

北京大学 2014 年研究生算法课第 3 次作业

发布时间：2014 年 10 月 27 日
截止时间：2014 年 11 月 17 日课前

注意事项：

- 作业应独立完成，严禁抄袭。作业必须使用统一规定的模板。
- 在截止日期那天，直接把纸质版的作业交给任课老师。
- 如果因生病等特殊原因不能按时完成作业的，那么应在截止日期前一天向任课老师请假。

分治法

1. 题目来源：《算法设计》第五章第 3 题：

题目描述：

假设你正在为一家银行做咨询，这家银行正在进行一项诈骗检测，他们向你提出下面的问题。他们有一组 n 张被没收的银行卡，怀疑它们被用于诈骗。每张银行卡是一个小塑料卡，包含一个带有某些加密数据的磁条，并且它与银行卡中唯一的账号对应，每个账号可以有許多银行卡与之对应，如果两张银行卡对应了同一个账号，我们将说它们是等价的。

从一个银行卡直接读出账号是非常困难的，但是银行卡有一个高技术的“等价性测试器”，它拿两张银行卡并且在执行某些计算之后，确定是否他们是等价的。**注意：只能测试两张卡是否等价，不能比较大小。**

他们的问题是：在一组 n 张卡中，是否有比 $n/2$ 张还要多的卡全都是相互等价的？假定你对这些卡能做的唯一可行的操作是取两张卡并且把它们插入等价性测试器，若只能启动 $O(n \log n)$ 次等价性测试，该怎样来确定对他们问题的答案？给出算法过程的描述和时间、空间复杂度分析，简要证明其正确性。若只能启动 $O(n)$ 次等价性测试，又该如何进行？

2. 题目来源：《算法设计》第五章第 2 题：

题目描述：

回顾求逆序个数的问题。如本书中一样，给定 n 个数的序列 a_1, a_2, \dots, a_n ，其中我们假定所有的数都不相同，定义一个逆序是一对 $i < j$ 使得 $a_i > a_j$ 。

我们引入逆序计算问题作为考察两个排序有多大差别的一个好的度量指标。但是，人们可能感觉这个度量太敏感了。如果 $i < j$ 且 $a_i > 2a_j$ ，我们把这对 i, j 叫做重要的逆序。给出一个 $O(n \log n)$ 的算法计数在两个排序中的重要逆序个数。写清楚算法的描述和时间、空间复杂度分析，简要证明其正确性。

3. 题目来源：《算法设计》第五章第 1 题：

题目描述:

你正有兴趣分析某些来自两个分离数据库的某些难得的数据。每个数据库包含 n 个数值——因此总共存在 $2n$ 个值——并且你可以假定没有两个值是相同的。你想确定这 $2n$ 个值的集合的中位数，这里我们将把它定义为第 n 个最小的值。

但是你可以访问这些值的唯一方式就是通过对数据库的查询。在一次查询中，你可以对这两个数据库之一指定一个 K 值，这个被选定的数据库将返回它包含的第 K 个最小的值。由于查询是昂贵的，你想用最少数次查询来计算这个中位数。

给出一个至多使用 $O(\log n)$ 次查询找中位值的算法，简要证明其正确性。

4. 题目来源: 《算法设计》第五章第 7 题:

题目描述:

假设现在给定一个 $n \times n$ 的网格图 G (一个 $n \times n$ 的网格图就是一个 $n \times n$ 的棋盘的邻接图。完全精确地说，它是一个图，它的结点集合是所有自然数的有序对 (i, j) 的集合，其中 $1 \leq i \leq n$ 且 $1 \leq j \leq n$ ；结点 (i, j) 与结点 (k, l) 被一条边相交且仅当 $|i-k| + |j-l| = 1$)。

每个结点 v 被一个实数 x_v 标记；你可以假设所有这些标记都不相同。显示怎样对 G 的结点只用 $O(n)$ 次探查来找到 G 的一个局部最小结点 (注意 G 有 n^2 个结点)。

5. 题目来源: 《算法导论》28.2-3

题目描述:

考虑下述 n 阶矩阵乘法的分治算法：将 $n \times n$ 矩阵顺序划分成 $n/3 \times n/3$ 块，每块为 3×3 的小矩阵。假设两个 3×3 的小矩阵相乘可以用 k 次数的乘法运算完成 (k 为固定正整数)，原来规模为 n 的问题就可以归结为 $n/3$ 的子问题。设上述算法的时间复杂度函数为 $T(n)$ 。

- (1) 列出关于 $T(n)$ 的递推方程并估计 $T(n)$ 的阶。
- (2) k 最大取什么值能够使得 $T(n) = o(n^{\log_3 7})$?