYX$ sont des matrices à un seul élément tandis que $X \,.\, Y$ est l'élément de ces matrices. Après cette précision, on utilisera (13.1)′ ici. Certains auteurs écrivent $X|Y$ au lieu de $X \,.\, Y$.

Les propriétés suivantes du produit scalaire sont immédiates :

$$(13.2) \qquad \begin{aligned} &(a)\ X_1 \cdot X_2 = X_2 \cdot X_1, \qquad X_1 \cdot kX_2 = k(X_1 \cdot X_2) \\ &(b)\ X_1 \cdot (X_2 + X_3) = (X_2 + X_3) \cdot X_1 = X_1 \cdot X_2 + X_1 \cdot X_3 \\ &(c)\ (X_1 + X_2) \cdot (X_3 + X_4) = X_1 \cdot X_3 + X_1 \cdot X_4 + X_2 \cdot X_3 + X_2 \cdot X_4 \end{aligned}$$

VECTEURS ORTHOGONAUX. Deux vecteurs X et Y de $V_n(R)$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Les vecteurs X_1 et X_3 de l'exemple 1 sont orthogonaux.

LE MODULE D'UN VECTEUR X de $V_n(R)$, noté $\|X\|$, est défini comme la racine carrée du produit scalaire de X par X ; ainsi,

$$(13.3) \qquad \|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Exemple 2. D'après l'exemple 1 (c) $\|X_1\| = \sqrt{3}$.

Voir problèmes 1.2.

En utilisant (13.1) et (13.3), on peut démontrer

(13.4) $$X \cdot Y \;=\; \tfrac{1}{2}\{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2\}$$

Un vecteur X est unitaire si le module de ce vecteur est $\|X\| = 1$. Les vecteurs élémentaires E_i sont des exemples de vecteurs unitaires.

INEGALITE DE SCHWARZ. Si X et Y sont des vecteurs de $V_n(R)$, on a

(13.5) $$|X \cdot Y| \;\leq\; \|X\| \cdot \|Y\|$$

c'est-à-dire la valeur absolue du produit scalaire de 2 vecteurs réels est au plus égale au produit de leurs modules.

Voir problème 3.

INEGALITE TRIANGULAIRE. Si X et Y sont des vecteurs de $V_n(R)$, on a

(13.6) $$\|X+Y\| \;\leq\; \|X\| + \|Y\|$$

VECTEURS ET ESPACES ORTHOGONAUX. Si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont $m \leqslant n$ vecteurs à n composantes non nuls, deux à deux orthogonaux et si $c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = 0$, pour $i = 1, 2, \ldots, m$, $(c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots c_mX_m) \cdot X_i = 0$. Puisque ceci exige $c_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, on a :

Théorème I. Tout ensemble de $m \leqslant n$ vecteurs à n composantes non nuls deux à deux orthogonaux est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui engendre un espace vectoriel $V_n^m(R)$.

On dit qu'un vecteur Y est orthogonal à un espace vectoriel $V_n^m(R)$ s'il est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

Théorème II. Si un vecteur Y est orthogonal à chacun des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ à n composantes, il est orthogonal à l'espace engendré par ces vecteurs.

Voir problème 4.

Théorème III. Si $V_n^h(R)$ est un sous-espace de $V_n^k(R)$, $k > h$, il existe au moins un vecteur X de $V_n^k(R)$ qui soit orthogonal à $V_n^h(R)$.

Voir problème 5.

Puisque des vecteurs deux à deux orthogonaux sont linéairement indépendants, un espace vectoriel $V_n^m(R)$, $m > 0$, ne peut contenir plus de m vecteurs deux à deux orthogonaux. Supposons que nous ayons trouvé $r < m$ vecteurs deux à deux orthogonaux d'un $V_n^m(R)$. Ils engendrent un $V_n^r(R)$, sous espace de $V_n^m(R)$ et, d'après le théorème III, il existe au moins un vecteur de $V_n^m(R)$ qui soit orthogonal à $V_n^r(R)$. Nous avons maintenant $r + 1$ vecteurs de $V_n^m(R)$ deux à deux orthogonaux et, en renouvelant ce procédé, nous avons :

Théorème IV. Tout espace vectoriel $V_n^m(R)$, $m > 0$, contient au plus m vecteurs deux à deux orthogonaux.

On dit que deux espaces vectoriels sont orthogonaux si tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre. Par exemple, l'espace engendré par $X_1 = {}^t[1, 0, 0, 1]$ et $X_2 = {}^t[0, 1, 1, 0]$ est orthogonal à l'espace engendré par $X_3 = {}^t[1, 0, 0, -1]$ et $X_4 = {}^t[0, 1, -1, 0]$ puisque $(aX_1 + bX_2) \cdot (cX_3 + dX_4) = 0$ pour tout a, b, c, d.

Théorème V. L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tout vecteur d'un espace $V_n^k(R)$ donné est un espace vectoriel $V_n^{n-k}(R)$

Voir problème 6.

A tout vecteur $X \neq 0$, on peut associer un vecteur unique U obtenu en divisant les composantes de X par $\|X\|$. On dit que l'on a normalisé le vecteur. Ainsi, pour normaliser le vecteur $X = {}^t[2,4,4]$, on divise chacune de ses composantes par $\|X\| = \sqrt{4+16+16} = 6$ et on obtient le vecteur unitaire ${}^t[1/3, 2/3, 2/3]$.

Une base de $V_n^m(R)$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux s'appelle une base orthogonale de l'espace. Si ces vecteurs orthogonaux sont de plus unitaires, cette base est orthonormale. Les vecteurs élémentaires forment une base orthonormale de $V_n(R)$.

Voir problème 7.

PROCEDE D'ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_m$ est une base de $V_n^m(R)$. On définit

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_1 \\
Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1
\end{aligned}$$

alors, les vecteurs unitaires $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sont deux à deux orthogonaux et forment une base orthonormale de $V_n^m(R)$.

Exemple 3. Construction, en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, d'une base orthogonale de $V_3(R)$, étant donnée la base $X_1 = {}^t[1,1,1]$, $X_2 = {}^t[1,-2,1]$, $X_3 = {}^t[1,2,3]$.

(i) $Y_1 = X_1 = {}^t[1,1,1]$

(ii) $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = {}^t[1,-2,1] - \dfrac{0}{3} Y_1 = {}^t[1,-2,1]$

(iii) $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = {}^t[1,2,3] - \dfrac{0}{6} Y_2 - \dfrac{6}{3}\,{}^t[1,1,1] = {}^t[-1,0,1]$

Les vecteurs $G_1 = \dfrac{Y_1}{\|Y_1\|} = {}^t[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$,

$G_2 = \dfrac{Y_2}{\|Y_2\|} = {}^t[1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]$ et $G_3 = \dfrac{Y_3}{\|Y_3\|} = {}^t[-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}]$

forment une base orthonormale de $V_3(R)$. Tout vecteur G_i est vecteur unitaire et tout produit $G_i \cdot G_j = 0$. Remarquer que ici $Y_2 = X_2$ car X_1 et X_2 sont des vecteurs orthogonaux.

Voir Problèmes 8.9.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une base de $V_n^m(R)$. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_S, (1 \leqslant s < m)$. sont deux à deux orthogonaux. Alors, par le procédé de Gram-Schmidt, on peut obtenir une base orthogonale $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ de l'espace, et il est facile de montrer que $Y_i = X_i$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Ainsi,

Théorème VI. Si $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leqslant s < m)$, sont des vecteurs unitaires de $V_n^m(R)$ deux à deux orthogonaux, il existe des vecteurs unitaires $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$ de l'espace, tels que l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_m$ soit une base orthonormale.

LA MATRICE DE GRAM. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_p$ un ensemble de vecteurs réels à n composantes. Définissons la matrice de Gram par

$$(13.8) \qquad G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \ldots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \ldots & X_2 \cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \ldots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tX_1 X_1 & {}^tX_1 X_2 & \ldots & {}^tX_1 X_p \\ {}^tX_2 X_1 & {}^tX_2 X_2 & \ldots & {}^tX_2 X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}^tX_p X_1 & {}^tX_p X_2 & \ldots & {}^tX_p X_p \end{bmatrix}$$

Les vecteurs sont deux à deux orthogonaux si et seulement si G est diagonale.

Dans le problème 14 du chapitre 17, on démontrera :

Théorème VII. Pour un ensemble de vecteurs réels à n composantes, $X_1, X_2, \ldots, X_p$, $|G| \geqslant 0$. L'inégalité est vraie si et seulement si les vecteurs sont linéairement dépendants.

MATRICES ORTHOGONALES. Une matrice carrée A est orthogonale si

$$(13.9) \qquad {}^tAA = {}^tAA = I$$

c'est-à-dire si

$$(13.9') \qquad {}^tA = A^{-1}$$

D'après (13.9), il est clair que les vecteurs colonnes (resp. lignes) d'une matrice orthogonale A sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

Exemple 4. D'après l'exemple 3, $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ est orthogonale.

Il s'ensuit immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème VIII. Si une matrice réelle carrée A d'ordre n est orthogonale, ses vecteurs colonnes (resp. lignes) forment une base orthonormale de $V_n(R)$ et réciproquement.

Théorème IX. Si A est une matrice orthogonale, son inverse et sa transposée le sont aussi.

Théorème X. Le produit de deux ou de plusieurs matrices orthogonales est une matrice orthogonale.

Théorème XI. Le déterminant d'une matrice orthogonale est égal à ± 1.

APPLICATIONS ORTHOGONALES. Soit

$$(13.10) \qquad Y = AX$$

une application linéaire de $V_n(R)$ et soient Y_1 et Y_2 les images des vecteurs à n composantes X_1 et X_2. D'après (13.4), on a

$$X_1 \cdot X_2 = \tfrac{1}{2}\{\|X_1+X_2\|^2 - \|X_1\|^2 - \|X_2\|^2\}$$

et

$$Y_1 \cdot Y_2 = \tfrac{1}{2}\{\|Y_1+Y_2\|^2 - \|Y_1\|^2 - \|Y_2\|^2\}$$

En comparant les membres de droite et de gauche, on voit que si (13.10) conserve les modules, il conserve aussi le produit scalaire et réciproquement. Ainsi,

Théorème XII. Une application linéaire conserve les modules si et seulement si les produits scalaires sont conservés.

Une application linéaire $Y = AX$ est orthogonale si sa matrice A est orthogonale. Dans le problème 10, nous démontrerons :

Théorème XIII. Une application linéaire conserve les modules si et seulement si sa matrice est orthogonale.

Exemple 5. L'application linéaire $Y = AX = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} X$ est orthogonale. L'image de $X = {}^t[a, b, c]$ est

$$Y = {}^t\left[\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} - \frac{c}{\sqrt{2}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{2b}{\sqrt{6}},\ \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right]$$

et les deux vecteurs ont pour module $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Théorème XIV. Si (13.10) est une transformation de coordonnées d'une base E à une autre base Z, la base Z est orthonormale si et seulement si A est orthogonale.

PROBLEMES RESOLUS

1. Les vecteurs $X_1 = {}^t[1, 2, 3]$ et $X_2 = {}^t[2, -3, 4]$ étant donnés, trouver :
(*a*) leur produit scalaire, (*b*) leur module.

(*a*) $X_1 \cdot X_2 = {}^tX_1 X_2 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-3) + 3(4) = 8$

(*b*) $\|X_1\|^2 = X_1 \cdot X_1 = {}^tX_1 X_1 = [1,2,3]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$ et $\|X_1\| = \sqrt{14}$

$\|X_2\|^2 = 2(2) + (-3)(-3) + 4(4) = 29$ et $\|X_2\| = \sqrt{29}$

2. (*a*) Montrer que $X = {}^t[1/3, -2/3, -2/3]$ et $Y = {}^t[2/3, -1/3, 2/3]$ sont orthogonaux.
(*b*) Trouver un vecteur Z orthogonal à la fois à X et à Y.

(a) $X \cdot Y = {}^tX\,Y = [1/3, -2/3, -2/3]\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0$ et les vecteurs sont orthogonaux.

(b) Ecrire $[X, Y, 0] = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$ et calculer les cofacteurs $-2/3, -2/3, 1/3$ des éléments de la colonne des zéros. Alors d'après (**3.11**), $Z = {}^t[-2/3, -2/3, 1/3]$ est orthogonal à la fois à X et à Y.

3. Démontrer l'inégalité de Schwarz : Si X et Y sont des vecteurs de $V_n(R)$, alors $|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$.

Il est clair que le théorème est vrai si X ou si Y est le vecteur nul. Supposons donc que X et Y sont non nuls. Si a est un nombre réel quelconque,

$$\begin{aligned} \|aX+Y\|^2 &= (aX+Y)\cdot(aX+Y) \\ &= [ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n]\cdot{}^t[ax_1+y_1, ax_2+y_2, \ldots, ax_n+y_n] \\ &= (a^2x_1^2 + 2ax_1y_1 + y_1^2) + (a^2x_2^2 + 2ax_2y_2 + y_2^2) + \cdots + (a^2x_n^2 + 2ax_ny_n + y_n^2) \\ &= a^2\|X\|^2 + 2aX\cdot Y + \|Y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Or, ce polynôme en a est supérieur ou égal à zéro pour toutes valeurs réelles de a si et seulement si son discriminant est $\leqslant 0$. Ainsi,

$$4(X\cdot Y)^2 - 4\|X\|^2\cdot\|Y\|^2 \leq 0$$

et

$$|X\cdot Y| \leq \|X\|\cdot\|Y\|$$

4. Démontrer que si un vecteur Y est orthogonal à chacun des vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_m$ à n composantes, il est orthogonal à l'espace engendré par ces vecteurs.

Tout vecteur de l'espace engendré par les X peut s'écrire $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m$. Alors

$$(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_mX_m)\cdot Y = a_1X_1\cdot Y + a_2X_2\cdot Y + \cdots + a_mX_m\cdot Y = 0$$

car $X_i \cdot Y = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ainsi, Y est orthogonal à tout vecteur de l'espace, donc, par définition, à l'espace. En particulier, si Y est orthogonal à tout vecteur d'une base d'un espace vectoriel, il est orthogonal à cet espace.

5. Démontrer que si $V_n^h(R)$ est un sous-espace de $V_n^k(R)$, $k > h$, il existe au moins un vecteur X de $V_n^k(R)$ qui soit orthogonal à $V_n^h(R)$

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_h$ une base de $V_n^h(R)$ et soit X_{h+1} un vecteur de $V_n^k(R)$ n'appartenant pas à $V_n^h(R)$. Considérons le vecteur

(i) $$X = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_hX_h + a_{h+1}X_{h+1}$$

La condition pour que X soit orthogonal à chaque vecteur $X_1, X_2, \ldots, X_h$ s'écrit sous la forme de h équations linéaires homogènes

$$\begin{aligned} a_1X_1\cdot X_1 + a_2X_2\cdot X_1 + \cdots + a_hX_h\cdot X_1 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_1 &= 0 \\ a_1X_1\cdot X_2 + a_2X_2\cdot X_2 + \cdots + a_hX_h\cdot X_2 + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_2 &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1X_1\cdot X_h + a_2X_2\cdot X_h + \cdots + a_hX_h\cdot X_h + a_{h+1}X_{h+1}\cdot X_h &= 0 \end{aligned}$$

à $h+1$ inconnues $a_1, a_2, \ldots, a_{h+1}$. D'après le théorème 4 du chapitre 10, on a une solution non triviale. Lorsque ces valeurs sont substituées dans (i), on a un vecteur $X \neq 0$ (pourquoi ?) orthogonal à la base des vecteurs de $V_n^h(R)$ et par suite à cet espace.

6. Démontrer que l'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à tout vecteur d'un espace donné $V_n^k(R)$ est un espace vectoriel unique $V_n^{n-k}(R)$.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$ une base de $V_n^k(R)$. Les vecteurs X à n composantes orthogonaux à chacun des X_i vérifient le système d'équations homogènes

(i) $$X_1 \cdot X = 0,\; X_2 \cdot X = 0,\; \ldots,\; X_k \cdot X = 0$$

Puisque les X_i sont linéairement indépendants, la matrice des coefficients du système (i) est de rang k. Par suite, il y a $n-k$ solutions (vecteurs) linéairement indépendantes qui engendrent $V_n^{n-k}(R)$. (Voir théorème VI, chapitre 10).

L'intersection de $V_n^k(R)$ et de $V_n^{n-k}(R)$ est l'ensemble réduit à $\{0\}$, et la somme est $V_n(R)$, d'où l'on déduit l'unicité.

7. $X = {}^t[1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]$ étant donné, trouver une base orthonormale de $V_3(R)$.

On remarque que X est un vecteur unitaire. On choisit un autre vecteur unitaire $Y = {}^t[1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}]$ de sorte que $X \cdot Y = 0$. Alors, comme dans le problème 2a), on obtient $Z = {}^t[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ pour compléter l'ensemble de vecteurs.

8. Démontrer les équations de Gram-Schmidt (**13.7**).

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une base donnée de $V_n^m(R)$. On désigne par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ l'ensemble des vecteurs deux à deux orthogonaux à déterminer.

(a) prendre $Y_1 = X_1$.

(b) puis, prendre $Y_2 = X_2 + aY_1$. Puisque Y_1 et Y_2 sont orthogonaux, on a

$$Y_1 \cdot Y_2 = Y_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot aY_1 = Y_1 \cdot X_2 + aY_1 \cdot Y_1 = 0$$

et $a = -\dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1}$. Ainsi, $Y_2 = X_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$.

(c) Prendre $Y_3 = X_3 + aY_2 + bY_1$. Puisque Y_1, Y_2, Y_3 sont deux à deux orthogonaux

$$Y_1 \cdot Y_3 = Y_1 \cdot X_3 + aY_1 \cdot Y_2 + bY_1 \cdot Y_1 = Y_1 \cdot X_3 + bY_1 \cdot Y_1 = 0$$

et

$$Y_2 \cdot Y_3 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 + bY_2 \cdot Y_1 = Y_2 \cdot X_3 + aY_2 \cdot Y_2 = 0$$

Alors, $a = -\dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2}$, $b = -\dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1}$, et $Y_3 = X_3 - \dfrac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \dfrac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1$.

(d) Poursuivre cette méthode jusqu'à l'obtention de Y_m.

9. Etant donnée la base $X_1 = {}^t[2, 1, 3]$, $X_2 = {}^t[1, 2, 3]$ et $X_3 = {}^t[1, 1, 1]$, construire une base orthonormale de V_3.

Prendre $Y_1 = X_1 = {}^t[2, 1, 3]$. Alors

$$Y_2 = X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 = {}^t[1,2,3] - \frac{13}{14}\,{}^t[2,1,3] = {}^t[-6/7, 15/14, 3/14]$$

$$Y_3 = X_3 - \frac{Y_2\cdot X_3}{Y_2\cdot Y_2}Y_2 - \frac{Y_1\cdot X_3}{Y_1\cdot Y_1}Y_1$$

$$= {}^t[1,1,1] - \frac{2}{9}\,{}^t\left[-\frac{6}{7},\frac{15}{14},\frac{3}{14}\right] - \frac{3}{7}\,{}^t[2,1,3] = {}^t\left[\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right]$$

En normalisant les Y, on a ${}^t[2/\sqrt{14}, 1/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}]$, ${}^t[-4/\sqrt{42}, 5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}]$, ${}^t[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ qui est la base orthonormale cherchée.

10. Démontrer qu'une application linéaire conserve les modules si et seulement si sa matrice est orthogonale.

Soient Y_1 et Y_2 les images de X_1 et de X_2 par l'application linéaire $Y = AX$.

Supposons A orthogonale c'est-à-dire ${}^tAA = I$. Alors,

(i) $$Y_1\cdot Y_2 = {}^tY_1Y_2 = ({}^tX_1{}^tA)(AX_2) = {}^tX_1X_2 = X_1\cdot X_2$$

et d'après le théorème XII, les modules sont conservés.

Réciproquement, supposons les modules (donc aussi les produits scalaires) conservés. Alors,

$$Y_1\cdot Y_2 = {}^tX_1({}^tAA)X_2 = {}^tX_1X_2, \qquad {}^tAA = I$$

et A est orthogonale.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

11. Etant donnés les vecteurs $X_1 = {}^t[1,2,1]$, $X_2 = {}^t[2,1,2]$, $X_3 = {}^t[2,1,-4]$, trouver
(*a*) leur produit scalaire deux par deux,
(*b*) le module de chacun d'entre eux,
(*c*) un vecteur orthogonal aux vecteurs X_1, X_2; X_1, X_3.
Réponse : (*a*) 6, 0, −3 (*b*) $\sqrt{6}$, 3, $\sqrt{21}$ (*c*) ${}^t[1,0,-1]$, ${}^t[3,-2,1]$

12. En utilisant des vecteurs arbitraires de $V_3(R)$, vérifier (**13.2**).

13. Démontrer (**13.4**).

14. Soit $X = {}^t[1,2,3,4]$ et $Y = {}^t[2,1,-1,1]$ une base d'un $V_4^2(R)$ et $Z = {}^t[4,2,3,1]$ dans $V_4^3(R)$, $V_4^3(R)$ contenant X et Y.
(*a*) Montrer que Z n'appartient pas à $V_4^2(R)$.
(*b*) Ecrire $W = aX + bY + cZ$ et trouver un vecteur W de $V_4^3(R)$ orthogonal à X et à Y.

15. (*a*) Démontrer qu'un vecteur de $V_n(R)$ est orthogonal à lui-même si et seulement s'il est le vecteur nul.
(*b*) Démontrer que si X_1, X_2, X_3 est un ensemble de vecteurs non nuls à n composantes linéairement dépendants et si $X_1\cdot X_2 = X_1\cdot X_3 = 0$, alors X_2 et X_3 sont linéairement dépendants.

16. Démontrer qu'un vecteur X est orthogonal à tout vecteur d'un $V_n^m(R)$ si et seulement si il est orthogonal à tout vecteur de base de cet espace.

17. Démontrer que si deux espaces $V_n^h(R)$ et $V_n^k(R)$ sont orthogonaux, leur intersection est $V_n^o(R)$.

18. Démontrer l'inégalité triangulaire.
Indication : en utilisant l'inégalité de Schwarz, démontrer $\|X+Y\|^2 \leq (\|X\|+\|Y\|)^2$.

19. Démontrer que $\|X+Y\| = \|X\|+\|Y\|$ a lieu si et seulement si X et Y sont linéairement dépendants.

20. Normaliser les vecteurs du problème 11.
Réponse : ${}^t[1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6}]$, ${}^t[2/3,\ 1/3,\ 2/3]$, ${}^t[2/\sqrt{21},\ 1/\sqrt{21},\ -4/\sqrt{21}]$

21. Montrer que les vecteurs X, Y, Z du problème 2 forment une base orthonormale de $V_3(R)$.

22. (*a*) Montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_m$ sont linéairement indépendants, il en est de même des vecteurs normalisés correspondants.
(*b*) Même question si les vecteurs de (*a*) sont des vecteurs $\neq 0$ deux à deux orthogonaux.

23. Démontrer que : (*a*) Si A est orthogonale et si $\det A = 1$, tout élément de A est égal à son cofacteur dans $\det A$.
(*b*) Si A est orthogonale et si $\det A = -1$, tout élément de A est égal à son cofacteur changé de signe dans $\det A$.

24. Démontrer les théorèmes 8-9-10-11.

25. Démontrer que si A et B commutent et si C est orthogonale, alors ${}^tCAC$ et ${}^tCBC$ commutent.

26. A étant une matrice carrée, montrer que $A\,{}^tA$ (ou ${}^tAA$) est une matrice diagonale si et seulement si les lignes (resp. colonnes) de A sont orthogonales.

27. Montrer que si X et Y sont des vecteurs à n composants, alors $X\,{}^tY + Y\,{}^tX$ est symétrique.

28. Montrer que si X et Y sont des vecteurs à n composantes, on a $X \cdot (AY) = ({}^tAX) \cdot Y$ où A est une matrice carrée d'ordre n.

29. Montrer que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est une base orthonormale et si $X = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$, alors (*a*) $X \cdot X_i = c_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$; (*b*) $X \cdot X = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$.

30. Trouver une base orthonormale de $V_3(R)$, étant donné : (*a*) $X_1 = {}^t[3/\sqrt{17},\ -2/\sqrt{17},\ 2/\sqrt{17}]$; (*b*) ${}^t[3,0,2]$
Réponse (*a*) X_1, ${}^t[0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}]$, ${}^t[-4/\sqrt{34},\ -3/\sqrt{34},\ 3/\sqrt{34}]$
(*b*) ${}^t[3/\sqrt{13},\ 0,\ 2/\sqrt{13}]$, ${}^t[2/\sqrt{13},\ 0,\ -3/\sqrt{13}]$, $[0,1,0]$

31. Construire des bases orthonormales de $V_3(R)$ par le procédé de Gram Schmidt en utilisant les vecteurs donnés dans l'ordre
(*a*) ${}^t[1,-1,0]$, ${}^t[2,-1,-2]$, ${}^t[1,-1,-2]$
(*b*) ${}^t[1,0,1]$, ${}^t[1,3,1]$, ${}^t[3,2,1]$
(*c*) ${}^t[2,-1,0]$, ${}^t[4,-1,0]$, ${}^t[4,0,-1]$
Réponse : (*a*) ${}^t[\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0]$, ${}^t[\sqrt{2}/6,\ \sqrt{2}/6,\ -2\sqrt{2}/3]$, ${}^t[-2/3,\ -2/3,\ -1/3]$
(*b*) ${}^t[\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}]$, ${}^t[0,1,0]$, ${}^t[\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\sqrt{2}]$
(*c*) ${}^t[2\sqrt{5}/5,\ -\sqrt{5}/5,\ 0]$, ${}^t[\sqrt{5}/5,\ 2\sqrt{5}/5,\ 0]$, ${}^t[0,0,-1]$

32. $X_1 = {}^t[1,1,-1]$ et $X_2 = {}^t[2,1,0]$ étant donnés, trouver une base orthonormale de $V_3(R)$.
Indication : Prendre $Y_1 = X_1$ et obtenir Y_2 par le procédé de Gram-Schmidt, puis Y_3 par la méthode du problème 2 (*b*).
Réponse : ${}^t[\sqrt{3}/3,\ \sqrt{3}/3,\ -\sqrt{3}/3]$, ${}^t[\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\sqrt{2}]$, ${}^t[\sqrt{6}/6,\ -\sqrt{6}/3,\ -\sqrt{6}/6]$

33. Etant donné $X_1 = {}^t[7,-1,-1]$, trouver une base orthonormale de $V_3(R)$.

34. Montrer de deux façons que les vecteurs ${}^t[1,2,3,4]$, ${}^t[1,-1,-2,-3]$, et ${}^t[5,4,5,6]$ sont linéairement dépendants.

35. Montrer que si A est antisymétrique et si $A+I$ n'est pas singulière, alors $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est orthogonale.

36. Utiliser le problème 35 pour obtenir la matrice orthogonale B. On donne

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Réponse : $(a)\ \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix}$, $\quad (b)\ \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & -14 & 2 \\ -10 & -5 & -10 \\ 10 & 2 & -11 \end{bmatrix}$

37. Montrer que si A est une matrice orthogonale et si $B = AP$ où P est non singulière, alors PB^{-1} est orthogonale.

38. Lors d'un changement de coordonnées de la base E à une base orthonormale Z de matrice P, $Y = AX$ devient $Y_1 = P^{-1}APX_1$ ou $Y_1 = BX_1$ (voir Chapitre 12). Montrer que si A est orthogonale, il en est de même de B et réciproquement, et démontrer le théorème XIV.

39. Démontrer que si A est orthogonale et si $I+A$ n'est pas singulière, alors $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est antisymétrique.

40. Soient $X = {}^t[x_1, x_2, x_3]$ et $Y = {}^t[y_1, y_2, y_3]$ deux vecteurs de $V_3(R)$. On définit le produit vectoriel de X et de Y (et on le note $X \times Y$, ou $X \wedge Y$) par $Z = X \times Y = {}^t[z_1, z_2, z_3]$ où $z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$, $z_2 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$, $z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Aprés avoir identifié les z_i comme cofacteurs des éléments de la troisième colonne de $[X_1, Y_1, 0]$, établir que :

(*a*) le produit vectoriel de deux vecteurs linéairement dépendants est le vecteur nul.

(*b*) le produit vectoriel de deux vecteurs linéairement indépendants est orthogonal à chacun des deux vecteurs.

(*c*) $X \times Y = -(Y \times X)$

(*d*) $(kX) \times Y = k(X \times Y) = X \times (kY)$, k étant un scalaire.

41. Si W, X, Y, Z sont quatre vecteurs de $V_3(R)$, établir

(*a*) $X \times (Y+Z) = X \times Y + X \times Z$

(*b*) $X \cdot (Y \times Z) = Y \cdot (Z \times X) = Z \cdot (X \times Y) = |XYZ|$

(*c*) $(W \times X) \cdot (Y \times Z) = \begin{vmatrix} W \cdot Y & W \cdot Z \\ X \cdot Y & X \cdot Z \end{vmatrix}$

(*d*) $(X \times Y) \cdot (X \times Y) = \begin{vmatrix} X \cdot X & X \cdot Y \\ Y \cdot X & Y \cdot Y \end{vmatrix}$

CHAPITRE 14

Vecteurs sur le corps des complexes

NOMBRES COMPLEXES. Si x et y sont des nombres réels et si i est défini par $i^2 = -1$, $z = x + iy$ est appelé nombre complexe, x est la partie réelle et y est la partie imaginaire de $x + iy$.

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

Un nombre complexe $x + iy = 0$ si et seulement si $x = y = 0$.

Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est $\bar{z} = \overline{x+iy} = x - iy$. La somme et le produit d'un nombre complexe quelconque et de son conjugué est un nombre réel.

La valeur absolue $|z|$ du nombre complexe $z = x + iy$ est $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ces propriétés ont pour conséquence suivante : pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a

(14.1) $$|z| \geq |x| \quad \text{et} \quad |z| \geq |y|$$

VECTEURS. Soit X un vecteur à n composantes sur le corps des complexes C. L'ensemble de ces vecteurs X constitue l'espace vectoriel $V_n(C)$. Puisque R est un sous corps de C, on peut s'attendre à ce que chaque théorème concernant les vecteurs de $V_n(C)$ se réduise à un théorème du Chapitre 13 où l'on n'a considéré que les vecteurs réels.

Si $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots x_n]$ et $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ désignent deux vecteurs de $V_n(C)$, leur produit scalaire est défini par

(14.2) $$X \cdot Y = {}^t\bar{X}Y = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \cdots + \bar{x}_n y_n$$

On vérifie les propriétés suivantes sur les produits scalaires :

(14.3)
- (a) $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$
- (b) $(cX) \cdot Y = \bar{c}(X \cdot Y)$
- (c) $X \cdot (cY) = c(X \cdot Y)$
- (d) $X \cdot (Y+Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$
- (e) $(Y+Z) \cdot X = Y \cdot X + Z \cdot X$
- (f) $X \cdot Y + Y \cdot X = 2R(X \cdot Y)$ où $R(X \cdot Y)$ est la partie réelle de $X \cdot Y$
- (g) $X \cdot Y - Y \cdot X = 2C(X \cdot Y)$ où $C(X \cdot Y)$ est la partie imaginaire de $X \cdot Y$

Voir problème 1.

Le module d'un vecteur X est donné par $\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n}$.

Deux vecteurs X et Y sont orthogonaux si $X \cdot Y = Y \cdot X = 0$.

Les vecteurs de $V_n(C)$ vérifient l'inégalité triangulaire

(14.4) $$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

et l'inégalité de Schwarz (voir Problème 2)

(14.5) $$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

De plus, on a (voir théorèmes I-IV Chapitre 13),

Théorème I. Tout ensemble de m vecteurs non nuls à n composantes, deux à deux orthogonaux sur C est linéairement indépendant et par suite engendre un espace vectoriel $V_n^m(C)$.

Théorème II. Si un vecteur Y est orthogonal à tous les vecteurs d'ordre n, $X_1, X_2, \ldots, X_m$, alors Y est orthogonal à l'espace engendré par ces vecteurs.

Théorème III. Si $V_n^h(C)$ est un sous-espace de $V_n^k(C)$, $k > h$, il existe au moins un vecteur X de $V_n^k(C)$ qui soit orthogonal à $V_n^h(C)$.

Théorème IV. Tout espace vectoriel $V_n^m(C)$, $m > 0$, contient au plus m vecteurs deux à deux orthogonaux.

Une base de $V_n^m(C)$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux est une base orthogonale. Si de plus les vecteurs sont unitaires, cette base est orthonormale.

PROCEDE DE GRAM-SCHMIDT. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_m$ une base de $V_n^m(C)$. On définit

$$(14.6)\qquad \begin{aligned}
Y_1 &= X_1 \\
Y_2 &= X_2 - \frac{Y_1 \cdot X_2}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
Y_3 &= X_3 - \frac{Y_2 \cdot X_3}{Y_2 \cdot Y_2} Y_2 - \frac{Y_1 \cdot X_3}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_m &= X_m - \frac{Y_{m-1} \cdot X_m}{Y_{m-1} \cdot Y_{m-1}} Y_{m-1} - \cdots - \frac{Y_1 \cdot X_m}{Y_1 \cdot Y_1} Y_1
\end{aligned}$$

Les vecteurs unitaires $G_i = \dfrac{Y_i}{\|Y_i\|}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ forment une base orthonormale de $V_n^m(C)$.

Théorème V. Si $X_1, X_2, \ldots, X_s$, $(1 \leq s < m)$, sont des vecteurs unitaires de $V_n^m(C)$ deux à deux orthogonaux, il existe des vecteurs unitaires $X_{s+1}, X_{s+2}, \ldots, X_m$ de l'espace (obtenus par le procédé de Gram-Schmidt) tels que l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_m$ constitue une base orthonormale.

LA MATRICE DE GRAM. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_p$ un ensemble de vecteurs à n composantes à éléments complexes. On définit la matrice de Gram:

$$(14.7)\qquad G = \begin{bmatrix} X_1 \cdot X_1 & X_1 \cdot X_2 & \cdots & X_1 \cdot X_p \\ X_2 \cdot X_1 & X_2 \cdot X_2 & \cdots & X_2 \cdot X_p \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ X_p \cdot X_1 & X_p \cdot X_2 & \cdots & X_p \cdot X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\overline{X}_1 X_1 & {}^t\overline{X}_1 X_2 & \cdots & {}^t\overline{X}_1 X_p \\ {}^t\overline{X}_2 X_1 & {}^t\overline{X}_2 X_2 & \cdots & {}^t\overline{X}_2 X_p \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ {}^t\overline{X}_p X_1 & {}^t\overline{X}_p X_2 & \cdots & {}^t\overline{X}_p X_p \end{bmatrix}$$

Il est clair que les vecteurs sont deux à deux orthogonaux si et seulement si G est diagonale.

En suivant pas à pas le problème 14 du Chapitre 17, on peut montrer:

Théorème VI. Pour un ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_p$ de vecteurs à n composantes à éléments complexes, on a $\det G \geqslant 0$; l'égalité étant réalisée si et seulement si les vecteurs sont linéairement dépendants.

MATRICES UNITAIRES. Une matrice carrée A d'ordre n est unitaire si ${}^t(\bar{A})A = A({}^t\bar{A}) = I$, c'est-à-dire si ${}^t(\bar{A}) = A^{-1}$.

Les vecteurs colonnes (lignes) d'une matrice unitaire sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

En effectuant un parallèle avec les théorèmes sur les matrices orthogonales du Chapitre 13, on a :

Théorème VII. Les vecteurs colonnes (resp. lignes) d'une matrice carrée d'ordre n unitaire forment une base orthonormale de $V_n(C)$ et réciproquement.

Théorème VIII. L'inverse et la transposée d'une matrice unitaire sont unitaires.

Théorème IX. Le produit de deux ou de plusieurs matrices unitaires est unitaire.

Théorème X. Le déterminant d'une matrice unitaire a pour valeur absolue 1.

TRANSFORMATIONS OU APPLICATIONS UNITAIRES. Une transformation unitaire est une application linéaire

(14.8) $$Y = AX$$

où A est unitaire.

Théorème XI. Une application linéaire conserve les modules (et par suite les produits scalaires) si et seulement si sa matrice est unitaire.

Théorème XII. Si $Y = AX$ représente un changement de coordonnées de la base E à une autre base Z, Z est une base orthonormale si et seulement si A est unitaire.

PROBLEMES RESOLUS

1. Etant donnés $X = {}^t[1+i, -i, 1]$ et $Y = {}^t[2+3i, 1-2i, i]$,

(a) Trouver $X \cdot Y$ et $Y \cdot X$
(b) Vérifier que $X \cdot Y = \overline{Y \cdot X}$
(c) Vérifier que $X\cdot Y + Y\cdot X = 2R(X\cdot Y)$
(d) Vérifier que $X\cdot Y - Y\cdot X = 2C(X\cdot Y)$

(a) $$X\cdot Y = {}^t\bar{X}Y = [1-i, i, 1]\begin{bmatrix} 2+3i \\ 1-2i \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(2+3i) + i(1-2i) + 1(i) = 7+3i$$

$$Y\cdot X = {}^t\bar{Y}X = [2-3i, 1+2i, -i]\begin{bmatrix} 1+i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} = 7-3i$$

(b) D'après (a), $\overline{YX}$, conjugué de YX, est égal à $7+3i = X\cdot Y$.

(c) $X\cdot Y + Y\cdot X = (7+3i) + (7-3i) = 14 = 2(7) = 2R(X\cdot Y)$

(d) $X\cdot Y - Y\cdot X = (7+3i) - (7-3i) = 6i = 2(3i) = 2C(X\cdot Y)$

2. Démontrer l'inégalité de Schwarz $|X\cdot Y| \leq \|X\|\cdot\|Y\|$.

Comme dans le cas des vecteurs réels, l'inégalité est vraie si X ou si Y est nul. Lorsque X et Y sont des vecteurs $\neq 0$, et si a est réel, on a

$$\|aX+Y\|^2 = (aX+Y)\cdot(aX+Y) = a^2 X\cdot X + a(X\cdot Y + Y\cdot X) + Y\cdot Y = a^2\|X\|^2 + 2aR(X\cdot Y) + \|Y\|^2 \geq 0.$$

Puisque la forme quadratique en a est positive ou nulle si et seulement si son discriminant est négatif ou nul, on a

$$R(X\cdot Y)^2 - \|X\|^2\|Y\|^2 \leq 0 \qquad \text{et} \qquad R(X\cdot Y) \leq \|X\|\cdot\|Y\|$$

Si $X\cdot Y = 0$, alors $|X\cdot Y| = R(X\cdot Y) \leq \|X\|\cdot\|Y\|$. Si $X\cdot Y \neq 0$, on définit $c = \dfrac{X\cdot Y}{|X\cdot Y|}$.

Alors $R(cX\cdot Y) \leq \|cX\|\cdot\|Y\| = |c|\,\|X\|\cdot\|Y\| = \|X\|\cdot\|Y\|$ tandis que, d'après (**14.3**(b)), $R(cX\cdot Y) = R[\bar{c}(X\cdot Y)] = |X\cdot Y|$. ainsi $|X\cdot Y| \leq \|X\|\cdot\|Y\|$ pour tout X et Y.

3. Démontrer que quelle que soit la matrice carrée A considérée $B = {}^t(\bar{A})A$ est hermitienne.

${}^t(\bar{B}) = {}^t\{\overline{{}^t(\bar{A})A}\} = ({}^t\!A\bar{A}) = {}^t(\bar{A})A = B$ et B est hermitienne.

4. Si $A = B + iC$ est hermitienne, montrer que ${}^t(\bar{A})A$ est réelle si et seulement si B et C anticommutent (c'est-à-dire $BC = -CB$).

Puisque $B+iC$ est hermitienne, ${}^t(\overline{B+iC}) = B+iC$. Ainsi,

$${}^t(\bar{A})A = {}^t(\overline{B+iC})(B+iC) = (B+iC)(B+iC) = B^2 + i(BC+CB) - C^2$$

Cette expression est réelle si et seulement si $BC+CB = 0$ ou $BC = -CB$, donc si et seulement si B et C anticommutent.

5. Montrer que si A est anti-hermitienne, alors $\pm iA$ est hermitienne.

Considérons $B = -iA$; puisque A est anti-hermitienne, ${}^t(\bar{A}) = -A$. Alors,

$${}^t(\bar{B}) = {}^t(\overline{-iA}) = i\,{}^t(\bar{A}) = i(-A) = -iA = B$$

et B est hermitienne. Le lecteur considérera le cas où $B = iA$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. Etant donnés les vecteurs $X_1 = {}^t[i, 2i, 1]$, $X_2 = {}^t[1, 1+i, 0]$, et $X_3 = {}^t[i, 1-i, 2]$,

(a) Trouver $X_1 \cdot X_2$ et $X_2 \cdot X_3$,

(b) Trouver le module de chaque X_i,

(c) Montrer que ${}^t[1-i, -1, 1-i]$ est orthogonal à X_1 et à X_2,

(d) Trouver un vecteur orthogonal à X_1 et à X_3 simultanément

Réponse : (a) $2-3i, -i$ (b) $\sqrt{6}, \sqrt{3}, \sqrt{7}$ (d) $[-1-5i, i, 3-i]$

7. Montrer que les vecteurs ${}^t[1+i, i, 1]$, ${}^t[i, 1-i, 0]$, et ${}^t[1-i, 1, 3i]$ sont linéairement indépendants et deux à deux orthogonaux.

8. Démontrer les relations (**14.3**).

9. Démontrer l'inégalité triangulaire.

10. Démontrer les théorèmes I à IV.

11. Obtenir les relations (**14.6**).

12. Soient
$(a)\ {}^t[0, 1, -1], {}^t[1+i, 1, 1], {}^t[1-i, 1, 1]$
$(b)\ {}^t[1+i, i, 1], {}^t[2, 1-2i, 2+i], {}^t[1-i, 0, -i]$ des vecteurs donnés.

Construire une base orthonormale de $V_3(C)$ en utilisant les relations **(14.6)** et les vecteurs donnés dans l'ordre.

Réponse : $(a)\ {}^t[0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2}], {}^t[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}, \frac{1}{2}], {}^t[-\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)]$

$(b)\ {}^t[\frac{1}{2}(1+i), \frac{1}{2}i, \frac{1}{2}], {}^t[\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1-5i}{4\sqrt{3}}, \frac{3+3i}{4\sqrt{3}}], {}^t[\frac{7-i}{2\sqrt{30}}, \frac{-5}{2\sqrt{30}}, \frac{-6+3i}{2\sqrt{30}}]$

13. Montrer que si A est une matrice sur le corps des complexes, alors $A+\bar{A}$ n'a que des eléments réels et $A-\bar{A}$ n'a que des éléments imaginaires purs.

14. Démontrer le théorème V.

15. Si A est une matrice carrée d'ordre n, montrer que

(a) ${}^tA\,.\,A$ est diagonale si et seulement si les colonnes de A sont des vecteurs deux à deux orthogonaux.

(b) ${}^t\bar{A}\,A = I$ si et seulement si les colonnes de A sont des vecteurs unitaires deux à deux orthogonaux.

16. Montrer que si X et Y sont des vecteurs à n composantes et si A est une matrice carrée d'ordre n, alors $X \cdot AY = {}^t\bar{A}\,X \cdot Y$.

17. Démontrer les théorèmes VII à X

18. Si A est anti-hermitienne et si $I+A$ est non singulière, alors $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est unitaire.

19. Etant donné $(a)\ \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$, $(b)\ \begin{bmatrix} 0 & i & 1+i \\ i & 0 & i \\ -1+i & i & 0 \end{bmatrix}$, utiliser le problème 18 pour former une matrice unitaire.

Réponse : $(a)\ \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -1+2i & -4-2i \\ 2-4i & -2-i \end{bmatrix}$, $(b)\ \dfrac{1}{29}\begin{bmatrix} -9+8i & -10-4i & -16-18i \\ -2-24i & 1+12i & -10-4i \\ 4-10i & -2-24i & -9+8i \end{bmatrix}$

20. Montrer que si A et B sont unitaires et de même ordre, alors AB et BA sont unitaires.

21. Démontrer le théorème **XI** en s'inspirant de la démonstration du problème 10 du Chapitre 13.

22. Montrer que si A est unitaire et hermitienne, alors elle est involutive.

23. Montrer que $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+i) & i/\sqrt{3} & \dfrac{3+i}{2\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{2} & 1/\sqrt{3} & \dfrac{4+3i}{2\sqrt{15}} \\ \frac{1}{2} & -i/\sqrt{3} & \dfrac{5i}{2\sqrt{15}} \end{bmatrix}$ est unitaire.

24. Montrer que si A est unitaire et si $B = AP$ avec P non singulière, alors PB^{-1} est unitaire.

25. Montrer que si A est unitaire et si $I+A$ est non singulière, alors $B = (I-A)(I+A)^{-1}$ est anti-hermitienne.

Congruence

MATRICES CONGRUENTES. Deux matrices carrées d'ordre n A et B sur F sont congruentes, $\underset{\sim}{C}$, sur F s'il existe une matrice P sur F non singulière telle que

(15.1) $$B = {}^tPAP$$

Il est clair que la congruence est un cas particulier de l'équivalence de sorte que des matrices con-congruentes ont même rang.

Lorsque P s'écrit comme produit de matrices colonnes élémentaires, ${}^tP$ est le produit en sens inverse des mêmes lignes élémentaires ; c'est-à-dire A et B sont congruentes pourvu que l'on puisse réduire A à B par une suite de couples de transformations élémentaires, chaque couple consistant en une transformation élémentaire sur les lignes, suivie de la même transformation élémentaire sur les colonnes.

MATRICES SYMETRIQUES. Dans le problème 1, on démontre:

Théorème I. Toute matrice symétrique A sur F de rang r est congruente sur F à une matrice diagonale dont les r premiers éléments diagonaux sont non nuls tandis que les autres éléments sont nuls.

Exemple 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$ étant donnée,

trouver une matrice P non singulière à éléments rationnels telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

En réduisant A à D, on utilise $[AI]$ et on calcule la matrice ${}^tP$. On utilise d'abord $H_{21}(-2)$ et $K_{21}(-2)$, puis $H_{31}(-3)$ et $K_{31}(-3)$, enfin $H_{41}(-2)$ et $K_{41}(-2)$ pour obtenir des zéros dans la première ligne et dans la première colonne. On peut cependant gagner un temps appréciable en effectuant d'abord les trois transformations sur les lignes puis, ensuite, les trois transformations sur les colonnes. Si A n'est pas transformée en une matrice symétrique, c'est qu'une erreur a été commise. On a

$$[A\,H] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -10 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D\,{}^tP]$$

Puis
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice D à laquelle A est réduite n'est pas unique. Par exemple, les transformations $H_3(\frac{1}{2})$ et $K_3(\frac{1}{2})$ auraient remplacé D par la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tandis que les transformations $H_2(3)$ et $K_2(3)$ l'auraient remplacée par $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Cependant, il n'y a pas de couple de transformations réelles ou rationnelles qui remplaceraient D par une matrice diagonale n'ayant que des éléments non négatifs sur la diagonale.

MATRICES REELLES SYMETRIQUES. Soit la matrice réelle symétrique A réduite par des transformations réelles élémentaires à une matrice diagonale congruente D, c'est-à-dire soit ${}^tPAP = D$. Tandis que les éléments diagonaux non nuls de D dépendent à la fois de A et de P, on montrera dans le chapitre 17 que le nombre d'éléments diagonaux non nuls positifs ne dépend que de A.

Par une suite de transformations sur les lignes et par les mêmes transformations sur les colonnes, les éléments diagonaux de D peuvent être disposés de façon que les éléments positifs précèdent les éléments négatifs. On peut alors utiliser une suite de transformations réelles du type 2 sur les lignes et sur les colonnes pour réduire la matrice diagonale à une matrice dans laquelle les éléments non nuls de la diagonale soient égaux à 1 ou à -1. On a :

Théorème II. Sur le corps des réels, une matrice réelle symétrique de rang r est congruente à une matrice canonique

$$C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15.2}$$

L'entier p de (15.2) est appelé indice de la matrice et $s = p - (r - p)$ est la signature.

Exemple 2. En appliquant les transformations H_{23}, K_{23} et $H_2(\frac{1}{2})$, $K_2(\frac{1}{2})$ à la solution de l'exemple 1, on a

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid {}^tQ]$$

et ${}^tQAQ = C$. Ainsi, A est de rang 3, d'indice $p = 2$ et de signature $s = 1$.

Théorème III. Sur le corps des réels, deux matrices carrées d'ordre n réelles symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont même rang et même indice ou même rang et même signature.

Dans le corps des réels, l'ensemble de toutes les matrices carrées d'ordre n du type (15.2) est un ensemble canonique pour la congruence des matrices carrées d'ordre n réelles symétriques.

DANS LE CORPS DES COMPLEXES, on a :

Théorème IV. Toute matrice carrée d'ordre n complexe symétrique de rang r est congruente sur le corps des nombres complexes à une matrice canonique

$$(15.3) \qquad C = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 3. En appliquant les transformations $H_3(i)$ et $K_3(i)$ à l'exemple 2, on a

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid {}^tR]$$

et ${}^tRAR = D = \begin{bmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Voir problèmes 2-3.

Théorème V. Deux matrices carrées d'ordre n complexes symétriques sont congruentes sur le corps des complexes si et seulement si elles ont même rang.

MATRICES ANTISYMETRIQUES. Si A est antisymétrique alors

$$^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA\,P = {}^tP(-A)P = -{}^tPAP$$

Ainsi, on a :

Théorème VI. Toute matrice $B = {}^tPAP$ congruente à une matrice A antisymétrique est aussi antisymétrique.

Dans le problème 4, on démontre :

Théorème VII. Toute matrice A carrée d'ordre n antisymétrique sur F est congruente sur F à une matrice canonique

$$(15.4) \qquad B = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0)$$

où $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$. Le rang de A est $r = 2t$.

Voir problème 5.

D'où :

Théorème VIII. Deux matrices carrées d'ordre n antisymétriques sur F sont congruentes sur F si et seulement si elles ont même rang.

L'ensemble de toutes les matrices du type (15.4) est un ensemble canonique pour la congruence des matrices carrées d'ordre n antisymétriques.

MATRICES HERMITIENNES. Deux matrices hermitiennes d'ordre n, A et B sont congruentes au sens d'Hermite $[\underset{\sim}{HC}]$ s'il existe une matrice P non singulière telle que

$$(15.5) \qquad B = {}^t\overline{P}AP$$

Ainsi :

Théorème IX. Deux matrices carrées d'ordre n hermitiennes sont congruentes au sens d'Hermite si et seulement si elles peuvent s'obtenir l'une à partir de l'autre par une suite de couples de transformations élémentaires, chaque couple comprenant une transformation sur la colonne et la transformation sur la ligne conjuguée correspondante.

Théorème X. Une matrice hermitienne A de rang r est congruente au sens d'Hermite à une matrice canonique

$$(15.6) \qquad C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'entier p de (15.6) est l'indice de A et $s = p - (r - p)$ est la signature.

Théorème XI. Deux matrices carrées hermitiennes d'ordre n sont congruentes au sens d'Hermite si et seulement si elles ont même rang et même indice, ou même rang et même signature.

La réduction d'une matrice hermitienne à la forme canonique (15.6) se déduit des méthodes du problème 1 en prenant garde aux couples de transformations élémentaires. Le problème 7 traite du cas le plus délicat.

Voir problème 6-7.

MATRICES ANTIHERMITIENNES. Si A est une matrice antihermitienne, alors

$$^t(\overline{^t P} A P) = {^t}(P\,{^t\!A}\,\overline{P}) = -{^t\overline{P}}AP$$

Ainsi,

Théorème XII. Toute matrice $B = {^t\overline{P}}AP$ congruente au sens d'Hermite à une matrice antiherm · tienne A est elle-même antihermitienne.

D'après le problème 5 du chapitre 14, $H = -iA$ est hermitienne si A est antihermitienne. D'après le théorème X, il existe une matrice P non singulière telle que

$$^t\overline{P}HP = C = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alors, $i\,{^t\overline{P}}HP = i\,{^t\overline{P}}(-iA)P = {^t\overline{P}}AP = iC$ et

$$(15.7) \qquad B = {^t\overline{P}}AP = \begin{bmatrix} iI_p & 0 & 0 \\ 0 & -iI_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

Théorème XIII. Toute matrice carrée d'ordre n A antihermitienne est congruente au sens d'Hermite à une matrice (15.7) dans laquelle r est le rang de A et p l'indice de $-iA$.

Théorème XIV. Deux matrices carrées d'ordre n A et B antihermitiennes sont congruentes au sens d'Hermite si et seulement si elles ont même rang et $-iA$ et $-iB$ ont même indice.

Voir problème 8.

PROBLEMES RESOLUS

1. Démontrer qu'on peut réduire toute matrice symétrique sur F de rang r à une matrice diagonale ayant r éléments non nuls sur la diagonale.

Supposons la matrice symétrique $A = [a_{ij}]$ non diagonale. Si $a_{11} \neq 0$, une suite de couples de transformations élémentaires du type 3, chacune comprenant une transformation sur les lignes, et la même transformation sur les colonnes, réduira A à

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

On poursuit la réduction tant que les $b_{22}, c_{33}, \ldots$ obtenus sont différents de zéro. Supposons que, au cours de la réduction, nous ayons obtenu la matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & & & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ldots & & & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & h_{ss} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & k_{s+1,\,s+2} \;\ldots & k_{s+1,\,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k_{s+2,\,s+1} & k_{s+2,\,s+2} \;\ldots & k_{s+2,\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & k_{n,\,s+1} & k_{n,\,s+2} \;\ldots & k_{nn} \end{bmatrix}$$

dans laquelle l'élément diagonal $k_{s+1,\,s+1} = 0$. Si tous les $k_{ij} = 0$, on a démontré le théorème pour $s = r$. Si cependant certains k_{ij}, par exemple $k_{s+u,\,s+v} \neq 0$, on le place à la $(s+1)^{\text{ème}}$ ligne, $(s+1)^{\text{ème}}$ colonne par la transformation propre du type 1 sur les lignes et sur les colonnes avec $u = v$; sinon, on additionne la $(s+u)^{\text{ème}}$ ligne à la $(s+v)^{\text{ème}}$ ligne et après la transformation correspondante sur les colonnes, on obtient un élément diagonal différent de zéro. (Lorsque $a_{11} = 0$, on procède comme dans le cas $k_{s+1,\,s+1} = 0$ ci-dessus.

Puisque nous sommes conduit à une suite de matrices équivalentes, A est en fin de compte réduite à une matrice diagonale dont les r premiers éléments diagonaux sont différents de zéro, tandis que tous les autres éléments sont nuls.

2. Réduire la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ à la forme canonique (**15.2**) et à la forme canonique (**15.3**).

Dans chacun des cas, obtenir la matrice P qui effectue la réduction.

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$= [D \mid {}^tP_1]$$

Pour obtenir (**15.2**), nous avons

$$[D \mid {}^tP_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = [C \mid {}^tP\,]$$

et
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Pour obtenir (**15.3**), nous avons
$$[D \mid {}^tP_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2i & -i & 0 \end{array}\right] = [C \mid {}^tP]$$

et
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -2\sqrt{2} & 2i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -i \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Etant donnée $A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ i & 0 & 2-i \\ 1+i & 2-i & 10+2i \end{bmatrix}$, trouver une matrice P non singulière telle que ${}^tPAP$ soit dans la forme canonique (**15.3**)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 1+i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & 2-i & 10+2i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3-2i & -i & 1 & 0 \\ 0 & 3-2i & 10 & -1-i & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5+12i & 1+2i & -3+2i & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7+4i}{13} & \frac{-5+12i}{13} & \frac{3-2i}{13} \end{array}\right]$$
$$= [C \mid {}^tP]$$

On a
$$P = \begin{bmatrix} 1 & -i & \frac{7+4i}{13} \\ 0 & 1 & \frac{-5+12i}{13} \\ 0 & 0 & \frac{3-2i}{13} \end{bmatrix}$$

4. Démontrer que toute matrice A carrée d'ordre n antisymétrique sur F de rang $2t$ est congruente sur F à une matrice
$$B = \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_t, 0, \ldots, 0)$$

où $D_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $(i = 1, 2, \ldots, t)$.

Si $A = 0$, alors $B = A$. Si $A \neq 0$, alors, il existe des éléments tels que $a_{ij} = -a_{ji} \neq 0$. On échange la $i^{\text{ème}}$ et la $1^{\text{ère}}$ lignes et la $j^{\text{ème}}$ et la $2^{\text{ème}}$ lignes. Puis on échange la $i^{\text{ème}}$ et la $1^{\text{ère}}$ colonnes et la $j^{\text{ème}}$ et la $2^{\text{ème}}$ colonnes pour remplacer A par la matrice antisymétrique $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & a_{ij} & E_2 \\ -a_{ij} & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{E_3} & E_4 \end{array}\right]$. Enfin, on multiplie la $1^{\text{ère}}$ ligne et la

$1^{\text{ère}}$ colonne par $1/a_{ij}$ afin d'obtenir $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & F_2 \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{F_3} & E_4 \end{array}\right]$ d'où, par des transformations élémentaires du type 3 sur les lignes et sur les colonnes, on obtient

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & F_4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & F_4 \end{bmatrix}$$

Si $F_4 = 0$, la réduction est terminée. Dans le cas contraire, ce procédé est renouvelé sur $F_4, \ldots$ jusqu'à ce que l'on obtienne B.

5. Etant donnée, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ trouver une matrice P non singulière telle que ${}^tPAP$ soit dans la forme canonique **(15.4)**

En utilisant $a_{13} \neq 0$, nous n'avons qu'à échanger la $3^{\text{ème}}$ et la $2^{\text{ème}}$ lignes, transformation suivie de l'échange de la $3^{\text{ème}}$ et de la $2^{\text{ème}}$ colonnes de $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ pour obtenir $\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

Nous multiplions ensuite la $1^{\text{ère}}$ ligne et la $1^{\text{ère}}$ colonne par $\frac{1}{2}$. Nous avons:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{et} \quad \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Enfin, nous multiplions la $3^{\text{ème}}$ ligne et la $3^{\text{ème}}$ colonne par $-1/5$ afin d'obtenir

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} {}^tP$$

Ainsi, lorsque $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/10 & -1 \\ 0 & 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ${}^tPAP = \text{diag}(D_1, D_2)$.

6. Trouver une matrice P non singulière telle que ${}^t\overline{P}AP$ soit dans la forme canonique **(15.6)**. On donne **:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & -3+2i \\ 1+i & 2 & -i \\ -3-2i & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-i & -3+2i & 1 & 0 & 0 \\ 1+i & 2 & -i & 0 & 1 & 0 \\ -3-2i & i & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{13} & 0 & \frac{2-3i}{13} & 1 & \frac{5}{13} \\ 0 & 0 & -13 & 3+2i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2-3i}{5\sqrt{13}} & \frac{13}{5\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3+2i}{\sqrt{13}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid {}^t\overline{P}]$$

et

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2+3i}{5\sqrt{13}} & \frac{3-2i}{\sqrt{13}} \\ 0 & \frac{13}{5\sqrt{13}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} \end{bmatrix}$$

7. Etant donnée $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}$, trouver une matrice P non singulière telle que $\overline{{}^tP}AP$ soit dans la forme canonique (**15.6**).

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5i & -1+2i & 1 & 0 \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5i & 2 & 1 & i \\ 0 & -5i & 0 & -2-3i & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 & 1 & i \\ 0 & 0 & -5/2 & -2-2i & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{-4-4i}{\sqrt{10}} & \frac{i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{array}\right]$$

$$= [C \mid {}^tP]$$

et

$$P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{-4+4i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-i}{\sqrt{10}} \\ 0 & \frac{-i}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

8. Etant donnée $A = \begin{bmatrix} i & -1 & -1+i \\ 1 & 0 & 1+2i \\ 1+i & -1+2i & 2i \end{bmatrix}$, déterminer une matrice P non singulière telle que ${}^t\overline{P}AP$ soit dans la forme canonique (15.7).

Considérons la matrice hermitienne $H = -iA = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 0 & 2-i \\ 1-i & 2+i & 2 \end{bmatrix}$.

La matrice non singulière $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est telle que ${}^t\overline{P}\,HP = \text{diag}[1, 1, -1]$.

Alors ${}^t\overline{P}\,AP = \text{diag}[i, i, -i]$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

9. Etant donné : (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

déterminer une matrice P non singulière telle que ${}^tPAP$ soit de la forme canonique (15.2)

Réponse : (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$, (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. Etant donné : (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1+2i & 1+4i \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 2i & 1+i & 2-4i \\ 1+i & 1+i & -1-2i \\ 2-4i & -1-2i & -3-5i \end{bmatrix}$

trouver une matrice non singulière P telle que ${}^tPAP$ soit de la forme canonique (15.3).

Réponse : (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(-1-2i) \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-i) & i/\sqrt{2} & (1+i)/2 \\ 0 & (1-i)/\sqrt{2} & (-3-2i)/13 \\ 0 & 0 & (3+2i)/13 \end{bmatrix}$

11. Etant donné :

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

trouver une matrice P non singulière telle que ${}^tPAP$ soit dans la forme canonique (15.4)

Réponse :

(a) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. Etant donné : (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-3i \\ 1+3i & 10 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 3 & -i \\ 2 & i & 4 \end{bmatrix}$, (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 3-2i \\ 1-i & 3 & 3-4i \\ 3+2i & 3+4i & 18 \end{bmatrix}$

trouver une matrice non singulière P telle que ${}^t\overline{P}AP$ soit dans la forme canonique **(15.6)**.

Réponse : (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1+3i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-5-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & (2-i)/\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, (c) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & (-2+5i) \\ 0 & 1 & (-2-i) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Etant donné :

(a) $A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ -1+i & i \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} i & -1-i & -1 \\ 1-i & 0 & 1-i \\ 1 & -1-i & -i \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} i & -1 & 1+i \\ 1 & 2i & i \\ -1+i & i & 6i \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2+i \\ -1 & 0 & 1-2i \\ -2+i & -1-2i & 0 \end{bmatrix}$

trouver une matrice non singulière P telle que ${}^t\overline{P}AP$ soit dans la forme canonique **(15.7)**.

Réponse : (a) $P = \begin{bmatrix} 1 & -1+i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $P = \begin{bmatrix} 1 & (1-i)/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & -i & -2+3i \\ 0 & 1 & -2-i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & (1-2i)/\sqrt{10} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & (-2-i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \end{bmatrix}$

14. Si $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ montrer qu'une matrice carrée C d'ordre 2 vérifie ${}^tC\,DC = D$ si et seulement si $\det C = 1$.

15. Soit A une matrice carrée d'ordre n non singulière, réelle, symétrique, d'indice p. Montrer que $\det A > 0$ si et seulement si $n - p$ est pair.

16. Montrer qu'une matrice A symétrique non singulière est congruente à son inverse.
Indication : prendre $P = {}^tBB$ où ${}^tB\,AB = I$ et montrer que ${}^tP\,AP = A^{-1}$.

17. Dans le but d'obtenir **(15.6)** pour les matrices hermitiennes, refaire la démonstration du théorème I en l'adaptant.

18. Montrer que si $A \overset{C}{\sim} B$, alors A est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si B est symétrique (resp. antisymétrique).

19. Soit S une matrice symétrique non singulière et soit T une matrice antisymétrique telle que $(S+T)(S-T)$ soit non singulière. Montrer que lorsque ${}^tP\,SP = S$ on a

$$P = (S+T)^{-1}(S-T)$$

Indication : ${}^tP\,SP = [(S-T)^{-1}(S+T)S^{-1}(S-T)(S+T)^{-1}]^{-1}$.

20. Soit S une matrice symétrique non singulière et soit T telle que $(S+T)(S-T)$ soit non singulière. Montrer que si ${}^tP\,SP = S$ lorsque $P = (S+T)^{-1}(S-T)$ et si $I+P$ est non singulière, alors T est antisymétrique.
Indication : $T = S(I-P)(I+P)^{-1} = S(I+P)^{-1}(I-P)$.

21. Montrer que la congruence des matrices carrées d'ordre n est une relation d'équivalence.

CHAPITRE 16

Formes bilinéaires

UNE EXPRESSION linéaire et homogène par rapport à chacun des groupes de variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est une forme bilinéaire de ces variables. Par exemple,

$$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3$$

est une forme bilinéaire des variables (x_1, x_2) et (y_1, y_2, y_3).

On peut écrire la forme bilinéaire la plus générale des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} f(x,y) \quad = \quad & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m1}x_my_1 + a_{m2}x_my_2 + \cdots + a_{mn}x_my_n \end{aligned}$$

ou plus brièvement :

(16.1)
$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j \\ &= \begin{bmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= {}^tX\,AY \end{aligned}$$

où $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_m]$, $A = [a_{ij}]$, et $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

La matrice A des coefficients est la matrice de la forme bilinéaire et le rang de A est le rang de la forme bilinéaire.

Voir problème 1.

Exemple 1. La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 &= \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= {}^tX\,AY \end{aligned}$$

FORMES CANONIQUES. On remplace les m variables x de (16.1) par les nouvelles variables u au moyen de la transformation linéaire

$$(16.2) \qquad x_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} b_{ij}u_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,m) \quad \text{ou} \quad X = BU$$

et les n variables y par les nouvelles variables v au moyen de la transformation linéaire

$$(16.3) \qquad y_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} c_{ij}v_j, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \quad \text{ou} \quad Y = CV$$

On a ${}^tXAY = {}^t(BU)\,A(CV) = {}^tU({}^tB\,AC)V$. En employant alors les applications linéaires $U = IX$, et $V = IY$ on peut obtenir une nouvelle forme bilinéaire des variables d'origine ${}^tX({}^tB\,AC)Y = {}^tX\,DY$.

Deux formes bilinéaires sont équivalentes si et seulement si il existe des applications non singulières qui transforment une forme en l'autre forme.

Théorème I. Deux formes bilinéaires de matrices A et B $(m \times n)$ sur F sont équivalentes sur F si et seulement si elles ont même rang.

Si le rang de (16.1) est égal à 1, il existe (Chapitre 5) des matrices non singulières P et Q telles que

$$PAQ \;=\; \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En prenant $B = {}^tP$ dans (16.2) et $C = Q$ dans (16.3), la forme bilinéaire se réduit à

$$(16.4) \qquad {}^tU\,(PAQ)V \;=\; {}^tU \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V \;=\; u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$$

Ainsi,

Théorème II. Toute forme bilinéaire sur F, de rang r, peut se réduire par des applications linéaires non singulières sur F à la forme canonique $u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_rv_r$.

Exemple 2. Pour la matrice de la forme bilinéaire ${}^tXAY = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$ de l'exemple 1,

$$\begin{array}{c} I_3 \\ \\ A\ \ I_3 \end{array} = \begin{array}{cccccc} 1&0&0&&& \\ 0&1&0&&& \\ 0&0&1&&& \\ 1&0&1&1&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{array} \to \begin{array}{cccccc} 1&0&0&&& \\ 0&1&0&&& \\ 0&0&1&&& \\ 1&0&1&1&0&0 \\ 0&1&-1&-1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{array} \to \begin{array}{cccccc} 1&0&-1&&& \\ 0&1&0&&& \\ 0&0&1&&& \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&-1&-1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{array} \to \begin{array}{cccccc} 1&0&-1&&& \\ 0&1&1&&& \\ 0&0&1&&& \\ 1&0&0&1&0&0 \\ 0&1&0&-1&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} Q \\ I_3\ {}^tP \end{array}$$

Ainsi, $X = PU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U$ et $Y = QV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V$ réduisent ${}^tXAY$ à

$${}^tU \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} V = {}^tU I_3 V \;=\; u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Les équations associées aux transformations sont

$$\begin{cases} x_1 = u_1 - u_2 \\ x_2 = u_2 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 - v_3 \\ y_2 = v_2 + v_3 \\ y_3 = v_3 \end{cases}$$

Voir problème 2.

TYPES DE FORMES BILINEAIRES. Une forme bilinéaire $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i y_j = {}^tXAY$ est

$$\begin{cases} \text{symétrique} \\ \text{alternée} \\ \text{hermitienne} \\ \text{hermitienne alternée} \end{cases} \quad \text{selon que } A \text{ est} \quad \begin{cases} \text{symétrique} \\ \text{antisymétrique} \\ \text{hermitienne} \\ \text{antihermitienne} \end{cases}$$

TRANSFORMATIONS COVARIANTES. Considérons une forme bilinéaire ${}^tXAY$ de deux ensembles de n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Lorsque les x et les y sont soumis à la même transformation $X = CU$ et $Y = CV$, on dit que les variables sont transformées d'une manière covariante. On a :

Théorème III. Sous les transformations covariantes $X = CU$ et $Y = CV$, la forme bilinéaire ${}^tXAY$, où A est une matrice carrée d'ordre n, est transformée en la forme bilinéaire ${}^tU\,({}^tCAC)V$.

Si A est symétrique, il en est de même de ${}^tCAC$. D'où:

Théorème IV. Une forme bilinéaire symétrique reste symétrique par des transformations covariantes des variables.

Théorème V. Deux formes bilinéaires sur F sont équivalentes par des transformations covariantes des variables si et seulement si leurs matrices sont congruentes sur F.

D'après le théorème I du chapitre 15, on a

Théorème VI. On peut réduire une forme bilinéaire symétrique de rang r par des transformations non singulières covariantes des variables à l'expression

(16.5) $$a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + \cdots + a_rx_ry_r$$

Les théorèmes II et IV du chapitre 15 ont pour conséquence:

Théorème VII. On peut réduire une forme bilinéaire réelle symétrique de rang r par des transformations covariantes non singulières des variables à l'expression

(16.6) $$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ry_r$$

et dans le corps des complexes à l'expression

(16.7) $$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_r$$

Voir problème 3.

TRANSFORMATIONS CONTRAVARIANTES. Considérons la forme bilinéaire du paragraphe précédent. Lorsque les x sont soumis à la transformation $X = {}^t(C^{-1})\,U$ et les y à la transformation $Y = CV$, on dit que les variables sont transformées d'une façon contravariante.

Théorème VIII. Par des transformations contravariantes $X = {}^t(C^{-1})\,U$ et $Y = CV$, la forme bilinéaire ${}^tXAY$ où A est une matrice carrée d'ordre n se transforme en la forme bilinéaire ${}^tU(C^{-1}AC)V$.

Théorème IX. La forme bilinéaire ${}^tXIY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ se transforme en elle-même si et seulement si les deux ensembles de variables sont transformés d'une façon contravariante.

FACTORISATION DES FORMES BILINEAIRES. Dans le problème 4, on montre:

Théorème X. Une forme bilinéaire non nulle se factorise si et seulement si elle est de rang 1.

PROBLEMES RESOLUS

1. $$x_1y_1 + 2x_1y_2 - 13x_1y_3 - 4x_2y_1 + 15x_2y_2 - x_2y_3 = \begin{bmatrix} x_1, x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = {}^tX\begin{bmatrix} 1 & 2 & -13 \\ -4 & 15 & -1 \end{bmatrix}Y.$$

2. Réduire $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_1y_3 - 2x_1y_4 + 2x_2y_1 - 2x_2y_2 + x_2y_3 + 3x_2y_4 + 3x_3y_1 + 4x_3y_3 + x_3y_4$ à la forme canonique.

La matrice de la forme est $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. D'après le problème 6 du Chapitre 5, les matrices non singulières $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -4/3 & -1/3 \\ 0 & -1/6 & -5/6 & 7/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sont telles que $PAQ = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, les applications linéaires :

$$X = {}^tPU \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = u_1 - 2u_2 - u_3 \\ x_2 = u_2 - u_3 \\ x_3 = u_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad Y = QV \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y_1 = v_1 + \frac{1}{3}v_2 - \frac{4}{3}v_3 - \frac{1}{3}v_4 \\ y_2 = -\frac{1}{6}v_2 - \frac{5}{6}v_3 + \frac{7}{6}v_4 \\ y_3 = v_3 \\ y_4 = v_4 \end{cases}$$

réduisent ${}^tXAY$ à $u_1v_1 + u_2v_2$.

3. Réduire la forme bilinéaire symétrique ${}^tXAY = {}^tX\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix}Y$, au moyen de transformations covariantes à :

(*a*) **(16.5)** dans le corps des rationnels, (*b*) **(16.6)** dans le corps des réels, (*c*) **(16.7)** dans le corps des complexes.

(*a*) D'après l'exemple 1 du Chapitre 15, les applications linéaires $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}V$

réduisent ${}^tXAY$ à $u_1v_1 - u_2v_2 + 4u_3v_3$.

(b) D'après l'exemple 2 du Chapitre 15, les applications linéaires $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$

réduisent ${}^tXAY$ à $u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

(c) D'après le résultat de l'exemple 2 du Chapitre 15, on obtient :

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{C}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ainsi, les applications linéaires $X = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} U$, $Y = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2i & -1 \\ 0 & 2 & i & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} V$

réduisent ${}^tXAY$ à $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$.

4. Montrer qu'une forme bilinéaire non nulle $f(x, y)$ peut se factoriser si et seulement si son rang est égal à 1.

Supposons que la forme puisse se factoriser ainsi

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij}x_iy_j \quad = \quad (\Sigma\, b_ix_i)(\Sigma\, c_jy_j) \quad = \quad \Sigma\Sigma\, b_i c_j x_i y_j$$

Par suite, $a_{ij} = b_ic_j$. Il est clair que tout mineur du second ordre de $A = [a_{ij}]$:

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & a_{is} \\ a_{kj} & a_{ks} \end{bmatrix} \quad = \quad \begin{bmatrix} a_ib_j & a_ib_s \\ a_kb_j & a_kb_s \end{bmatrix} \quad = \quad b_jb_s \begin{bmatrix} a_i & a_i \\ a_k & a_k \end{bmatrix}$$

s'annule. Ainsi, le rang A est égal à 1.

Réciproquement, on suppose que la forme bilinéaire est de rang 1. Alors, d'après le théorème 1, il existe des applications non singulières qui réduisent la forme à ${}^tU({}^tBAC)V = u_1v_1$. Les inverses des applications

$$u_i \;=\; \sum_j r_{ij}x_j \quad \text{et} \quad v_i \;=\; \sum_j s_{ij}y_j$$

transforment u_1v_1 en $(\sum_j r_{ij}x_j)(\sum_j s_{ij}y_j) = f(x,y)$. D'où, $f(x, y)$ se factorise.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

5. Trouver des applications linéaires qui réduisent chacune des formes bilinéaires suivantes à la forme canonique **(16.4)**.

(a) $x_1y_1 - 2x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 - 3x_2y_3 - x_3y_1 - x_3y_2 - x_3y_3$

(b) ${}^tX \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -4 & -11 & 2 & 7 \\ 5 & -5 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y$, (c) ${}^tX \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} Y$, (d) ${}^tX \begin{bmatrix} 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix} Y$

6. Trouver des transformations covariantes qui réduisent

(a) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 14 \end{bmatrix} Y$ et (b) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} Y$ à la forme canonique **(16.6)**

Réponse : (a) $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4\sqrt{3}/3 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$

7. Si B_1, B_2, C_1, C_2 sont des matrices carrées d'ordre n non singulières telles que $B_1A_1C_1 = B_2A_2C_2 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, trouver l'application qui transforme ${}^tXA_1Y$ en ${}^tUA_2V$,

Réponse : $X = {}^t(B_2^{-1}B_1)U$, $Y = C_1C_2^{-1}V$

8. Interpréter le problème 23 du Chapitre 5 en termes de formes bilinéaires.

9. Ecrire la transformation contravariante de $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} U$. *Réponse* : $Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} V$

10. Montrer qu'une transformation orthogonale est contravariante à elle-même, c'est-à-dire que $X = PU$, $Y = PV$.

11. Démontrer le théorème IX.

12. Si ${}^tXAY$ est une forme bilinéaire réelle non singulière, ${}^tXA^{-1}Y$ est sa forme bilinéaire réciproque. Montrer que lorsque les formes bilinéaires réciproques sont transformées d'une façon covariante par la même transformation orthogonale, il en résulte des formes bilinéaires réciproques.

13. Utiliser le problème 4 du Chapitre 15 pour montrer qu'il existe des transformations covariantes $X = PU$, $Y = PV$ qui réduisent une forme bilinéaire alternée de rang $2t$ à la forme canonique :

$$u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_4 - u_4v_3 + \cdots + u_{2t-1}v_{2t} - u_{2t}v_{2t-1}$$

14. Déterminer des formes canoniques pour les formes bilinéaires hermitiennes et pour les formes bilinéaires alternées.

Indications : Voir **(15.6)** et **(15.7)**.

Formes quadratiques

UN POLYNOME HOMOGENE du type

(17.1) $$q \;=\; {}^tXAX \;=\; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

dont les coefficients a_{ij} sont des éléments de F est une forme quadratique sur F des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Exemple 1. $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ est une forme quadratique des variables x_1, x_2, x_3. On peut écrire la matrice de la forme de diverses façons selon la manière dont les termes rectangles $-4x_1x_2$ et $8x_1x_3$ sont chacun décomposés en deux afin de former les termes $a_{12}x_1x_2, a_{21}x_2x_1$ et $a_{13}x_1x_3, a_{31}x_3x_1$. On conviendra de la symétrie d'une matrice d'une forme quadratique et nous séparerons toujours les termes produits de sorte que $a_{ij} = a_{ji}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= {}^tX\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix}X \end{aligned}$$

La matrice symétrique $A = [a_{ij}]$ est la matrice de la forme quadratique et le rang de A est le rang de cette forme. Si le rang r est inférieur à n, la forme quadratique est singulière. Dans le cas contraire, elle est non singulière.

TRANSFORMATIONS. L'application linéaire sur F, $X = BY$, transforme la forme quadratique (17.1) de matrice symétrique A sur F en la forme quadratique

(17.2) $${}^t(BY)A(BY) \;=\; {}^tY({}^tBAB)Y$$

de matrice symétrique ${}^tB\,.\,A\,.\,B$.

Deux formes quadratiques de mêmes variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont équivalentes si et seulement si il existe une application linéaire non singulière $X = BY$ qui, suivie de $Y = IX$, transforme l'une des formes en l'autre. Puisque ${}^tBAB$ est congruente à A :

Théorème I. Le rang d'une forme quadratique est invariant par une transformation non singulière des variables.

Théorème II. Deux formes quadratiques sur F sont équivalentes sur F si et seulement si leurs matrices sont congruentes sur F.

Le problème 1 du Chapitre 15 a pour conséquence la propriété suivante : une forme quadratique de rang r peut se réduire à la forme

(17.3) $$h_1y_1^2 + h_2y_2^2 + \cdots + h_ry_r^2, \qquad h_i \neq 0$$

dans laquelle seuls subsistent les termes carrés des variables, par une application linéaire non singulière $X = BY$. On rappelle que la matrice B est le produit de matrices colonnes élémentaires tandis que ${}^tB$ est le produit en sens inverse des mêmes matrices lignes élémentaires.

Exemple 2. Réduisons $q = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$ de l'exemple 1 à la forme (**17.3**).

$$\text{On a } [A \;\; I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -23 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] = [D \;\; {}^tB]$$

$$\text{Ainsi } X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y \quad \text{réduit } q \text{ à } q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2 .$$

Voir problèmes 1-2.

REDUCTION DE LAGRANGE (ou de Gauss). On peut réaliser la réduction d'une forme quadratique à la forme (17.3) par un procédé connu sous le nom de réduction de Lagrange (ou de Gauss), qui consiste essentiellement à compléter successivement des débuts de carrés.

Exemple 3.

$$\begin{aligned} q &= x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3)\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 \\ &= \{x_1^2 - 4x_1(x_2 - 2x_3) + 4(x_2 - 2x_3)^2\} + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4(x_2 - 2x_3)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3) - 23x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2^2 - 8x_2x_3 + 16x_3^2) + 9x_3^2 \\ &= (x_1 - 2x_2 + 4x_3)^2 - 2(x_2 - 4x_3)^2 + 9x_3^2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ y_2 = \phantom{x_1 - {}} x_2 - 4x_3 \\ y_3 = \phantom{x_1 - 2x_2 + {}} x_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 = y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\ x_2 = \phantom{y_1 + {}} y_2 + 4y_3 \\ x_3 = \phantom{y_1 + 2y_2 + {}} y_3 \end{cases}$$

réduit q à $y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$.

Voir problème 3.

FORMES QUADRATIQUES REELLES. Soit la forme quadratique réelle $q = {}^tXAX$ réduite par une transformation réelle non singulière à la forme (17.3). Si un ou plusieurs h_i sont négatifs, il existe une application non singulière $X = CZ$ où C est obtenue à partir de B par une suite de transformations du type 1 sur les lignes et sur les colonnes qui transforment q en

$$(17.4) \qquad s_1z_1^2 + s_2z_2^2 + \cdots + s_pz_p^2 - s_{p+1}z_{p+1}^2 - \cdots - s_rz_r^2$$

Dans cette formule, les termes à coefficients positifs précèdent ceux à coefficients négatifs.

Or, l'application non singulière

$$\begin{aligned} w_i &= \sqrt{s_i}\, z_i , \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ w_j &= z_j \quad , \qquad (j = r+1, r+2, \ldots, n) \end{aligned}$$

ou

$$Z = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{s_1}}, \frac{1}{\sqrt{s_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{s_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) W$$

transforme (17.4) en la forme canonique

$$w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_p^2 - w_{p+1}^2 - \cdots - w_r^2 \tag{17.5}$$

Ainsi, puisqu'un produit d'applications non singulières est une application non singulière :

Théorème III. Toute forme quadratique réelle peut être réduite par une application réelle non singulière à la forme canonique (17.5) où p, nombres de termes positifs, est appelé indice et où r est le rang de la forme quadratique donnée.

Exemple 4. Dans l'exemple 2, la forme quadratique $q = x_1^2 + 2x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3$ a été réduite à $q' = y_1^2 - 2y_2^2 + 9y_3^2$. L'application non singulière $y_1 = z_1$, $y_2 = z_3$, $y_3 = z_2$ transforme q' en $q'' = z_1^2 + 9z_2^2 - 2z_3^2$ et l'application non singulière $z_1 = w_1$, $z_2 = w_2/3$, $z_3 = w_3/\sqrt{2}$ réduit q'' à $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$.

En composant les applications, on voit que l'application linéaire non singulière

$$\begin{aligned} x_1 &= w_1 + \tfrac{4}{3}w_2 + \sqrt{2}\,w_3 \\ x_2 &= \tfrac{4}{3}w_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,w_3 \\ x_3 &= \tfrac{1}{3}w_2 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & \sqrt{2} \\ 0 & 4/3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} W$$

réduit q à $q''' = w_1^2 + w_2^2 - w_3^2$. . La forme quadratique est de rang 3 et d'indice 2.

LOI D'INERTIE DE SYLVESTER. Dans le problème 5, on démontre la loi d'inertie.

Théorème IV. Si une forme quadratique réelle se réduit à l'aide de deux transformations réelles non singulières à deux formes canoniques (17.5), elles ont même rang et même indice.

Ainsi, l'indice d'une matrice réelle symétrique dépend de la matrice et non des transformations élémentaires qui donnent (15.2).

La différence entre le nombre de termes positifs et le nombre de termes négatifs $p-(r-p)$ dans (17.5) est la signature de la forme quadratique. En corollaire au théorème IV on a :

Théorème V. Deux formes quadratiques réelles à n variables sont équivalentes sur le corps des réels si et seulement si elles ont même rang et même indice on même rang et même signature.

FORMES QUADRATIQUES COMPLEXES. Soit la forme quadratique complexe ${}^tXAX$ réduite par une application non singulière à la forme (17.3). Il est clair que l'application non singulière

$$\begin{aligned} z_i &= \sqrt{h_i}\,y_i\,, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \\ z_j &= y_j \quad , \qquad (j = r+1, r+2, \ldots, n) \end{aligned}$$

ou

$$Y = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{h_1}}, \frac{1}{\sqrt{h_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{h_r}}, 1, 1, \ldots, 1\right) Z$$

transforme (17.3) en

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 \tag{17.6}$$

Ainsi,

Théorème VI. Toute forme quadratique sur le corps des complexes, de rang r, peut être réduite par une application non singulière sur le corps des complexes à la forme canonique (17.6).

Théorème VII. Deux formes quadratiques complexes à n variables sont équivalentes sur le corps des complexes si et seulement si elles ont même rang.

FORMES DEFINIES ET SEMI-DEFINIES. Une forme quadratique réelle non singulière $q = {}^tXAX$, $\det A \neq 0$, à n variables, est définie positive si son rang et son indice sont égaux. Ainsi, dans le corps des réels, une forme quadratique définie positive peut être réduite à $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$; pour tout ensemble non trivial de valeurs de x, on a $q > 0$.

Une forme quadratique réelle singulière $q = {}^tXAX$, $\det A = 0$, est semi-definie positive si son rang et son indice sont égaux, c'est-à-dire $r = p < n$. Ainsi, dans le corps des réels, une forme quadratique semi-définie positive peut être réduite à $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$, $r < n$; pour tout ensemble de valeurs de x, on a $q \geqslant 0$.

Une forme quadratique réelle non singulière $q = {}^tXAX$ est définie négative si son indice $p = 0$, c'est-à-dire si $r = n$, $p = 0$. Ainsi, dans le corps des réels, une forme définie négative peut être réduite à $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_r^2$; pour tout ensemble de valeurs de x, on a $q < 0$.

Une forme quadratique réelle singulière $q = {}^tXAX$ est semi-définie négative si son indice $p = 0$, c'est-à-dire si $r < n$, $p = 0$. Ainsi, dans le corps des réels, une forme semi-définie négative peut être réduite à $-y_1^2 - y_2^2 - \cdots y_r^2$; pour tout ensemble de valeurs de x, on a $q \leqslant 0$.

Il est clair que si q est définie négative (semi-définie), alors $-q$ est définie positive (semi-définie).

Pour des formes quadratiques positives, on a :

Théorème VIII. Si $q = {}^tXAX$ est définie positive, alors $\det A > 0$.

MINEURS PRINCIPAUX. Un mineur d'une matrice A est un mineur principal s'il est obtenu en supprimant certaines lignes et les colonnes correspondantes de A. Ainsi, les éléments diagonaux d'un mineur principal de A sont des éléments diagonaux de A.

Dans le problème 6, on montre :

Théorème IX. Toute matrice symétrique de rang r a au moins un mineur principal d'ordre r différent de zéro.

MATRICES DEFINIES ET SEMI-DEFINIES. La matrice A d'une forme quadratique réelle $q = {}^tXAX$ est dite définie ou semi-définie selon que la forme quadratique est définie ou semi-définie.

Théorème X. Une matrice réelle symétrique A est définie positive si et seulement si il existe une matrice non singulière C telle que $A = {}^tCC$.

Théorème XI. Une matrice réelle symétrique A de rang r est semi-définie positive si et seulement si il existe une matrice C de rang r telle que $A = {}^tCC$.

Voir problème 7.

Théorème XII. Si A est définie positive, tout mineur principal de A est positif.

Voir problème 8.

Théorème XIII. Si A est semi-définie positive, tout mineur principal de A est positif ou nul.

FORMES QUADRATIQUES REGULIERES. On définit, pour une matrice symétrique $A = [a_{ij}]$ sur F, les mineurs relatifs à a_{11} par

$$(17.7) \qquad p_0 = 1, \quad p_1 = a_{11}, \quad p_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad p_n = |A|$$

Dans le problème 9, on démontre:

Théorème XIV. Toute matrice carrée d'ordre n symétrique non singulière A peut être remaniée par échange de certaines lignes et des colonnes correspondantes, de sorte que, p_{n-1} et p_{n-2} ne soient pas nuls tous les deux.

Théorème XV. Si A est une matrice symétrique et si $p_{n-2}p_n \neq 0$, mais que $p_{n-1} = 0$, alors p_{n-2} et p_n sont de signes opposés.

Exemple 5. Pour la forme quadratique ${}^tXAX = {}^tX\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}X$, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = |A| = 1$.

ici, $\alpha_{33} \neq 0$. La transformation $X = K_{34}\tilde{X}$ conduit à

$$\text{(i)} \qquad {}^t\tilde{X}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}\tilde{X}$$

pour laquelle $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = -1$, $p_4 = 1$. Ainsi, pour (i), p_2 et p_3 ne sont pas tous deux nuls.

Une matrice symétrique A de rang r est disposée régulièrement si l'on n'a pas deux p consécutifs de la suite $p_0, p_1, \ldots, p_r$ nuls. Lorsque A est disposée régulièrement, on dit que la forme quadratique ${}^tXAX$ est régulière. Dans l'exemple 5, la forme donnée n'est pas régulière. La forme quadratique (i) du même exemple est régulière.

Soit A une matrice symétrique de rang r. D'après le théorème IX, A contient au moins un mineur principal M carré d'ordre r, nul, et dont les éléments peuvent être placés dans le coin supérieur gauche de A. Alors, $p_r \neq 0$ mais $p_{r+1} = p_{r+2} = \ldots = p_n = 0$. D'après le théorème XIV, les r premières lignes et les r premières colonnes peuvent être disposées de façon qu'au moins l'un de p_{r-1} ou de p_{r-2} soit non nul. Si $p_{r-1} \neq 0$ et $p_{r-2} = 0$, on applique la méthode précédente à la matrice de p_{r-1} ; si $p_{r-2} \neq 0$, on applique la méthode à la matrice de p_{r-2} ; etc ; et ceci jusqu'à ce que M soit régulièrement disposée. Ainsi,

Théorème XVI. Toute matrice symétrique (forme quadratique) de rang r peut être régulièrement disposée.

Voir problème 10.

Théorème XVII. Une forme quadratique réelle ${}^tXAX$ est définie positive si et seulement si son rang est égal à n et tous les mineurs principaux relatifs à a_{11} sont positifs.

Théorème XVIII. Une forme quadratique réelle ${}^tXAX$ de rang r est semi-définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux $p_0, p_1, \ldots, p_r$ est positif.

METHODE DE REDUCTION DE KRONECKER. La méthode de Kronecker pour réduire une forme quadratique en une autre forme quadratique dans laquelle seuls apparaissent les carrés des variables est basée sur le

Théorème XIX. Si $q = {}^tXAX$ est une forme quadratique sur F à n variables, de rang r, alors par une application linéaire non singulière sur F, on peut la transformer en $q' = {}^t\widetilde{X}B\widetilde{X}$ dans laquelle un mineur C de A à r lignes, non singulier, occupe le coin supérieur gauche de B. De plus, il existe une application linéaire non singulière sur F qui réduit q à $q'' = {}^t\widetilde{X}C\widetilde{X}$ où q'' est une forme quadratique non singulière à r variables.

Théorème XX. Si $q = {}^tXAX$ est une forme quadratique non singulière sur F à n variables et si $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$, l'application non singulière

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{in}y_n, & (i = 1, 2, \ldots, n-1) \\ x_n = \alpha_{nn}y_n \end{cases}$$

ou

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix} Y$$

transforme q en $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}y_iy_j + p_{n-1}p_ny_n^2$ et l'on a isolé un terme carré parmi les variables.

Exemple 6. Pour la forme quadratique ${}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} X$, $p_2 = \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

l'application non singulière

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{13}y_3 = y_1 \quad - 8y_3 \\ x_2 = y_2 + \alpha_{23}y_3 = \quad y_2 - 8y_3 \\ x_3 = \quad \alpha_{33}y_3 = \quad - 2y_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y$$

réduit ${}^tXAX$ à

$${}^tY \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -8 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} Y = Y' \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{bmatrix} Y$$

où la variable y_3 n'apparaît que par son carré.

Théorème XXI. Si $q = {}^tXAX$ est une forme quadratique non singulière sur F et si $\alpha_{n-1,n-1} = \alpha_{nn} = 0$ mais $\alpha_{n,n-1} \neq 0$, l'application non singulière sur F:

$$\begin{cases} x_i = y_i + \alpha_{i,n-1}y_{n-1} + \alpha_{in}y_n, & (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1,n}y_n, \quad x_n = \alpha_{n,n-1}y_{n-1} \end{cases}$$

ou

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1,n-1} & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{2,n-1} & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{n-2,n-1} & \alpha_{n-2,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \alpha_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} Y$$

transforme q en $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}y_iy_j + 2\alpha_{n,n-1}p_ny_{n-1}y_n$.

La transformation ultérieure

$$\begin{cases} y_i = z_i, & (i = 1, 2, \dots, n-2) \\ y_{n-1} = z_{n-1} - z_n \\ y_n = z_{n-1} + z_n \end{cases}$$

conduit à $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2} a_{ij}z_iz_j + 2\alpha_{n,n-1}p_n(z_{n-1}^2 - z_n^2)$ où l'on a isolé deux termes carrés de signes opposés.

Exemple 7. Pour la forme quadratique

$$^tXAX = {}^tX\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}X$$

$\alpha_{22} = \alpha_{33} = 0$ mais $\alpha_{32} = -1 \neq 0$. L'application non singulière

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ x_2 = \alpha_{23}y_3 \\ x_3 = \alpha_{32}y_2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}Y$$

réduit ^tXAX à

$$^tY\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}Y = {}^tY\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}Y = {}^tYBY = y_1^2 + 2y_2y_3$$

L'application

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3 \\ y_3 = z_2 + z_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}Z$$

transforme ^tYBY en

$$^tZ\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}Z = {}^tZ\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}Z = z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2$$

Considérons maintenant une forme quadratique de rang r à n variables. D'après le théorème XIX, on peut réduire q à $q_1 = {}^tXAX$ où A comporte un mineur carré d'ordre r non singulier dans le coin supérieur gauche et des zéros ailleurs. D'après le théorème XVI, A peut être disposée régulièrement.

Si $p_{r-1} = 0$, on peut utiliser le théorème XX pour isoler un terme carré

$$p_{r-1}p_ry_r^2 \tag{17.8}$$

Si $p_{r-1} = 0$ mais que $\alpha_{r-1,r-1} \neq 0$, des échanges des deux dernières lignes et des deux dernières colonnes conduisent à une matrice dans laquelle les nouveaux $p_{r-1} = \alpha_{r-1,r-1} \neq 0$.

Puisque $p_{r-2} \neq 0$, on peut utiliser deux fois le théorème XX pour isoler les deux termes carrés

(17.9) $$p_{r-2}\alpha_{r-1,\,r-1}y_{r-1}^2 \quad + \quad \alpha_{r-1,\,r-1}p_r y_r^2$$

Ces termes sont de signes opposés puisque p_{r-2} et p_r sont de signes contraires (théorème XV).

Si $p_{r-1} = 0$ et $\alpha_{r-1,r-1} = 0$ alors, (voir problème 9) $\alpha_{r,r-1} \neq 0$ et on peut utiliser le théorème XXI pour isoler deux termes carrés :

(17.10) $$2\alpha_{r,\,r-1}p_r(y_{r-1}^2 - y_r^2)$$

de signes contraires.

On peut répéter ce procédé jusqu'à ce que la forme quadratique donnée soit réduite à une autre forme quadratique qui ne contienne que les carrés des variables.

Dans (17.8), le terme isolé sera négatif ou positif selon que la suite p_{r-1}, p_r changera de signe ou non. Dans (17.9) et (17.10), on voit que les suites $p_{r-2}, \alpha_{r-1,r-1}, p_r$ et $p_{r-2}, \alpha_{r,r-1}, p_r$ présentent une seule variation de signe, ceci indépendamment des signes de $\alpha_{r-1,r-1}$ et de $\alpha_{r,r-1}$.

Théorème XXII. Si on réduit $q = {}^tXAX$, forme quadratique régulière de rang r, à la forme canonique par la méthode de Kronecker, le nombre de termes positifs est exactement égal au nombre de signes conservés et le nombre de termes négatifs est exactement égal au nombre de changements de signe dans la suite $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r$ où un zéro dans une suite est compté soit comme terme positif, soit comme terme négatif, mais doit être compté.

Voir problèmes 11-13.

FACTORISATION DES FORMES QUADRATIQUES. Soit ${}^tXAX \neq 0$ une forme quadratique à coefficients complexes donnée. On suppose que ${}^tXAX$ se factorise de la façon suivante

(i) $${}^tXAX \;=\; (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)(b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n)$$

Si les facteurs sont linéairement indépendants, il existe au moins une matrice non singulière $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$.

On suppose que les variables et leurs coefficients sont renumérotés de façon

que $\begin{bmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{bmatrix}$ devienne $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$.

L'application non singulière

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ y_3 = x_3, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

transforme (i) en y_1y_2, de rang 2. Ainsi, (i) est de rang 2.

Si les facteurs sont linéairement dépendants, il existe au moins un élément $a_i \neq 0$. Supposons les variables et leurs coefficients renumérotés de façon que a_i soit a_1. L'application non singulière

$$\begin{cases} y_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ y_2 = x_2, \;\ldots,\; y_n = x_n \end{cases}$$

transforme (i) en $\dfrac{b_1}{a_1}y_1^2$, de rang 1. Donc, (i) est de rang 1.

Réciproquement, si ${}^tXAX$ est de rang 1 ou 2, on peut la réduire respectivement par le théorème VI à y_1^2 ou a $y_1^2 + y_2^2$, chacun de ces termes pouvant s'écrire dans le corps des complexes comme produit de deux facteurs linéaires. On a ainsi démontré:

Théorème XXIII. Une forme quadratique ${}^tXAX \neq 0$ à coefficients complexes est le produit de deux facteurs linéaires si et seulement si son rang r est inférieur ou égal à 2.

PROBLEMES RESOLUS

1. Réduire $q = {}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 8 & 10 & -8 \end{bmatrix} X$ à la forme (17.3)

De l'exemple 1, chapitre 15,

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 10 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -10 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [D \mid {}^tP]$$

Ainsi l'application $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -10 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} Y$ réduit q à la forme demandée $y_1^2 - y_2^2 + 4y_3^2$.

2. Réduire $q = {}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X$ à la forme (17.3)

Nous trouvons :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = [D \mid {}^tP]$$

Ainsi, l'application $X = PY = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ réduit q à $y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$.

3. Réduction de Lagrange.

(*a*)
$$\begin{aligned} q &= 2x_1^2 + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 8x_1x_2 + 12x_1x_3 + 8x_1x_4 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)\} + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 \\ &= 2\{x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 3x_3 + 2x_4) + (2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2\} \\ &\qquad + 5x_2^2 + 19x_3^2 - 24x_4^2 + 18x_2x_3 - 8x_2x_4 - 16x_3x_4 - 2(2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3\{x_2^2 + 2x_2(x_3 + 4x_4)\} + x_3^2 - 32x_4^2 - 40x_3x_4 \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4)^2 - 3(x_2 + x_3 + 4x_4)^2 + 4(x_3 - 2x_4)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ y_2 = x_2 + x_3 + 4x_4 \\ y_3 = x_3 - 2x_4 \\ y_4 = x_4 \end{cases}$ réduit q à $2y_1^2 - 3y_2^2 + 4y_3^2$.

(*b*) Pour la forme quadratique du problème 2, nous avons

$$q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 4x_3^2 = (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 + 8x_2x_3$$

Puisqu'il n'y a pas de terme en x_2^2 ni en x_3^2 mais un terme en x_2x_3, nous utilisons l'application non singulière :

(i) $$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2, \quad x_3 = z_2 + z_3$$

pour obtenir

$$q = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8z_2^2 + 8z_2z_3 = (z_1+4z_2+2z_3)^2 + 8(z_2+\tfrac{1}{2}z_3)^2 - 2z_3^2 = y_1^2 + 8y_2^2 - 2y_3^2$$

Or $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Z$ et de (i), $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$. Par suite $Y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} X$.

Ainsi, l'application non singulière $X = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} Y$ effectue la réduction.

4. En utilisant le résultat du problème 2

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

et en appliquant les transformations $H_2(\frac{1}{4}\sqrt{2}), K_2(\frac{1}{4}\sqrt{2})$ et $H_3(\frac{1}{2}\sqrt{2}), K_3(\frac{1}{2}\sqrt{2})$, nous avons :

$$[A \mid I] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{C} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right] = [C \mid {}^tQ]$$

Ainsi, l'application $X = QY = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \end{bmatrix} Y$ réduit $q = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} X$ à la forme canonique $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

5. Montrer que si une forme quadratique réelle q est transformée par deux applications non singulières en deux formes réduites distinctes :

(i) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

et

(ii) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_q^2 - y_{q+1}^2 - y_{q+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

alors $p = q$.

Supposons $q > p$. Soit $X = FY$ l'application qui transforme q en (i) et soit $X = GY$ l'application qui transforme q en (ii). Alors :

$$Y = F^{-1}X = \left.\begin{matrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{matrix}\right\}$$

et

$$Y = G^{-1}X = \left.\begin{matrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \cdots + c_{nn}x_n \end{matrix}\right\}$$

transforment respectivement (i) et (ii) de nouveau en q. Ainsi:

(iii)
$$\begin{aligned}
&(b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n)^2 + \cdots + (b_{p1}x_1+b_{p2}x_2+\cdots+b_{pn}x_n)^2\\
&\quad - (b_{p+1,1}x_1+b_{p+1,2}x_2+\cdots+b_{p+1,n}x_n)^2 - \cdots - (b_{r1}x_1+b_{r2}x_2+\cdots+b_{rn}x_n)^2\\
&= (c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1n}x_n)^2 + \cdots + (c_{q1}x_1+c_{q2}x_2+\cdots+c_{qn}x_n)^2\\
&\quad - (c_{q+1,1}x_1+c_{q+1,2}x_2+\cdots+c_{q+1,n}x_n)^2 - \cdots - (c_{r1}x_1+c_{r2}x_2+\cdots+c_{rn}x_n)^2
\end{aligned}$$

Considérons les $r - q + p < r$ équations :

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n = 0 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{p1}x_1 + b_{p2}x_2 + \cdots + b_{pn}x_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_{q+1,1}x_1 + c_{q+1,2}x_2 + \cdots + c_{q+1,n}x_n = 0 \\ c_{q+2,1}x_1 + c_{q+2,2}x_2 + \cdots + c_{q+2,n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n = 0 \end{cases}$$

D'après le théorème **IV**, chapitre 10, elles admettent une solution non triviale, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Quand on substitue cette solution à (iii), on obtient :

$$\begin{aligned}
&- (b_{p+1,1}\alpha_1 + b_{p+1,2}\alpha_2 + \cdots + b_{p+1,n}\alpha_n)^2 - \cdots\cdots - (b_{r1}\alpha_1 + b_{r2}\alpha_2 + \cdots + b_{rn}\alpha_n)^2\\
&\quad = (c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \cdots + c_{1n}\alpha_n)^2 + \cdots\cdots + (c_{q1}\alpha_1 + c_{q2}\alpha_2 + \cdots + c_{qn}\alpha_n)^2
\end{aligned}$$

Ceci entraîne que tous les termes carrés sont nuls. Mais alors soit F, soit G est singulière, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ainsi, $q \leqslant p$. En reprenant cette démonstration pour $q < p$ nous arriverons à une contradiction. Par suite $q = p$.

6. Montrer que toute matrice symétrique A de rang r admet au moins un mineur principal d'ordre r différent de zéro.

Puisque A est de rang r, elle admet au moins un mineur carré d'ordre r non nul. Supposons que celui-ci ait pour lignes $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Faisons passer ces lignes au-dessus des autres lignes pour qu'elles deviennent les r premières lignes de la matrice et déplaçons de même les colonnes $i_1, i_2, \ldots, i_r$ pour devenir les r premières colonnes.

Les nouvelles r premières lignes sont linéairement indépendantes tandis que les autres lignes sont des combinaisons linéaires de celles-ci. En prenant des combinaisons linéaires des r premières lignes convenables et en les ajoutant aux autres lignes, les $n - r$ lignes restantes peuvent être transformées en zéros. Puisque A est symétrique, les mêmes opérations sur les colonnes réduiront les $n - r$ dernières colonnes en zéros. Par suite nous aurons :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_r} & \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_r} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{i_ri_1} & a_{i_ri_2} & \cdots & a_{i_ri_r} & \\ \hline & & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

dans laquelle seul un mineur non nul se trouve dans le coin supérieur gauche de la matrice. C'est un mineur principal de A.

7. Montrer qu'une matrice A réelle symétrique de rang r et semi-définie positive si et seulement s'il existe une matrice C de rang r telle que $A = {}^tCC$.

Puisque A est de rang r, sa forme canonique est $N_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, il existe une matrice B non singulière telle que $A = {}^tBN_1B$. Puisque ${}^tN_1 = N_1 = N_1^2$, nous avons $A = {}^tBN_1B = {}^tBN_1N_1B = {}^tB\,{}^tN_1N_1B$. Posons $C = N_1B$; alors C est de rang r et $A = {}^tCC$.

Réciproquement, soit C une matrice réelle carrée d'ordre n et de rang r. Alors $A = {}^tCC$ est de rang $s \leqslant r$. Supposons que sa forme canonique soit

$$N_2 = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_s, 0, 0, \ldots, 0)$$

où d_i est soit $+1$ soit -1. Alors il existe une matrice E réelle non singulière telle que ${}^tE\,({}^tCC)\,E = N_2$. Posons $CE = B = [b_{ij}]$. Puisque ${}^tBB = N_2$, nous avons

$$b_{i1}^2 + b_{i2}^2 + \cdots + b_{in}^2 = d_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

et

$$b_{j1}^2 + b_{j2}^2 + \cdots + b_{jn}^2 = 0, \qquad (j = s+1, s+2, \ldots, n)$$

Evidemment, tout $d_i > 0$ et A est semi-définie positive.

8. Montrer que si A est définie positive, alors tout mineur principal de A est positif.

Soit $q = {}^tXAX$. Le mineur principal de A obtenu en supprimant sa $i^{\text{ème}}$ ligne et sa $i^{\text{ème}}$ colonne est la matrice A_i de la forme quadratique q_i obtenue à partir de q en posant $x_i = 0$. Or chaque valeur de q_i pour les ensembles non triviaux de valeurs de ses variables est aussi une valeur de q et par suite est positive. Ainsi, A_i est définie positive.

Cette démonstration peut être reprise pour les mineurs principaux $A_{ij}, A_{ijk}, \ldots$ obtenus à partir de A en supprimant deux, trois, . . lignes et les colonnes correspondantes de A.

D'après le théorème VI, $A_i > 0$, $A_{ij} > 0, \ldots$ Par suite, tout mineur principal est positif.

9. Montrer qu'en échangeant certaines lignes et les colonnes correspondantes d'une matrice $A = [a_{ij}]$ carrée d'ordre n et non singulière, on peut la transformer de façon que p_{n-1} et p_{n-2} ne soient pas nuls tous les deux en même temps.

Il est clair que le théorème est vrai pour A d'ordre 1 ou 2. Cependant, c'est encore vrai pour A d'ordre $n > 2$ lorsque $p_{n-1} = \alpha_{nn} \neq 0$. Supposons $\alpha_{nn} = 0$; alors : (a) soit il existe un $\alpha_{ii} \neq 0$, (b) soit tous les $\alpha_{ii} \neq 0$.

Supposons (a) qu'il existe un $\alpha_{ii} \neq 0$. En plaçant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne à la dernière ligne et à la dernière colonne respectivement, la nouvelle matrice admet $p_{n-1} = \alpha_{ii} \neq 0$.

Supposons (b) que tous les α_{ii} soient nuls. Puisque $|A| \neq 0$, il existe au moins un $\alpha_{ni} \neq 0$. Plaçons la $i^{\text{ème}}$ ligne à la place de la $(n-1)^{\text{ème}}$ ligne et la $i^{\text{ème}}$ colonne à la place de la $(n-1)^{\text{ème}}$ colonne. Dans la nouvelle matrice $\alpha_{n-1,n} = \alpha_{n,n-1} \neq 0$. D'après **(6.6)**, nous avons :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{n-1,n-1} & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha_{n-1,n} \\ \alpha_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = -\alpha_{n-1,n}^2 = p_{n-2}p_n$$

et $p_{n-2} \neq 0$.

Remarquer que ceci démontre également le théorème XV.

10. Renuméroter les variables de façon que : $q = {}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$ soit régulière.

Ici $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = -4$, $p_4 = -3$. Puisque $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 \neq 0$, nous examinons la matrice $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ de p_3. Le cofacteur $B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. L'échange des seconde et troisième lignes et celui des seconde et troisième colonnes de A conduisent à :

$$^tX \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$$

pour laquelle $p_0 = 1,\ p_1 = 0,\ p_2 = -4,\ p_3 = -4,\ p_4 = -3$. Ici, x_2 a été rénuméroté en x_3 et x_3 en x_2.

11. Réduire par la méthode de Kronecker $q = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} X$.

Ici $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = -3,\ p_3 = 20,\ p_4 = -5$ et q est régulière. La suite des p présente trois variations de signes ; la forme réduite aura un terme positif et trois termes négatifs.

Puisque chaque $p_i \neq 0$, le théorème XIX nous conduira à la forme réduite :

$$p_0p_1y_1^2 + p_1p_2y_2^2 + p_2p_3y_3^2 + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 - 3y_2^2 - 60y_3^2 - 100y_4^2$$

12. Réduire par la méthode de Kronecker $q = {}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} X$.

Ici A est de rang 3 et $\alpha_{33} \neq 0$. L'échange des deux dernières lignes et celui des deux dernières colonnes transforment A en $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$ dans laquelle $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \neq 0$. Puisque B est de rang 3, B peut être réduite à $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Donc q a été réduite à ${}^t\tilde{X}C\tilde{X} = {}^t\tilde{X} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \tilde{X}$ pour laquelle $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = -1$. La forme réduite possédera deux termes positifs et un terme négatif. Puisque $p_2 = 0$ mais $\gamma_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, la forme réduite sera d'après **(16.8)**

$$p_0p_1y_1^2 + p_1\gamma_{22}y_2^2 + \gamma_{22}p_3y_3^2 = y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$$

13. Réduire par la méthode de Kronecker $q = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$.

Ici $p_0 = 1,\ p_1 = 1,\ p_2 = 0,\ p_3 = -9,\ p_4 = 27$; la forme réduite possédera deux termes positifs et deux négatifs.

Considérons la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ de p_3. Puisque $\beta_{33} = 0$ mais $\beta_{32} = -3 \neq 0$, la forme réduite d'après **(16.8)** et **(16.9)** sera :

$$p_0p_1y_1^2 + 2\beta_{32}p_3(y_2^2 - y_3^2) + p_3p_4y_4^2 = y_1^2 + 54y_2^2 - 54y_3^2 - 243y_4^2$$

14. Montrer que pour un ensemble de vecteurs $X_1, X_2, \ldots, X_p$, à n composantes réelles on a :

$$|G| = \begin{vmatrix} X_1\cdot X_1 & X_1\cdot X_2 & \cdots & X_1\cdot X_p \\ X_2\cdot X_1 & X_2\cdot X_2 & \cdots & X_2\cdot X_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_p\cdot X_1 & X_p\cdot X_2 & \cdots & X_p\cdot X_p \end{vmatrix} \geq 0$$

l'égalité a lieu si et seulement si l'ensemble est linéairement dépendant.

(*a*) Supposons que les X_i soient linéairement indépendants et posons $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_p] \neq 0$. Alors

$$Z = \sum_{i=1}^{p} X_i x_i \neq 0 \quad \text{et} \quad 0 < Z\cdot Z = (\sum_{i=1}^{p} X_i x_i)\cdot(\sum_{j=1}^{p} X_j x_j) = {}^tX(X_i X_j)X = {}^tX(X_i\cdot X_j)X = {}^tXGX.$$

Puisque la forme quadratique est définie positive, $|G| > 0$.

(*b*) Supposons que les X_i soient dépendants. Alors il existe des scalaires $k_1, k_2, \ldots, k_p$, non tous nuls, tels que $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i = 0$ et par suite tels que :

$$X_j\cdot\xi = k_1 X_j\cdot X_1 + k_2 X_j\cdot X_2 + \cdots + k_p X_j\cdot X_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

Ainsi le système d'équations homogènes

$$X_j\cdot X_1 x_1 + X_j\cdot X_2 x_2 + \cdots + X_j\cdot X_p x_p = 0, \qquad (j = 1,2,\ldots,p)$$

admet une solution non triviale $x_i = k_i, (i = 1, 2, \ldots, p)$ et $|G| = 0$.

Nous avons démontré que $|G| \geqslant 0$. Pour démontrer la réciproque de (*b*), nous avons besoin seulement de supposer $|G| = 0$ et de reprendre les étapes de (*b*) en sens inverse pour obtenir $X_j\cdot\xi = 0$, $(j = 1, 2, \ldots p)$ où $\xi = \sum_{i=1}^{p} k_i X_i$. Ainsi $\sum_{j=1}^{p} k_j X_j\cdot\xi = \xi\cdot\xi = 0$, $\xi = 0$, et les vecteurs donnés X_j sont linéairement dépendants.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

15. Ecrire les formes quadratiques suivantes sous forme de matrice.

(*a*) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$ (*b*) $2x_1^2 - 6x_1x_2 + x_3^2$ (*c*) $x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

Réponse : (*a*) ${}^tX\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}X$ (*b*) ${}^tX\begin{bmatrix}2&-3&0\\-3&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}X$ (*c*) ${}^tX\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-2&-4\\3&-4&-3\end{bmatrix}X$

16. Ecrire sous sa forme développée la forme quadratique en x_1, x_2, x_3 dont la matrice est $\begin{bmatrix}2&-3&1\\-3&2&4\\1&4&-5\end{bmatrix}$.

Réponse : $2x_1^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 8x_2x_3 - 5x_3^2$

17. Réduire par la méthode du problème 1 et par la réduction de Lagrange :

(*a*) ${}^tX\begin{bmatrix}1&2&4\\2&6&-2\\4&-2&18\end{bmatrix}X$ (*b*) ${}^tX\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&3&-3\\1&3&3&1\\1&-3&1&-3\end{bmatrix}X$ (*c*) ${}^tX\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}X$ (*d*) ${}^tX\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-2\\1&-2&3\end{bmatrix}X$

Réponse : (*a*) $y_1^2 + 2y_2^2 - 48y_3^2$ (*b*) $y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$ (*c*) $y_1^2 - y_2^2 + 8y_3^2$ (*d*) $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

Indication : Dans (*c*) et (*d*) utiliser $x_1 = z_3$, $x_2 = z_1$, $x_3 = z_2$.

18. (*a*) Montrer que ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X = {}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} X$ mais que les matrices ont des rangs différents.

(*b*) Montrer que la matrice symétrique d'une forme quadratique est unique.

19. Montrer que sur le corps des réels $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3$ et $9x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 8x_2x_3$ sont équivalentes.

20. Montrer qu'une matrice réelle symétrique est définie positive (négative) si et seulement si elle est congruente sur le corps des réels à $I\,(-I)$.

21. (*a*) Montrer que si deux formes quadratiques réelles de mêmes variables sont définies positives, il en est de même de leur somme.

(*b*) Montrer que si q_1 est une forme définie positive en $x_1, x_2, \ldots, x_s$ et q_2 une forme définie positive en $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$, alors $q = q_1 + q_2$ est une forme définie positive en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

22. Montrer que si C est une matrice réelle non singulière, alors ${}^tCC$ est définie positive.
Indications : Considérer ${}^tXIX = {}^tY{}^tCICY$.

23. Montrer que toute matrice A définie positive peut s'écrire $A = {}^tCC$. (Les Problèmes 23 et 24 complètent la démonstration du théorème X).
Indication : Considérer ${}^tDAD = I$.

24. Montrer que si une matrice A réelle symétrique est définie positive, il en est de même de A^p où p est un entier positif.

25. Montrer que si A est une matrice réelle symétrique définie positive et si B et C vérifient ${}^tBAB = I$ et $A = {}^tCC$, alors CB est orthogonale.

26. Montrer que tout mineur principal d'une matrice A semi-définie positive est égal ou supérieur à zéro.

27. Montrer que $ax_1^2 - 2bx_1x_2 + cx_2^2$ est définie positive si et seulement si $a > 0$ et $|A| = ac - b^2 > 0$.

28. Vérifier l'effet des transformations des théorèmes XX et XXI.

29. En renumérotant éventuellement les variables et en utilisant la réduction de Kronecker, transformer chacune des formes quadratiques suivantes en sa forme canonique.

(*a*) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X$ (*c*) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} X$ (*e*) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X$ (*g*) ${}^tX \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} X$

(*b*) ${}^tX \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} X$ (*d*) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} X$ (*f*) ${}^tX \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} X$ (*h*) ${}^tX \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} X$

Indication : Dans (*g*), renuméroter les variables pour obtenir (*e*) ; faire comme dans le problème 17 (*d*).

Réponses :
(*a*) $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1$; $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$
(*b*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2$
(*c*) $y_1^2 - 4y_2^2 + 4y_3^2 - 3y_4^2$
(*d*) $y_1^2 - 8y_2^2$
(*e*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{22} = -1$, $p_3 = -1$; $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$
(*f*) $p_0 = p_1 = 1$, $\alpha_{23} = -4$, $p_3 = -16$; $y_1^2 + 128y_2^2 - 128y_3^2$
(*g*) Voir (*e*).
(*h*) $4y_1^2 - 16y_2^2 + 16y_3^2 + 12y_4^2$

30. Montrer que $q = x_1^2 - 6x_2^2 - 6x_3^2 - 3x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_1x_4 + 13x_2x_3 - 11x_2x_4 + 9x_3x_4$ peut se factoriser.

Formes hermitiennes

DEFINITION. On appelle "forme hermitienne", la forme définie par :

(18.1) $$h = {}^t\overline{X}HX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij}\overline{x}_i x_j, \qquad \overline{h}_{ij} = h_{ji}$$

où H est hermitienne et les composantes du vecteur X sont des complexes. Le rang de H est appelé le rang de la forme hermitienne. Si le rang r est $< n$, la forme est dite singulière, sinon elle est dite non singulière.

Si H et X sont réels, (18.1) est une forme quadratique réelle ; nous trouverons donc ici des théorèmes analogues à ceux du Chapitre 17 et leurs démonstrations seront très peu différentes de celles des théorèmes du Chapitre précédent.

Puisque H est hermitienne, tout h_{ii} est réel et tout $h_{ii}\,\overline{x}_i\,x_i$ est réel. De plus, pour les autres termes nous avons :

$$h_{ij}\,\overline{x}_i\,x_j + h_{ji}\,\overline{x}_j\,x_i = h_{ij}\,\overline{x}_i\,x_j + \overline{h}_{ij}\,x_i\,\overline{x}_j$$

le dernier membre de cette égalité est réel. Ainsi :

Théorème I. Les valeurs d'une forme hermitienne sont réelles.

L'application linéaire non singulière $X = BY$ transforme la forme hermitienne (18.1) en une autre forme hermitienne

(18.2) $${}^t(\overline{BY})\,HBY = {}^t\overline{Y}({}^t\overline{B}HB)\,Y$$

Deux formes hermitiennes de mêmes variables x_i sont équivalentes si et seulement si il existe une application linéaire non-singulière $X = BY$ qui transforme l'une en l'autre. Puisque ${}^t\overline{B}HB$ et H sont congruentes au sens d'Hermite nous avons :

Théorème II. Le rang d'une forme hermitienne est invariant par une application linéaire non singulière.

Théorème III. Deux formes hermitiennes sont équivalentes si et seulement si leurs matrices sont congruentes au sens d'Hermite.

REDUCTION A LA FORME CANONIQUE. Une forme hermitienne (18.1) de rang r peut être réduite à la forme diagonale :

(18.3) $$k_1\overline{y}_1 y_1 + k_2\overline{y}_2 y_2 + \cdots + k_r\overline{y}_r y_r, \qquad k_i \neq 0 \ ;\ k_i \text{ est réel}$$

par une application linéaire non singulière $X = BY$. Dans (18.2) la matrice B peut être considérée comme le produit des matrices élémentaires colonnes tandis que ${}^t\overline{B}$ est le produit, dans l'ordre inverse des matrices élémentaires lignes conjuguées.

Par une nouvelle transformation linéaire (18.3) peut être réduite à la forme canonique [voir (15.6)].

(18.4) $$\overline{z}_1 z_1 + \overline{z}_2 z_2 + \cdots + \overline{z}_p z_p - \overline{z}_{p+1} z_{p+1} - \cdots - \overline{z}_r z_r$$

d'indice p et de signature $p-(r-p)$. Ici, aussi, p dépend de la forme donnée et non de la transformation qui permet de réduire la forme à (18.4).

Théorème IV. Deux formes hermitiennes de n variables chacune sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang et le même indice ou le même rang et la même signature.

FORMES DEFINIES ET SEMI-DEFINIES. Une forme hermitienne non singulière $h = {}^t\overline{X}HX$ de n variables est dite "définie positive" si son rang et son indice sont égaux à n. Ainsi, une telle forme peut être réduite à $\overline{y}_1\, y_1 + \overline{y}_2\, y_2 + \cdots + \overline{y}_n\, y_n$ de telle sorte que pour $X \neq 0$ on aura $h > 0$.

Une forme hermitienne singulière $h = {}^t\overline{X}HX$ est dite "semi-définie positive" si son rang et son indice sont égaux, c'est-à-dire, $r = p < n$. Une telle forme peut être réduite à : $\overline{y}_1\, y_1 + \overline{y}_2\, y_2 + \cdots + \overline{y}_r\, y_r$, $r < n$, de telle sorte que l'on aura $h \geqslant 0$.

La matrice H de la forme hermitienne ${}^t\overline{X}HX$ est dite "définie positive" ou "semi-définie positive" suivant que la forme est "définie positive" ou "semi-définie positive".

Théorème V. Une forme hermitienne est définie positive si et seulement si il existe une matrice non singulière C telle que $H = {}^t\overline{C}C$.

Théorème VI. Si H est définie positive, tout mineur principal de H est positif, et réciproquement.

Théorème VII. Si H est semi-définie positive, tout mineur principal de H est non-négatif, et réciproquement.

PROBLEMES RESOLUS

1. Réduire ${}^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2-3i \\ 1-2i & 5 & -4-2i \\ 2+3i & -4+2i & 13 \end{bmatrix}X$ à la forme canonique (18.4).

A partir du problème 7 du Chapitre 15, nous avons :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+2i & 2-3i & 1 & 0 & 0 \\ 1-2i & 5 & -4-2i & 0 & 1 & 0 \\ 2+3i & -4+2i & 13 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{HC} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & -1 & (-4-4i)/\sqrt{10} & i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{array}\right]$$

Ainsi, la transformation linéaire non singulière suivante :

$$X = BY = \begin{bmatrix} 1 & 2/\sqrt{10} & (-4+4i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -i/\sqrt{10} \\ 0 & -i/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix} Y$$

permet de réduire la forme hermitienne donnée à : $\overline{y}_1\, y_1 + \overline{y}_2\, y_2 - \overline{y}_3\, y_3$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

2. Réduire chacune des formes suivantes à la forme canonique :

(*a*) $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}X$ (*c*) $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1-3i & 2-3i \\ 1+3i & 1 & 2+3i \\ 2+3i & 2-3i & 4 \end{bmatrix}X$

(*b*) $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}X$ (*d*) $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 3-2i \\ 1+i & 0 & 2-i \\ 3+2i & 2+i & 4 \end{bmatrix}X$

Indications : Pour (*b*), multiplier d'abord la deuxième ligne de H par i et l'ajouter à la première ligne.

Réponses : (*a*) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}Y$; $\overline{y}_1y_1 - \overline{y}_2y_2$

(*b*) $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}Y$; $\overline{y}_1y_1 - \overline{y}_2y_2$

(*c*) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+3i)/3 & -1 \\ 0 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}Y$; $\overline{y}_1y_1 - \overline{y}_2y_2$

(*d*) $X = \begin{bmatrix} 1 & (-1+i)/\sqrt{2} & (-1+3i)/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & (-3-2i)/\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}Y$; $\overline{y}_1y_1 - \overline{y}_2y_2 - \overline{y}_3y_3$

3. Trouver la transformation linéaire $X = BY$, qui suivie de $Y = IX$, permet de transformer (*a*) du problème 2 en (*b*).

Réponse : $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & (-1-2i)/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}Y$

4. Montrer que $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1+i & -1 \\ 1-i & 6 & -3+i \\ -1 & -3-i & 11 \end{bmatrix}X$ est définie positive et que $^t\overline{X}\begin{bmatrix} 1 & 1+i & 1+2i \\ 1-i & 3 & 5 \\ 1-2i & 5 & 10 \end{bmatrix}X$ est semi-définie positive.

5. Démontrer les théorèmes V et VII.

6. Trouver pour les formes hermitiennes des théorèmes analogues aux théorèmes XIX à XXI du Chapitre 17 pour les formes quadratiques.

7. Montrer que : $\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \overline{x}_1 & h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ \overline{x}_2 & h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{x}_n & h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn} \end{vmatrix} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}\overline{x}_i x_j$ où η_{ij} est le cofacteur de h_{ij} dans $H = \det h_{ij}$.

Indications : Utiliser **(4.3)**.

CHAPITRE 19

Equation caractéristique d'une matrice

PROBLEME. Soit $Y = AX$, où $A = [a_{ij}]$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, une transformation linéaire sur F. En général, le transformé du vecteur $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ est un vecteur $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ qui n'a pas d'autre relation avec X que : $Y = AX$. Nous allons chercher ici s'il existe des vecteurs X qui se transforment en λX, où λ est un scalaire de F ou d'un corps $\mathfrak{F}$ dont F est un sous-corps.

Tout vecteur non nul, transformé par A en X, c'est-à-dire vérifiant

(19.1) $$AX = \lambda X$$

est appelé vecteur propre de la transformation.

EQUATION CARACTERISTIQUE. Reprenant (19.1) nous obtenons :

(19.2) $$\lambda X - AX = (\lambda I - A)X = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

Le système homogène (19.2) aura des solutions autres que la solution triviale si et seulement si :

(19.3) $$\text{dét } (\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

L'expression de ce déterminant est un polynôme $\phi(\lambda)$ de degré n en λ qui est appelé "polynôme caractéristique" de la transformation ou de la matrice A. L'équation $\phi(\lambda) = 0$ est appelée "équation caractéristique" de A et ses racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont appelées "valeurs propres" de A. Si $\lambda = \lambda_i$ est une valeur propre, alors (19.2) a des solutions non triviales qui sont les composantes des vecteurs propres associés à la valeur propre λ_i.

Exemple 1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres associés, de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

L'équation caractéristique est : $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$ et les valeurs propres :

$\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$.

Quand $\lambda = \lambda_1 = 5$ **(19.2)** devient :

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

puisque $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ est équivalente à $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. quand on fait des transformations élémentaires sur les lignes

Une solution est donnée par $x_1 = x_2 = x_3 = 1$; ainsi l'espace vectoriel propre associé à la valeur propre $\lambda = 5$ est un espace de dimension 1 engendré par ${}^t[1\ ,1\ ,1]$ Tout vecteur ${}^t[k\ ,k\ ,k]$ de cet espace est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = 5$.

Si $\lambda = \lambda_2 = 1$ **(19.2)** devient :

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$(2\ ,-1\ ,0)$ et $(1\ ,0-1)$ sont deux solutions linéairement indépendantes. Ainsi l'espace vectoriel de dimension 2 engendré par les vecteurs $X_1 = {}^t[2\ ,-1\ ,0]$ et $X_2 = {}^t[1\ ,0\ ,-1]$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à $\lambda = 1$. Tout vecteur $hX_1 + kX_2 = {}^t(2h + k\ ,-h\ ,-k)$ est un vecteur propre de A associé à $\lambda = 1$.

Voir problèmes 1-2.

THEOREMES GENERAUX. Dans le problème 3, nous démontrons un cas particulier ($k = 3$) du théorème suivant :

Théorème I. Si $\lambda_1\ ,\lambda_2\ ,\ldots,\lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de A et si $X_1\ ,X_2\ ,\ldots,X_k$ sont des vecteurs propres respectivement associés à ces valeurs propres, les vecteurs X_i sont linéairement indépendants.

Le problème 4 est un cas particulier ($n = 3$) de :

Théorème II. Soient A une matrice carrée d'ordre n et $\lambda I - A$ sa matrice caractéristique, la $k^{\text{ième}}$ dérivée de $\phi(\lambda) = \text{dét}\,(\lambda I - A)$ par rapport à λ est $k\,!$ fois la somme des mineurs principaux d'ordre $n - k$ de la matrice $\lambda I - A$ quand $k < n$; c'est $n\,!$ quand $k = n$ et c'est 0 quand $k > n$.

Comme conséquence du théorème II nous avons :

Théorème III. Si λ_i est une racine du polynôme caractéristique, de multiplicité r ; le rang de $\lambda_i I - A$ ne sera pas inférieur à $n - r$ et la dimension de l'espace des vecteurs propres associés ne sera pas supérieur à r.

Voir problème 5.

En particulier :

Théorème III′. Si λ_i est une racine simple du polynôme caractéristique de la matrice carrée A d'ordre n, le rang de $\lambda_i I - A$ est $n - 1$ et la dimension du sous-espace propre associé est 1. (Le sous-espace propre est l'espace des vecteurs propres associés à une même valeur propre).

Exemple 2. Pour la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ de l'exemple 1, l'équation caractéristique est $\phi(\lambda) = (\lambda - 5)\,(\lambda - 1)^2 = 0$; le vecteur propre ${}^t[1\ ,1\ ,1]$ associé à la valeur propre $\lambda = 5$ et les vecteurs propres linéairement indépendants ${}^t[2,\ -1\ ,0]$ et ${}^t[1\ ,0\ ,-1]$ associés à la valeur propre $\lambda = 1$ sont indépendants entre eux. (Voir Théorème 1).

L'espace propre (ou espace des vecteurs propres) associé à la racine simple $\lambda = 5$ est de dimension 1. L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 2 est de dimension 2. (Voir théorèmes III et III′).

Voir aussi le problème 6.

Puisque tout mineur principal de ${}^tA$ est égal au mineur principal correspondant de A, nous avons grâce à (19.4) du problème 1:

Théorème IV. Les valeurs propres de A et ${}^tA$ sont les mêmes. Puisque tout mineur principal de $\bar{A}$ est le conjugué du mineur principal correspondant de A, nous avons :

Théorème V. Les valeurs propres de $\bar{A}$ et ${}^t\bar{A}$ sont les conjuguées des valeurs propres de A.

En comparant les équations caractéristiques, on a :

Théorème VI. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et si k est un scalaire, alors $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ sont les valeurs propres de kA.

Théorème VII. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et si k est un scalaire, alors $\lambda_1 - k, \lambda_2 - k, \ldots, \lambda_n - k$ sont valeurs propres de $A - kI$.

Dans le problème 7, nous démontrons :

Théorème VIII. Si α est une valeur propre d'une matrice non singulière A, alors dét A/α est une valeur propre de adj A.

PROBLEMES RESOLUS

1. Si A est une matrice carrée d'ordre n, montrer que :

$$\textbf{(19.4)} \qquad \phi(\lambda) = \text{dét}\,(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1\lambda^{n-1} + s_2\lambda^{n-2} + \cdots + s_{n-1}\lambda + (-1)^n \,\text{dét}\, A$$

où s_m, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ est $(-1)^m$ fois la somme de tous les mineurs principaux d'ordre m de A.

Nous récrirons dét $(\lambda I - A)$ sous la forme :

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & 0 - a_{12} & \cdots\cdots & 0 - a_{1n} \\ 0 - a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots\cdots & 0 - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 - a_{n1} & 0 - a_{n2} & \cdots\cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

où chaque élément est un binôme. D'après le théorème VIII du Chapitre 3, ce déterminant peut s'exprimer sous la forme de la somme de 2^n déterminants. L'un de ces déterminants a λ comme éléments diagonaux et des zéros ailleurs ; sa valeur est λ^n. Un autre sera indépendant de λ ; sa valeur sera $(-1)^n \times$ dét A. Les autres déterminants ont m colonnes, $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ de $-A$ et $n - m$ colonnes dans lesquelles seul un élément est non nul : λ.

Considérons l'un de ces déterminants et supposons que ses colonnes numérotées $i_1, i_2, \ldots, i_m$ sont des colonnes de $-A$.

Après un échange de lignes et colonnes consécutives, un nombre pair de fois (le compter), le déterminant deviendra :

$$(-1)^m \left|\begin{array}{cccc|cccc} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_m} & & & & \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_m} & & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ a_{i_m,i_1} & a_{i_m,i_2} & \cdots & a_{i_m,i_m} & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ a_{i_n,i_1} & a_{i_n,i_2} & \cdots & a_{i_n,i_m} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{array}\right| = (-1)^m \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right| \lambda^{n-m}$$

où $\left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ est un mineur principal d'ordre m de A. Or

$$s_m = (-1)^m \sum_{\rho} \left|A^{i_1,i_2,\ldots,i_m}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$$

où la sommation s'étend aux $\rho = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\,2\ldots m}$ combinaisons de $1, 2, \ldots, n$.

2. Utiliser **(19.4)** du problème 1 pour calculer dét$(\lambda I - A)$ où $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

Nous avons $s_1 = 1 + 0 - 2 + 6 = 5$

$$s_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 3 + 2 - 5 + 16 - 9 = 9$$

$$s_3 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 5 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

dét $A = 2$ $\quad = -3 + 16 - 8 + 2 = 7$

Ainsi dét$(\lambda I - A) = \lambda^4 - 5\lambda^3 + 9\lambda^2 - 7\lambda + 2$.

3. Soient λ_1, X_1 ; λ_2, X_2 ; λ_3, X_3 les valeurs propres distinctes et vecteurs propres associés de A. Montrer que X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants.

S'ils ne sont pas indépendants, alors il existe des scalaires a_1, a_2, a_3 non tous nuls, tels que :

(i) $$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

Multiplions (i) par A en sachant que $AX_i = \lambda_i X_i$; ainsi nous obtenons :

(ii) $$a_1 AX_1 + a_2 AX_2 + a_3 AX_3 = a_1\lambda_1 X_1 + a_2\lambda_2 X_2 + a_3\lambda_3 X_3 = 0$$

Multiplions (ii) par A, nous obtenons :

(iii) $$a_1\lambda_1^2 X_1 + a_2\lambda_2^2 X_2 + a_3\lambda_3^2 X_3 = 0$$

Or (i), (ii) et (iii) peuvent s'écrire :

(iv) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 X_1 \\ a_2 X_2 \\ a_3 X_3 \end{bmatrix} = 0$$

En utilisant le problème 5 du Chapitre 3, $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$; donc B^{-1} existe. Multiplions **(iv)** par B^{-1}, nous avons : ${}^t[a_1X_1, a_2X_2, a_3X_3] = 0$. Ce qui exige que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ contrairement à l'hypothèse.

Ainsi X_1, X_2, X_3 sont linéairement indépendants.

4. En dérivant par rapport à λ $\phi(\lambda) = \text{dét}(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$ nous obtenons

$$\phi'(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{13} \\ -a_{31} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix}$$

$\phi'(\lambda) =$ la somme des mineurs principaux d'ordre 2 de $\lambda I - A$

$$\phi''(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{31} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\{(\lambda-a_{11}) + (\lambda-a_{22}) + (\lambda-a_{33})\}$$

$\phi''(\lambda) = 2\,!$ fois la somme des mineurs principaux de $\lambda I - A$ d'ordre 1.

$\phi'''(\lambda) = 3\,!$

Puis $\phi^{(iv)}(\lambda) = \phi^{(v)}(\lambda) = \cdots = 0$.

5. Montrer que si λ_i est une racine de multiplicité r de l'équation caractéristique de A (matrice carrée d'ordre n), le rang de $\lambda_i I - A$ n'est pas inférieur à $n - r$ et la dimension de l'espace propre associé à λ_i n'est pas supérieur à r. (On supposera A carrée d'ordre n).

Puisque λ_i est une racine de $\phi(\lambda) = 0$ de multiplicité r on a : $\phi(\lambda_i) = \phi'(\lambda_i) = \phi''(\lambda_i) = \cdots = \phi^{(r-1)}(\lambda_i) = 0$ et $\phi^{(r)}(\lambda_i) \neq 0$. Or $\phi^{(r)}(\lambda_i)$ est $r\,!$ fois la somme des mineurs principaux d'ordre $n - r$ de $\lambda_i I - A$. Par suite les mineurs principaux d'ordre $n - r$ ne peuvent pas être tous nuls en même temps et le rang de $\lambda_i I - A$ ne pourra être inférieur à $n - r$. Grâce à (11.2), l'espace propre associé à la valeur propre λ_i est de dimension au plus r.

6. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice du problème 2.

Les valeurs propres sont 1, 1, 1, 2

Pour $\lambda = 2$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 3 : Le noyau de $\lambda I - A$ est de dimension 1; l'espace propre est engendré par le vecteur ${}^t[2, 3, -2, -3]$.

Pour $\lambda = 1$: $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -4 & 1 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 3. Le noyau de $\lambda I - A$, est de dimension 1. L'espace propre est engendré par le vecteur ${}^t[3, 6, -4, -5]$.

7. Montrer que si α est une valeur propre non nulle d'une matrice A non singulière, alors dét A/α est une valeur propre de adj A.

En utilisant le problème 1 :

(i) $\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A| = 0$ (On rappelle : dét $A = |A|$)

où s_i, $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ est $(-1)^i$ fois la somme de tous les mineurs principaux de A d'ordre i, et

$$|\mu I - \text{adj}\ A| = \mu^n + S_1\mu^{n-1} + \ldots + S_{n-1}\mu + (-1)^n|\text{adj}\ A|$$

où S_j, $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ est $(-1)^j$ fois la somme des mineurs principaux de adj A d'ordre j.

Par **(6.4)** et les définitions de s_i et S_j $S_1 = (-1)^n s_{n-1}$, $S_2 = (-1)^n|A|s_{n-2}$, ..., $S_{n-1} = (-1)^n|A|^{n-2}s_1$, et $|\text{adj}\ A| = |A|^{n-1}$; alors

$$|\mu I - \text{adj}\ A| = (-1)^n\{(-1)^n\mu^n + s_{n-1}\mu^{n-1} + s_{n-2}|A|\mu^{n-2} + \ldots + s_2|A|^{n-3}\mu^2 + s_1|A|^{n-2}\mu + |A|^{n-1}\}$$

et $$|A|^{1-n}|\mu I - \text{adj}\ A| = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{\mu}{|A|}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{\mu}{|A|})^{n-1} + (-1)^n(\frac{\mu}{|A|})^n|A|\} = f(\mu)$$

Or $$f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{1 + s_1(\frac{1}{\alpha}) + \ldots + s_{n-1}(\frac{1}{\alpha})^{n-1} + (-1)^n(\frac{1}{\alpha})^n|A|\}$$

et grâce à (i) : $$\alpha^n f(\frac{|A|}{\alpha}) = (-1)^n\{\alpha^n + s_1\alpha^{n-1} + \ldots + s_{n-1}\alpha + (-1)^n|A|\} = 0$$

Ainsi $|A|/\alpha$ est une valeur propre de adj A.

8. Montrer que si P est une matrice orthogonale, son équation caractéristique est symétrique.

Nous avons :

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - P| = |\lambda P I^t P - P| = |-P\lambda(\frac{1}{\lambda}I - {}^tP)| = \pm\lambda^n|\frac{1}{\lambda}I - P| = \pm\lambda^n\phi(\frac{1}{\lambda})$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

9. Déterminer les valeurs propres et une base pour chaque sous-espace propre des matrices suivantes :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -3 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 2-i & 0 & i \\ 0 & 1+i & 0 \\ i & 0 & 2-i \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -10 & 7 \\ -5 & -4 & 9 & -6 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$ (m) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Réponses : (a) 1, ${}^t[1, -1, 0]$; 2, ${}^t[2, -1, -2]$; 3, ${}^t[1, -1, -2]$
(b) -1, ${}^t[1, 0, 1]$; 2, ${}^t[1, 3, 1]$; 1, ${}^t[3, 2, 1]$
(c) 1, ${}^t[1, 1, -1]$; 2, ${}^t[2, 1, 0]$;
(d) 1, ${}^t[1, 1, 1]$

(e) $2,{}^t[2,-1,0]$; $0,{}^t[4,-1,0]$; $1,{}^t[4,0,-1]$
(f) $0,{}^t[3,-1,0]$; $1,{}^t[12,-4,-1]$
(g) $1,{}^t[1,0,-1],{}^t[0,1,-1]$; $3,{}^t[1,1,0]$
(h) $0,{}^t[1,-1,0]$; $1,{}^t[0,0,1]$; $4,{}^t[1,1,0]$
(i) $-1,{}^t[0,1,-1]$; $i,{}^t[1+i,1,1]$; $-i,{}^t[1-i,1,1]$
(j) $2,{}^t[1,0,1]$; $1+i,{}^t[0,1,0]$; $2-2i,{}^t[1,0,-1]$
(k) $1,{}^t[1,0,-1,0],{}^t[1,-1,0,0]$; $2,{}^t[-2,4,1,2]$; $3,{}^t[0,3,1,2]$
(l) $1,{}^t[1,2,3,2]$; $-1,{}^t[-3,0,1,4]$
(m) $0,{}^t[2,1,0,1]$; $1,{}^t[3,0,1,4]$; $-1,{}^t[3,0,1,2]$

10. Montrer que si X est un vecteur unitaire et si $AX = \lambda X$ alors ${}^tXAX = \lambda$.

11. Montrer que les valeurs propres d'une matrice diagonale sont les éléments de la diagonale et que les vecteurs propres sont les vecteurs E_i de la base canonique : $E_1 = (1, 0, 0\ldots), E_2 = (0, 1, 0, \ldots)$ etc.

12. Démontrer les théorèmes I et VI.

13. Démontrer le théorème VII.
Indications : Si $|\lambda I - A| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n)$ alors $|(\lambda+k)I - A| = (\lambda+k-\lambda_1)(\lambda+k-\lambda_2)\ldots(\lambda+k-\lambda_n)$.

14. Montrer que les valeurs propres de la matrice $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & & \cdot \\ & & \ddots & \cdot \\ 0 & \cdots & \cdots & A_s \end{bmatrix}$ sont les valeurs propres des matrices $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

15. Montrer que si A et $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont carrées d'ordre n et si $r < n$, alors NA et AN ont la même équation caractéristique.

16. Montrer que si une matrice A d'ordre n est de rang r, elle a au moins $n - r$ valeurs propres nulles.

17. Montrer que si A et B sont carrées d'ordre n et si A est non singulière, alors $A^{-1}B$ et BA^{-1} ont les mêmes valeurs propres.

18. Reprenant les matrices A et B du problème 17, montrer que B et $A^{-1}BA$ ont les mêmes valeurs propres.

19. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Ecrire que $|\lambda I - A^{-1}| = |-\lambda A^{-1}(\frac{1}{\lambda}I - A)|$ et en conclure que $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_s$ sont les valeurs propres de A^{-1}.

20. Montrer que les valeurs propres d'une matrice orthogonale P ont une valeur absolue égale à 1.
Indications : Si λ_i et X_i sont respectivement une valeur propre et un vecteur propre associé de P alors ${}^tX_i X_i = {}^t(PX_i)(PX_i) = \lambda_i\lambda_i {}^tX_iX_i$.

21. Montrer que si $\lambda_i \neq \pm 1$ est une valeur propre de X_i un vecteur propre associé d'une matrice orthogonale P, alors ${}^tX_i X_i = 0$.

22. Montrer que les valeurs propres d'une matrice unitaire sont en valeur absolue égales à 1.

23. En utilisant le théorème II montrer :

$\phi(0) = (-1)^n |A|$

$\phi'(0) = (-1)^{n-1}$ fois la somme des mineurs principaux d'ordre $n - 1$ de A.

. . . .

$\phi^{(r)}(0) = (-1)^{n-r}\, r!$ fois la somme des mineurs principaux d'ordre $n - r$ de A.

. . . .

$\phi^{(n)}(0) = n!$

24. En utilisant le problème 23 et l'expression :

$$\phi(\lambda) = \phi(0) + \phi'(0)\cdot\lambda + \frac{1}{2!}\phi''(0)\cdot\lambda^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\phi^{(n)}(0)\cdot\lambda^n$$

obtenir **(19.4)**.

CHAPITRE 20

Matrices semblables

On n'utilisera dans ce chapitre que des matrices carrées.

DEFINITION. On dit que deux matrices A et B d'ordre n sur F sont semblables s'il existe une matrice non singulière R sur F telle que :

(20.1) $$B = R^{-1}AR$$

Exemple 1. Les matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ de l'exemple 1 du chapitre 19 et

$$B = R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont semblables.

L'équation caractéristique $(\lambda - 5)(\lambda - 1)^2 = 0$ de B est également l'équation caractéristique de A.

Un vecteur propre de B associé à $\lambda = 5$ peut être $y_1 = {}^t[1, 0, 0]$. Il est facile de voir que le vecteur $X_1 = RY_1 = {}^t[1, 1, 1]$ est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre $\lambda = 5$. Le lecteur montrera que $Y_2 = {}^t[7, -2, 0]$ et $Y_3 = {}^t[17, -3, -2]$ sont deux vecteurs propres indépendants associés à la même valeur propre $\lambda = 1$ tandis que $X_2 = RY_2$ et $X_3 = RY_3$ sont deux vecteurs propres indépendants de A associés à $\lambda = 1$.

L'exemple 1 illustre les théorèmes suivants :

Théorème I. Deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres.

Pour la démonstration, voir le problème 1.

Théorème II. Si Y est un vecteur propre de $B = R^{-1}AR$ associé à la valeur propre λ_i de B, alors $X = RY$ est un vecteur propre de A associé à la même valeur propre λ_i de A.

Pour la démonstration, voir le problème 2.

MATRICES DIAGONALES. Les valeurs propres d'une matrice diagonale sont tout simplement les éléments diagonaux de la matrice $D = \text{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Une matrice diagonale a toujours n vecteurs propres linéairement indépendants lorsqu'elle est d'ordre n. Les vecteurs E_i de la base canonique sont vecteurs propres puisque $DE_i = a_iE_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nous avons par conséquent (voir problèmes 3 et 4 pour les démonstrations) :

Théorème III. Toute matrice A d'ordre n semblable à une matrice diagonale a nécessairement n vecteurs propres linéairement indépendants.

Théorème IV. Si une matrice A d'ordre n a n vecteurs propres linéairement indépendants, elle est semblable a une matrice diagonale.

Voir problème 5.

Dans le problème 6 nous démontrons que :

Théorème V. Dans un corps F, une matrice A d'ordre n est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $\lambda I - A$ se factorise complètement sur F et si la multiplicité de toute racine λ_i est égale à la dimension de l'espace propre associé.

Une matrice d'ordre n n'est pas nécessairement semblable à une matrice diagonale. La matrice du problème 6 du chapitre 19 en est un exemple. En effet la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$ de multiplicité 3 est 1.

Nous pouvons démontrer cependant:

Théorème VI. Toute matrice A d'ordre n est semblable a une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

Voir problèmes 7-8.

Comme cas particulier, on a :

Théorème VII. Si A est une matrice d'ordre n réelle ayant des valeurs propres réelles, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux, les valeurs propres de A.

Voir problèmes 9-10.

Théorème VIII. Si A est une matrice d'ordre n complexe ou si A est réelle à valeurs propres complexes, il existe une matrice unitaire U telle que $U^{-1}AU = {}^t\bar{U}AU$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux, les valeurs propres de A.

Voir problème 11.

Les matrices A et $P^{-1}AP$ du théorème VII sont dites orthogonalement semblables.

Les matrices A et $U^{-1}AU$ du théorème VIII sont dites unitairement semblables.

MATRICES DIAGONALISABLES. Une matrice A semblable à une matrice diagonale est dite diagonalisable. Le théorème IV nous sera utile pour étudier certains types de matrices diagonalisables dans le chapitre suivant.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que deux matrices semblables ont les mêmes valeurs propres :

Soient A et $B = R^{-1}AR$ deux matrices semblables ; alors

(i) $$\lambda I - B \;=\; \lambda I - R^{-1}AR \;=\; R^{-1}\lambda IR - R^{-1}AR \;=\; R^{-1}(\lambda I - A)R$$

et $$|\lambda I - B| \;=\; |R^{-1}|\cdot|\lambda I - A|\cdot|R| \;=\; |\lambda I - A|$$

Ainsi, A et B ont la même équation caractéristique et les mêmes valeurs propres.

2. Montrer que si Y est un vecteur propre de $B = R^{-1}AR$ associé à la valeur propre λ_i, alors $X = RY$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i de A.

Par hypothèse : $BY = \lambda_i Y$ et $RB = AR$; ainsi

$$AX \;=\; ARY \;=\; RBY \;=\; R\lambda_i Y \;=\; \lambda_i RY \;=\; \lambda_i X$$

et X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i de A.

3. Montrer que toute matrice A semblable à une matrice diagonale à n vecteurs propres linéairement indépendants.

Soit $R^{-1}AR = \text{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n) = B$. Les vecteurs $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de la base canonique sont des vecteurs propres de B. Ainsi, d'après le théorème II, les vecteurs $X_j = RE_j$ sont vecteurs propres de A. Puisque R est non-singulière, ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants.

4. Montrer que toute matrice A ayant n vecteurs propres linéairement indépendants est semblable à une matrice diagonale.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n vecteurs propres linéairement indépendants associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de telle sorte que $AX_i = \lambda_i X_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Soit $R = [X_1, X_2, \ldots, X_n]$; alors

$$AR = [AX_1, AX_2, \ldots, AX_n] = [\lambda_1 X_1, \lambda_2 X_2, \ldots, \lambda_n X_n].$$

$$= [X_1, X_2, \ldots, X_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = R\ \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

d'où $R^{-1}AR = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

5. Un ensemble de vecteurs propres linéairement indépendants de la matrice A de l'exemple 1, chapitre 19, est :

$$X_1 = {}^t[1, 1, 1] \quad X_2 = {}^t[2, -1, 0] \quad X_3 = {}^t[1, 0, -1]$$

Prenons $R = [X_1, X_2, X_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; alors $R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ et ainsi

$$R^{-1}AR = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une matrice diagonale.

6. Montrer que dans un corps F une matrice A d'ordre n est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $\lambda I - A$ peut se factoriser complètement dans F et si la multiplicité de chaque racine λ_i est égale à la dimension du noyau de $\lambda_i I - A$ c'est-à-dire de l'espace propre associé à λ_i.

Supposons d'abord que $R^{-1}AR = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = B$ et que k de ses valeurs propres exactement soient égales à λ_i. Alors $\lambda_i I - B$ a exactement k zéros sur sa diagonale ; $\lambda_i I - B$ est donc de rang $n - k$. Son noyau est de dimension $n - (n-k) = k$. Mais $\lambda_i I - A = R(\lambda_i I - B)R^{-1}$. Ainsi, $\lambda_i I - A$ est de rang $n - k$ et le noyau de $\lambda_i I - A$ est de même rang k que $\lambda_i I - B$.

Réciproquement, soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres distinctes de A de multiplicité $r_1, r_2, \ldots, r_s$ respectivement $r_1 + r_2 + \cdots r_n = n$. Notons $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_s}$ les espaces propres associés. Soit $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_{r_i}}$ une base de l'espace propre V_{r_i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Supposons qu'il existe des scalaires a_{ij}, non tous nuls, tels que :

$$\text{(i)} \qquad (a_{11}X_{11} + a_{12}X_{12} + \ldots + a_{1r_1}X_{1r_1}) + (a_{21}X_{21} + a_{22}X_{22} + \ldots + a_{2r_2}X_{2r_2}) + \ldots + (a_{s1}X_{s1} + a_{s2}X_{s2} + \ldots + a_{sr_s}X_{sr_s}) = 0$$

Chaque vecteur $Y_i = (a_{i1}X_{i1} + a_{i2}X_{i2} + \ldots + a_{ir_i}X_{ir_i}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$, car sinon, Y_i est un vecteur propre associé à λ_i et d'après le théorème I les vecteurs Y_i sont indépendants. Mais ceci contredit (i). Par conséquent les X_i forment une base de V_n et A est semblable à une matrice diagonale d'après le théorème IV.

7. Montrer que toute matrice A d'ordre n est semblable à une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Soit X_1 un vecteur propre associé à λ_1. Prenons X_1 comme première colonne d'une matrice non singulière Q_1 dont les autres colonnes seront arbitraires pourvu que $\det Q_1 \neq 0$. La première colonne de AQ_1 est $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et la première colonne de $Q_1^{-1}AQ_1$ est $Q_1^{-1}\lambda_1 X_1$. Mais alors cette dernière expression étant la première colonne de $Q_1^{-1}\lambda_1 Q_1$ est ${}^t[\lambda_1, 0, 0, \ldots, 0]$. Ainsi :

(i) $$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

où A_1 est d'ordre $n-1$.

Puisque $|\lambda I - Q_1^{-1}AQ_1| = (\lambda - \lambda_1)|\lambda I - A_1|$ et que $Q_1^{-1}AQ$ et A ont les mêmes valeurs propres, il s'ensuit que les valeurs propres de A_1 sont $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$. Si $n = 2$, $A_1 = (\lambda_2)$ et le théorème est démontré avec $Q = Q_1$.

Sinon, soit X_2 un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre λ_2. Prenons X_2 comme première colonne d'une matrice non singulière Q_2 dont les autres colonnes sont arbitraires pourvu que det $Q_2 \neq 0$. Alors

(ii) $$Q_2^{-1}A_1Q_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

où A_2 est d'ordre $n-2$. Si $n = 3$, $A_2 = (\lambda_3)$ et le théorème est démontré avec $Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$

Nous continuons ce procédé ; après $n-1$ étapes au plus, nous obtenons :

(iii) $$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

de telle sorte que $Q^{-1}AQ$ est triangulaire et admet pour éléments diagonaux les valeurs propres de A.

8. Trouver une matrice non singulière Q telle que $Q^{-1}AQ$ soit triangulaire.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 & -9 \\ 6 & -1 & 5 & -5 \\ -5 & 1 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$\det(\lambda I - A) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 4)$. Les racines de l'équation caractéristiques sont $1, -1, 2, -2$. Prenons ${}^t[5, 5, -1, 3]$, vecteur propre associé à la valeur propre 1 comme première colonne d'une matrice non singulière Q_1 dont les autres colonnes sont les vecteurs de la base canonique.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q_1^{-1}AQ_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & -1 & 8 & -9 \\ 0 & 0 & -15 & 20 \\ 0 & 4 & -12 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Une valeur propre de A_1 est -1 et un vecteur propre associé est ${}^t[4, 0, -1]$. Prenons $Q_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

Alors

$$Q_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q_2^{-1}A_1Q_2 = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -20 & -15 & 20 \\ 0 & -48 & 64 \\ 0 & -11 & 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Une valeur propre de A_2 est 2 et un vecteur propre associé est ${}^t[8, 11]$. Prenons $Q_3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$; alors

$$Q_3^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q_3^{-1}A_2Q_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2/5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Or

$$Q = Q_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & Q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & -1 & 11 & 1 \end{bmatrix}, \qquad Q^{-1} = \frac{1}{160}\begin{bmatrix} 32 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 40 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 20 & 0 \\ -180 & 40 & -220 & 160 \end{bmatrix},$$

et

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 & -9/5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

9. Si A est une matrice d'ordre n réelle à valeurs propres réelles, alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A. Puisqu'elles sont réelles, les vecteurs propres associés le seront également. Comme dans le problème 7, formons la matrice Q_1 admettant en première colonne un vecteur propre associé à λ_1. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, nous obtiendrons à partir de Q_1 une matrice orthogonale P_1 dont la première colonne est proportionnelle à celle de Q_1. Ainsi :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

où A_1 est d'ordre $n-1$, admettant $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ comme valeurs propres.

De nouveau, soit Q_2 une matrice admettant en première colonne un vecteur propre de A_1 associé à la valeur propre λ_2. Utilisons le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une matrice orthogonale P_2. Ainsi

$$P_2^{-1}A_1P_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & B_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

Après un certain nombre d'opérations, nous obtiendrons une matrice orthogonale :

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A.

10. Construire une matrice orthogonale P telle que :

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}P$$

soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A.

Si nous reprenons l'exemple 1 du chapitre 19, les valeurs propres sont 5, 1, 1 et un vecteur propre associé à $\lambda = 1$ est ${}^t[1, 0, -1]$.

Prenons $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, nous obtenons

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

une matrice orthogonale dont la première colonne est proportionnelle à ${}^t[1, 0, -1]$.

Nous trouvons :

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B_1 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

où A_1 admet $\lambda = 1$ comme valeur propre et ${}^t[1, -\sqrt{2}]$ comme vecteur propre associé. De $Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$, nous obtenons par le procédé de Gram-Schmidt la matrice orthogonale $P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Ainsi

$$P = P_1 \cdot \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

est orthogonale et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

11. Trouver une matrice unitaire U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A. On donne

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique de A est $\lambda[\lambda^2 + (-4-i)\lambda + 5 - i] = 0$ et les valeurs propres de A sont $0,\ 1-i,\ 3+2i$. Pour $\lambda = 0$, prenons ${}^t[1, -1, 1]$ comme vecteur propre associé et formons $Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Le procédé de Gram-Schmidt nous permet d'obtenir la matrice unitaire

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Or

$$U_1^{-1}AU_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2\sqrt{2}(1-i) & -(26+24i)/\sqrt{6} \\ 0 & 1-i & (2+3i)/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3+2i \end{bmatrix}$$

la matrice cherchée est donc $U = U_1$.

12. Trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A. On donne :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres sont 2, 3, 6 et les vecteurs propres associés ${}^t[1, 0, -1]$, ${}^t[1, 1, 1]$, ${}^t[1, -2, 1]$ respectivement. Or ces vecteurs sont linéairement indépendants deux à deux et orthogonaux entre eux. Prenons :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

nous trouvons $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(2, 3, 6)$. Ceci nous suggère une étude plus complète des matrices réelles symétriques qui seront vues dans le chapitre suivant.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

13. Trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A. On prendra pour matrice A les matrices du problème 9 (a), (b), (c), (d), Chapitre 19.

Réponses : (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, ($c$) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, ($d$) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

14. Expliquer pourquoi les matrices (a) et (b) du problème 13 sont semblables à une matrice diagonale tandis que (c) et (d) ne le sont pas. Etudier les matrices (a) à (m) du problème 9, Chapitre 19, et déterminer celles qui sont semblables à une matrice diagonale admettant pour éléments diagonaux leurs valeurs propres.

15. Pour chacune des matrices A du problème 9 (i), (j), Chapitre 19, trouver une matrice unitaire U telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A.

Réponses : (i) $\begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -(1+i)/2 \\ 1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ -1/\sqrt{2} & (1-i)/2\sqrt{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, ($j$) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

16. Montrer que si A est réelle symétrique et P orthogonale, alors $P^{-1}AP$ est réelle symétrique.

17. En introduisant quelques modifications au problème 9 démontrer le théorème VIII.

18. Si B_i et C_i sont des matrices semblables pour ($i = 1, 2, \ldots, m$) montrer que

$$B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m) \quad \text{et} \quad C = \operatorname{diag}(C_1, C_2, \ldots, C_m)$$

sont semblables. *Indication* : Supposer que $C_i = R_i^{-1} B_i R_i$ et former $R = \operatorname{diag}(R_1, R_2, \ldots, R_m)$.

19. Soient $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2)$ et $C = \operatorname{diag}(B_2, B_1)$. Soit $I = \operatorname{diag}(I_1, I_2)$ où les ordres de I_1 et I_2 sont ceux de B_1 et B_2 respectivement. Soit $R = \begin{bmatrix} 0 & I_1 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $R^{-1}BR = C$ pour démontrer que B et C sont semblables.

20. Etendre le résultat du problème 19 à $B = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ et C une matrice obtenue en changeant la répartition des B_i le long de la diagonale.

21. Montrer que si A et B sont carrées d'ordre n, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres.
Indication : Soit $PAQ = N$; alors $PABP^{-1} = NQ^{-1}BP^{-1}$ et $Q^{-1}BAQ = Q^{-1}BP^{-1}N$. Voir problème 15, Chapitre 19.

22. Si $A_1, A_2, \ldots, A_s$ sont non singulières de même ordre montrer que $A_1 A_2 \ldots A_s$, $A_2 A_3 \ldots A_s A_1$, $A_3 \ldots A_s A_1 A_2$ etc, ont la même équation caractéristique.

23. Soit $Q^{-1}AQ = B$ où B est triangulaire et admet pour éléments diagonaux les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ de A.

(a) Montrer que $Q^{-1}A^kQ$ est triangulaire et admet pour éléments diagonaux les puissances $k^{\text{ième}}$ des valeurs propres de A.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k = \operatorname{trace} A^k$.

24. Montrer que la similitude des matrices est une relation d'équivalence.

25. Montrer que $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ ont les mêmes valeurs propres mais ne sont pas semblables.

CHAPITRE 21

Matrices semblables à une matrice diagonale

MATRICES SYMETRIQUES REELLES. Les matrices symétriques réelles et les matrices hermitiennes pourraient faire l'objet d'une même étude mais nous préférons les traiter séparément ici. Pour les matrices symétriques réelles, nous avons :

Théorème I. Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles.

Voir Problème 1.

Théorème II. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux deux à deux.

Voir Problème 2.

Quand A est réelle et symétrique, chaque B_i du problème 9, Chapitre 20, est nul. Ainsi,

Théorème III. Si A est une matrice carrée d'ordre n symétrique dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors il existe une matrice P réelle orthogonale telle que:

$$^tPAP = P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

D'où l'on déduit :

Théorème IV. Si λ_i est racine du polynôme caractéristique de multiplicité r_i d'une matrice symétrique réelle, alors l'espace propre associé à λ_i est de dimension r_i. En termes de forme quadratique réelle, le théorème III devient :

Théorème V. Toute forme quadratique réelle $q = {}^tXAX$ peut être réduite par une transformation orthogonale $X = BY$ à la forme canonique :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 \tag{21.1}$$

où r est le rang de A et où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont les valeurs propres de A non nulles.

Ainsi, le rang de q est le nombre de valeurs propres non nulles de A tandis que l'indice de q est le nombre de valeurs propres positives ou encore, par la règle des signes de Descartes, le nombre de changements de signe dans : dét $(\lambda I - A) = 0$.

Théorème VI. Une matrice réelle symétrique est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

MATRICES ORTHOGONALEMENT SEMBLABLES. Si P est une matrice orthogonale et si $B = P^{-1}AP$, alors B est dite "orthogonalement" semblable à A. Puisque $P^{-1} = {}^tP$, on dit aussi que B est congruente à A orthogonalement ou équivalente à A orthogonalement. Le théorème III peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Théorème VII. Toute matrice A réelle symétrique est orthogonalement semblable à une matrice diagonale où les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

Voir Problème 3.

Ordonnons les valeurs propres de A, matrice réelle symétrique, de la façon suivante $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Alors diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est l'unique matrice diagonale de ce type, semblable à A. L'ensemble de telles matrices diagonales constitue un ensemble canonique de matrices réelles symétriques pour la similitude orthogonale. Nous avons :

Théorème VIII. Deux matrices réelles symétriques sont orthogonalement semblables si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres, c'est-à-dire, si et seulement si elles sont semblables.

COUPLE DE FORMES QUADRATIQUES REELLES. Dans le problème 4 nous démontrons :

Théorème IX. Si ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ sont deux formes quadratiques réelles en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et si ${}^tXBX$ est définie positive, alors il existe une application linéaire non singulière et réelle $X = CY$ qui transforme ${}^tXAX$ en :

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

et ${}^tXBX$ en

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

où λ_i sont les racines de dét $(\lambda B - A) = 0$.

Voir également les problèmes 4-5.

MATRICES HERMITIENNES. Pour les matrices hermitiennes nous avons les théorèmes analogues suivants :

Théorème X. Les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toutes réelles.

Voir problème 7.

Théorème XI. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes d'une matrice hermitienne sont orthogonaux deux à deux.

Théorème XII. Si H est une matrice hermitienne carrée d'ordre n dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors il existe une matrice unitaire U telle que : ${}^t\bar{U}HU = U^{-1}HU = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. On dit que H est "unitairement" semblable à $U^{-1}HU$.

Théorème XIII. Si λ_i est une valeur propre de multiplicité r_i d'une matrice hermitienne H, alors l'espace propre associé à λ_i est de dimension r_i.

Ordonnons les valeurs propres de la matrice hermitienne H de la façon suivante : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. Alors diag $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ est l'unique matrice diagonale de ce type, semblable à H. L'ensemble de telles matrices diagonales constitue un ensemble canonique de matrices hermitiennes pour la similitude unitaire. Il s'ensuit :

Théorème XIV. Deux matrices hermitiennes sont unitairement semblables si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres, c'est-à-dire si et seulement si elles sont semblables.

MATRICES NORMALES. On dit qu'une matrice A carrée d'ordre n est normale si $A\,{}^t\bar{A} = {}^t\bar{A}A$. L'ensemble des matrices normales contient en particulier les matrices diagonales, réelles symétriques, réelles anti-symétriques, orthogonales, hermitiennes, anti-hermitiennes, et unitaires.

Soient A une matrice normale et U une matrice unitaire. Soit $B = {}^t\bar{U}AU$. On a : ${}^t\bar{B} = {}^t\bar{U}\,{}^t\bar{A}U$ et ${}^t\bar{B}B = {}^t\bar{U}\,{}^t\bar{A}U \,.\, {}^t\bar{U}AU = {}^t\bar{U}\,{}^t\bar{A}AU = {}^t\bar{U}A\,{}^t\bar{A}U = {}^t\bar{U}AU \,.\, {}^t\bar{U}\,{}^t\bar{A}U = B\,{}^t\bar{B}$. Ainsi :

Théorème XV. Si A est une matrice normale et U une matrice unitaire, alors $B = {}^t\bar{U}AU$ est une matrice normale.

Dans le problème 8 nous montrons :

Théorème XVI. Si X_i est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i d'une matrice normale A, alors X_i est aussi un vecteur propre de ${}^t\bar{A}$ associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_i$.

Dans le problème 9 nous montrons :

Théorème XVII. Une matrice A est semblable unitairement à une matrice diagonale si et seulement si A est normale.

Comme conséquence, nous avons :

Théorème XVIII. Si A est normale, les vecteurs propres associés aux valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Voir problème 10.

Théorème XIX. Si λ_i est une valeur propre de multiplicité r_i d'une matrice normale A, l'espace propre associé à λ_i est de dimension r_i.

Théorème XX. Deux matrices normales sont semblables unitairement si et seulement si elles ont les mêmes valeurs propres, c'est-à-dire, si et seulement si elles sont semblables.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que les valeurs propres d'une matrice A carrée d'ordre n réelle symétrique sont toutes réelles.

Supposons que $h + ik$ soit une valeur propre complexe de A. Considérons

$$B = \{(h+ik)I - A\}\{(h-ik)I - A\} = (hI - A)^2 + k^2 I$$

qui est réelle et singulière puisque $(h+ik)I - A$ est singulière. Il existe un vecteur X réel non nul tel que $BX = 0$ et par suite

$${}^tXBX = {}^tX(hI-A)^2X + k^2\,{}^tXX = {}^tX\,{}^t(hI-A)(hI-A)X + k^2\,{}^tXX = 0$$

Le vecteur $(hI - A)X$ est réel ; par suite ${}^t\{(hI-A)X\}\{(hI-A)X\} \geqslant 0$; de même ${}^tXX > 0$. Alors, $k = 0$ et il n'existe pas de valeur propre complexe.

2. Montrer que les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes d'une matrice réelle symétrique A sont orthogonaux deux à deux.

Soient X_1 et X_2 deux vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes de A. Alors :

$$AX_1 = \lambda_1 X_1 \quad \text{et} \quad AX_2 = \lambda_2 X_2 \qquad {}^tX_2AX_1 = \lambda_1\,{}^tX_2X_1 \quad \text{et} \quad {}^tX_1AX_2 = \lambda_2\,{}^tX_1X_2$$

Prenons les transposées

$${}^tX_1AX_2 = \lambda_1\,{}^tX_1X_2 \quad \text{et} \quad {}^tX_2AX_1 = \lambda_2\,{}^tX_2X_1$$

Ainsi : $\lambda_1\,{}^tX_1X_2 = \lambda_2\,{}^tX_1X_2$ et puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, ${}^tX_1X_2 = 0$; X_1 et X_2 sont donc orthogonaux.

3. Trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A. Donnons-nous

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\begin{vmatrix} \lambda-7 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-10 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 24\lambda^2 + 180\lambda - 432 = 0$$

et les racines de cette équation sont 6, 6, 12.

Pour $\lambda = 6$, nous avons $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ ou $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$; choisissons pour vecteurs propres associés les deux vecteurs orthogonaux $X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ et $X_2 = {}^t(1, 1, 1)$. Pour $\lambda = 12$, nous prenons $X_3 = {}^t(1, -2, 1)$ comme vecteur propre associé.

En normant ces trois vecteurs, nous obtenons une matrice P les admettant comme vecteurs colonnes :

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Démontrer en exercice que $P^{-1}AP = \text{diag}\,(6,\ 6,\ 12)$.

4. Montrer que si ${}^tXAX$ et ${}^tXBX$ sont des formes quadratiques réelles en $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ et si ${}^tXBX$ est définie positive, alors il existe une application linéaire réelle non singulière $X = CY$ qui transforme ${}^tXAX$ en $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ et ${}^tXBX$ en $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de dét $(\lambda B - A) = 0$. Grâce au théorème VII il existe une transformation orthogonale $X = GV$ qui transforme ${}^tXBX$ en

(i) $$ {}^tV({}^tGBG)\,V = \mu_1 v_1^2 + \mu_2 v_2^2 + \cdots + \mu_n v_n^2$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs propres (toutes positives) de B.

Soit $H = \text{diag}(1/\sqrt{\mu_1}, 1/\sqrt{\mu_2}, \ldots, 1/\sqrt{\mu_n})$. Alors $V = HW$ transforme (i) en

(ii) $$ {}^tW({}^tH\,{}^tGBGH)\,W = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_n^2$$

Maintenant, pour la forme quadratique réelle ${}^tW({}^tH\,{}^tGAGH)\,W$, il existe une application orthogonale $W = KY$ qui la transforme en

$$ {}^tY({}^tK\,{}^tH\,{}^tGAGHK)\,Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de ${}^tH\,{}^tGAGH$. Ainsi, il existe une application réelle non singulière $X = CY = GHKY$ qui transforme ${}^tXAX$ en $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ et ${}^tXBX$ en

$$ {}^tY({}^tK\,{}^tH\,{}^tGBGHK)\,Y = {}^tY(K^{-1}IK)\,Y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$$

Puisque pour toutes les valeurs de λ,

$$\begin{aligned} {}^tK\,{}^tH\,{}^tG\,(\lambda B - A)\,GHK = \lambda\,{}^tK\,{}^tH\,{}^tGBGHK - {}^tK\,{}^tH\,{}^tGAGHK &= \text{diag}\,(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda) - \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \\ &= \text{diag}\,(\lambda - \lambda_1, \lambda - \lambda_2, \ldots, \lambda - \lambda_n) \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines de det $(\lambda B - A) = 0$.

5. D'après le problème 3, l'application linéaire

$$X = (GH)W = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix} W$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \\ 0 & 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{3} & 1/3\sqrt{2} & 1/6\sqrt{2} \end{bmatrix} W$$

transforme $q = {}^tXBX = {}^tX \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} X$ en ${}^tWIW$.

La même application transforme

$$ {}^tXAX = {}^tX \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} X \quad \text{en} \quad {}^tW \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} W$$

Puisque cette dernière matrice est diagonale, l'application $W = KY$ du problème 4 est l'application identique $W = IY$.

Ainsi, l'application linéaire réelle $X = CY = (GH)Y$ transforme la forme quadratique définie positive ${}^tXBX$ en $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2$ et la forme quadratique ${}^tXAX$ en $\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}y_3^2$. Montrer en exercice que $|\lambda B - A| = 36(3\lambda - 1)(2\lambda - 1)^2$.

6. Montrer que toute matrice A réelle non singulière peut s'écrire $A = CP$ où C est symétrique définie positive et P est orthogonale.

Puisque A est non singulière, $A\,{}^tA$ est symétrique définie positive d'après le théorème X, Chapitre 17. Alors il existe une matrice orthogonale Q telle que $Q^{-1}A\,{}^tAQ = \operatorname{diag}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = B$ avec tout $k_i > 0$. Définissons $B_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{k_1}, \sqrt{k_2}, \ldots, \sqrt{k_n})$ et $C = QB_1Q^{-1}$. C est symétrique définie positive et

$$C^2 = QB_1Q^{-1}QB_1Q^{-1} = QB_1^2Q^{-1} = QBQ^{-1} = A\,{}^tA$$

Définissons $P = C^{-1}A$. Alors $P\,{}^tP = C^{-1}A\,{}^tAC^{-1} = C^{-1}C^2C^{-1} = I$ et P est orthogonale. Ainsi $A = CP$ avec C symétrique définie positive et P orthogonale.

7. Montrer que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont toutes réelles.

Soit λ_i une valeur propre d'une matrice hermitienne H. Alors il existe un vecteur non nul X_i tel que $HX_i = \lambda_i X_i$. Or ${}^t\overline{X}_i HX_i = \lambda_i\,{}^t\overline{X}_i X_i$ est réelle et différente de zéro ; il en est de même du transposé du conjugué ${}^t\overline{X}_i HX_i = \overline{\lambda}_i\,{}^t\overline{X}_i X_i$. Ainsi $\overline{\lambda}_i = \lambda_i$ et λ_i est réelle.

8. Montrer que si X_i est un vecteur propre associé à une valeur propre λ_i d'une matrice normale A, alors X_i est un vecteur propre de ${}^t\overline{A}$ associé à la valeur propre $\overline{\lambda}_i$.

Puisque A est normale

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)\,{}^t(\overline{\lambda I - A}) &= (\lambda I - A)(\overline{\lambda}I - {}^t\overline{A}) = \lambda\overline{\lambda}I - \lambda\,{}^t\overline{A} - \overline{\lambda}A + A\,{}^t\overline{A}\\ &= \overline{\lambda}\lambda I - \lambda\,{}^t\overline{A} - \overline{\lambda}A + {}^t\overline{A}A = {}^t(\overline{\lambda I - A})(\lambda I - A)\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda I - A$ est normale. Par hypothèse $BX_i = (\lambda_i I - A)X_i = 0$. Ainsi

$${}^t(\overline{BX_i})(BX_i) = {}^t\overline{X}_i\,{}^t\overline{B}\,.\,BX_i = {}^t\overline{X}_i\,B\,.\,{}^t\overline{B}X_i = {}^t(\overline{{}^t\overline{B}X_i})({}^t\overline{B}X_i) = 0 \quad \text{et} \quad {}^t\overline{B}X_i = (\overline{\lambda}_i I - {}^t\overline{A})X_i = 0$$

Ainsi X_i est un vecteur propre de ${}^t\overline{A}$ associé à $\overline{\lambda}_i$.

9. Montrer qu'une matrice A carrée d'ordre n est semblable unitairement à une matrice diagonale si et seulement si A est normale.

Supposons A normale. D'après le théorème VIII, Chapitre 20, il existe une matrice unitaire U telle que

$${}^t\overline{U}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & b_{2,n-1} & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = B$$

D'après le théorème XV, B est normale et ${}^t\overline{B}B = B\,{}^t\overline{B}$. Or l'élément de la première ligne, première colonne de ${}^t\overline{B}B$ est $\overline{\lambda}_1\lambda_1$ tandis que l'élément correspondant de $B\,{}^t\overline{B}$ est

$$\lambda_1\overline{\lambda}_1 + b_{12}\overline{b}_{12} + b_{13}\overline{b}_{13} + \cdots + b_{1n}\overline{b}_{1n}$$

Puisque ces éléments sont égaux et puisque $b_{1j}\overline{b}_{1j} \geqslant 0$, on en déduit que $b_{1j} = 0, (j = 1, 2, \ldots, n)$. Continuons avec l'élément de la deuxième ligne, deuxième colonne, ..., nous en concluons que b_{ij} de B est nul. Ainsi, $B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Réciproquement, si B est diagonale, alors A est normale.

10. Montrer que si A est normale, les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

Soient λ_1, X_1 et λ_2, X_2 des valeurs propres distinctes et leurs vecteurs propres associés. Alors $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et $AX_2 = \lambda_2 X_2$. D'après le problème 8, ${}^t\bar{A}X_1 = \bar{\lambda}_1 X_1$ et ${}^t\bar{A}X_2 = \bar{\lambda}_2 X_2$. Or ${}^t\bar{X}_2 AX_1 = \lambda_1 {}^t\bar{X}_2 X_1$ et en prenant les transposées des conjuguées, ${}^t\bar{X}_1 {}^t\bar{A}X_2 = \bar{\lambda}_1 {}^t\bar{X}_1 X_2$. Mais ${}^t\bar{X}_1 {}^t\bar{A}X_2 = \bar{\lambda}_2 {}^t\bar{X}_1 X_2$. Ainsi, $\bar{\lambda}_1 {}^t\bar{X}_1 X_2 = \bar{\lambda}_2 {}^t\bar{X}_1 X_2$ et puisque $\bar{\lambda}_1 \neq \bar{\lambda}_2$, ${}^t\bar{X}_1 X_2 = 0$.

11. Considérons la conique $x_1^2 - 12x_1x_2 - 4x_2^2 = 40$ ou

(i) $$ {}^tX\,AX \;=\; {}^tX \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} X \;=\; 40 $$

dans un repère orthogonal d'axe OX_1 et OX_2.

L'équation caractéristique de A

$$|\lambda I - A| \;=\; \begin{vmatrix} \lambda-1 & 6 \\ 6 & \lambda+4 \end{vmatrix} \;=\; (\lambda-5)(\lambda+8) \;=\; 0$$

Pour les valeurs propres $\lambda_1 = 5$ et $\lambda_2 = -8$ prenons ${}^t[3, -2]$ et ${}^t[2, 3]$ comme vecteurs propres associés respectivement. Formons la matrice orthogonale $P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix}$ dont les colonnes sont les deux vecteurs propres normés. L'application $X = PY$ transforme (i) en

$$ {}^tY \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & -2/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \\ -2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \end{bmatrix} Y \;=\; {}^tY \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} Y \;=\; 5y_1^2 - 8y_2^2 \;=\; 40 $$

La conique est donc une hyperbole.

Remarquer que l'on a effectué ici, mais par un procédé différent, la rotation d'axes habituelle à la géométrie analytique plane, qui a pour effet d'éliminer les termes rectangles de l'équation de la conique. Remarquer que d'après le théorème VII, le résultat est connu dès que les valeurs propres le sont.

12. Un des problèmes de la géométrie analytique dans l'espace est de transformer, par translation et rotation d'axes, l'équation d'une quadrique à sa plus simple expression. Le plus difficile est de localiser le centre et de déterminer les directions principales c'est-à-dire les directions des axes après la rotation. Sans vouloir justifier les démarches successives, nous allons montrer ici le rôle de deux matrices dans la réduction de l'équation d'une quadrique à centre.

Considérons la surface $3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 2x - 14y + 2z - 9 = 0$ et les matrices symétriques

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B \;=\; \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

formées respectivement avec les termes de degré deux et avec tous les termes de l'équation.

L'équation caractéristique de A est

$$|\lambda I - A| \;=\; \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -2 \\ -1 & -2 & \lambda \end{bmatrix} \;=\; 0$$

les valeurs propres et les vecteurs propres normalisés associés sont :

$$\lambda_1 = 1,\ v_1 = {}^t\left[\frac{1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}, \frac{-1}{\sqrt3}\right]; \qquad \lambda_2 = 4,\ v_2 = {}^t\left[\frac{2}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}, \frac{1}{\sqrt6}\right]; \qquad \lambda_3 = -2,\ v_3 = {}^t\left[0, \frac{-1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right]$$

En utilisant uniquement des transformations élémentaires sur des lignes $H_j(k)$ et $H_{ij}(k)$, où $j \neq 4$.

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -7 & 1 & -9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}$$

Considérons B_1 comme étant la matrice $[AH]$ du système d'équations : $AX = H$ ou $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x \quad + 2z = -7 \\ x + 2y \quad = +1 \end{cases}$

Nous trouvons par D_1 la solution $x = -1$, $y = 0$, $z = 4$ ou $C = (-1, 0, 4)$. Par D_2, nous avons $d = -4$.

Le rang de A est 3 et celui de B est 4 ; la quadrique a pour centre $C(-1, 0, 4)$. L'équation simplifiée recherchée est :

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + d = X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 4 = 0$$

Les équations de la translation sont : $x = x' - 1$, $y = y'$, $z = z' + 4$.

Les directions principales sont v_1, v_2, v_3. Notons E l'inverse de $[v_1, v_2, v_3]$. Les équations de la rotation d'axes aux directions principales sont :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [X \ Y \ Z] \cdot E = [X \ Y \ Z] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

13. Pour chacune des matrices A symétriques réelles suivantes, trouver une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et admette pour éléments diagonaux les valeurs propres de A

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

Réponses (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, (c) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

14. Trouver une application linéaire qui transforme ${}^tXBX$ en $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ et ${}^tXAX$ en $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$, où les λ_i sont les racines de $|\lambda B - A| = 0$; on donne :

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Réponses : (a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \\ 0 & -2/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 1/3 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3\sqrt{10} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3\sqrt{10} \\ 1/3 & -2/3 & 2/3\sqrt{10} \end{bmatrix}$

15. Démontrer le théorème IV.
Indication : Si $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n)$ alors $P^{-1}(\lambda_1 I - A)P = \text{diag}(0, 0, \ldots, 0, \lambda_1 - \lambda_{r+1}, \lambda_1 - \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_1 - \lambda_n)$ est de rang $n - r$.

16. Modifier la démonstration du problème 2 pour démontrer le théorème XI.

17. Démontrer les théorèmes XII, XIII et XIX.

18. Identifier chaque ensemble :

(*a*) $20x_1^2 - 24x_1x_2 + 27x_2^2 = 369$, (*c*) $108x_1^2 - 312x_1x_2 + 17x_2^2 = 900$,
(*b*) $3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4$, (*d*) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 8$

19. Soit A une matrice réelle, anti-symétrique. Démontrer que :
(*a*) toute valeur propre de A est ou zéro ou imaginaire pure
(*b*) $I + A$ est non singulière ainsi que $I - A$.
(*c*) $B = (I + A)^{-1}(I - A)$ est orthogonale. (Voir problème 35, Chapitre 13).

20. Montrer que si A est normale et non singulière alors A^{-1} l'est aussi.

21. Montrer que si A est normale alors A est semblable à ${}^tA$.

22. Montrer qu'une matrice carrée A est normale si et seulement si elle peut s'écrire $H + iK$ où H et K sont des matrices hermitiennes qui commutent.

23. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice carrée A d'ordre n. Alors A est normale si et seulement si les valeurs propres de $A\,{}^t\bar{A}$ sont $\lambda_1\bar{\lambda}_1, \lambda_2\bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_n\bar{\lambda}_n$.
Indication : Ecrire $U^{-1}AU = T = [t_{ij}]$ où U est unitaire et T triangulaire. Or $\text{tr}(T\,{}^t\bar{T}) = \text{tr}(A\,{}^t\bar{A})$ implique $t_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

24. Montrer que si A est non singulière, alors $A\,{}^t\bar{A}$ est hermitienne définie positive. Enoncer ce théorème lorsque A est réelle et non singulière.

25. Montrer que si A et B sont carrées d'ordre n et normales et si A et ${}^t\bar{B}$ commutent, alors AB et BA sont normales.

26. Considérons la fonction caractéristique de la matrice carrée A d'ordre n :

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

et supposons qu'il existe une matrice P non singulière telle que :

(1) $$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \lambda_2 I_{r_2}, \ldots, \lambda_s I_{r_s})$$

Définissons par B_i, $(i = 1, 2, \ldots, s)$ les matrices carrées d'ordre n $\text{diag}(0, 0, \ldots, 0, I_{r_i}, 0, \ldots, 0)$ obtenues en remplaçant λ_i par 1 et λ_j $(j \neq i)$ par 0 dans le membre de droite de (1) et notons

$$E_i = PB_iP^{-1}, \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

Montrer que :

(*a*) $P^{-1}AP = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_s B_s$
(*b*) $A = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \ldots + \lambda_s E_s$
(*c*) Tout E_i est idempotent.
(*d*) $E_i E_j = 0$ pour $i \neq j$
(*e*) $E_1 + E_2 + \cdots + E_s = I$
(*f*) le rang de E_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i
(*g*) $(\lambda_i I - A)E_i = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, s)$
(*h*) Si $p(x)$ est un polynôme en x, alors $p(A) = p(\lambda_1)E_1 + p(\lambda_2)E_2 + \ldots + p(\lambda_s)E_s$.
Indication : Etablir $A^2 = \lambda_1^2 E_1 + \lambda_2^2 E_2 + \ldots + \lambda_s^2 E_s$, $A^3 = \lambda_1^3 E_1 + \lambda_2^3 E_2 + \ldots + \lambda_s^3 E_s$, ...

(*i*) Chaque E_i est un polynôme en A.
Indication : Définir $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_s)$ et $f_i(\lambda) = f(\lambda)/(\lambda - \lambda_i), (i = 1, 2, \ldots, s)$.
Alors $f_i(A) = f_i(\lambda_i) E_i$.

(*j*) Une matrice B commute avec A si et seulement si elle commute avec chaque E_i.
Indication : Si B commute avec A, elle commute avec tout polynôme en A.

(*k*) Si A est normale alors chaque E_i est hermitienne.

(*l*) Si A est non singulière, alors
$$A^{-1} = \lambda_1^{-1}E_1 + \lambda_2^{-1}E_2 + \ldots + \lambda_s^{-1}E_s$$

(*m*) Si A est hermitienne définie positive, alors
$$H = A^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}E_1 + \sqrt{\lambda_2}E_2 + \ldots + \sqrt{\lambda_s}E_s$$
est hermitienne définie positive.

(*n*) L'équation (*b*) est appelée "décomposition spectrale" de A. Montrer qu'elle est unique.

27. (*a*) Trouver la décomposition spectrale de :
$$A = \begin{bmatrix} 24 & -20 & 10 \\ -20 & 24 & -10 \\ 10 & -10 & 9 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 4/9 & -4/9 & 2/9 \\ -4/9 & 4/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 5/9 & 4/9 & -2/9 \\ 4/9 & 5/9 & 2/9 \\ -2/9 & 2/9 & 8/9 \end{bmatrix}$$

(*b*) Trouver $A^{-1} = \dfrac{1}{196}\begin{bmatrix} 29 & 20 & -10 \\ 20 & 29 & 10 \\ -10 & 10 & 44 \end{bmatrix}$.

(*c*) Trouver $A^{1/2} = \begin{bmatrix} 38/9 & -20/9 & 10/9 \\ -20/9 & 38/9 & -10/9 \\ 10/9 & -10/9 & 23/9 \end{bmatrix}$

28. Montrer que si A est normale et commute avec B, alors ${}^t\bar{A}$ et B commutent.
Indication : Utiliser le problème 26 (*j*).

29. Montrer que si A est non singulière alors il existe une matrice unitaire U et une matrice H hermitienne définie positive telle que $A = HU$.
Indication : Définir H par $H^2 = A\,{}^t\bar{A}$ et $U = H^{-1}A$.

30. Montrer que si A est non singulière, alors A est normale si et seulement si H et U du problème 29 commutent.

31. Montrer que la matrice carrée A est semblable à une matrice diagonale si et seulement si il existe une matrice H hermitienne définie positive telle que $H^{-1}AH$ soit normale.

32. Montrer qu'une matrice réelle symétrique (hermitienne) est idempotente si et seulement si ses valeurs propres sont des zéros et des 1.

33. Montrer que si A est réelle symétrique (hermitienne) et idempotente, alors $r_A = \operatorname{tr} A$.

34. Soit A normale, soit $B = I + A$ non singulière et soit $C = B^{-1}\,{}^t\bar{B}$.
Montrer : (*a*) A et $({}^t\bar{B})^{-1}$ commutent, (*b*) C est unitaire.

35. Montrer que si H est hermitienne, alors $(I + iH)^{-1}(I - iH)$ est unitaire.

36. Si A est carrée d'ordre n, l'ensemble des valeurs ${}^t\bar{X}AX$ où X est un vecteur unitaire est appelé "ensemble des valeurs de A". Montrer que :

(*a*) Les valeurs propres de A appartiennent à "l'ensemble des valeurs de A".

(*b*) Tout élément diagonal de A et tout élément diagonal de $U^{-1}AU$, où U est unitaire, appartient à "l'ensemble des valeurs de A".

(*c*) Si A est réelle symétrique (Hermitienne), tout élément de "l'ensemble des valeurs de A" est réel.

(*d*) Si A est réelle symétrique (Hermitienne), "l'ensemble des valeurs de A" est un ensemble de réels $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_n$, où λ_1 et λ_n sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de A.

CHAPITRE 22

Polynômes sur un corps

ANNEAU DES POLYNOMES SUR F. Soit λ un symbole abstrait (ou indéterminée) qui commute avec tout élément d'un corps F. L'expression :

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\lambda^0 \tag{22.1}$$

où a_i appartient à F est appelé "polynôme en λ sur F".

Si tout $a_i = 0$, (22.1) est appelé "polynôme nul" et nous écrirons $f(\lambda) = 0$. Si $a_n \neq 0$, (22.1) est dit de degré n et a_n est le coefficient du terme de plus haut degré. Le polynôme $f(\lambda) = a_0\lambda^0 = a_0 \neq 0$ est dit de degré 0 ; le degré du polynôme nul n'est pas défini.

Si $a_n = 1$ dans (22.1), le polynôme est dit unitaire.

Deux polynômes en λ qui contiennent les mêmes termes, à part ceux de coefficients nuls, sont dits égaux.

L'ensemble de tous les polynômes (22.1) est appelé "l'anneau des polynômes" $F[\lambda]$ sur F.

SOMME ET PRODUIT. Si on considère chaque polynôme de $F[\lambda]$ comme un élément d'un ensemble de nombres, l'anneau des polynômes a la plupart des propriétés d'un corps mais pas toutes. Par exemple :

$$f(\lambda) + g(\lambda) = g(\lambda) + f(\lambda) \quad \text{et} \quad f(\lambda)\cdot g(\lambda) = g(\lambda)\cdot f(\lambda)$$

Si $f(\lambda)$ est de degré m et $g(\lambda)$ de degré n,

(i) $f(\lambda) + g(\lambda)$ est de degré m quand $m > n$, de degré au plus m si $m = n$, et de degré n si $m < n$.

(ii) $f(\lambda) \,.\, g(\lambda)$ est de degré $m + n$.

Si $f(\lambda) \neq 0$ et $f(\lambda) \,.\, g(\lambda) = 0$, alors $g(\lambda) = 0$.

Si $g(\lambda) \neq 0$ et $h(\lambda) \,.\, g(\lambda) = k(\lambda) \,.\, g(\lambda)$, alors $h(\lambda) = k(\lambda)$.

DIVISION DES POLYNOMES. Dans le problème 1 nous montrons:

Théorème I. Si $f(\lambda)$ et $g(\lambda) \neq 0$ sont des polynômes de $F[\lambda]$, alors il existe un couple unique de polynômes $h(\lambda)$ et $r(\lambda)$ de $F[\lambda]$, où $r(\lambda)$ est soit le polynôme nul soit de degré strictement inférieur à celui de $g(\lambda)$, tel que :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \,.\, g(\lambda) + r(\lambda) \tag{22.2}$$

Ici, $r(\lambda)$ est appelé le reste de la division de $f(\lambda)$ par $g(\lambda)$. Si $r(\lambda) = 0$, on dit que $g(\lambda)$ divise $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ sont alors les facteurs de $f(\lambda)$.

Supposons $f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda)$. Quand $g(\lambda)$ est de degré 0 c'est-à-dire $g(\lambda) = C$, une constante, la factorisation est dite triviale. Un polynôme non constant sur F est dit irréductible sur F si ses seules factorisations sont triviales.

Exemple 1. Sur le corps des rationnels $\lambda^2 - 3$ est irréductible ; sur le corps des réels il existe la factorisation $(\lambda + \sqrt{3})\,(\lambda - \sqrt{3})$. Sur le corps des réels (et par suite sur celui des rationnels) $\lambda^2 + 4$ est irréductible ; sur le corps des complexes, il existe la factorisation $(\lambda + 2i)\,(\lambda - 2i)$.

THEOREMES DU RESTE. Soit $f(\lambda)$ un polynôme et $g(\lambda) = \lambda - a$. Alors (22.2) devient:

$$f(\lambda) \quad = \quad h(\lambda)\cdot(\lambda - a) \; + \; r \tag{22.3}$$

où r est indépendant de λ. D'après (22.3) $f(a) = r$ et nous avons :

Théorème II. Quand $f(\lambda)$ est divisé par $\lambda - a$, alors le reste est égal à $f(a)$.

Théorème III. Un polynôme $f(\lambda)$ admet $\lambda - a$ dans sa décomposition en facteurs si et seulement si $f(a) = 0$.

PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN. Si $h(\lambda)$ divise à la fois $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$, il est appelé "diviseur commun" à $f(\lambda)$ et à $g(\lambda)$.

On dit qu'un polynôme $d(\lambda)$ est le plus grand diviseur commun à $f(\lambda)$ et à $g(\lambda)$ si

(i) $d(\lambda)$ est unitaire.

(ii) $d(\lambda)$ est un diviseur commun à $f(\lambda)$ et à $g(\lambda)$.

(iii) Tout diviseur commun à $f(\lambda)$ et à $g(\lambda)$ divise aussi $d(\lambda)$.

Dans le problème 2, nous démontrons:

Théorème IV. Si $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont des polynômes de $F[\lambda]$, non tous les deux nuls, ils admettent un unique plus grand diviseur commun $d(\lambda)$ et il existe des polynômes $h(\lambda)$ et $k(\lambda)$ de $F[\lambda]$ tels que :

$$d(\lambda) \quad = \quad h(\lambda)\cdot f(\lambda) \; + \; k(\lambda)\cdot g(\lambda) \tag{22.4}$$

Voir aussi le problème 3.

Quand les seuls diviseurs communs à $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont des constantes, leur plus grand diviseur commun est $d(\lambda) = 1$.

Exemple 2. Le plus grand diviseur commun à $f(\lambda) = (\lambda^2 + 4)\,(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ et à $g(\lambda) = (\lambda^2 - 1)\,(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ est $(\lambda^2 + 3\lambda + 5)$ et (22.4) devient

$$\lambda^2 + 3\lambda + 5 \quad = \quad \tfrac{1}{5}f(\lambda) \; - \; \tfrac{1}{5}g(\lambda)$$

nous avons aussi $(1 - \lambda^2)\,.\,f(\lambda) + (\lambda^2 + 4)\,.\,g(\lambda) = 0$. Ceci illustre :

Théorème V. Si le plus grand diviseur commun à $f(\lambda)$ de degré $n > 0$ et à $g(\lambda)$ de degré $m > 0$ n'est pas 1, il existe alors un polynôme non nul $a(\lambda)$ de degré $< m$ et un polynôme $b(\lambda)$ de degré $< n$ tels que

$$a(\lambda)\cdot f(\lambda) \; + \; b(\lambda)\cdot g(\lambda) \quad = \quad 0$$

et réciproquement. Voir problème 4.

POLYNOMES PREMIERS ENTRE EUX. Deux polynômes sont dits "premiers entre eux" si leur plus grand commun diviseur est 1.

Théorème VI. Si $g(\lambda)$ est irréductible dans $F[\lambda]$ et si $f(\lambda)$ est un polynôme de $F[\lambda]$, alors ou bien $g(\lambda)$ divise $f(\lambda)$ ou bien $g(\lambda)$ est premier avec $f(\lambda)$.

Théorème VII. Si $g(\lambda)$ est irréductible mais divise $f(\lambda) \cdot h(\lambda)$, il divise au moins l'un des deux : $f(\lambda)$ ou $h(\lambda)$.

Théorème VIII. Si $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont premiers entre eux et si chacun d'eux divise $h(\lambda)$ alors $f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ divise aussi $h(\lambda)$.

DECOMPOSITION UNIQUE EN FACTEURS IRREDUCTIBLES ET UNITAIRES. Dans le problème 5 nous démontrons :

Théorème IX. Tout polynôme non nul $f(\lambda)$ de $F[\lambda]$ peut s'écrire

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \cdots q_r(\lambda) \tag{22.5}$$

où $c \neq 0$ est une constante et où les $q_i(\lambda)$ sont des polynômes irréductibles unitaires de $F[\lambda]$.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que si $f(\lambda)$ et $g(\lambda) \neq 0$ sont des polynômes de $F[\lambda]$, il existe un couple unique de polynômes $h(\lambda)$ et $r(\lambda)$ de $F[\lambda]$, tel que $r(\lambda)$ soit ou le polynôme nul ou de degré strictement inférieur à celui de $g(\lambda)$ et tel que :

(i) $$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda)$$

Soit

$$f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

et

$$g(\lambda) = b_m\lambda^m + b_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0, \qquad b_m \neq 0$$

Il est clair que le théorème est vrai si $f(\lambda) = 0$ ou si $n < m$. Supposons que $n \geqslant m$; alors :

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) = f_1(\lambda) = c_p\lambda^p + c_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + c_0$$

est soit un polynôme nul, soit de degré inférieur à celui de $f(\lambda)$.

Si $f_1(\lambda) = 0$ ou s'il est de degré inférieur à celui de $g(\lambda)$, nous avons démontré le théorème avec $h(\lambda) = \dfrac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}$ et $r(\lambda) = f_1(\lambda)$. Sinon, nous formons

$$f(\lambda) - \frac{a_n}{b_m}\lambda^{n-m}g(\lambda) - \frac{c_p}{b_m}\lambda^{p-m}g(\lambda) = f_2(\lambda)$$

De nouveau, si $f_2(\lambda) = 0$ ou s'il est de degré inférieur à celui de $g(\lambda)$, nous aurons démontré le théorème. Sinon, nous répétons le procédé. Puisque à chaque étape, le degré du reste (supposé $\neq 0$) diminue, nous obtiendrons à partir d'un certain moment un reste $r(\lambda) = f_s(\lambda)$ qui sera ou bien le polynome nul ou bien de degré inférieur à celui de $g(\lambda)$. Pour démontrer l'unicité, supposons :

$$f(\lambda) = h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) \quad \text{et} \quad f(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

où les degrés de $r(\lambda)$ et de $s(\lambda)$ sont inférieurs à celui de $g(\lambda)$. Alors nous avons :

$$h(\lambda) \cdot g(\lambda) + r(\lambda) = k(\lambda) \cdot g(\lambda) + s(\lambda)$$

et

$$[k(\lambda) - h(\lambda)]g(\lambda) = r(\lambda) - s(\lambda)$$

Or, $r(\lambda) - s(\lambda)$ est de degré inférieur à m, tandis que $[k(\lambda) - h(\lambda)]\,g(\lambda)$ est de degré égal ou supérieur à m, sauf si $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$. Ainsi, $k(\lambda) - h(\lambda) = 0$ et $r(\lambda) - s(\lambda) = 0$. Le couple $(h(\lambda), r(\lambda))$ est donc unique.

2. Montrer que si $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont des polynômes de $F[\lambda]$, non tous les deux nuls, ils admettent un unique plus grand commun diviseur $d(\lambda)$ et il existe des polynômes $h(\lambda)$ et $k(\lambda)$ dans $F[\lambda]$ tels que :

$$(a) \qquad d(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Si $f(\lambda) = 0$ alors $d(\lambda) = b_m^{-1} g(\lambda)$ où b_m est le coefficient du terme de plus haut degré de $g(\lambda)$ et nous avons (a) avec $h(\lambda) = 1$ et $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Supposons maintenant que le degré de $g(\lambda)$ ne soit pas supérieur à celui de $f(\lambda)$. D'après le théorème I, nous avons

$$\text{(i)} \qquad f(\lambda) = q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) + r_1(\lambda)$$

où $r_1(\lambda) = 0$ ou il est de degré inférieur à celui de $g(\lambda)$. Si $r_1(\lambda) = 0$ alors $d(\lambda) = b_m^{-1} g(\lambda)$ et nous avons (a) avec $h(\lambda) = 0$ et $k(\lambda) = b_m^{-1}$.

Si $r_1(\lambda) \neq 0$ nous avons

$$\text{(ii)} \qquad g(\lambda) = q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) + r_2(\lambda)$$

où $r_2(\lambda) = 0$ ou il est de degré inférieur à celui de $r_1(\lambda)$. Si $r_2(\lambda) = 0$ nous avons, en reprenant **(i)** :

$$r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

et de là nous obtenons (a) en divisant par le coefficient du terme de plus haut degré de $r_1(\lambda)$.

Si $r_2(\lambda) \neq 0$ nous avons

$$\text{(iii)} \qquad r_1(\lambda) = q_3(\lambda)\cdot r_2(\lambda) + r_3(\lambda)$$

où $r_3(\lambda) = 0$ ou il est de degré inférieur à celui de $r_2(\lambda)$. Si $r_3(\lambda) = 0$, nous avons en reprenant **(i)** et **(ii)** :

$$\begin{aligned} r_2(\lambda) &= g(\lambda) - q_2(\lambda)\cdot r_1(\lambda) = g(\lambda) - q_2(\lambda)[f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] \\ &= -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) \end{aligned}$$

et de là nous obtenons (a) en divisant par le coefficient du terme de plus haut degré de $r_2(\lambda)$.

En continuant ce procédé, nous obtiendrons en général et sous la condition que chaque nouveau reste soit non nul :

$$\text{(iv)} \qquad r_i(\lambda) = q_{i+2}(\lambda)\cdot r_{i+1}(\lambda) + r_{i+2}(\lambda)$$

cependant, le procédé s'arrêtera avec :

$$\text{(v)} \qquad r_{s-2}(\lambda) = q_s(\lambda)\cdot r_{s-1}(\lambda) + r_s(\lambda), \qquad r_s(\lambda) \neq 0$$

et

$$\text{(vi)} \qquad r_{s-1}(\lambda) = q_{s+1}(\lambda)\cdot r_s(\lambda)$$

D'après **(vi)**, $r_s(\lambda)$ divise $r_{s-1}(\lambda)$ et d'après **(v)**, il divise aussi $r_{s-2}(\lambda)$. D'après **(iv)**, nous avons

$$r_{s-3}(\lambda) = q_{s-1}(\lambda)\cdot r_{s-2}(\lambda) + r_{s-1}(\lambda)$$

de telle sorte que $r_s(\lambda)$ divise $r_{s-3}(\lambda)$. Ainsi, en reprenant les étapes jusqu'à **(vi)**, nous conclurons que $r_s(\lambda)$ divise à la fois $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$. Si le coefficient du terme de plus haut degré de $r_s(\lambda)$ est c, alors $d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda)$.

D'après **(i)** $r_1(\lambda) = f(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot g(\lambda) = h_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_1(\lambda)\cdot g(\lambda)$ et en substituant dans **(ii)**,

$$r_2(\lambda) = -q_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + [1 + q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)]g(\lambda) = h_2(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_2(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

D'après **(iii)**, $r_3(\lambda) = r_1(\lambda) - q_3(\lambda) . r_2(\lambda)$. En remplaçant $r_1(\lambda)$ et $r_2(\lambda)$ par leurs valeurs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} r_3(\lambda) &= [1 + q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]f(\lambda) + [-q_1(\lambda) - q_3(\lambda) - q_1(\lambda)\cdot q_2(\lambda)\cdot q_3(\lambda)]g(\lambda) \\ &= h_3(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_3(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

En continuant ainsi, nous obtenons

$$r_s(\lambda) = h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + k_s(\lambda)\cdot g(\lambda)$$

Ainsi $d(\lambda) = c^{-1} r_s(\lambda) = c^{-1} h_s(\lambda)\cdot f(\lambda) + c^{-1} k_s(\lambda)\cdot g(\lambda) = h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda)$ comme on le demandait.

Montrer en exercice que $d(\lambda)$ est unique.

3. Trouver le plus grand commun diviseur $d(\lambda)$ à

$$f(\lambda) = 3\lambda^5 + 7\lambda^4 + 11\lambda + 6 \quad \text{et} \quad g(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 2$$

et exprimer $d(\lambda)$ sous la forme qui est donnée dans le théorème III.

Nous trouvons:

(i) $f(\lambda) = (3\lambda+1)g(\lambda) + (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)$

(ii) $g(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) + (\lambda^2+7\lambda+10)$

(iii) $\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4 = (\lambda-3)(\lambda^2+7\lambda+10) + (17\lambda+34)$

et

(iv) $\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\frac{1}{17}\lambda+\frac{5}{17})(17\lambda+34)$

Le plus grand commun diviseur est $\frac{1}{17}(17\lambda+34) = \lambda+2$.

D'après **(iii)**

$$17\lambda + 34 = (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) - (\lambda-3)(\lambda^2+7\lambda+10)$$

en substituant à $\lambda^2 + 7\lambda + 10$ son expression tirée de **(ii)**

$$\begin{aligned} 17\lambda + 34 &= (\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) - (\lambda-3)[g(\lambda) - (\lambda-2)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4)] \\ &= (\lambda^2-5\lambda+7)(\lambda^3+4\lambda^2+6\lambda+4) - (\lambda-3)g(\lambda) \end{aligned}$$

de même pour $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$ en utilisant **(i)**

$$17\lambda + 34 = (\lambda^2-5\lambda+7)f(\lambda) + (-3\lambda^3+14\lambda^2-17\lambda-4)g(\lambda)$$

Ainsi,

$$\lambda + 2 = \frac{1}{17}(\lambda^2-5\lambda+7)\cdot f(\lambda) + \frac{1}{17}(-3\lambda^3+14\lambda^2-17\lambda-4)\cdot g(\lambda)$$

4. Montrer que si le plus grand commun diviseur à $f(\lambda)$ de degré $n > 0$ et à $g(\lambda)$ de degré $m > 0$ n'est pas 1, il existe alors des polynômes $a(\lambda)$ de degré $< m$ et $b(\lambda)$ de degré $< n$ tels que :

$$(a) \qquad a(\lambda)\cdot f(\lambda) + b(\lambda)\cdot g(\lambda) = 0$$

et réciproquement.

Supposons que le plus grand commun diviseur à $f(\lambda)$ et à $g(\lambda)$ soit $d(\lambda) \neq 1$; alors

$$f(\lambda) = d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) \quad \text{et} \quad g(\lambda) = d(\lambda)\cdot g_1(\lambda)$$

où $f_1(\lambda)$ est de degré $< n$ et $g_1(\lambda)$ de degré $< m$. Or,

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) = g_1(\lambda)\cdot d(\lambda)\cdot f_1(\lambda) = g(\lambda)\cdot f_1(\lambda)$$

et

$$g_1(\lambda)\cdot f(\lambda) + [-f_1(\lambda)\cdot g(\lambda)] = 0$$

Ainsi, en prenant $a(\lambda) = g_1(\lambda)$ et $b(\lambda) = -f_1(\lambda)$, nous obtenons (a).

Réciproquement, supposons que $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ soient premiers entre eux et que (a) soit vérifié. Alors d'après le théorème IV, il existe des polynômes $h(\lambda)$ et $k(\lambda)$ tels que

$$h(\lambda)\cdot f(\lambda) + k(\lambda)\cdot g(\lambda) = 1$$

Ainsi, en utilisant (a) :

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= a(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot f(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \\ &= -b(\lambda)\cdot h(\lambda)\cdot g(\lambda) + a(\lambda)\cdot k(\lambda)\cdot g(\lambda) \end{aligned}$$

et $g(\lambda)$ divise $a(\lambda)$. Mais ceci est impossible. Par suite si (a) est vérifié, $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ ne peuvent pas être premiers entre eux.

5. Montrer que tout polynôme non nul de $F[\lambda]$ peut s'écrire

$$f(\lambda) = c \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \ \ldots \ q_r(\lambda)$$

où $c \neq 0$ est une constante et où les $q_i(\lambda)$ sont des polynômes irréductibles et unitaires de $F[\lambda]$.

Ecrivons:

(i) $$f(\lambda) = a_n \cdot f_1(\lambda)$$

où a_n est le coefficient du terme de plus haut degré de $f(\lambda)$. Si $f_1(\lambda)$ est irréductible, alors (i) satisfait à la condition du théorème. Sinon il existe une factorisation:

(ii) $$f(\lambda) = a_n \cdot g(\lambda) \cdot h(\lambda)$$

Si $g(\lambda)$ et $h(\lambda)$ sont irréductibles, alors (ii) satisfait à la condition du théorème. Sinon, une nouvelle factorisation conduira à un ensemble de facteurs irréductibles et unitaires. Pour montrer l'unicité, supposons que

$$a_n \cdot q_1(\lambda) \cdot q_2(\lambda) \ldots q_r(\lambda) \qquad \text{et} \qquad a_n \cdot p_1(\lambda) \cdot p_2(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$$

soient deux factorisations avec $r < s$. Puisque $q_1(\lambda)$ divise $p_1(\lambda)\, p_2(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$, il doit diviser l'un des $p_i(\lambda)$. En échangeant les indices, on peut supposer qu'il divise $p_1(\lambda)$. Puisque $p_1(\lambda)$ est irréductible et unitaire, $q_1(\lambda) = p_1(\lambda)$. Ainsi $q_2(\lambda)$ divise $p_2(\lambda) \,.\, p_3(\lambda) \ldots p_s(\lambda)$ et en reprenant le raisonnement précédent, $q_2(\lambda) = p_2(\lambda)$. Ainsi nous avons $q_i(\lambda) = p_i(\lambda)$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $p_{r+1}(\lambda) \,.\, p_{r+2}(\lambda) \ldots p_s(\lambda) = 1$. Cette dernière égalité n'est possible que pour $r = s$ et l'unicité est établie.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. Donner un exemple dans lequel le degré de $f(\lambda) + g(\lambda)$ est inférieur au degré de $f(\lambda)$ ou au degré de $g(\lambda)$.

7. Démontrer le théorème III.

8. Montrer que si $f(\lambda)$ divise $g(\lambda)$ et $h(\lambda)$, il divise aussi $g(\lambda) \pm h(\lambda)$.

9. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes non nuls $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ de $F[\lambda]$ se divisent l'un l'autre.

10. Dans chacun des cas suivants, exprimer le plus grand commun diviseur sous la forme qui est donnée dans le théorème IV.

(*a*) $f(\lambda) = 2\lambda^5 - \lambda^3 + 2\lambda^2 - 6\lambda - 4$, $\quad g(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2$

(*b*) $f(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 3\lambda^2 - 11\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - 3$

(*c*) $f(\lambda) = 2\lambda^5 + 5\lambda^4 + 4\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, $\quad g(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$

(*d*) $f(\lambda) = 3\lambda^4 - 4\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 6$, $\quad g(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$

Réponses (*a*) $\lambda^2 - 2 = -\frac{1}{3}(\lambda - 1) f(\lambda) + \frac{1}{3}(2\lambda^2 + 1) g(\lambda)$

(*b*) $\lambda - 3 = -\frac{1}{13}(\lambda + 4) f(\lambda) + \frac{1}{13}(\lambda^2 + 5\lambda + 5) g(\lambda)$

(*c*) $\lambda + 1 = \frac{1}{13}(\lambda + 4) f(\lambda) + \frac{1}{13}(-2\lambda^3 - 9\lambda^2 - 2\lambda + 9) g(\lambda)$

(*d*) $1 = \frac{1}{102}(5\lambda + 2) f(\lambda) + \frac{1}{102}(-15\lambda^3 + 44\lambda^2 - 55\lambda + 45) g(\lambda)$

11. Démontrer le théorème VI.

Indication : Soit $d(\lambda)$ le plus grand commun diviseur de $f(\lambda)$ et de $g(\lambda)$; alors $g(\lambda) = d(\lambda) \,.\, h(\lambda)$. Ainsi : ou bien $d(\lambda)$ ou bien $h(\lambda)$ est une constante.

12. Démontrer les théorèmes VII et VIII.

13. Montrer que si $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ sont premiers entre eux et si $f(\lambda)$ divise $g(\lambda) \cdot a(\lambda)$, il divise $a(\lambda)$.

14. Le plus petit commun multiple de $f(\lambda)$ et de $g(\lambda)$ est un polynôme unitaire multiple à la fois de $f(\lambda)$ et de $g(\lambda)$ et de degré minimum. Trouver le plus grand commun diviseur et le plus petit commun multiple de :

(*a*) $f(\lambda) = \lambda^3 - 1, \quad g(\lambda) = \lambda^2 - 1$

(*b*) $f(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)^2(\lambda+2), \quad g(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda+2)^3(\lambda-3)$

Réponses : (*a*) pgcd $= \lambda - 1$; ppcm $= (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$

(*b*) pgcd $= (\lambda + 1)(\lambda + 2)$; ppcm $= (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2(\lambda + 2)^3(\lambda - 3)$

15. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, montrer que :

(*a*) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 5$ et $\phi(A) = A^3 - 3A^2 - 9A - 5I = 0$

(*b*) $m(A) = 0$ quand $m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda - 5$.

16. Quelle propriété d'un corps n'est pas vérifiée par l'anneau des polynômes ?

17. Le scalaire c est dit "racine" d'un polynôme $f(\lambda)$ si $f(c) = 0$. Montrer que le scalaire c est une racine de $f(\lambda)$ si et seulement si $\lambda - c$ divise $f(\lambda)$.

18. Supposons $f(\lambda) = (\lambda - c)^k g(\lambda)$. (*a*) Montrer que c est une racine de multiplicité $k - 1$ de $f'(\lambda)$. (*b*) Montrer que c est une racine de multiplicité $k > 1$ de $f(\lambda)$ si et seulement si c est une racine à la fois de $f(\lambda)$ et de $f'(\lambda)$.

19. Prenons $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ non tous les deux nuls dans $F[\lambda]$. Soit $d(\lambda)$ leur plus grand commun diviseur. Soit K un corps contenant F. Montrer que si $D(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de $f(\lambda)$ et $g(\lambda)$ dans $K[\lambda]$ alors $D(\lambda) = d(\lambda)$.

Indication : Supposons $d(\lambda) = h(\lambda) \cdot f(\lambda) + k(\lambda) \cdot g(\lambda)$, $f(\lambda) = s(\lambda) \cdot D(\lambda)$, $g(\lambda) = t(\lambda) \cdot D(\lambda)$, et $D(\lambda) = c(\lambda) \cdot d(\lambda)$.

20. Montrer qu'une matrice A carrée d'ordre n est normale si ${}^t\bar{A}$ peut s'exprimer comme un polynôme

$$a_S A^S + a_{S-1} A^{S-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

en A.

Lambda matrices

DEFINITIONS. Soit $F[\lambda]$ l'anneau des polynômes en λ à coefficients dans F. Une matrice $m \times n$ non nulle sur $F[\lambda]$

$$(23.1) \qquad A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)] = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

est appelée une λ-matrice.

Soit p le degré maximum de tous les polynômes $a_{ij}(\lambda)$ de (23.1). Alors on peut écrire $A(\lambda)$ comme un polynôme de degré p en λ à coefficients matriciels.

$$(23.2) \qquad A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$$

où A_i est une matrice $m \times n$ sur F.

Exemple 1. $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+5 \\ \lambda^3-4 & \lambda^3-3\lambda^2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

est une λ-matrice ou polynôme matriciel de degré 4.

Si $A(\lambda)$ est une matrice carrée d'ordre n, on dit qu'elle est singulière ou non suivant que $|A(\lambda)|$ est nul ou non. De plus, on dira que $A(\lambda)$ est "propre" ou "impropre" suivant que A_p est non singulière ou singulière. Le polynôme matriciel de l'exemple 1 est non singulier et impropre.

OPERATIONS SUR LES λ-MATRICES. Considérons deux λ-matrices carrées d'ordre n ou deux polynômes matriciels sur $F(\lambda)$.

$$(23.3) \qquad A(\lambda) = A_p \lambda^p + A_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + A_1\lambda + A_0$$

et

$$(23.4) \qquad B(\lambda) = B_q \lambda^q + B_{q-1}\lambda^{q-1} + \dots + B_1\lambda + B_0$$

On dira que les matrices (23.3) et (23.4) sont égales, $A(\lambda) = B(\lambda)$, si $p = q$ et $A_i = B_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, p)$.

La somme $A(\lambda) + B(\lambda)$ est une λ-matrice $C(\lambda)$ obtenue en ajoutant les éléments correspondants des deux λ-matrices. Le produit $A(\lambda) \,.\, B(\lambda)$ est une λ-matrice ou polynôme matriciel de degré au plus $p + q$. Si $A(\lambda)$ ou $B(\lambda)$ est non singulière, le degré de $A(\lambda) \,.\, B(\lambda)$ est exactement $p + q$ ainsi que celui de $B(\lambda) \,.\, A(\lambda)$.

L'égalité (23.3) reste inchangée lorsque l'on remplace λ par un autre scalaire de F. Par exemple, posons $\lambda = k$, nous obtenons dans (23.3)

$$A(k) = A_p k^p + A_{p-1}k^{p-1} + \dots + A_1 k + A_0$$

Par contre, si on remplace λ par une matrice carrée C d'ordre n, on peut obtenir deux résultats différents étant donné qu'en général deux matrices carrées d'ordre n ne commutent pas. Nous définirons

(23.5) $$A_D(C) \;=\; A_p C^p + A_{p-1} C^{p-1} + \ldots + A_1 C + A_0$$

et

(23.6) $$A_G(C) \;=\; C^p A_p + C^{p-1} A_{p-1} + \ldots + C A_1 + A_0$$

comme étant les "valeurs fonctionnelles" de $A(\lambda)$ respectivement à droite et à gauche.

Exemple 2. Soit $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Alors $$A_D(C) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix}$$

et

$$A_G(C) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix}$$

Voir problème 1.

DIVISION. Dans le problème 2 nous démontrons :

Théorème 1. Si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont les deux polynômes matriciels (23.3) et (23.4) et si B_q est non singulière, il existe alors deux couples uniques de polynômes matriciels $[Q_1(\lambda), R_1(\lambda)]$ et $[Q_2(\lambda), R_2(\lambda)]$ tels que $R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ soient ou nuls ou de degré inférieur à celui de $B(\lambda)$ et tels que :

(23.7) $$A(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

et

(23.8) $$A(\lambda) \;=\; B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Si $R_1(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ est dit "diviseur à droite" de $A(\lambda)$. Si $R_2(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ est dit "diviseur à gauche" de $A(\lambda)$.

Exemple 3. Si $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda+2 \\ 2\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$ et $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$,

$$A(\lambda) \;=\; \begin{bmatrix} \lambda^2-1 & \lambda-1 \\ 2\lambda & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\lambda & 2\lambda+3 \\ -5\lambda & -2\lambda \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

et

$$A(\lambda) \;=\; \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 \\ \lambda & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-1 & 1 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda)$$

Ici, $B(\lambda)$ est un diviseur à gauche de $A(\lambda)$

Voir problème 3.

Un polynôme matriciel de la forme

(23.9) $$B(\lambda) \;=\; b_q\lambda^q\cdot I_n + b_{q-1}\lambda^{q-1}\cdot I_n + \ldots + b_1\lambda\cdot I_n + b_0 I_n \;=\; b(\lambda)\cdot I_n$$

est dit "scalaire".

Un polynôme matriciel scalaire $B(\lambda) = b(\lambda)\, I_n$ commute avec tout polynôme matriciel pour lequel les coefficients sont des matrices carrées d'ordre n.

Si dans (23.7) et (23.8), $B(\lambda) = b(\lambda)\,.\,I$ alors :

(23.10) $$A(\lambda) \;=\; Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda) \;=\; B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Exemple 4. Soit $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda+1 \\ \lambda^2-1 & 2\lambda+1 \end{bmatrix}$ et $B(\lambda) = (\lambda+2)I_2$. Alors :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

et

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda-2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = B(\lambda)\cdot Q_1(\lambda) + R_1(\lambda)$$

Si $R_1(\lambda) = 0$ dans (23.10), alors $A(\lambda) = b(\lambda)\,.\,I\,.\,Q_1(\lambda)$ et nous avons :

Théorème II. Un polynôme matriciel $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ de degré n est divisible par un polynôme matriciel scalaire $B(\lambda) = b(\lambda)\,I_n$ si et seulement si tout $a_{ij}(\lambda)$ est divisible par $b(\lambda)$.

THEOREME DU RESTE. Soit $A(\lambda)$ une λ-matrice de (23.3) et soit $B = [b_{ij}]$ une matrice carrée d'ordre n sur F. Puisque $\lambda I - B$ est non-singulière, nous pouvons écrire :

(23.11) $$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

et

(23.12) $$A(\lambda) = (\lambda I - B)\cdot Q_2(\lambda) + R_2$$

où R_1 et R_2 sont indépendants de λ. Cela montre que :

Théorème III. Si un polynôme matriciel $A(\lambda)$ de (23.3) est divisé par $\lambda I - B$, où $B = [b_{ij}]$ est carrée d'ordre n, et si les restes obtenus sont R_1 et R_2, alors

$$R_1 = A_D(B) = A_p B^p + A_{p-1} B^{p-1} + \ldots + A_1 B + A_0$$

et

$$R_2 = A_G(B) = B^p A_p + B^{p-1} A_{p-1} + \ldots + BA_1 + A_0$$

Exemple 5. Soit $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2+2 \end{bmatrix}$ et $\lambda I - B = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}$. Alors

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 15 \\ 14 & 26 \end{bmatrix} = Q_1(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_1$$

et

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 \\ -3 & \lambda-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda+1 & 3 \\ 4 & \lambda+4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 17 & 27 \end{bmatrix} = (\lambda I - B)Q_2(\lambda) + R_2$$

Dans l'exemple 2, $R_1 = A_D(B)$ et $R_2 = A_G(B)$ comme dans le théorème III.

Quand $A(\lambda)$ est un polynôme matriciel scalaire :

$$A(\lambda) = f(\lambda)\cdot I = a_p I\lambda^p + a_{p-1} I\lambda^{p-1} + \ldots + a_1 I\lambda + a_0 I$$

Les restes dans (23.11) et (23.12) sont identiques de telle façon que

$$R_1 = R_2 = a_p B^p + a_{p-1} B^{p-1} + \ldots + a_1 B + a_0 I$$

et nous avons :

Théorème IV. Si un polynôme matriciel scalaire $f(\lambda)\,.\,I_n$ est divisé par $\lambda I_n - B$ et si le reste obtenu est R, on a $R = f(B)$.

Comme conséquence, nous avons :

Théorème V. Un polynôme matriciel scalaire $f(\lambda)\,.\,I_n$ est divisible par $\lambda I_n - B$ si et seulement si $f(B) = 0$.

THEOREME DE CAYLEY-HAMILTON. Considérons une matrice carrée d'ordre n, $A = [a_{ij}]$ ayant pour matrice caractéristique $\lambda I - A$ et pour équation caractéristique $\phi(\lambda) = |\lambda I - A| = 0$. D'après (6.2),

$$(\lambda I - A)\cdot \mathrm{adj}\,(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$$

Ainsi $\phi(\lambda)\,.\,I$ est divisible par $\lambda I - A$ et, d'après le théorème V, $\phi(A) = 0$. D'où:

Théorème VI. Toute matrice carrée $A = [a_{ij}]$ est racine de son équation caractéristique $\phi(\lambda) = 0$.

Exemple 6. L'équation caractéristique de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ est $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix}, \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{bmatrix} 32 & 62 & 31 \\ 31 & 63 & 31 \\ 31 & 62 & 32 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 7 & 12 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 12 & 7 \end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Voir problème 4.

PROBLEMES RESOLUS

1. Pour la matrice $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & \lambda^2 \\ \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$, calculer $A_D(C)$ et $A_G(C)$ où $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ; ainsi :}$$

$$\begin{aligned} A_D(C) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$A_G(C) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Montrer que si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont les λ-matrices **(23.3)** et **(23.4)** et si B_q est non singulière, il existe alors deux couples uniques de polynômes matriciels $[Q_1(\lambda), R_1(\lambda)]$ et $[Q_2(\lambda), R_2(\lambda)]$ où $R_1(\lambda)$ et $R_2(\lambda)$ sont ou zéro ou de degré inférieur à celui de $B(\lambda)$, tels que

(i) $$A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

et

(ii) $$A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$$

Si $p < q$, alors **(i)** est vérifée avec $Q_1(\lambda) = 0$ et $R_1(\lambda) = A(\lambda)$. Supposons $p \geqslant q$; alors

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} = C(\lambda)$$

où $C(\lambda)$ est ou zéro ou de degré au plus $p-1$.

Si $C(\lambda)$ est nul ou de degré inférieur à q, **(i)** est vérifiée avec :

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} \quad \text{et} \quad R_1(\lambda) = C(\lambda)$$

Si $C(\lambda) = C_s\lambda^s + \cdots$ où $s > q$, formons

$$A(\lambda) - A_p B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{p-q} - C_s B_q^{-1} B(\lambda)\lambda^{s-q} = D(\lambda)$$

Si $D(\lambda)$ est ou zéro ou de degré inférieur à q, **(i)** est vérifiée avec

$$Q_1(\lambda) = A_p B_q^{-1}\lambda^{p-q} + C_s B_q^{-1}\lambda^{s-q} \quad \text{et} \quad R_1(\lambda) = D(\lambda)$$

sinon nous poursuivons le procédé. Puisqu'on obtient une suite de polynômes matriciels $C(\lambda), D(\lambda), \ldots$ de degrés décroissants, nous finirons par obtenir un polynôme matriciel qui soit ou nul ou de degré inférieur à q et **(i)** sera vérifiée.

Pour obtenir **(ii)**, commençons par

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_q^{-1} A_p \lambda^{p-q}$$

La fin de la démonstration (ainsi que l'unicité) est laissée en exercice. Voir problème 1 Chapitre 22.

3. On donne $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^4 + 2\lambda^3 - 1 & \lambda^3 - \lambda - 1 \\ \lambda^3 + \lambda^2 + 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}$ et $B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 + \lambda - 1 \\ -\lambda^2 + 2 & \lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$

trouver les matrices $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ telles que :

(*a*) $A(\lambda) = Q_1(\lambda)\cdot B(\lambda) + R_1(\lambda)$, (*b*) $A(\lambda) = B(\lambda)\cdot Q_2(\lambda) + R_2(\lambda)$ comme dans le problème 2.

Nous avons

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^4 + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Ici $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(*a*) Nous calculons

$$A(\lambda) - A_4 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C(\lambda)$$

$$C(\lambda) - C_3 B_2^{-1} B(\lambda)\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = D(\lambda)$$

et

$$D(\lambda) - D_2 B_2^{-1} B(\lambda) = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -13 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6\lambda - 13 & 5\lambda + 3 \\ -2\lambda - 9 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix} = R_1(\lambda)$$

Ainsi

$$Q_1(\lambda) = (A_4\lambda^2 + C_3\lambda + D_2) B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 4 & \lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ 2\lambda + 4 & 3\lambda + 5 \end{bmatrix}$$

(*b*) Nous calculons

$$A(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} A_4\lambda^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\lambda^3 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = E(\lambda)$$

$$E(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} E_3\lambda = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F(\lambda)$$

et

$$F(\lambda) - B(\lambda) B_2^{-1} F_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 8 & -\lambda + 4 \\ \lambda - 7 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = R_2(\lambda)$$

Ainsi $$Q_2(\lambda) = B_2^{-1}(A_4\lambda^2 + E_3\lambda + F_2) = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\lambda^2 + \begin{bmatrix}4 & 2\\6 & 3\end{bmatrix}\lambda + \begin{bmatrix}4 & 2\\9 & 5\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\lambda^2 + 4\lambda + 4 & 2\lambda + 2\\ \lambda^2 + 6\lambda + 9 & 3\lambda + 5\end{bmatrix}$$

4. On donne $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}$. Utiliser le fait que A est racine de son équation caractéristique pour calculer A^3 et A^4. Calculer également de cette manière A^{-1} et A^{-2} puisque A est non singulière.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -2\\ -3 & \lambda-1 & -1\\ -2 & -3 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 7\lambda - 11 = 0$$

Ainsi:
$$A^3 = 3A^2 + 7A + 11I = 3\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix}$$
$$A^4 = 3A^3 + 7A^2 + 11A = 3\begin{bmatrix}42 & 31 & 29\\45 & 39 & 31\\53 & 45 & 42\end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}193 & 160 & 144\\224 & 177 & 160\\272 & 224 & 193\end{bmatrix}$$

De $11I = -7A - 3A^2 + A^3$, nous tirons :

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\{-7I - 3A + A^2\} = \frac{1}{11}\left\{-7\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}8 & 8 & 5\\8 & 7 & 8\\13 & 8 & 8\end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix}$$
$$A^{-2} = \frac{1}{11}\{-7A^{-1} - 3I + A\} = \frac{1}{121}\left\{-7\begin{bmatrix}-2 & 5 & -1\\-1 & -3 & 5\\7 & -1 & -2\end{bmatrix} - 33\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} + 11\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{121}\begin{bmatrix}-8 & -24 & 29\\40 & -1 & -24\\-27 & 40 & -8\end{bmatrix}$$

5. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice A carrée d'ordre n et soit $h(x)$ un polynôme de degré p en x. Démontrer que $|h(A)| = h(\lambda_1) . h(\lambda_2) \ldots h(\lambda_n)$.

Nous avons:

(i) $$|\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$$

Soit

(ii) $$h(x) = c(s_1 - x)(s_2 - x)\ldots(s_p - x)$$

Ainsi
$$h(A) = c(s_1 I - A)(s_2 I - A)\ldots(s_p I - A)$$

et

$$\begin{aligned}
|h(A)| &= c^p|s_1I-A|\cdot|s_2I-A|\ldots|s_pI-A| \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_1-\lambda_2)\ldots(s_1-\lambda_n)\} \\
&\qquad \cdot\{c(s_2-\lambda_1)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_2-\lambda_n)\}\ldots\{c(s_p-\lambda_1)(s_p-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= \{c(s_1-\lambda_1)(s_2-\lambda_1)\ldots(s_p-\lambda_1)\} \\
&\qquad \cdot\{c(s_1-\lambda_2)(s_2-\lambda_2)\ldots(s_p-\lambda_2)\}\ldots\{c(s_1-\lambda_n)(s_2-\lambda_n)\ldots(s_p-\lambda_n)\} \\
&= h(\lambda_1)\,h(\lambda_2)\ldots h(\lambda_n)
\end{aligned}$$

en utilisant **(ii)**.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. On donne $A(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda-1\end{bmatrix}$ et $B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda\end{bmatrix}$, calculer :

(a) $A(\lambda)+B(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda^2+2\lambda & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2+\lambda+2 & 2\lambda-1\end{bmatrix}$

(b) $A(\lambda)-B(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda & -\lambda^2 \\ \lambda^2-\lambda & -1\end{bmatrix}$

(c) $A(\lambda)\cdot B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^4+2\lambda^3+\lambda^2+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2 \\ \lambda^4+2\lambda^2-1 & \lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2\end{bmatrix}$

(d) $B(\lambda)\cdot A(\lambda) = \begin{bmatrix}2\lambda^4+3\lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3-\lambda \\ 2\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^2\end{bmatrix}$

7. On donne $A(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2+1 & \lambda^2 \\ \lambda+2 & \lambda-1\end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda \\ -\lambda^2 & 1\end{bmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 2 & -1\end{bmatrix}$, calculer :

$A_D(C) = \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 5 & -2\end{bmatrix}$, $B_D(C) = \begin{bmatrix}3 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $A_D(C)\cdot B_D(C) = \begin{bmatrix}5 & -1 \\ 17 & -7\end{bmatrix}$, $B_D(C)\cdot A_D(C) = \begin{bmatrix}1 & 5 \\ 3 & -3\end{bmatrix}$,

$P_D(C) = \begin{bmatrix}5 & -1 \\ 9 & -3\end{bmatrix}$, $Q_D(C) = \begin{bmatrix}3 & 3 \\ 3 & -3\end{bmatrix}$;

$A_G(C) = \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B_G(C) = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $A_G(C)\cdot B_G(C) = \begin{bmatrix}1 & 5 \\ 3 & -5\end{bmatrix}$, $B_G(C)\cdot A_G(C) = \begin{bmatrix}3 & -1 \\ 1 & -7\end{bmatrix}$,

$P_G(C) = \begin{bmatrix}1 & 3 \\ 3 & 1\end{bmatrix}$, $Q_G(C) = \begin{bmatrix}5 & 1 \\ 3 & -5\end{bmatrix}$.

où $P(\lambda) = A(\lambda)\,.\,B(\lambda)$ et $Q(\lambda) = B(\lambda)\,.\,A(\lambda)$.

8. Si $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ sont des λ-matrices propres carrées d'ordre n de degré respectivement p et q, et si $C(\lambda)$ est une λ-matrice non nulle, montrer que le degré du produit de ces trois matrices est au moins $p+q$, quel que soit l'ordre des matrices dans le produit.

9. Pour chacun des couples de matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ suivants, trouver les matrices $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$; $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$ satisfaisant à **(23.7)** et **(23.8)**.

(*a*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & \lambda \\ \lambda^2+1 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

(*b*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda^2+\lambda & -\lambda^2+2\lambda+2 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 1 \end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$

(*c*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3-2\lambda+1 & \lambda^4+\lambda^2+7\lambda-2 & 5\lambda^2+2\lambda+4 \\ \lambda^4+3\lambda^2-3\lambda-1 & 3\lambda^3+2\lambda+2 & 4\lambda^2+6\lambda+1 \\ 2\lambda^3-\lambda+2 & \lambda^3+2\lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+8\lambda-4 \end{bmatrix}$,

$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 1 & 3\lambda-1 \\ 2\lambda & \lambda^2 & \lambda+1 \\ \lambda-2 & 2\lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$

(*d*) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^4+\lambda^2-1 & \lambda^3-1 & \lambda^2-\lambda \\ \lambda^3-\lambda^2+1 & \lambda^4+\lambda^2+2 & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda+1 & 2\lambda^4+\lambda-2 \end{bmatrix}$, $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2-2\lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda+1 \\ \lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2-2\lambda \\ \lambda & \lambda-2 & \lambda^2+\lambda-1 \end{bmatrix}$

Réponses : (*a*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$, $R_1(\lambda) = 0$; $Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 2\lambda & \lambda-1 \\ -\lambda+2 & -\lambda+2 \end{bmatrix}$, $R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(*b*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -\lambda-1 \\ -\lambda+1 & -1 \end{bmatrix}$, $R_1(\lambda) = 0$; $Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda-1 & -\lambda+1 \\ -\lambda & 0 \end{bmatrix}$, $R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(*c*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda^2+3 & -\lambda+7 \\ \lambda^2-1 & 3\lambda+5 & -3\lambda+2 \\ 2\lambda-3 & \lambda & \lambda-6 \end{bmatrix}$, $R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} -16\lambda+14 & -6\lambda-3 & -5\lambda+2 \\ -21\lambda+4 & -2\lambda+3 & \lambda-5 \\ 5\lambda-7 & 10\lambda+3 & 18\lambda-7 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda-1 & \lambda^2 & 2 \\ \lambda^2+1 & \lambda & 3 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$, $R_2(\lambda) = 0$

(*d*) $Q_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+6\lambda+31 & -3\lambda^2-5\lambda-16 & 3\lambda^2-7\lambda+8 \\ \lambda-3 & \lambda^2-\lambda-1 & -\lambda^2+4\lambda-7 \\ -2\lambda-1 & 7 & 2\lambda^2-2\lambda-1 \end{bmatrix}$

$R_1(\lambda) = \begin{bmatrix} 81\lambda+46 & -12\lambda-16 & -85\lambda-23 \\ 4\lambda-1 & 15\lambda-9 & 12\lambda-5 \\ -9\lambda-8 & -7\lambda & 17\lambda-2 \end{bmatrix}$

$Q_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 3\lambda^2+5\lambda+31 & -\lambda^2-\lambda-4 & 2\lambda^2-4\lambda+3 \\ \lambda-14 & \lambda^2 & -2\lambda^2+6\lambda-6 \\ -3\lambda-2 & 3 & 2\lambda^2-2\lambda-2 \end{bmatrix}$

$R_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 71\lambda+46 & -12\lambda-8 & -\lambda+11 \\ -26\lambda-30 & 11\lambda+6 & 4\lambda-4 \\ -15\lambda-30 & 2\lambda+4 & 16\lambda-16 \end{bmatrix}$

10. Vérifier dans le problème 9(*b*) que $R_1(\lambda) = A_D(C)$ et $R_2(\lambda) = A_G(C)$ où $B(\lambda) = \lambda I - C$.

11. On donne $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & 3\lambda+1 \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix}$ et $C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda \\ \lambda-3 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

(*a*) Calculer $A(\lambda) = B(\lambda) . C(\lambda)$

(*b*) Trouver $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ de degré au plus un, tels que $A(\lambda) = Q(\lambda) . B(\lambda) + R(\lambda)$.

Réponse : $\begin{bmatrix} \lambda^3+5\lambda^2-7\lambda-1 & \lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+1 \\ \lambda^3-5\lambda^2+11\lambda-10 & \lambda^3-\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+4 & \lambda+3 \\ \lambda-6 & \lambda-1 \end{bmatrix} B(\lambda) + \begin{bmatrix} -9\lambda+1 & -\lambda-9 \\ 13\lambda-6 & 9\lambda+10 \end{bmatrix}$

12. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calculer comme dans le problème 4.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^4 = \begin{bmatrix} 17 & 24 \\ 12 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{-2} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-3} = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

13. Montrer que si A et B sont des matrices semblables et si $g(\lambda)$ est un polynôme scalaire, $g(A)$ et $g(B)$ sont semblables.

Indication : Montrer d'abord que A^k et B^k sont semblables pour tout entier positif k.

14. Montrer que si $B = \text{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ et si $g(\lambda)$ est un polynôme scalaire, on a :

$$g(B) = \text{diag}\left(g(B_1), g(B_2), \ldots, g(B_m)\right)$$

15. Démontrer le théorème III.

Indication : Vérifier que $\lambda I - B$ divise $A(\lambda) - A_D(B)$.

16. On dit que la matrice C est racine du polynôme matriciel scalaire $B(\lambda)$ de **(23.9)** si $B(C) = 0$. Montrer que la matrice C est racine de $B(\lambda)$ si et seulement si la matrice caractéristique de C divise $B(\lambda)$.

17. Montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et si $f(A)$ est un polynôme scalaire en A, les valeurs propres de $f(A)$ sont alors $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$.

Indication : Ecrire $\lambda - f(x) = c(x_1-x)(x_2-x)\ldots(x_s-x)$ de façon que $|\lambda I - f(A)| = c^n|x_1I-A| \cdot |x_2I-A| \ldots |x_sI-A|$.

Utiliser ensuite $|x_iI-A| = (x_i-\lambda_1)(x_i-\lambda_2)\ldots(x_i-\lambda_n)$ et $c(x_1-\lambda_j)(x_2-\lambda_j)\ldots(x_s-\lambda_j) = \lambda - f(\lambda_j)$.

18. Trouver les valeurs propres de $f(A) = A^2 - 2A + 3$. On donne $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

19. Démontrer que le théorème du problème 5 est un corollaire du problème 17.

20. Montrer que si X est un vecteur propre de A dans le problème 17, X est alors un vecteur propre de $f(A)$.

21. Soit $A(t) = [a_{ij}(t)]$ où $a_{ij}(t)$ est un polynôme réel à variable réelle t.

Prendre

$$A(t) = \begin{bmatrix} t^2+t+1 & t^4+2t^3+3t^2+5 \\ t^3-4 & t^3-3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t^4 + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} t^3 + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} t^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

et dériver le second membre comme si c'était un polynôme à coefficients constants ; ce qui justifiera la définition :

$$\frac{d}{dt} A(t) = \left[\frac{d}{dt} a_{ij}(t)\right]$$

22. Obtenir des formules pour les expressions suivantes:

(*a*) $\frac{d}{dt}\{A(t) + B(t)\}$; (*b*) $\frac{d}{dt}\{cA(t)\}$, c est une constante ou bien $c = [c_{ij}]$ (*c*) $\frac{d}{dt}\{A(t) \cdot B(t)\}$; (*d*) $\frac{d}{dt} A^{-1}(t)$.

Indication : Pour (*c*), écrire $A(t) . B(t) = c(t) = [c_{ij}(t)]$ et dériver $c_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)\, b_{kj}(t)$.

Pour (*d*), utiliser $A(t) . A^{-1}(t) = I$.

Forme normale de Smith

TRANSFORMATION ELEMENTAIRE SUR UNE λ-MATRICE. On appellera transformation élémentaire sur une λ-matrice $A(\lambda)$ sur $F[\lambda]$ l'une des opérations suivantes :

(*1*) Echanger la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ lignes ; on notera cette opération H_{ij} ; échanger la $i^{\text{ème}}$ et la $j^{\text{ème}}$ colonnes ; on la notera K_{ij}.

(*2*) Multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par une constante non nulle k; on la notera $H_i(k)$; Multiplier la $i^{\text{ème}}$ colonne par une constante non nulle k ; on la notera $K_i(k)$.

(*3*) Additionner à la $i^{\text{ème}}$ ligne le produit de $f(\lambda)$, polynôme de $F[\lambda]$, par la $j^{\text{ème}}$ ligne. On la notera $H_{ij}(f(\lambda))$.
L'addition à la $i^{\text{ème}}$ colonne du produit de $f(\lambda)$ par la $j^{\text{ème}}$ colonne est notée $K_{ij}(f(\lambda))$.

Ce sont les transformations élémentaires du Chapitre 5, sauf que dans (*3*) le mot "scalaire" a été remplacé par le mot "polynôme". Une transformation élémentaire et la matrice élémentaire obtenue à partir d'une transformation élémentaire sur I sont notées de la même façon. Ainsi, une transformation ligne sur $A(\lambda)$ est obtenue en multipliant $A(\lambda)$ à gauche par une matrice convenable H et une transformation colonne est obtenue en multipliant $A(\lambda)$ à droite par une matrice convenable K.

De même que dans le Chapitre 5, nous avons:

Théorème I. Toute matrice élémentaire dans $F[\lambda]$ a une inverse qui est, elle aussi, une matrice élémentaire dans $F[\lambda]$.

Théorème II. Si $|A(\lambda)| = k \neq 0$ où k appartient à F, $A(\lambda)$ est un produit de matrices élémentaires.

Théorème III. Le rang d'une λ- matrice reste inchangé lors de transformations élémentaires.

On dira que deux λ-matrices $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ dont les éléments sont dans $F[\lambda]$ sont équivalentes s'il existe $P(\lambda) = H_s \ldots H_2 . H_1$ et $Q(\lambda) = K_1 . K_2 \ldots K_t$ telles que

$$B(\lambda) = P(\lambda)\, A(\lambda)\, Q(\lambda) \tag{24.1}$$

Ainsi,

Théorème IV. Des λ-matrices $m \times n$ équivalentes sont de même rang.

ENSEMBLE CANONIQUE. Dans les problèmes 1 et 2, nous démontrons:

Théorème V. Soient $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux matrices équivalentes de rang r, alors le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$, $s \leqslant r$, est aussi le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $B(\lambda)$.

Dans le problème 3, nous démontrons :

Thérome VI. Toute λ-matrice $A(\lambda)$ de rang r peut être réduite par des transformation élémentaires à la "forme normale de Smith" que voici :

(24.2)
$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

où chaque $f_i(\lambda)$ est unitaire et divise $f_{i+1}(\lambda), (i = 1, 2, \dots, r-1)$.

Quand une λ-matrice $A(\lambda)$ de rang r a été réduite à la forme (24.2), le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$, $s \leqslant r$, est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $N(\lambda)$, d'après le théorème V. Puisque dans $N(\lambda)$ chaque $f_i(\lambda)$ divise $f_{i+1}(\lambda)$, le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $N(\lambda)$ et par suite de $A(\lambda)$ est :

(24.3)
$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_s(\lambda), \qquad (s = 1, 2, \dots, r)$$

Supposons que $A(\lambda)$ ait été réduite à
$$N(\lambda) = \operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$
et à
$$N_1(\lambda) = \operatorname{diag}(h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_r(\lambda), 0, \dots, 0)$$
D'après (24.3)
$$g_s(\lambda) = f_1(\lambda) \cdot f_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot f_s(\lambda) = h_1(\lambda) \cdot h_2(\lambda) \cdot \ldots \cdot h_s(\lambda)$$
Or $g_1(\lambda) = f_1(\lambda) = h_1(\lambda)$, $g_2(\lambda) = f_1(\lambda) \,.\, f_2(\lambda) = h_1(\lambda) \,.\, h_2(\lambda)$ de sorte que $f_2(\lambda) = h_2(\lambda), \dots$; en général, si nous posons $g_o(\lambda) = 1$, alors

(24.4)
$$g_s(\lambda)/g_{s-1}(\lambda) = f_s(\lambda) = h_s(\lambda), \qquad (s = 1, 2, \dots, r)$$

et nous avons :

Théorème VII. La matrice $N(\lambda)$ de (24.2) est déterminée de façon unique par la matrice donnée $A(\lambda)$.

Ainsi, les matrices normales de Smith forment un ensemble canonique pour l'équivalence sur $F[\lambda]$.

Exemple 1. Considérons $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$.

Il est clair que le plus grand commun diviseur des mineurs d'une seule ligne de A est $g_1(\lambda) = 1$, que le plus grand commun diviseur des mineurs de deux lignes de $A(\lambda)$ est $g_2(\lambda) = \lambda$ et $g_3(\lambda) = \frac{1}{2}|A(\lambda)| = \lambda^3 + \lambda^2$. Ainsi, d'après (**24.4**).

$$f_1(\lambda) = g_1(\lambda) = 1, \qquad f_2(\lambda) = g_2(\lambda)/g_1(\lambda) = \lambda, \qquad f_3(\lambda) = g_3(\lambda)/g_2(\lambda) = \lambda^2+\lambda$$
et la forme normale de Smith est :
$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$
Pour une autre réduction de la matrice, voir le problème 4.

FACTEURS INVARIANTS. Les polynômes $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ de la diagonale de la forme normale de Smith de $A(\lambda)$ sont appelés : facteurs invariants de $A(\lambda)$. Si $f_k(\lambda) = 1$, $k \leqslant r$ alors $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \dots = f_k(\lambda) = 1$. $f_i(\lambda)$ est alors un facteur invariant trivial.

Comme conséquence du théorème VII, nous avons :

THEOREME VIII. Deux λ-matrices carrées d'ordre n sur $F[\lambda]$ sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes facteurs invariants.

DIVISEURS ELEMENTAIRES. Soit $A(\lambda)$ une λ-matrice carrée d'ordre n sur $F[\lambda]$. Supposons que ses facteurs invariants puissent s'écrire sous la forme :

$$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{i1}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{i2}}\dots\{p_s(\lambda)\}^{q_{is}}, \ (i = 1, 2, \dots, r) \tag{24.5}$$

où $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots P_s(\lambda)$ sont des polynômes distincts de $F[\lambda]$ unitaires et irréductibles. Certains q_{ij} peuvent être nuls ; dans ce cas, le facteur correspondant est supprimé. Cependant, puisque $f_i(\lambda)$ divise $f_{i+1}(\lambda), q_{i+1,j} \geqslant q_{ij}$, $(i = 1, 2, \dots, r-1 \ ; j = 1, 2, \dots, s)$.

Les facteurs $\{p_i(\lambda)\}^{q_{ij}} \neq 1$ qui figurent dans (24.5) sont appelés "diviseurs élémentaires" sur $F[\lambda]$ de $A(\lambda)$.

Exemple 2. Supposons qu'une λ-matrice carrée d'ordre 10, $A(\lambda)$, sur le corps des rationnels ait été réduite à la forme normale de Smith

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3) & \\ \hline & & & & & \\ & & & 0 & & 0 \\ & & & & & \end{array}\right]$$

Le rang est 5. Les facteurs invariants sont :

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1),$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+1)^2\lambda, \quad f_5(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda^2+1)^2\lambda^2(\lambda^2-3)$$

Les diviseurs élémentaires sont :

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1), \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda^2-3$$

Remarquer que les diviseurs élémentaires ne sont pas nécessairement distincts ; dans la suite précédente chaque diviseur élémentaire est écrit autant de fois qu'il figure dans les facteurs invariants.

Exemple 3. (*a*) sur le corps des réels, les facteurs invariants de $A(\lambda)$ de l'exemple 2 restent inchangés mais les diviseurs élémentaires sont :

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1)^2, \ (\lambda^2+1), \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda-\sqrt{3}, \ \lambda+\sqrt{3}$$

puisque $\lambda^2 - 3$ peut se factoriser.

(*b*) Sur le corps des complexes, les facteurs invariants restent toujours inchangés mais les diviseurs élémentaires sont :

$$(\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ \lambda-1, \ (\lambda+i)^2, \ (\lambda+i)^2, \ \lambda+i, \ (\lambda-i)^2,$$
$$(\lambda-i)^2, \ \lambda-i, \ \lambda^2, \ \lambda, \ \lambda-\sqrt{3}, \ \lambda+\sqrt{3}$$

Les facteurs invariants d'une λ-matrice déterminent son rang et ses diviseurs élémentaires. Réciproquement, le rang et les diviseurs élémentaires déterminent les facteurs invariants.

Exemple 4. Supposons que les diviseurs élémentaires d'une λ-matrice carrée d'ordre 6, $A(\lambda)$, de rang 5 soient

$$\lambda^3, \ \lambda^2, \ \lambda, \ (\lambda-1)^2, \ (\lambda-1)^2, \ \lambda-1, \ (\lambda+1)^2, \ \lambda+1$$

Trouver les facteurs invariants et écrire $A(\lambda)$ sous la forme canonique de Smith.

Pour trouver $f_5(\lambda)$, prenons le plus petit commun multiple des diviseurs élémentaires, c'est-à-dire :

$$f_5(\lambda) = \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

Pour trouver $f_4(\lambda)$, retirons de la suite des diviseurs élémentaires ceux qui ont été utilisés dans $f_5(\lambda)$ et prenons le plus petit commun multiple de ceux qui restent, c'est-à-dire :

$$f_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Recommençons pour $f_3(\lambda) = \lambda(\lambda-1)$. Tous les diviseurs élémentaires ont été utilisés ; ainsi $f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$.

La forme canonique de Smith est :

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puisque les facteurs invariants d'une λ-matrice sont inchangés par toute transformation élémentaire, les diviseurs élémentaires le seront également. Ainsi :

Théorème IX. Deux λ- matrices carrées d'ordre n sur $F[\lambda]$ sont équivalentes sur $F[\lambda]$ si et seulement si elles ont le même rang et les mêmes diviseurs élémentaires.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que si $P(\lambda)$ est un produit de matrices élémentaires, alors le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $P(\lambda) . A(\lambda)$ est aussi le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$.

Il suffit de considérer $P(\lambda) . A(\lambda)$ où $P(\lambda)$ est l'un des trois types de matrices élémentaires H.

Soit $R(\lambda)$ un mineur carré d'ordre s de $A(\lambda)$ et soit $S(\lambda)$ un mineur carré d'ordre s de $P(\lambda) \times A(\lambda)$. $R(\lambda)$ et $S(\lambda)$ sont tels qu'ils occupent la même position. Considérons $P(\lambda) = H_{ij}$. Son effet sur $A(\lambda)$ est soit **(i)** de laisser $R(\lambda)$ inchangé, soit **(ii)** d'échanger deux lignes de $R(\lambda)$, soit **(iii)** d'échanger une ligne de $R(\lambda)$ avec une ligne n'appartenant pas à $R(\lambda)$. Dans le cas **(i)**, $S(\lambda) = R(\lambda)$; dans le cas **(ii)**, $S(\lambda) = -R(\lambda)$; dans le cas **(iii)**, $S(\lambda)$ est éventuellement au signe près un autre mineur carré d'ordre s de $A(\lambda)$.

Supposons $P(\lambda) = H_i(k)$; alors on a soit $S(\lambda) = R(\lambda)$, soit $S(\lambda) = kR(\lambda)$.

Enfin, supposons $P(\lambda) = H_{ij}(f(\lambda))$. Son effet sur $A(\lambda)$ est soit **(i)** de laisser $R(\lambda)$ inchangé, soit **(ii)** d'ajouter à l'une des lignes de $R(\lambda)$, $f(\lambda)$ fois une autre ligne de $R(\lambda)$, soit **(iii)** d'ajouter à l'une des lignes de $R(\lambda)$, $f(\lambda)$ fois une ligne n'appartenant pas à $R(\lambda)$. Dans les cas **(i)** et **(ii)**, $S(\lambda) = R(\lambda)$; dans le cas **(iii)**,

$$S(\lambda) = R(\lambda) \pm f(\lambda) \cdot T(\lambda)$$

où $T(\lambda)$ est un mineur carré d'ordre s de $A(\lambda)$. Par suite, tout mineur carré d'ordre s de $P(\lambda) . A(\lambda)$ est une combinaison linéaire de mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$. Si $g(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$ et si $g_1(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $P(\lambda) . A(\lambda)$, alors $g(\lambda)$ divise $g_1(\lambda)$. Soit $B(\lambda) = P(\lambda) . A(\lambda)$. Ainsi $A(\lambda) = P^{-1}(\lambda) . B(\lambda)$ et $P^{-1}(\lambda)$ est un produit de matrices élémentaires. Par suite, $g_1(\lambda)$ divise $g(\lambda)$ et $g_1(\lambda) = g(\lambda)$.

2. Montrer que si $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ sont des produits de matrices élémentaires, alors le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $P(\lambda) . A(\lambda) . Q(\lambda)$ est aussi le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$.

Posons $B(\lambda) = P(\lambda) . A(\lambda)$ et $C(\lambda) = B(\lambda) . Q(\lambda)$. Puisque $C'(\lambda) = Q'(\lambda) . B'(\lambda)$ et que $Q'(\lambda)$ est un produit de matrices élémentaires, le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $C'(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $B'(\lambda)$. Mais le plus grand commun diviseur de tous les mineurs de $C'(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs de $C(\lambda)$. Il en est de même pour $B'(\lambda)$ et $B(\lambda)$. Ainsi, le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $C(\lambda) = P(\lambda) . A(\lambda) . Q(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre s de $A(\lambda)$.

3. Montrer que toute λ-matrice $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ de rang r peut être réduite par des transformations élémentaires à la forme normale de Smith

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f_r(\lambda) & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

où chaque $f_i(\lambda)$ est unitaire et divise $f_{i+1}(\lambda)$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$.

Le théorème est vrai pour $A(\lambda) = 0$. Supposons $A(\lambda) \neq 0$; alors il existe un élément $a_{ij}(\lambda) \neq 0$ de degré minimum. En utilisant une transformation du type 2, cet élément peut être rendu unitaire et en échangeant des lignes et des colonnes, cet élément peut être placé en haut, à gauche dans la matrice pour devenir le nouvel élément $a_{11}(\lambda)$.

(*a*) Supposons que $a_{11}(\lambda)$ divise tous les autres éléments de $A(\lambda)$, alors, par des transformations du type 3, $A(\lambda)$ peut être réduite à la forme :

(i) $$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

où $f_1(\lambda) = a_{11}(\lambda)$.

(*b*) Supposons que $a_{11}(\lambda)$ ne divise pas tout élément de $A(\lambda)$. Supposons que $a_{1j}(\lambda)$, élément de la première ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, ne soit pas divisible par $a_{11}(\lambda)$. D'après le théorème I du Chapitre 23, nous pouvons écrire :

$$a_{1j}(\lambda) = q(\lambda)\, a_{11}(\lambda) + r_{1j}(\lambda)$$

où le degré de $r_{1j}(\lambda)$ est inférieur à celui de $a_{11}(\lambda)$. De la $j^{\text{ème}}$ colonne soustrayons le produit de $q(\lambda)$ par la première colonne de telle sorte que l'élément de la première ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne soit $r_{1j}(\lambda)$. Par une transformation du type 2, on peut remplacer cet élément par un autre qui soit unitaire et en échangeant des colonnes on peut amener cet élément à la $1^{\text{ère}}$ ligne, $1^{\text{ère}}$ colonne pour devenir un nouvel $a_{11}(\lambda)$. Si maintenant $a_{11}(\lambda)$ divise tout élément de $A(\lambda)$, nous opérons comme en (i). Sinon, en répétant le procédé un nombre fini de fois, nous obtenons une matrice dans laquelle tout élément de la $1^{\text{ère}}$ ligne et de la $1^{\text{ère}}$ colonne est divisible par l'élément de la $1^{\text{ère}}$ ligne, $1^{\text{ère}}$ colonne.

Si cet élément divise tout élément de $A(\lambda)$, nous opérons comme en (i). Sinon, supposons que $a_{ij}(\lambda)$ ne soit pas divisible par $a_{11}(\lambda)$. Posons $a_{i1}(\lambda) = q_{i1}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$ et $a_{1j}(\lambda) = q_{1j}(\lambda) \cdot a_{11}(\lambda)$. De la $i^{\text{ème}}$ ligne, soustrayons le produit de $q_{i1}(\lambda)$ par la première ligne. Alors $a_{i1}(\lambda)$ est remplacé par 0 et $a_{ij}(\lambda)$ par $a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda)$. Maintenant ajoutons la $i^{\text{ème}}$ ligne à la $1^{\text{ère}}$; $a_{11}(\lambda)$ reste inchangé mais $a_{1j}(\lambda)$ est remplacé par :

$$a_{ij}(\lambda) - q_{i1}(\lambda) \cdot a_{1j}(\lambda) + a_{1j}(\lambda) = a_{ij}(\lambda) + q_{1j}(\lambda)\{1 - q_{i1}(\lambda)\}\, a_{11}(\lambda)$$

Puisque cet élément n'est pas divisible par $a_{11}(\lambda)$, nous le divisons par $a_{11}(\lambda)$ et comme précédemment nous obtenons un nouvel élément (le reste) à la place $a_{11}(\lambda)$. Nous continuons ce procédé jusqu'à ce que le polynôme unitaire enfin obtenu ne divise aucun élément de la matrice. Après un nombre fini d'étapes, nous obtenons un $a_{11}(\lambda)$ qui divise tous les éléments et alors nous reprenons la forme (i).

En traitant $B(\lambda)$ de la même façon, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$$

Nous obtenons finalement la forme normale de Smith.

Puisque $f_1(\lambda)$ divise tout élément de $B(\lambda)$ et que $f_2(\lambda)$ est le plus grand commun diviseur des éléments de $B(\lambda)$, $f_1(\lambda)$ divise $f_2(\lambda)$. De même, $f_i(\lambda)$ divisera $f_{i+1}(\lambda)$.

4. Réduire à la forme normale de Smith la matrice :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+2 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^3+2\lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+3\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix}$$

Il n'est pas nécessaire d'utiliser le procédé du problème 3. L'élément $f_1(\lambda)$ de la forme normale de Smith est le plus grand commun diviseur des éléments de $A(\lambda)$; ici, il est clair que c'est 1. Nous allons faire en sorte que cet élément occupe la place de a_{11} et ainsi nous obtenons (i) du problème 3. Après avoir soustrait la deuxième colonne de la première nous avons :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ \lambda^2 & \lambda^3+\lambda^2+\lambda & 2\lambda^3+3\lambda^2+\lambda \\ \lambda+1 & \lambda^2+2\lambda+1 & 3\lambda^2+6\lambda+3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+1 & \lambda+3 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{bmatrix}$$

Or le plus grand commun diviseur des éléments de $B(\lambda)$ est λ. Ainsi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^3+\lambda \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda^2+2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

et c'est la forme demandée.

5. Réduire à la forme normale de Smith :

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons :

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda-2 & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda-1 & \lambda+2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda-1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

en utilisant les transformations élémentaires $K_{12}(-1)$; $H_{21}(-\lambda)$, $H_{31}(-\lambda+2)$; $K_{21}(-\lambda+1)$, $K_{31}(-\lambda-2)$; $H_{23}(-1)$; $K_{23}(1)$; $H_{32}(\lambda+1)$, $H_2(-1)$; $K_{32}(-\lambda-1)$, $K_3(-1)$.

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. Montrer que $H_{ij}K_{ij} = H_i(k)K_i(1/k) = H_{ij}(f(\lambda)) \cdot K_{ji}(-f(\lambda)) = I$.

7. Montrer qu'une λ-matrice $A(\lambda)$ carrée d'ordre n est un produit de matrices élémentaires si et seulement si $|A(\lambda)|$ est une constante non nulle.

8. Montrer qu'une λ-matrice $A(\lambda)$ carrée d'ordre n peut être réduite à I par des transformations élémentaires si et seulement si $|A(\lambda)|$ est une constante non nulle.

9. Montrer qu'une λ-matrice $A(\lambda)$ carrée d'ordre n sur $F[\lambda]$ admet une inverse dont les éléments appartiennent à $F[\lambda]$ si et seulement si $A(\lambda)$ est un produit de matrices élémentaires.

10. Trouver les matrices $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ telles que $P(\lambda) . A(\lambda) . Q(\lambda) = I$ et obtenir alors :

$$A^{-1}(\lambda) = Q(\lambda) . P(\lambda)$$

On donne

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda+1 & \lambda \\ 2 & \lambda+2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Indication : Voir problème 6, Chapitre 5. *Réponse* : $\begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & -\lambda-1 \\ \lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-1 & -\lambda^2-\lambda+1 \\ -\lambda & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{bmatrix}$

11. Réduire à la forme normale de Smith les matrices suivantes :

(*a*) $\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2+2\lambda & \lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-2\lambda & \lambda^2-2\lambda & 2\lambda^2-3\lambda+2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$

(*b*) $\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^3+\lambda & 2\lambda^3-\lambda^2+\lambda \\ \lambda-1 & \lambda^2+1 & \lambda^2-2\lambda+1 \\ \lambda^2 & \lambda^3 & 2\lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3+1 \end{bmatrix}$

(*c*) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2\lambda-2 & \lambda-2 & \lambda^2 \\ \lambda^2+\lambda+1 & 2\lambda^2-2\lambda+1 & \lambda^2-2\lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2-\lambda-2 & 3\lambda^2-7\lambda+4 & 2\lambda^2-5\lambda+4 & \lambda^3-2\lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & 2\lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3-2\lambda^2 & \lambda^3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3 \end{bmatrix}$

(*d*) $\begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda^2+\lambda+1 & \lambda^2+1 & \lambda^3 & \lambda^2-1 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^3+\lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^3+\lambda^2-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2-1 \end{bmatrix}$

(*e*) $\begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda^2+3\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda-2 & \lambda^2+3 \\ \lambda-2 & \lambda-1 & \lambda+2 & \lambda-2 \\ 3\lambda+1 & 4\lambda+3 & 2\lambda+2 & 3\lambda+2 \\ \lambda^2+2\lambda & \lambda^2+6\lambda+4 & \lambda^2+6\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda+3 \end{bmatrix} \sim I_4$

(*f*) $\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$

12. Trouver les diviseurs élémentaires sur le corps des rationnels, sur le corps des réels et sur le corps des complexes des matrices du problème 11.

13. Les polynômes suivants sont des facteurs invariants non triviaux d'une matrice. Trouver ses diviseurs élémentaires dans le corps des réels.

(*a*) $\lambda^2 - \lambda,\ \lambda^3 - \lambda^2,\ \lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4$

(*b*) $\lambda + 1,\ \lambda^2 - 1,\ (\lambda^2 - 1)^2,\ (\lambda^2 - 1)^3$

(*c*) $\lambda,\ \lambda^3 + \lambda,\ \lambda^7 - \lambda^6 + 2\lambda^5 - 2\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2$

(*d*) $\lambda,\ \lambda^3 + \lambda,\ \lambda^5 + 2\lambda^3 + \lambda,\ \lambda^6 + \lambda^5 + 2\lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda$

Réponses : (*a*) $\lambda^4,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda - 1,\ \lambda - 1$

(*b*) $\lambda+1,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,\ (\lambda+1)^3,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3$

(*c*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda-1$

(*d*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda,\ \lambda^2+1,\ (\lambda^2+1)^2,\ (\lambda^2+1)^2,\ \lambda+1$

14. Les polynômes suivants sont les diviseurs élémentaires d'une matrice dont le rang est six. Quels sont ses facteurs invariants ?

(*a*) $\lambda,\ \lambda,\ \lambda+1,\ \lambda+2,\ \lambda+3,\ \lambda+4$

(*b*) $\lambda^3,\ \lambda^2,\ \lambda,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1$

(*c*) $(\lambda-1)^3,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ \lambda-1,\ (\lambda+1)^2$

(*d*) $\lambda^5,\ \lambda^3,\ \lambda,\ (\lambda+2)^5,\ (\lambda+2)^4,\ (\lambda+2)^2$

Réponses : (*a*) $1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)$

(*b*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda,\ \lambda^2(\lambda-1),\ \lambda^3(\lambda-1)^2$

(*c*) $1,\ 1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3(\lambda+1)^2$

(*d*) $1,\ 1,\ 1,\ \lambda(\lambda+2)^2,\ \lambda^3(\lambda+2)^4,\ \lambda^5(\lambda+2)^5$

15. Résoudre le système d'équations différentielles linéaires.

$$\begin{cases} Dx_1 + (D+1)x_2 = 0 \\ (D+2)x_1 - (D-1)x_3 = t \\ (D+1)x_2 + (D+2)x_3 = e^t \end{cases}$$

où x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles inconnues d'une variable réelle t et $D = \dfrac{d}{dt}$.

Indications : En notation matricielle, le système est :

$$AX = \begin{bmatrix} D & D+1 & 0 \\ D+2 & 0 & -D+1 \\ 0 & D+1 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ e^t \end{bmatrix} = H$$

Les polynômes en D de A se traitent de la même façon que les polynômes en λ d'une λ-matrice ; par suite, cherchons une forme semblable à celle du problème 6. Chapitre 5. et utilisons dans l'ordre les transformations élémentaires suivantes : $K_{12}(-1)$, $H_1(-1)$, $K_{21}(D+1)$, $H_{21}(-D-2)$, $H_{31}(D+1)$, $K_{23}(D)$, $H_{23}(-4)$, $K_2(\frac{1}{2})$, $K_{32}(5D+7)$, $H_{32}(-\frac{1}{2}D)$, $H_3(2)$, $K_3(1/5)$. Nous obtenons la forme normale de Smith pour A :

$$PAQ = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5D+6 & 1 & -4 \\ -5D^2-8D-2 & -D & 4D+2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(D+1) & \frac{1}{10}(5D^2+12D+7) \\ -1 & -\frac{1}{2}D & -\frac{1}{10}(5D^2+7D) \\ 0 & \frac{1}{2}D & \frac{1}{10}(5D^2+7D+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & D^2+\frac{9}{5}D+\frac{4}{5} \end{bmatrix} = N_1$$

Transformons $AX = H$ en $AQY = H$ par l'application linéaire $X = QY$. De $PAQY = N_1Y = PH$ nous obtenons :

$$y_1 = 0, \quad y_2 = t - 4e^t, \quad (D^2 + \tfrac{9}{5}D + \tfrac{4}{5})y_3 = 6e^t - 1 \quad \text{et} \quad y_3 = K_1e^{-4t/5} + K_2e^{-t} + \tfrac{5}{3}e^t - \tfrac{5}{4}$$

Enfin, utilisons $X = QY$ pour obtenir le résultat demandé :

$$x_1 = 3C_1e^{-4t/5} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{3}{8}, \qquad x_2 = 12C_1e^{-4t/5} + C_2e^{-t} - \tfrac{1}{2}, \qquad x_3 = -2C_1e^{-4t/5} + \tfrac{1}{3}e^t + \tfrac{1}{4}.$$

Polynôme minimal d'une matrice

MATRICE CARACTERISTIQUE. La matrice caractéristique $\lambda I - A$ d'une matrice carrée A d'ordre n sur F est une λ-matrice non singulière qui admet des facteurs invariants et des diviseurs élémentaires. En utilisant (24.4) il est facile de montrer:

Théorème I. Si D est une matrice diagonale, les diviseurs élémentaires de $\lambda I - D$ sont ses éléments diagonaux.

Dans le problème 1, nous démontrons :

Théorème II. Deux matrices A et B carrées d'ordre n sur F sont semblables si et seulement si leurs matrices caractéristiques ont les mêmes facteurs invariants ou le même rang et les mêmes diviseurs élémentaires dans $F[\lambda]$.

Des théorèmes I et II, nous déduisons :

Théorème III. Une matrice A carrée d'ordre n sur F est semblable à une matrice diagonale si et seulement si $\lambda I - A$ a des diviseurs élémentaires linéaires dans $F[\lambda]$.

INVARIANTS POUR LA SIMILITUDE. Les facteurs invariants de $\lambda I - A$ sont appelés "invariants de similitude" de A.

Soient $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ des matrices non singulières telles que $P(\lambda) . (\lambda I - A) . Q(\lambda)$ soit sous la forme normale de Smith :

$$\operatorname{diag}(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

Or $\quad |P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda)| \; = \; |P(\lambda)|\cdot|Q(\lambda)|\phi(\lambda) \; = \; f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)\cdot \ldots f_n(\lambda).$

Puisque $\phi(\lambda)$ et $f_i(\lambda)$ sont unitaires $|P(\lambda)| . |Q(\lambda)| = 1$ et nous avons :

Théorème IV. Le polynôme caractéristique d'une matrice A carrée d'ordre n est le produit des facteurs invariants de $\lambda I - A$ ou des invariants de similitude de A.

POLYNOME MINIMAL. D'après le théorème de Cayley-Hamilton (Chapitre 23), toute matrice carrée A d'ordre n est racine de son équation caractéristique $\phi(\lambda) = 0$ de degré n. Le polynôme unitaire $m(\lambda)$ de degré minimum tel que $m(A) = 0$ est appelé "polynôme minimal de A et $m(\lambda) = 0$ est appelée "équation minimale de A". $m(\lambda)$ est aussi appelée "fonction minimale de A". Il est facile de trouver le polynôme minimal de A dans les cas suivants :

(i) Si $A = a_o I$ alors $m(\lambda) = \lambda - a_o$.

(ii) Si $A \neq aI$ pour tout a mais que $A^2 = a_1 A + a_o I$ alors $m(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_0$.

(iii) Si $A^2 \neq aA + bI$ pour tout (a, b) mais que $A^3 = a_2 A^2 + a_1 A + a_o I$ alors

$$m(\lambda) = \lambda^3 - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_o$$

et ainsi de suite.

Exemple 1. Trouver le polynôme minimal de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Il est clair que $A - a_o I = 0$ est impossible. Mais :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En utilisant les deux premiers éléments de la première ligne de chaque matrice, nous avons $\begin{cases} 9 = a_1 + a_0 ; \\ 8 = 2a_1 \end{cases}$ ainsi $a_1 = 4$ et $a_o = 5$. Ce n'est qu'après avoir vérifié ces égalités pour tous les autres éléments de A^2 que nous pouvons en conclure que $A^2 = 4A + 5I$ et que le polynôme minimal recherché est $\lambda^2 - 4\lambda - 5$.

Dans le problème 2 nous montrons :

Théorème V. Si A est une matrice carrée d'ordre n sur F et si $f(\lambda)$ est un polynôme sur F, alors $f(A) = 0$ si et seulement si le polynôme minimal $m(\lambda)$ de A divise $f(\lambda)$.

Dans le problème 3, nous montrons :

Théorème VI. Le polynôme minimal $m(\lambda)$ d'une matrice A carrée d'ordre n est l'invariant $f_n(\lambda)$ de similitude de A, qui admet le plus haut degré.

Puisque les invariants de similitude $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_{n-1}(\lambda)$ divisent tous $f_n(\lambda)$, nous pouvons dire que :

Théorème VII. Le polynôme caractéristique $\phi(\lambda)$ de A est le produit du polynôme minimal de A par certains facteurs unitaires de $m(\lambda)$.

Théorème VIII. La matrice caractéristique d'une matrice A carrée d'ordre n a des diviseurs élémentaires linéaires distincts si et seulement si $m(\lambda)$, le polynôme minimal de A, n'admet que des facteurs linéaires distincts.

MATRICES NON DEROGATOIRES. Une matrice A carrée d'ordre n dont les polynômes minimal et caractéristique sont identiques est dite matrice non dérogatoire, sinon elle est dite dérogatoire. Nous avons :

Théorème IX. Une matrice A carrée d'ordre n est non dérogatoire si et seulement si A admet un seul invariant de similitude non trivial.

Il est facile de montrer que :

Théorème X. Si B_1 et B_2 ont pour polynômes minimaux $m_1(\lambda)$ et $m_2(\lambda)$ respectivement, le polynôme minimal $m(\lambda)$ de $D = \operatorname{diag}(B_1, B_2)$ est le plus petit commun multiple de $m_1(\lambda)$ et $m_2(\lambda)$.

On peut étendre ce résultat à la matrice $D = \operatorname{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m)$.

Théorème XI. Soient $g_1(\lambda), g_2(\lambda), \ldots, g_m(\lambda)$ des polynômes sur $F[\lambda]$ irréductibles, unitaires et distincts et soit A_j une matrice non dérogatoire telle que $|\lambda I - A_j| = \{g_j(\lambda)\}^{a_j}$, $(j = 1, 2, \ldots m)$. Alors $B = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ admet pour polynôme caractéristique et minimal à la fois le polynôme : $\phi(\lambda) = \{g_1(\lambda)\}^{a_1} \cdot \{g_2(\lambda)\}^{a_2} \cdots \{g_m(\lambda)\}^{a_m}$.

MATRICE COMPAGNON. Soit A une matrice non dérogatoire admettant un invariant de similitude non trivial.

(25.1) $$g(\lambda) = f_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

On appelle matrice compagnon de $g(\lambda)$,

(25.2) $$C(g) = [-a], \quad \text{si} \quad g(\lambda) = \lambda + a$$

et pour $n > 1$

$$(25.3) \qquad C(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-3} & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dans le Problème 4, nous montrons :

Théorème XII. La matrice compagnon $C(g)$ d'un polynôme $g(\lambda)$ admet $g(\lambda)$ comme polynôme caractéristique et polynôme minimal.

(Certains auteurs préfèrent définir $C(g)$ comme la transposée de la matrice donnée dans (25.3). On utilisera ces deux formes ici).

Voir problème 5.

Il est facile de montrer que :

Théorème XIII. Si A est non dérogatoire et admet comme invariant de similitude non trivial $f_n(\lambda) = (\lambda - a)^n$, alors

$$(25.4) \qquad J = [a] \text{ si } n = 1 \qquad \text{et} \qquad J = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{si } n > 1$$

admet $f_n(\lambda)$ pour polynôme caractéristique et polynôme minimal.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que deux matrices A et B carrées d'ordre n sur F sont semblables si et seulement si leurs matrices caractéristiques ont les mêmes facteurs invariants ou les mêmes diviseurs élémentaires dans $F[\lambda]$.

Supposons que A et B soient semblables. De (i) du problème 1, Chapitre 20, nous déduisons que $\lambda I - A$ et $\lambda I - B$ sont équivalentes. Alors, d'après les théorèmes VIII et IX du Chapitre 24, elles ont les mêmes facteurs invariants et les mêmes diviseurs élémentaires.

Réciproquement, supposons que $\lambda I - A$ et $\lambda I - B$ admettent les mêmes facteurs invariants et les mêmes diviseurs élémentaires. Alors, d'après le théorème VIII, Chapitre 24, il existe des λ-matrices non singulières $P(\lambda)$ et $Q(\lambda)$ telles que

$$P(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot Q(\lambda) = \lambda I - B$$

ou

(i) $$P(\lambda)\cdot(\lambda I - A) = (\lambda I - B)\cdot Q^{-1}(\lambda)$$

Soient

(ii) $$P(\lambda) = (\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda) + R_1$$

(iii) $$Q(\lambda) = S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2$$

(iv) $$Q^{-1}(\lambda) = S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3$$

où R_1, R_2 et R_3 sont indépendants de λ. Substituons dans (i), nous avons :

$$(\lambda I - B)\cdot S_1(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_1(\lambda I - A) = (\lambda I - B)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + (\lambda I - B)R_3$$

ou

(v) $$(\lambda I - B)\{S_1(\lambda) - S_3(\lambda)\}(\lambda I - A) = (\lambda I - B)R_3 - R_1(\lambda I - A)$$

Ainsi $S_1(\lambda) - S_3(\lambda) = 0$ et

(vi) $$(\lambda I - B)R_3 = R_1(\lambda I - A)$$

sinon le membre de gauche de **(v)** serait de degré au moins deux tandis que celui de droite serait de degré au plus 1.

En utilisant **(iii)**, **(iv)** et **(vi)**

$$\begin{aligned} I &= Q(\lambda)\cdot Q^{-1}(\lambda) \\ &= Q(\lambda)\{S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + R_3\} \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + \{S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B) + R_2\}R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot(\lambda I - B)R_3 + R_2R_3 \\ &= Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda)\cdot(\lambda I - A) + S_2(\lambda)\cdot R_1\cdot(\lambda I - A) + R_2R_3 \end{aligned}$$

ou

(vii) $$I - R_2R_3 = \{Q(\lambda)\cdot S_3(\lambda) + S_2(\lambda)\cdot R_1\}(\lambda I - A)$$

Or $Q(\lambda)\,.\,S_3(\lambda) + S_2(\lambda)\,R_1 = 0$ et $I = R_2R_3$. Sinon le membre de gauche de **(vii)** serait de degré zéro en λ tandis que le membre de droite serait de degré au moins 1. Ainsi $R_3 = R_2^{-1}$ et de **(vi)**

$$\lambda I - B = R_1(\lambda I - A)R_2 = \lambda R_1R_2 - R_1AR_2$$

Puisque A, B, R_1 et R_2 sont indépendants de λ, $R_1 = R_2^{-1}$, ainsi $\lambda I - B = \lambda I - R_2^{-1}AR_2$ et A et B sont semblables.

2. Montrer que si A est une matrice carrée d'ordre n sur F et si $f(\lambda)$ est un polynôme de $F[\lambda]$, alors $f(A) = 0$ si et seulement si le polynôme minimal $m(\lambda)$ de A divise $f(\lambda)$.

D'après l'algorithme de la division euclidienne, Chapitre 22,

$$f(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda) + r(\lambda)$$

et alors

$$f(A) = q(A)\cdot m(A) + r(A) = r(A)$$

Supposons $f(A) = 0$; alors $r(A) = 0$. Or si $r(\lambda) \neq 0$, son degré est inférieur à celui de $m(\lambda)$, contrairement à l'hypothèse que $m(\lambda)$ est le polynôme minimal de A. Ainsi, $r(\lambda) = 0$ et $m(\lambda)$ divise $f(\lambda)$.

Réciproquement, supposons $f(\lambda) = q(\lambda)\,.\,m(\lambda)$. Alors $f(A) = q(A)\,.\,m(A) = 0$.

3. Montrer que le polynôme minimal $m(\lambda)$ d'une matrice A carrée d'ordre n est l'invariant $f_n(\lambda)$ de A pour la similitude, qui a le plus haut degré.

Soit $g_{n-1}(\lambda)$ le plus grand commun diviseur des mineurs carrés d'ordre $n-1$ de $\lambda I - A$. Alors :

$$|\lambda I - A| = \phi(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)$$

et

$$\operatorname{adj}(\lambda I - A) = g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda)$$

où le plus grand commun diviseur des éléments de $B(\lambda)$ est 1.

Or $(\lambda I - A)\cdot\operatorname{adj}(\lambda I - A) = \phi(\lambda)\cdot I$ de telle sorte que :

$$(\lambda I - A)\cdot g_{n-1}(\lambda)\cdot B(\lambda) = g_{n-1}(\lambda)\cdot f_n(\lambda)\cdot I$$

ou

(i) $$(\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I$$

Alors $\lambda I - A$ est un diviseur de $f_n(\lambda) \times I$ et d'après le théorème V, Chapitre 23, $f_n(A) = 0$.

D'après le théorème V, $m(\lambda)$ divise $f_n(\lambda)$. Supposons

(ii) $$f_n(\lambda) = q(\lambda)\cdot m(\lambda)$$

Puisque $m(A) = 0$, $\lambda I - A$ est un diviseur de $m(\lambda).I$, supposons

$$m(\lambda)\cdot I = (\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

Alors, en utilisant **(i)** et **(ii)**,

$$(\lambda I - A)\cdot B(\lambda) = f_n(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot m(\lambda)\cdot I = q(\lambda)\cdot(\lambda I - A)\cdot C(\lambda)$$

et

$$B(\lambda) = q(\lambda)\cdot C(\lambda)$$

Or $q(\lambda)$ divise tout élément de $B(\lambda)$; par suite $q(\lambda) = 1$ et d'après **(ii)**

$$f_n(\lambda) = m(\lambda)$$

4. Montrer que la matrice compagnon $C(g)$ d'un polynôme $g(\lambda)$ admet $g(\lambda)$ à la fois comme polynôme caractéristique et comme polynôme minimal.

La matrice caractéristique de **(25.3)** est

$$\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Ajoutons à la première colonne λ fois la seconde, λ^2 fois la troisième, ... λ^{n-1} fois la dernière colonne pour obtenir :

$$G(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ g(\lambda) & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Puisque $|G(\lambda)| = g(\lambda)$, le polynôme caractéristique de $C(g)$ est $g(\lambda)$. Puisque le mineur de l'élément $g(\lambda)$ dans $G(\lambda)$ est ± 1, le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre $n - 1$ de $G(\lambda)$ est 1. Ainsi, $C(g)$ est non dérogatoire et son polynôme minimal est $g(\lambda)$.

5. La matrice compagnon de $g(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda - 5$ est :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou si on préfère} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

6. Ecrire la matrice compagnon de chacun des polynômes suivants :

(a) $\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda - 1$ (d) $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda$

(b) $(\lambda^2 - 4)(\lambda + 2)$ (e) $\lambda^2(\lambda^2 + 1)$

(c) $(\lambda - 1)^3$ (f) $(\lambda + 2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8)$

Réponses : (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Montrer que toute matrice A carrée d'ordre 2 telle que $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \neq 0$ est non dérogatoire.

8. Réduire $G(\lambda)$ du problème 4 à $\text{diag}(1, 1, \ldots, 1, g(\lambda))$.

9. Pour chacune des matrices A suivantes, **(i)** trouver les polynômes caractéristique et minimal **(ii)** donner tous les facteurs invariants non triviaux et les diviseurs élémentaires dans le corps des rationnels.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -6 & -3 & -6 \\ -3 & -3 & -4 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -6 & 3 & 8 \\ -2 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 & -6 \\ 4 & -2 & 4 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Réponses : (a) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; f.i. $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$; d.e. $(\lambda-1), (\lambda-2), (\lambda-3)$

(b) $\phi(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3$; f.i. = d.e. = λ^3

(c) $\phi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$; f.i. $\lambda-1, (\lambda-1)(\lambda-2)$
$m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)$; d.e. $\lambda-1, \lambda-1, \lambda-2$

(d) $\phi(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-5)$; f.i. $\lambda+1, (\lambda+1)(\lambda-5)$
$m(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-5)$; d.e. $\lambda+1, \lambda+1, \lambda-5$

(e) $\phi(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2$; f.i. $\lambda, \lambda^2 - 4\lambda$
$m(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda$; d.e. $\lambda, \lambda, \lambda - 4$

(f) $\phi(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2(\lambda-1)$; f.i. $\lambda+1, \lambda^3 - \lambda$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda^2-1)$; d.e. $\lambda, \lambda+1, \lambda+1, \lambda-1$

(g) $\phi(\lambda) = \lambda^2(\lambda+1)^2$; f.i. $\lambda, \lambda(\lambda+1)^2$
$m(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$; d.e. $\lambda, \lambda, (\lambda+1)^2$

(h) $\phi(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda^2 - \lambda - 2)^2$; f.i. $\lambda - 2, \lambda^2 - \lambda - 2, \lambda^2 - \lambda - 2$
$m(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$; d.e. $\lambda - 2, \lambda - 2, \lambda - 2, \lambda+1, \lambda+1$

10. Démontrer les théorèmes VII et VIII.

11. Démontrer le théorème X.

Indications : $m(D) = \text{diag}(m(B_1), m(B_2)) = 0$ ce qui entraîne que $m(B_1) = m(B_2) = 0$; ainsi $m_1(\lambda)$ et $m_2(\lambda)$ divisent $m(\lambda)$.

12. Démontrer le théorème XI.

13. Si A est une matrice carrée d'ordre n et si k est le plus petit entier positif tel que $A^k = 0$, A est dite nilpotente d'indice k. Montrer que A est nilpotente d'indice k si et seulement si ses valeurs propres sont toutes nulles.

14. Montrer que : (a) les valeurs propres d'une matrice A carrée d'ordre n idempotente sont soit 0 soit 1.
(b) le rang de A est le nombre de valeurs propres égales à 1.

15. Montrer que si A, B, C, D sont des matrices carrées d'ordre n sur F telles que C et D soient non singulières, alors il existe des matrices non singulières P et Q telles que $PCQ = A$, $PDQ = B$ si et seulement si $R(\lambda) = \lambda C - A$ et $S(\lambda) = \lambda D - B$ ont les mêmes facteurs invariants et les mêmes diviseurs élémentaires.

Indication : Suivre la démonstration du problème 1 en remarquant que la similitude est remplacée par l'équivalence.

16. Montrer que si le polynôme minimal $m(\lambda)$ d'une matrice non singulière A est de degré s, alors A^{-1} peut s'exprimer comme un polynôme scalaire de degré $s - 1$ en A.

17. Utiliser le polynôme minimal pour trouver l'inverse de la matrice A du problème 9(h).

18. Montrer que tout facteur linéaire $\lambda - \lambda_i$ de $\phi(\lambda)$ est un facteur de $m(\lambda)$.

Indication : Ce théorème se déduit du théorème VII ou bien supposer le contraire et écrire $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)q(\lambda) + r$, $r \neq 0$. Alors $(A - \lambda_i I)q(A) + rI = 0$ et ainsi $A - \lambda_i I$ admet un inverse.

19. Utiliser $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pour montrer que le polynôme minimal n'est pas le produit des facteurs distincts de $\phi(\lambda)$.

20. Montrer que si $g(\lambda)$ est un polynôme scalaire en λ, alors $g(A)$ est singulière si et seulement si le plus grand commun diviseur de $g(\lambda)$ et de $m(\lambda)$, polynôme minimal de A, est $d(\lambda) \neq 1$.

Indication : (i) Supposer $d(\lambda) \neq 1$ et utiliser le théorème V, Chapitre 22.
(ii) Supposer $d(\lambda) = 1$ et utiliser le théorème IV, Chapitre 22.

21. Montrer que si le polynôme minimal $m(\lambda)$ de A sur F est irréductible dans $F[\lambda]$ et s'il est de degré s en λ, alors l'ensemble de tous les polynômes scalaires en A à coefficients dans F, de degré $< s$ a une structure de corps.

22. Déduire du problème 20 que lorsque $g(A)$ est non singulière, alors $[g(A)]^{-1}$ peut s'écrire comme un polynôme en A de degré inférieur à celui de $m(\lambda)$.

23. Soient A et B des matrices carrées et $m(\lambda)$ et $n(\lambda)$ les polynômes minimaux de AB et BA respectivement. Montrer que :

(a) $m(\lambda) = n(\lambda)$ quand A et B ne sont pas toutes deux singulières.

(b) $m(\lambda)$ et $n(\lambda)$ diffèrent d'au plus un facteur λ quand A et B sont singulières toutes les deux.

Indication : $B \cdot m(AB) \cdot A = (BA) \cdot m(BA) = 0$ et $A \cdot n(BA) \cdot B = (AB) \cdot n(AB) = 0$.

24. Supposons A de dimension $m \times n$ et B de dimension $n \times m$, $m > n$, notons $\phi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$ les polynômes caractéristiques de AB et BA respectivement. Montrer que $\phi(\lambda) = \lambda^{m-n}\psi(\lambda)$.

25. Soit X_i un vecteur propre associé à une valeur propre simple de A. Montrer que si A et B commutent, alors X_i est un vecteur propre de B.

26. Si les matrices A et B commutent, établir un théorème concernant les vecteurs propres de B quand A n'admet que des valeurs propres simples.

CHAPITRE 26

Formes canoniques pour la similitude

PROBLEME POSE. Dans le chapitre 25, nous avons vu que les matrices caractéristiques de deux matrices semblables carrées d'ordre n : A et $R^{-1}AR$ sur F admettaient les mêmes facteurs invariants et les mêmes diviseurs élémentaires. Dans ce chapitre, nous allons étudier des représentants des ensembles de toutes les matrices $R^{-1}AR$ qui sont (i) simples dans leur structure et (ii) qui présentent un intérêt soit pour leurs facteurs invariants, soit pour leurs diviseurs élémentaires. Ces matrices, au nombre de quatre, sont appelées "formes canoniques" de A. Elles correspondent à la matrice canonique $N = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ étudiée auparavant, qui représentait toutes les matrices $m \times n$ de rang r pour l'équivalence.

FORME CANONIQUE RATIONNELLE. Soit A une matrice carrée d'ordre n sur F. Supposons d'abord que sa matrice caractéristique n'ait qu'un seul facteur invariant non trivial $f_n(\lambda)$. La matrice compagnon $C(f_n)$ de $f_n(\lambda)$ est semblable à A ; nous l'avons démontré dans le Chapitre 25. Nous dirons que cette matrice est la forme canonique rationnelle S de toutes les matrices semblables à A.

Supposons maintenant que la forme normale de Smith de $\lambda I - A$ soit

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)) \tag{26.1}$$

où les facteurs invariants non triviaux $f_i(\lambda)$ sont de degré s_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$. Nous dirons que la forme canonique rationnelle de toutes les matrices semblables à A est la matrice :

$$S = \text{diag}\,(C(f_j), C(f_{j+1}), \ldots, C(f_n)) \tag{26.2}$$

Pour montrer que A et S ont les mêmes invariants pour la similitude, remarquons que $C(f_i)$ est semblable à $D_i = \text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_i(\lambda))$ et ainsi, S est semblable à diag $(D_j, D_{j+1}, \ldots, D_n)$. Par une série d'échanges de deux lignes et des deux colonnes correspondantes, nous obtiendrons que S soit semblable à

$$\text{diag}\,(1, 1, \ldots, 1, f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda))$$

Nous avons démontré :

Théorème I. Toute matrice carrée A est semblable à la matrice S de (26.2) où les $C(f_k)$ sont les matrices compagnon des facteurs invariants non triviaux de $\lambda I - A$.

Exemple 1. Supposons que les invariants non triviaux de A pour la similitude, sur le corps des rationnels, soient :

$$f_8(\lambda) = \lambda + 1, \qquad f_9(\lambda) = \lambda^3 + 1, \qquad f_{10}(\lambda) = \lambda^6 + 2\lambda^3 + 1$$

Alors :

$$C(f_8) = [-1], \qquad C(f_9) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C(f_{10}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$S = \operatorname{diag}\left(C(f_8), C(f_9), C(f_{10})\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S est la forme demandée dans le théorème I.

Remarque. L'ordre dans lequel se trouvent les matrices compagnon sur la diagonale est sans importance. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dans laquelle on a transposé chacune des matrices compagnon, est une autre forme également admise.

SECONDE FORME CANONIQUE. Supposons que la matrice caractéristique de A ait pour facteurs invariants non triviaux les polynômes $f_i(\lambda)$ de (26.1). Supposons également que les diviseurs élémentaires soient des puissances de polynômes irréductibles distincts de $F[\lambda]$: $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda) \dots p_t(\lambda)$. Soit :

(26.3) $$f_i(\lambda) = \{p_1(\lambda)\}^{q_{1i}}\{p_2(\lambda)\}^{q_{2i}} \dots \{p_t(\lambda)\}^{q_{ti}}; \quad (i = j, j+1, \dots, n)$$

où certains facteurs peuvent ne pas apparaître puisque certains q_i peuvent être nuls. La matrice compagnon $C(p_k^{q_{ki}})$ de tout facteur admet $\{p_k(\lambda)\}^{q_{ki}}$ comme seul invariant non trivial pour la similitude ; par suite, $C(f_i)$ est semblable à :

$$\operatorname{diag}\left(C(p_1^{q_{1i}}), C(p_2^{q_{2i}}), \dots, C(p_t^{q_{ti}})\right)$$

Nous avons :

Théorème II. Toute matrice carrée A sur F est semblable à une matrice Diag $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ où les C_i sont les matrices compagnon des diviseurs élémentaires sur F de $\lambda I - A$.

Exemple 2. Les diviseurs élémentaires sur le corps des rationnels de la matrice A de l'exemple 1 sont $\lambda+1$, $\lambda+1$, $(\lambda+1)^2$, $\lambda^2-\lambda+1$, $(\lambda^2-\lambda+1)^2$ et la forme canonique du théorème II est :

$$[-1], \quad [-1], \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

et la forme canonique du théorème II est :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-3} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

FORME CANONIQUE DE JACOBSON. Soit A la matrice du paragraphe précédent ; les diviseurs élémentaires de sa matrice caractéristique s'expriment comme puissances de polynômes irréductibles sur $F[\lambda]$. Considérons un diviseur élémentaire $\{p(\lambda)\}^q$. Si $q = 1$, utilisons $C(p)$, la matrice compagnon ; si $q > 1$, construisons :

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} C(p) & M & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p) & M & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p) & M \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p) \end{bmatrix} \tag{26.4}$$

où M est une matrice de même ordre que $C(p)$ admettant l'élément 1 dans le coin inférieur gauche et des zéros partout ailleurs. La matrice $C_q(p)$ de (26.4), ($C_1(p) = C(p)$) est appelée matrice hypercompagnon de $\{p(\lambda)\}^q$. Remarquer que dans (26.4), il y a une rangée de 1 juste au-dessus de la diagonale. Quand on utilise l'autre forme ${}^tC(p)$ de la matrice compagnon, la matrice hypercompagnon de $\{p(\lambda)\}^q$ est :

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} {}^tC(p) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ N & {}^tC(p) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & N & {}^tC(p) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & {}^tC(p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N & {}^tC(p) \end{bmatrix}$$

où N est une matrice de même ordre que ${}^tC(p)$ admettant l'élément 1 dans le coin supérieur droit et des zéros partout ailleurs. Sous cette forme, il y a une rangée de 1 juste au-dessous de la diagonale.

Exemple 3. Soit $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda^2 + 2\lambda - 1)^4$, alors $C(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, et

$$C_q(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Dans le problème 1, on montre que $C_q(p)$ admet $\{p(\lambda)\}^q$ comme seul invariant non trivial pour la similitude. Par suite, $C_q(p)$ est semblable à $C(p^q)$ et peut lui être substitué dans la forme canonique du théorème II. Nous avons :

Théorème III. Toute matrice carrée A sur F est semblable à une matrice Diag $(H_1, H_2, \ldots H_n)$ où les H_i sont les matrices hypercompagnon des diviseurs élémentaires de $\lambda I - A$.

Exemple 4. Les matrices hypercompagnon des diviseurs élémentaires $\lambda + 1$, $\lambda + 1$ et $\lambda^2 - \lambda + 1$ de la matrice A de l'exemple 2 sont leurs matrices compagnon, la matrice hypercompagnon de $(\lambda + 1)^2$ est $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ et celle de $(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$ est $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Par suite, la forme canonique du théorème III est

$$\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}$$

L'usage du terme "rationnel" pour la forme canonique du théorème 1 peut prêter à confusion. Il fut utilisé à l'origine pour préciser que la forme canonique était obtenue uniquement à partir d'opérations dites rationnelles dans le corps des éléments de A. Cela est encore vrai pour les formes canoniques traitées plus loin dans les théorèmes II et III. Pour ajouter à la confusion, la forme canonique du théorème III est aussi parfois appelée forme canonique rationnelle.

FORME CANONIQUE CLASSIQUE. Supposons que les diviseurs élémentaires de la matrice caractéristique de A soient des puissances de polynômes linéaires. La forme canonique du théorème III et alors la matrice diag $(C_q'(p), \ldots, C_q^i(p), \ldots, C_q^n(p))$ où $C_q^i(p)$ est la matrice hypercompagnon de la forme

$$(26.5) \qquad C_q(p) = \begin{bmatrix} a_i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_i \end{bmatrix}$$

du diviseur élémentaire $\{p(\lambda)\}^q = (\lambda - a_i)^q$. Comme exemple, voir problème 2.

Ce cas particulier de forme canonique du théorème III est connu sous le nom de "forme canonique de Jordan" ou forme canonique classique. [Remarquer que $C_q^i(p)$ de (26.5) est du type J de (25.4)] . Nous avons :

Théorème IV. Soit $\mathfrak{F}$ un corps dans lequel le polynôme caractéristique de la matrice A se factorise en polynômes linéaires. Alors A est semblable sur $\mathfrak{F}$ a une matrice diag $(H_1, H_2, \ldots, H_n)$ où les H_i sont les matrices hypercompagnon de la forme (26.5), chaque matrice correspondant à un diviseur élémentaire $(\lambda - a_i)^q$.

Exemple 5. Supposons que les diviseurs élémentaires sur le corps des complexes de $\lambda I - A$ soient :

$$\lambda - i,\ \lambda + i,\ (\lambda - i)^2,\ (\lambda + i)^2.$$

La forme canonique classique de A est :

$$\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Le théorème IV a pour conséquence :

Théorème V. Une matrice carrée A d'ordre n est semblable à une matrice diagonale si et seulement si les diviseurs élémentaires de $\lambda I - A$ sont des polynômes linéaires, c'est-à-dire si, et seulement si le polynôme minimal de A est le produit de polynômes linéaires distincts.

Voir problèmes 2-4.

REDUCTION A LA FORME CANONIQUE RATIONNELLE. On va montrer que l'on peut réduire toute matrice carrée d'ordre n à sa forme canonique rationnelle, au moins théoriquement, sans connaître à l'avance les facteurs invariants de $\lambda I - A$. On trouvera un procédé quelque peu différent dans le livre : Dickson L.E., Modern Algebraic Théories, Benj. H. Sanborn, 1926. Un aspect purement calculatoire est traité dans le Browne, E.T. American Mathematical Monthly ; vol 48 (1940).

Nous aurons besoin des définitions suivantes :

Si A est une matrice carrée d'ordre n et X un vecteur à n composantes sur F. Si $g(\lambda)$ est le polynôme unitaire dans $F[\lambda]$ de degré minimum tel que $g(A) \,.\, X = 0$, alors on dit que, relativement à A, le vecteur X "est associé" à $g(\lambda)$.

Si relativement à A, le vecteur X "est associé" à $g(\lambda)$ de degré p, les vecteurs linéairement indépendants $X, AX, A^2X, \ldots, A^{p-1}X$ forment une "chaîne" dont le premier terme est X.

Exemple 6. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Les vecteurs $X = {}^t(1,0,0)$ et $AX = {}^t(2,1,1)$ sont linéairement indépendants tandis que $A^2X = X$. Alors $(A^2 - I)X = 0$ et X appartient au polynôme $\lambda^2 - I$. Pour $Y = {}^t(1, 0, -1)$, $AY = {}^t(-1, 0, 1) = -Y$; par suite $(A + I)Y = 0$ et Y est associé au polynôme $\lambda + 1$.

Si $m(\lambda)$ est le polynôme minimal d'une matrice A carrée d'ordre n, alors $m(A) \,.\, X = 0$ pour tout vecteur X à n composantes. Par suite, il n'existe pas de chaîne dont la longueur surpasse le degré de $m(\lambda)$. Pour la matrice de l'exemple 6, le polynôme minimal est $\lambda^2 - 1$.

Soit S la forme canonique rationnelle d'une matrice A carrée d'ordre n sur F. Alors, il existe une matrice non singulière R sur F telle que :

$$R^{-1}AR = S = \operatorname{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{26.6}$$

où, pour plus de commodité, les $C(f_i)$ de (26.2) ont été remplacés par C_i. Nous supposons que C_i, la matrice compagnon du facteur invariant

$$f_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + c_{i,s_i}\lambda^{s_i-1} + \ldots + c_{i2}\lambda + c_{i1}$$

est de la forme

$$C_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i2} \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -c_{i,s_i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{is_i} \end{bmatrix}$$

De (26.6), nous déduisons :

(26.7) $$AR = RS = R\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n)$$

Formons une partition de R en groupant les colonnes $R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n$ de telle sorte que R_i et C_i, $(i = j, j+1, \ldots, n)$ admettent le même nombre de colonnes. De (26.7), nous déduisons

$$\begin{aligned} AR = A[R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n] &= [R_j, R_{j+1}, \ldots, R_n]\,\mathrm{diag}(C_j, C_{j+1}, \ldots, C_n) \\ &= [R_j C_j, R_{j+1} C_{j+1}, \ldots, R_n C_n] \end{aligned}$$

et

$$AR_i = R_i C_i, \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

Notons les s_i vecteurs colonnes de R_i par $R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}$ et formons le produit

$$R_i C_i = [R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}]\, C_i = [R_{i2}, R_{i3}, \ldots, R_{is_i}, -\sum_{k=1}^{s_i} R_{ik} c_{ik}]$$

Puisque

$$AR_i = A[R_{i1}, R_{i2}, \ldots, R_{is_i}] = [AR_{i1}, AR_{i2}, \ldots, AR_{is_i}] = R_i C_i$$

nous avons :

(26.8) $$R_{i2} = AR_{i1}, \quad R_{i3} = AR_{i2} = A^2 R_{i1}, \quad \ldots, \quad R_{is_i} = A^{s_i - 1} R_{i1}$$

et

(26.9) $$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} R_{ik} = AR_{is_i}$$

En substituant (26.8) dans (26.9), nous obtenons

$$-\sum_{k=1}^{s_i} c_{ik} A^{k-1} R_{i1} = A^{s_i} R_{i1}$$

ou

(26.10) $$(A^{s_i} + c_{is_i} A^{s_i - 1} + \ldots + c_{i2} A + c_{i1} I) R_{i1} = 0$$

De la définition précédente des C_i, nous pouvons écrire (26.10) de la façon suivante

(26.11) $$f_i(A) \cdot R_{i1} = 0$$

Supposons que R_{i1} soit noté X_i de telle sorte que (26.11) devienne $f_i(A) \,.\, X_i = 0$; alors, puisque $X_i, AX_i, A^2 X_i, \ldots, A^{s_i - 1} X_i$ sont linéairement indépendants, les vecteurs X_i sont associés au facteur invariant $f_i(\lambda)$. Par suite, les vecteurs colonnes de R_i forment une chaîne admettant X_i comme premier terme ; X_i est associé à $f_i(\lambda)$.

En résumé, les n colonnes linéairement indépendantes de R, satisfont à (26.2) et constituent $n - j + 1$ chaînes

$$X_i, AX_i, \ldots, A^{s_i - 1} X_i \qquad (i = j, j+1, \ldots, n)$$

dans lesquelles les premiers termes sont associés respectivement aux facteurs invariants $f_j(\lambda), f_{j+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda)$ et dont les longueurs satisfont à : $0 < s_j \leqq s_{j+1} \leqq \ldots \leqq s_n$.

Nous avons :

Théorème VI. Soit A une matrice carrée d'ordre n sur F :

(i) Soit X_n le premier terme d'une chaîne $\mathcal{C}_n$ de longueur maximale pour tous les vecteurs d'ordre n sur F.

(ii) Soit X_{n-1} le premier terme d'une chaîne $\mathcal{C}_{n-1}$ de longueur maximale (tout terme est linéairement indépendant des termes précédents et des termes de $\mathcal{C}_n$) pour tous les vecteurs à n composantes sur F qui sont indépendants des vecteurs de $\mathcal{C}_n$;

(iii) Soit X_{n-2} le premier terme d'une chaîne $\mathcal{C}_{n-2}$ de longueur maximale (tout terme étant linéairement indépendant des termes précédents et de ceux de $\mathcal{C}_n$ et de $\mathcal{C}_{n-1}$) pour tous les vecteurs à n composantes sur F qui sont linéairement indépendants des vecteurs de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n-1}$;

et ainsi de suite.

Alors, pour :

$$R = [X_j, AX_j, \ldots, A^{s_j-1}X_j;\ X_{j+1}, AX_{j+1}, \ldots, A^{s_{j+1}-1}X_{j+1};\ \ldots;\ X_n, AX_n, \ldots, A^{s_n-1}X_n]$$

$R^{-1}AR$ est la forme canonique rationnelle de A.

Exemple 7. Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Prenons $X = {}^t(1, 0, 0)$; alors $X, AX = {}^t(1, 1, 1)$, et $A^2X = {}^t(3, 5, 6)$ sont linéairement indépendants tandis que $A^3X = {}^t(14, 25, 30) = 5A^2X - X$. Par suite, $(A^3 - 5A^2 + I)X = 0$ et X est associé à $f_3(\lambda) = m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 1 = \phi(\lambda)$. Prenons

$$R = [X, AX, A^2X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

nous trouvons

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad AR = [AX, A^2X, A^3X] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 14 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 30 \end{bmatrix}$$

et

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = S$$

Ici A est non dérogatoire. Son polynôme minimal $m(\lambda)$ est irréductible sur le corps des rationnels. Tout vecteur à 3 composantes sur ce corps est associé à $m(\lambda)$, (voir problème 11) et sert de premier terme à une chaîne de longueur trois. La matrice R qui admet pour vecteurs colonnes les vecteurs d'une chaîne est telle que $R^{-1}AR = S$.

Exemple 8. Soit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Prenons $X = {}^t(1, -1, 0)$; alors $AX = X$ et X est associé à $\lambda - 1$. Or $\lambda - 1$ ne peut pas être le polynôme minimal $m(\lambda)$ de A. C'est, cependant, un diviseur de $m(\lambda)$, (voir problème 11). Il pourrait être un invariant de similitude pour A.

Maintenant, prenons $Y = {}^t(1, 0, 0)$; les vecteurs Y, $AY = {}^t(2, 1, 2)$, $A^2Y = {}^t(11, 8, 8)$ sont linéairement indépendants, tandis que $A^3Y = {}^t(54, 43, 46) = 5A^2Y + 3AY - 7Y$. Par suite, Y est associé à $m(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 7 = \phi(\lambda)$. Le polynôme $\lambda - 1$ n'est pas un invariant de similitude ; en fait, à moins que le premier vecteur choisi soit associé à un polynôme qui, raisonnablement, pourrait être la fonction minimale, on considérera qu'on fait fausse route. Le lecteur peut vérifier que :

$$R^{-1}AR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

quand $R = [Y, AY, A^2Y] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Voir problèmes 5-6.

PROBLEMES RESOLUS

1. Montrer que la matrice $C_q(p)$ de **(26.4)** admet $\{p(\lambda)\}^q$ comme seul invariant non trivial pour la similitude.

Supposons $C_q(p)$ d'ordre s. Le mineur de l'élément de la dernière ligne, première colonne de $\lambda I - C_q(p)$ est ± 1 de telle sorte que le plus grand commun diviseur de tous les mineurs carrés d'ordre $s - 1$ de $\lambda I - C_q(p)$ est 1. Alors les facteurs invariants de $\lambda I - C_q(p)$ sont $1, 1, \ldots, 1, f_s(\lambda)$. Mais $f_s(\lambda) = \{p(\lambda)\}^q$ puisque

$$\phi(\lambda) = |\lambda I - C_q(p)| = |\lambda I - C(p)|^q = \{p(\lambda)\}^q$$

2. La forme canonique (a) est celle des théorème I et II, le facteur invariant non trivial et diviseur élémentaire étant $\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1$. La forme canonique du théorème III est (b).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad\qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3. La forme canonique (a) est celle du théorème I, les facteurs invariants étant $\lambda+2,\ \lambda^2-4,\ \lambda^3+3\lambda^2-4\lambda-12$ et les diviseurs élémentaires $\lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda+2,\ \lambda-2,\ \lambda-2,\ \lambda+3$. La forme canonique commune aux théorèmes I et II est (b).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad\qquad (b)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

4. La forme canonique (a) est celle du théorème III. Sur le corps des rationnels, les diviseurs élémentaires sont $\lambda+2,\ \lambda+2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^2,\ (\lambda^2+2\lambda-1)^3$ et les facteurs invariants sont :

$$(\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^2, \qquad (\lambda+2)(\lambda^2+2\lambda-1)^3$$

La forme canonique du théorème I est (b) et celle du théorème II est (c).

$$(a)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 & -10 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 12 & 17 & -14 & -21 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(c)\quad \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{-6} & \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{-9} & \mathbf{-6} \end{bmatrix}$$

5. Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 3 & -1 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Prenons $X = {}^t(1,0,0,0,0,0)$.

Alors X, $AX = {}^t(-2,1,1,1,1,1)$, $A^2X = {}^t(1,0,-1,0,0,-1)$ et $A^3X = {}^t(-3,1,1,1,1,2)$ sont linéairement indépendants tandis que $A^4X = {}^t(1,0,-2,0,0,-2) = 2A^2X - X$; X est associé à $\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$. Nous prendrons, à l'essai, $m(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1$ et écrirons X_6 pour X.

Le vecteur $Y = {}^t(0,0,0,1,0,0)$ est linéairement indépendant des termes de la chaîne dont le premier terme est X_6 ; $AY = {}^t(-1,0,1,-1,1,0)$ est linéairement indépendant de Y et des termes de la chaîne. Or $A^2Y = Y$; Y est donc associé à $\lambda^2 - 1$. Puisque les deux polynômes forment l'ensemble des facteurs invariants non triviaux, nous écrirons X_5 pour Y. On obtient la forme canonique de A :

$$R = [X_5, AX_5, X_6, AX_6, A^2X_6, A^3X_6] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Remarque. Le vecteur $Z = {}^t(0,1,0,0,0,0)$ est linéairement indépendant des termes de la chaîne dont le premier terme est X_6. $AZ = {}^t(3,0,-2,1,-2,0)$ est linéairement indépendant de Z et des termes de la chaîne. Cependant $A^2Z = {}^t(-1,1,0,0,0,1) = -AX_6 + A^3X_6 + Z$; ainsi $(A^2-1)(Z - AX_6) = 0$ et $W = Z - AX_6 = {}^t(2,0,-1,-1,-1,-1)$ est associé à $\lambda^2 - 1$. Utilisant ce dernier comme X_5, nous pouvons former une autre matrice R, avec laquelle on obtient la forme canonique rationnelle.

6. Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Prenons $X = {}^t(1,0,0,0,0)$.

Alors X, $AX = {}^t(-2,1,-1,-1,-2)$, et $A^2X = {}^t(1,1,-1,-1,0)$ sont linéairement indépendants tandis que $A^3X = {}^t(-1, 2, -2, -2, 0) = 2A^2X - 3X$; X est associé à $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3$. Nous prendrons, à l'essai, ce dernier polynôme comme polynôme minimal $m(\lambda)$ et prendrons X comme X_5.

Quand, dans A, on soustrait la quatrième colonne de la première, nous avons ${}^t(-1,0,0,1,0)$; par suite, si $Y = {}^t(1,0,0,-1,0)$, $AY = -Y$; Y est associé à $\lambda + 1$. De nouveau, quand on soustrait dans A la quatrième colonne de la troisième, nous avons ${}^t(0,0,-1,1,0)$. Par suite, si $Z = {}^t(0,0,1,-1,0)$, $AZ = -Z$; Z est associé à $\lambda + 1$. Puisque Y, Z et les termes de la chaîne dont le premier terme est X_5 sont linéairement indépendants, nous prenons Y comme X_4 et Z comme X_3. La forme canonique rationnelle de A est :

$$R = [X_3, X_4, X_5, AX_5, A^2X_5] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R^{-1}AR = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

PROBLEMES SUPPLEMENTAIRES

7. Pour chacune des matrices $(a) - (h)$ du problème 9, Chapitre 25, écrire les matrices canoniques des théorèmes I, II, III sur le corps des rationnels. L'une de ces matrices changera-t-elle si on considère un ensemble stable défini au début du Chapitre 8.

Réponses partielles (a) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, diag(1, 2, 3)

(b) **I**, **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

(f) **I**, $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(g) **I**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; **II**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; **III**, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(h) **I**, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **II**, **III**, diag(2, 2, 2, −1, −1)

8. Sous quelles conditions (a) les formes canoniques des théorèmes I et II sont-elles identiques ? (b) les formes canoniques des théorèmes II et III sont-elles identiques ? (c) la forme canonique du théorème II est-elle diagonale ?

9. Identifier la forme canonique $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Comparer à la réponse du problème 8 (b).

10. Supposons que la matrice A non singulière ait pour facteurs invariants non triviaux (a) $\lambda + 1$, $\lambda^3 + 1$, $(\lambda^3 + 1)^2$, (b) $\lambda^2 + 1$, $\lambda^4 + 5\lambda^2 + 4$, $\lambda^6 + 6\lambda^4 + 9\lambda^2 + 4$. Ecrire les formes canoniques des théorèmes I, II, III sur le corps des rationnels et celle du théorème IV.

Réponses : (a)

$$\text{I,}\quad \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\text{II,}\quad \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -3 & 2
\end{bmatrix}$$

$$\text{III,}\quad \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\text{IV,}\quad \begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta
\end{bmatrix} \quad \text{où}\quad \alpha, \beta = \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$$

11. Montrer que si A est une matrice carrée d'ordre n, si le vecteur X est associé à $g(\lambda)$ relativement à A, alors $g(\lambda)$ divise le polynôme minimal $m(\lambda)$ de A.

Indication : Supposer le contraire et considérer $m(\lambda) = h(\lambda)\cdot g(\lambda) + r(\lambda)$.

12. Dans l'exemple 6, montrer que X, AX et Y sont linéairement indépendants et réduire A à sa forme canonique rationnelle.

13. Dans le problème 6,

(a) Prendre $Y = {}^t(0,1,0,0,0)$, linéairement indépendant et de la chaîne dont le premier terme est X_5 $X_4 = Y - (3A - 2I)X_5$ qui est associé à $\lambda + 1$.

(b) Prendre $Z = {}^t(0,0,1,0,0)$, linéairement indépendant de X_4 et de la chaîne dont le premier terme est X_5 et obtenir $X_3 = Z - X_5$ qui est associé à $\lambda + 1$.

(c) Calculer $R^{-1}AR$ en utilisant les vecteurs X_3 et X_4 de (b) et (a) pour construire R.

14. Pour chacune des matrices A du problème 9(a) – (h), chapitre 25, trouver R tel que $R^{-1}AR$ soit la forme canonique rationnelle de A.

15. Résoudre le système d'équations différentielles et linéaires

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + t \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ \dfrac{dx_4}{dt} = -3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

où x_i est une fonction inconnue de variable réelle t.

Indication : Soit $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, définir $\dfrac{dX}{dt} = {}^t\left[\dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{dx_2}{dt}, \dfrac{dx_3}{dt}, \dfrac{dx_4}{dt}\right]$ et écrire le système

(i) $$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & -3 & -2 \\ -3 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AX + H$$

Puisque l'application linéaire non singulière $X = RY$ transforme (i) en :

$$\frac{dY}{dt} = R^{-1}ARY + R^{-1}H$$

choisir R de telle sorte que $R^{-1}AR$ soit la forme canonique rationnelle de A. Le vecteur élémentaire E_1 à 4 composantes, associé à $\lambda^3 - \lambda$ est le premier terme d'une chaîne $X_1 = E_1$, AX_1, A^2X_1 tandis que E_4 donne $X_2 = E_4 - X_1 + 2AX_1$ qui est associé à $\lambda + 1$. Or, avec :

$$R = [X_1, AX_1, A^2X_1, X_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 8 \\ 0 & -6 & 4 & -12 \\ 0 & -3 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{dY}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ y_1 + y_3 \\ y_2 \\ -y_4 \end{bmatrix}$$

Ainsi,

$$Y = \begin{bmatrix} C_1 + \frac{1}{2}t^2 \\ C_2e^t + C_3e^{-t} - t \\ -C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ C_4e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad X = RY = \begin{bmatrix} 2C_1 + C_2e^t + 3(C_3+C_4)e^{-t} + t^2 - 2t + 1 \\ 2C_1 + 2C_2e^t + 2(3C_3+4C_4)e^{-t} + t^2 - 4t + 2 \\ -4C_1 - 2C_2e^t - 2(5C_3+6C_4)e^{-t} - 2t^2 + 6t - 4 \\ -2C_1 - C_2e^t - 5(C_3+C_4)e^{-t} - t^2 + 3t - 2 \end{bmatrix}.$$

Index alphabétique

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Publications scientifiques et littéraires
TYPO - OFFSET
05 - GAP - Téléphone 14-23 +
Dépôt légal 121 - 1973