

北京大学 2014 年研究生算法课第 1 次作业

发布时间：2014 年 9 月 22 日

截止时间：2014 年 10 月 13 日课前

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。作业必须使用统一规定的模板。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。
- 如果因生病等特殊原因不能按时完成作业的，那么应在截止日期前一天向任课老师请假。

引言、递推计算、图

1. 题目来源：《算法设计》第一章第 7 题：

题目描述：

你的某些朋友正在为一个通信网营造商工作。他们正在设计某种输入输出交叉开关的转换算法。

这个装置有 n 条输入线和 n 条输出线，每条线从一个源点指向一个终点。每条输入线与每条输出线在一个称为接线盒的特殊硬件中恰好相交在一个不同的点上。线上的点按照从源点到终点的方向被自然地排序，对同一条线上两个不同的点 x 和 y ，如果 x 比 y 更接近源点，我们就说 x 对 y 是上游，否则称 x 对 y 是下游。一条输入线与输出线相交的顺序不一定和另一条输入线与输出线相交的顺序一样（对于输出线与输入线相交的次序也类似）。图 1 给出了这样一组输入和输出线的例子。

这里是这种状况的开关部件。每条输入线输送一个不同的数据流，且这个数据流必须被切换到一条输出线上。如果输入流 i 在接线盒 B 被切换到输出 j 上，那么这个流通过输入 i 上 B 上游的所有接线盒，接着通过 B ，然后通过输出 j 上 B 下游的所有接线盒。不管哪个输入数据流被切换到哪条输出线，每个输入数据流必须被切换到一条不同的输出线上。而且这是严格的约束——根据切换操作没有两个数据流能通过同一个接线盒。

问题：证明对任何给定的输入线和输出线相交的模式（每对线恰好相交一次），总可以找到一个有效的数据流切换方式——以这种方式每个输入数据流被切换到一个

不同的输出上，并且不会使所得到的两个数据流通过同一个接线盒。此外，给出一个算法找出这样一个有效的切换方案。

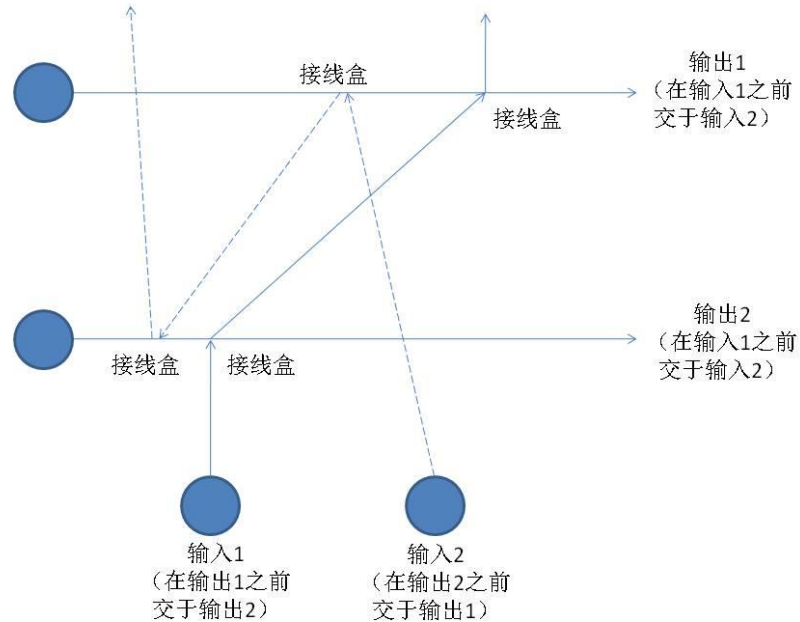


图 1

2. 题目来源：《算法设计》第二章第 2 题：

题目描述：

假设你有某些算法，它们的 6 个运行时间列出如下（假定这些都是作为一个输入规模为 n 的函数所执行操作的准确数目）。假设你有一台每秒可以执行 10^{10} 次操作的计算机，并且你需要在至多 1 小时内计算出一个结果。对每个算法，使得你能在 1 小时内得到结果的最大的输入规模 n 是多少？假设 \log 函数都是以 2 为底的。要求写出推导过程。

(a) n^2

(b) n^3

(c) $100n^2$

(d) $n \log n$

(e) 2^n

(f) 2^{2^n}

3. 题目来源：《算法设计》第二章第 4 题：

题目描述：

用下面的函数表，按照增长率上升的顺序排列它们。即，如果在你的表中，函数 $g(n)$ 紧跟在 $f(n)$ 的后面，那么应该满足 $f(n)$ 是 $O(g(n))$ 。注意：英文版书上这道题给出的 $g_3(n)$ 和 $g_4(n)$ 的顺序与下面的不一致，一律以这里给出的为准。要求写出函数本身，不能只给出函数序号。

$$g_1(n) = 2^{\sqrt{\log n}}$$

$$g_2(n) = 2^n$$

$$g_3(n) = n^{4/3}$$

$$g_4(n) = n(\log n)^3$$

$$g_5(n) = n^{\log n}$$

$$g_6(n) = 2^{2^n}$$

$$g_7(n) = 2^{n^2}$$

4. 题目来源：《算法设计》第二章第 5 题：

题目描述：

假定你有函数 f 和 g 使得 $f(n)$ 是 $O(g(n))$ ，对下面每个语句，确定它是真还是假，并给出一个证明或者反例。

(a) $\log_2 f(n)$ 是 $O(\log_2 g(n))$

(b) $2^{f(n)}$ 是 $O(2^{g(n)})$

(c) $f(n)^2$ 是 $O(g(n)^2)$

5. 题目来源：《算法设计》第三章第 10 题：

题目描述：

假设给定无向图 $G = (V, E)$ ，并且确定 G 中的两个节点 v 和 w 。给出一个计算 G 中最短的 v - w 路径条数的算法。这个算法不用列出所有的路径，仅仅是数量就够了。对于具有 n 个节点和 m 条边的图，要求你的算法的运行时间应该是 $O(m + n)$ 。