

Криві Пеано. Фрактальна природа хаосу

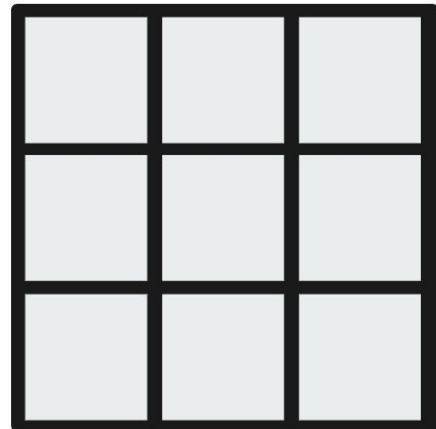
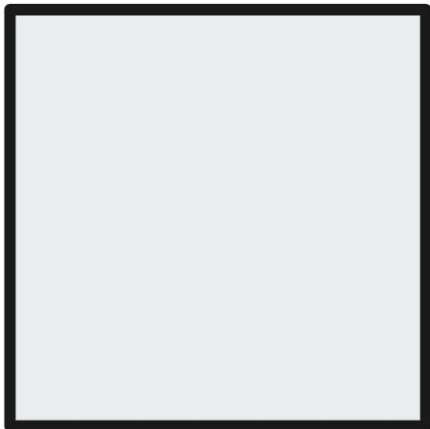
Наприкінці XIX столітті Математики захоплювались дослідженням безкінечності та шукали спосіб перетворити одновимірну лінію у двовимірний простір в такий спосіб, щоб лінія проходила кожену точку в безкінечному просторі.

Мовою фрактальної геометрії задача полягала в тому аби перетворити одновимірну криву в таку, фрактальна розмірність якої буде рівна двійці у випадку площини чи трійці для куба.

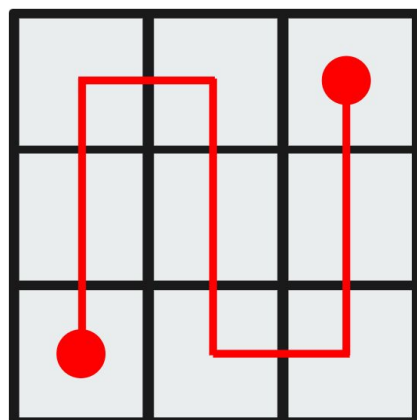
Довгий час вважали, що цю задачу неможливо розв'язати. Першим хто це зробив був Джузеппе Пеано в 1890 році.

Щоб перетворити одновимірну лінію у двовимірну треба аби лінія відвідала всі точки на площині.

Нехай S – площа яку можна заповнити, тоді таку площу можна поділити на різні частини

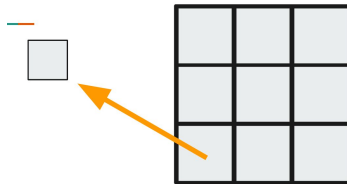


Обійдемо цю площину наступним чином:

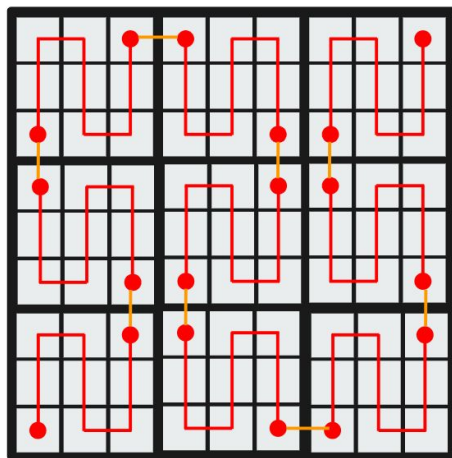


Ми поділили цю площину на 9 рівних частин і відвідали кожну з них не пропустивши жодної. Але очевидно багато простору все одно залишається незаповненим. Ось чому ми дивимось на цю проблему з точки фракталів.

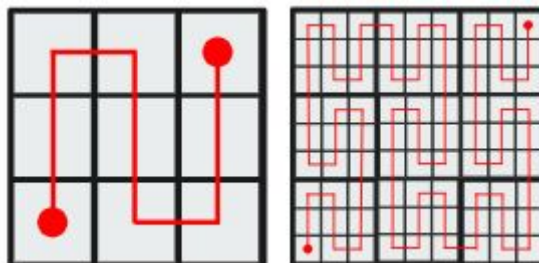
Кожна менша частина нашої площини така сама як і вся площина із якої ми починали лише менша.



Ми теж можемо поділити її на рівні частини та обійти у той самий спосіб. Крива Пеано на другій ітерації матиме наступний вигляд



Ось приклад перших двох ітерацій кривої Пеано.

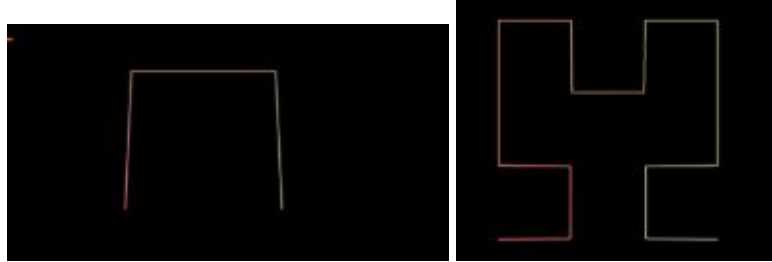


У другому випадку заповнено більше площі ніж у першому. Проблема в тому, що товщина теоретичної лінії рівна нулеві, та якщо продовжувати цей процес нескінченно тоді ми зможемо обійти всі точки площини, адже крива Пеано росте у просторі.

Таким чином крива заповнила квадрат і проходить через кожну його точку (x, y) щонайменше один раз.

Однак зараз, Криві Пеано — це загальна назва кривих, образ яких містить відкриті області простору.

У 1891 році німецький математик Давид Гільберт відкрив варіант кривої Пеано, який базується на розподілі кожної зі сторін одиничного квадрата на дві рівні частини, що ділить квадрат на чотири менші частини.

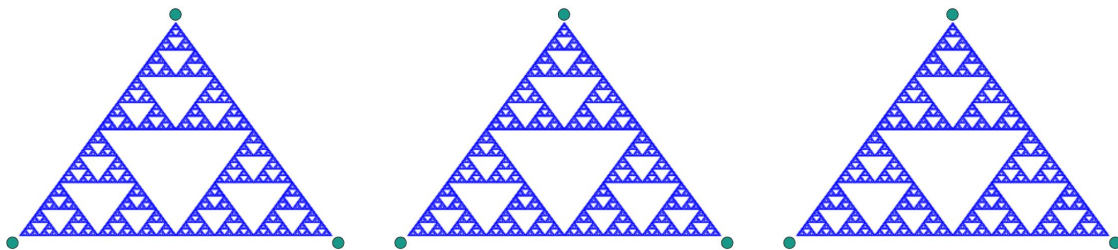


Про криві Пеано також можна думати як про функції областю визначення яких є пряма, а областю значення — площина. Так точка на прямій $(0,3)$ переходить в точку на площині $(0,5; 1.2)$.

Приклад кривих Пеано часто можна зустріти в природі. Саме за принципом кривих Пеано в організмі поміщається кровоносна та нервова система в організмі, а ДНК — в хромосомі. В промисловості, криві Пеано — це спосіб упакувати багатовимірні дані в одновимірний простір, таким чином щоб однакові частини даних, які близько один до одного в багатовимірному просторі залишалися близько в одновимірному, та навпаки. Саме цим чином упаковуються дроти в електроприладах, кешуються зображення в графічних процесорах, зжимаються дані та перетворюються у звуковий сигнал.

Сам Джузеппе Пеано використав фрактальну властивість самоповторення ще тоді коли про фрактали не було відомо. І це не випадково, адже часто детермінований хаос веде до фракталів.

Таким прикладом буде гра в хаос. Її правила дуже прості, на площині є три точки, і варто рухатись випадково до однієї із цих точок на половину шляху. Якщо цей процес повторювати достатньо довго можна отримати відомий фрактал — трикутник Серпінського.



Фрактал — це геометрична фігура певна частина якої повторюється знову і знову, змінюючись в розмірах.

Одним із перших математиків, які досліджувати хаотичні процеси був Бенуа Мандельброт. Він намагався знайти закономірність там де інші її не бачили. Природі давно відомі приклади сферичної, радіальної та білатеральної симетрії, Мандельброт у свою чергу досліджував те що ми називаємо фрактальною симетрією.

Фрактали лише проявляють хаотичну поведінку, але якщо розглядати їх детальніше то можна побачити самоподібність. Нерідко те, що ми спостерігаємо в природі інтригує нас нескінченним повторенням того ж узору. Наприклад, у дерев є гілки, на яких є менші гілки і так далі. Те ж можна помітити, дивлячись на фото гірського рельєфу. Так проявляється характерна для фракталів самоподібність. Таких прикладів в природі безліч: капуста романеско, сніжинки, ріки, хмари та блискавки.

Динамічний хаос і фрактали – поняття, що ввійшли в наукову картину світу порівняно недавно, лише в останній чверті XX століття. Відтоді інтерес до них не згасає не тільки в колі фахівців – фізиків, математиків, біологів, але і серед людей, далеких від науки. Дослідження, пов'язані з фракталами та детермінованим хаосом, змінюють багато звичних уявлень про навколишній світ.

Фрактали змушують переглянути наші погляди на геометричні властивості природних і штучних об'єктів, а динамічний хаос вносить радикальні зміни до розуміння того, як ці об'єкти можуть поводитися в часі. Розроблені на основі цих понять теорії відкривають нові можливості в різних галузях знань.

Фрактальна система дозволяє поставляти ресурси до самих віддалених частин економлячи енергію і простір. Наприклад, в живих організмах система кровообігу доставляє кров до тканин, чи дихальна система — повітря в легені. Різні фрактали виявились настільки подібними, що вчені змогли перетворити жилки листків в кровоносні судини пересадивши в них тканину із серця

Фрактали використовуються при моделюванні пористих матеріалів, наприклад, в нафтохімії. У біології вони застосовуються для моделювання популяцій і для опису систем внутрішніх органів. У радіотехніці — для розробки багатодіапазонних антен. Одні із найкращих алгоритмів стиснення зображення засновані на фрактальній геометрії. Фрактали широко застосовуються в комп'ютерній графіці для побудови зображень природних об'єктів, таких як дерева, кущі, гірські ландшафти, поверхні морів і так далі. Такі зображення генеруються процедурно на основі простих правил та використовуються в спецефектах та іграх.

Фрактали завжди асоціювались з хаосом. Насправді сама структура хаосу є фрактальною. Раніше ті хаотичні процеси в природі які ми не могли пояснити, зараз ми пояснюємо за допомогою фракталів і знаходимо дивовижні властивості, яких до цього боялись. При дослідженні фракталів їх вважали страшними фігурами, зараз це область математики якою всі захоплюються. Ми боялись фракталів, а зараз захоплюємось їх красою. Вони є в картинах відомих художників, у кінематографі та поезії. Фрактали допомогли нам знайти зв'язок між речами, які досі вважались непов'язаними. Те як упаковується ДНК в хромосомі й тим як ми зберігаємо дані у пам'яті комп'ютера. Ми знайшли зв'язок між листям на деревах і нашою кровоносною системою. Випадкові

процеси які відбуваються в далекому глибокому космосі, та ті що відбуваються у між атомами та молекулами пов'язані фракталами.

Хаос не настільки безладний і непередбачуваний процес наскільки він нам здається. Він підкоряється закону, закону який нам належить віднайти