2019 – 2020 Güz Dönemi

Sayısal Analiz

KARABÜK ÜNİVERSİTESİ 2007

İÇİNDEKİLER

Murat Serdar KAYAR
WWW.MURATSERDAR.COM

VİZE İÇİNDEKİLER

HAFTA 1

Sayısal Analiz Nedir?

Sayısal Analiz, matematiksel problemlere sayısal çözümler elde etmek için algoritmaların çalışmasını, geliştirilmesini ve analizini içerir. Bilimsel hesaplama matematiği olarakta adlandırılabilir.

Sayısal Analizde Ne Yapılır?

Sayısal analizde belli başlı tanımlar ve teoremler kullanılarak, matematiksel olarak zaten çözümü olan problemlere hata payı ile yaklaşılarak en doğru sonucu bulmaya çalışılır. Bu teoremlere sırasıyla bakmak istediğimizde;

- **Tanım 1**
  - ➔ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ denkleminin anlamı; her ε pozitif sayılı için x ve c arasındaki uzaklığın δ dan küçük kaldığı her durumda, $f(x)$ ve L arasındaki uzaklık ε dan küçük kalacak şekilde ε ye karşılık gelen bir δ sayısı vardır. Yani,

$$her\ 0 < |x - c| < \delta\ için\ |f(x) - L| < \varepsilon$$

Eğer bu özelliği sağlayan bir L sayısı yok ise f nin c noktasında limiti yoktur.

- **Tanım 2**
  - ➔ Eğer $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ise, f fonksiyonu c noktasında süreklidir denir.

- **Teorem 1**
  - ➔ Bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyon $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki bütün değerleri alır.

- **Tanım 3**
  - ➔ f fonksiyonunun c noktasındaki türevi (mevcut ise) aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Eğer $f, f'(c)$ var olacak şekilde bir fonksiyon ise, bu durumda f ye c de **türevlenebilirdir** denir. Eğer f fonksiyonu c de türevlenebilir ise, bu durumda c de sürekli olmak zorundadır.

- **Teorem 2 (Lagrange Kalanlı Taylor Teoremi)**
  - ➔ Eğer $f \in C^n[a, b] ve\ (a, b)$ açık aralığında f^{n+1} türevi mevcut ise, bu durumda $[a, b]$ kapalı aralığındaki herhangi x_0 ile x noktaları için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)} 0 x^k + E_n(x)$$

olur.

Burada hata terimi, x_0 ile x arasındaki bazı ξ için,

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}$$

olur.

Eğer x_0= 0 durumu varsa, buna Maclaurin serisi denir ve formülü aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + E_n(x)$$

❖ Örnek 1

(a) $f(x) = e^x$ fonksiyonunu $x_0 = 1$ noktası civarında Taylor serisine açınız. (İlk 4 terimi alınız)

(b) $e^{1.01}$ değerini (a) şıkkındaki Taylor seri açılımını kullanarak bulunuz. ($e = 2.7183$ alarak virgülden sonra 4 ondalık duyarlılık ile işlem yapınız.)

✓ Çözüm 1

(a) e^x in türevi kendisi olmasından dolayı. $f^{(0)}(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = e^x$ elde edilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^{(k)} x_0 (x - x_0)^k$$

$$e^x = \frac{1}{0!} f^{(0)}(1)(x-1)^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(1)(x-1)^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(1)(x-1)^3$$

$e^x = e + e(x-1) + \frac{1}{2}e(x-1)^2 + \frac{1}{6}e(x-1)^3$ olarak elde edilir.

(b) (a) şıkkındaki son eşitliği kullanırsak eğer;

$e^{1.01} = e + e(1.01-1) + \frac{1}{2}e(1.01-1)^2 + \frac{1}{6}e(1.01-1)^3 = 2.7456$ bulunur.

❖ Örnek 2

(a) $f(x) = e^x$ fonksiyonunu $x_0 = 0$ noktası civarında Taylor (Maclaurin) açılımının ilk 4 terimden faydalanarak $e^{1.01}$ değerini bulunuz. (Virgülden sonra 3 ondalık duyarlılık ile yuvarlama yaparak işlem yapınız.)

✓ Çözüm 2

(a) e^x in türevi kendisi olmasından dolayı. $f^{(0)}(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = e^x$ elde edilir.
Ayrıca $f^{(0)}(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = e^0 = 1$ dir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)} 0 x^k + E_n(x)$$

$$e^x = \frac{1}{0!} f^{(0)}(0)(x-0)^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)(x-0)^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(x-0)^3$$

$$e^x = f(0) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{(2!)} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{(3!)} f^{(3)}(0)$$

➔ $e^{1.01} = 1 + 1.01 + \frac{(1.01)^2}{2} + \frac{(1.01)^3}{6} \cong 2.6917668 \cong 2.692$

❖ Örnek 3

$f(x) = cos2x$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktası civarında Taylor (Maclaurin) açılımının ilk 5 terimden faydalanarak $f(0.2)$ değerini bulunuz.

✓ Çözüm 3

$f^{(0)}(x) = f(x) = cos2x$, $f^{(1)}(x) = -2sin2x$, $f^{(2)}(x) = -4cos2x$

$f^{(3)}(x) = 8sin2x$, $f^{(4)}(x) = 16cos2x$ dir.

Ayrıca $f^{(0)}(0) = cos0 = 1$, $f^{(1)}(0) = -2sin0 = 0$, $f^{(2)}(0) = -4cos0 = -4$

$f^{(3)}(0) = 8sin0 = 0$, $f^{(4)}(0) = 16cos0 = 16$ dır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)} 0 x^k + E_n(x)$$

$$f(x) \cong \frac{1}{0!} f^{(0)}(0)(x-0)^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0)(x-0)^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)(x-0)^3 + \frac{1}{(4!)} f^{(4)}(0)(x-0)^4$$

$f(x) \cong f(0) + \frac{x}{1} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0) + \frac{x^3}{6} f^{(3)}(0) + \frac{x^4}{24} f^{(4)}(0) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4$ olarak elde edilir.

$$f(0.2) = cos2(0.2) = 1 - 2(0.2)^2 + \frac{2}{3}(0.2)^4 = 0.92107$$

☆ NOT 1 : Bazı önemli fonksiyonların kendilerine özel Maclaurin Serisi açılımları vardır. Bunlar aşağıda listelenmiştir. ☆

- $sinx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1} / (2k+1)!$
- $cosx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} / (2k)!$
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k / (k)!$

❖ Örnek 4

$\int_0^{0.1} e^x \ln(1+x)\, dx$ değerini fonksiyonların Maclaurin serisine açılımının ilk üç teriminden yararlanarak yaklaşık olarak bulunuz.

✓ Çözüm 4

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin seri açılımının ilk üç terimi;

$$f(x) = f(0) + x\, f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2} f^{(2)}(0)$$

Bu durumda;

➔ $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

➔ $\ln(1+x) = 0 + x - \frac{x^2}{2}$

♣ İstenen İntegral

$$\int_0^{0.1} e^x \ln(1+x)\, dx = \int_0^{0.1} \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx \cong \int_0^{0.1} \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right) dx$$

$$= \left(\frac{(0.1)^2}{2} + \frac{(0.1)^3}{6} - \frac{(0.1)^5}{20}\right) = 0.005166$$

☆ NOT 2 : Taylor teoreminde, n = 0 durumu matematiksel çalışmalarda sıklıkla kullanılır ve Ortalama-Değer Teoremi olarak bilinir. Ortalama-Değer Teoreminin özel bir durumu Rolle Teoremidir. ☆

e^x $için$ 9 iterasyon

Maclaurin Seri Açılımı MATLAB Kodu

```
gercek_deger = exp(0.1);                          e^0.1 değerini gercek_deger degiskenine atar
x = 0.1;
toplam = 0;
for k=0:9                                         k'yı 0'dan 9'a kadar döngüye sokar
    toplam = toplam + (power(x,k)/factorial(k));  Maclaurin hesaplamasını yapar
end

mutlak_hata = abs(gercek_deger - toplam);         Hata hesaplar
```

Maclaurin Seri Açılımı MATLAB Kodu (Fonksiyon)

```
function [N] = Maclaurin_(x,m)                    fonksiyon tanımlama, N değeri çıktıyı verir

    toplam = 0;
    for k=0:9                                     k'yı 0'dan 9'a kadar döngüye sokar
        toplam = toplam + (power(x,k)/factorial(k));  Maclaurin hesaplamasını yapar
    end
    N = toplam;                                   Toplam değeri N çıktı değişkenine atar
end
```

HAFTA 2

❖ Örnek 1

$f(x) = e^{3x}$ fonksiyonunu $x_0 = 0.2$ noktası civarında Taylor açılımının ilk 4 terimini kullanınız. $f(0.3)$ değerini bulunuz.

✓ Çözüm 1

$f^{(0)}(x) = f(x) = e^{3x}$, $f^{(1)}(x) = 3e^{3x}$, $f^{(2)}(x) = 9e^{3x}$, $f^{(3)}(x) = 27e^{3x}$

$f^{(0)}(0.2) = e^{3*(0.2)} = e^{0.6} = 1.8221$

$f^{(1)}(0.2) = 3\ x\ 1.8221 = 5.4663$

$f^{(2)}(0.2) = 3\ x\ 5.4663 = 16.399$

$f^{(3)}(0.2) = 3\ x\ 16.399 = 49.197$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

$$= \frac{1}{0!} f^{(0)}(0.2)(x - 0.2)^0 + \frac{1}{1!} f^{(1)}(0.2)(x - 0.2)^1 + \frac{1}{2!} f^{(2)}(0.2)(x - 0.2)^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0.2)(x - 0.2)^3$$

$$= 1.8221 + 5.4663\ (x - 0.2) + \frac{16.399}{2}(x - 0.2)^2 + \frac{49.197}{6}(x - 0.2)^3$$

➔ $e^{3*0.3} = 1.8221 + 5.4663\ (0.1) + \frac{16.399}{2} * 0.1^2 + \frac{49.197}{6} * 0.1^3 \cong 2{,}4589$

➔ Gerçek Değer = $e^{0.9} = 2{,}4596$

➔ Mutlak Hata = |Gerçek Değer - Yaklaşık Değer | = | 2,4596 – 2,4589 | = 0,0007

MATLAB Faktoriyel Fonksiyonu (İteratif)

```
function [M] = fakt {k}
        carpim = 1.0;
        for i = 1:k
                carpim = carpim * i;
        end
        M = carpim;
end
```

MATLAB Faktoriyel Fonksiyonu (Recursive)

```
function [M] = fakt {k}
        if k==0
                M = 1;
        else
                M = k*fakt(k-1);
        end
end
```

MATLAB Üs Alma Fonksiyonu (Recursive)

```
function [M] = us_alma {x,k}
        if k==0
                M = 1;
        else
                M = x * us_alma(x, k-1);
        end
end
```

MATLAB Üs Alma Fonksiyonu (İteratif)

```
function [N] = us_alma {x,k}
        carpim = 1.0;
        for i = 1:k
                carpim = carpim * x;
        end
        N = carpim;
end
```

Örnek 5 için MATLAB Taylor Fonksiyonu

```
function [N] = Taylor_{x,x0,m}
        toplam = 0;
        for k=0:m-1
                toplam = toplam + ((us_alma(x-x0,k)*us_alma(3,k)*(1.8221))/fakt(k));
        end
        N = toplam;
end
```

e^x için MATLAB Maclaurin Fonksiyonu

```
function [N] = Maclaurin_{x,m}
        toplam = 0;
        kuvvet = 1;
        carpim = 1;
        for k=0:m-1
                toplam = toplam + (kuvvet/carpim);
                kuvvet = kuvvet * x;
                carpim = carpim * (k+1)
        end
        N = toplam;
end
```

HAFTA 3

➢ HATA ÇEŞİTLERİ

✓ **Mutlak Hata** : $e_x = |\bar{x} - x| \quad \rightarrow \quad \bar{x}\ gerçek\ değer\ ve\ x\ yaklaşık\ değer$

✓ **Bağıl Hata** : $r_x = {e_x}/{\bar{x}}$

❖ Örnek 1

$\bar{x} = \frac{1}{3},\ x = 0.333$ ise mutlak ve bağıl hatayı bulunuz. (İşlemi 8 ondalıklı yapınız)

✓ Çözüm 1

$\bar{x} = 0.333333333$, $x = 0{,}33300000$ biçiminde sekiz ondalıklı yazalım. O zaman;

$$e_x = |\bar{x} - x| = |0.33333333 - 0.33300000| = 0.00033333$$

$$r_x = {e_x}/{\bar{x}} = \frac{0.00033333}{0.33333333} = 0.00099999 \cong 0.001$$

❖ Örnek 2

$\bar{x} = 23.496,\ x = 23.494$ ise mutlak ve bağıl hatayı bulunuz.

✓ Çözüm 2

$$e_x = |\bar{x} - x| = |23.496 - 23.494| = 0.002$$

$$r_x = {e_x}/{\bar{x}} = \frac{0.002}{23.496} = 0.00008512$$

❖ Örnek 3

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

Serisinde ilk 5 terimi alarak sin(0.5) değerine yaklaşınız. Yaklaşımdaki mutlak ve bağıl hatayı bulunuz. (Altı ondalıklı)

✓ Çözüm 3

$$\bar{x} = \sin(0.5) = 0.479426$$

$$x = \sin(0.5) = 0.5 - 0.020833 + 0.000260 - 0.000002 + 0.000000 = 0.479425$$

$$e_x = |\bar{x} - x| = |0.479426 - 0.479425| = 0.00001$$

$$r_x = {e_x}/{\bar{x}} = \frac{0.000001}{0.479426} = 0.000002$$

$\sin(x)$ için MATLAB Çözümü

```
x = 0.5;
gerçek_deger = sin(x);
yaklasik_deger = 0.0;
toplam = 0;
for k = 0:4
        yaklasik_deger = yaklasik_deger + (((-1)^k*x^(2k+1))/factorial(2*k+1));
end
mutlak_hata = abs(gercek_deger – yaklasik_deger);
```

Nümerik metodlarla çözülen problemlerde sonuçların yaklaşık olmasına sebep olan bazı hatalar vardır. Programcı hata yapabileceği gibi bilgisayar arızasından veya kapasite yetersizliğinden doğan hatalarda oluşabilir. Bunlar üç çeşittir.

- **Veri (Başlangıç) Hataları :** Bu tür hatalar çözümüm istenen problemlere ait matematiksel model oluşturulduğunda ortaya çıkar. Matematiksel modeli olduğunca basitleştirebilmek için ideal kabuller yapılır. Bu da veri hatalarına neden olur. Veri ölçümlerindeki hatalar, rakamları hatalı kaydetme veya matematiksel sabitlerin ($\boldsymbol{\pi, e\ gibi}$) tam olarak temsil edilmemesi yüzünden ortaya çıkar.
- **Kesme Hataları :** Bu tür hatalar yaklaşık değerler veren matematiksel teknikleri kullandığımızda ortaya çıkar. Örneğin;

$$\boldsymbol{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + E}$$

yerine

$$\boldsymbol{e^x \cong 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}$$

Alırsak, $\boldsymbol{E}$ bize kesme hatasını verir.

Yani sonsuz terimli bir ifadeyi nümerik olarak yazarsak kesme hatası yapmış oluruz. Bu hatalar daha çok nümerik analiz iterasyon metodlarına dayandığında görülür. Bu tür hatalar kullanılan hesaplayıcının hafızasının büyüklüğüne bağlıdır. Hatanın büyüklüğü ile hafızanın büyüklüğü **ters orantılıdır.**

Ayrıca, kesirli sayıları ondalık sayılarak çevirirken de kesme uygulanabilir.

❖ Örnek 4

$x = {}^{1}/_{3}\ \ ve\ y = {}^{4}/_{7}$ olduğuna göre $\left({}^{x}/_{y}\right)^2$ işleminin virgülden sonra 3 ondalık duyarlıklı sonucu aşağıdakilerden hangisidir. (Kesme hatası uygulayınız)

✓ Çözüm 4

1. Adım → $x = {}^{1}/_{3} = 0.33333 \cong 0.333,\qquad y = {}^{4}/_{7} = 0.57143 \cong 0.571$
2. Adım → ${}^{x}/_{y} = {}^{0.333}/_{0.571} = 0.58319 \cong 0.583$
3. Adım → $\left({}^{x}/_{y}\right)^2 = 0.583^2 = 0.33989 \cong 0.339$ (Doğru Sonuç)

   Yanlış Sonuç → $\left({}^{x}/_{y}\right)^2 = \left(\frac{{}^{1}/_{3}}{{}^{4}/_{7}}\right)^2 = 0.34028 \cong 0.340$

- **Yuvarlama Hataları :** Bir sayı makinenin hafızasında belirli bir yer kapladığından virgülden sonrası ancak belirli bir basamak sayısına kadardır. Dolayısıyla belirli bir basamaktan sonraki bazı rakamlar yuvarlama yapılır. Böylece yuvarlama hatası oluşmuş olur.

❖ Örnek 5

1.492 ve 1.066 sayıları çarpılırsa 1.590472 elde edilir. Bu işlemi 4 basamaklı bir makinada yaparsak, 1.590472 yerine 1.590 alınır. Burada oluşan yuvarlama hatasıdır.

(Yuvarlanacak basamaktan; < 5 ise değiştirme, ≥ 5 ise 1 artırır.)

✓ Çözüm 5

Buradaki yuvarlama hatası; $|1.590472 - 1.590| = |0.000472| = 0.472 * 10^{-3} < {}^{1}/_{2} * 10^{-3}$

Not : b sayı tabanı ve n virgülden sonraki basamak olmak üzere, yuvarlama hatasının üst sınırı; ${}^{1}/_{2} * b^{-n}$ dir.

Yuvarlama için MATLAB Fonksiyonu

```
function [M] = yuvarlama(x,k)
        x = x*10^(k+1);
        kalan = mod(x,10);
        x = (x-kalan)/10;
        if kalan > 4
                x = x+1;
        end
        M = x/(10^(k));
end
```

BİLGİSAYAR ARİTMETİĞİ

IEEE 754-2008 standardına göre 64 bit bir bilgisayar sisteminde reel sayıların ikili gösterimi şu şekildedir.

s (İşaret Biti) : 1 bit	c (Üstel Kısım) : 11 bit	f (Kesir kısmı) : 52 bit

Bu sayının genel ifadesi $(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{s}} * \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{c-1023}} * (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{f})$ şeklindedir. Üstel kısım c'nin alabileceği en büyük değer 2047'dir. Sıfıra yakın sayılarda adil gösterim için üstem kısım c-1023 olarak alınır. 52 bit kesir (fraction) kısım en az 16-17 ondalık basamağa denk gelmektedir.

❖ Örnek 6

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000

✓ Çözüm 6

$\ddot{U}stel\ Kısım\ (c) = 1 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^{10} = 1027$
$Kesir\ Kısım\ (f) = 1 * 2^{-1} + 1 * 2^{-3} + 1 * 2^{-4} + 1 * 2^{-5} + 1 * 2^{-8} + 1 * 2^{-12} = 0.722900390625$
$Ondalık\ Sayı = (-1)^0 * 2^{1027-1023} * (1 + 0.722900390625) = 27.56640625$

En büyük pozitif sayı için ilk bit 0, geri kalan bitlerin hepsi 1 olur.

Ek olarak 32 bit bir bilgisayar sistemi içinde benzer bir gösterim bulunmaktadır.

s (İşaret Biti) : 1 bit	c (Üstel Kısım) : 8 bit	f (Kesir kısmı) : 23 bit

Bu sayının genel ifadesi $(\boldsymbol{-1})^{\boldsymbol{s}} * \boldsymbol{2}^{\boldsymbol{c-127}} * (\boldsymbol{1}+\boldsymbol{f})$ şeklindedir.

❖ Örnek 7

0 10000101 01000000000000000000000

✓ Çözüm 7

$\ddot{U}stel\ Kısım\ (c) = 1 * 2^0 + 1 * 2^2 + 1 * 2^7 = 133$
$Kesir\ Kısım\ (f) = 1 * 2^{-2} = 0.25$
$Ondalık\ Sayı = (-1)^0 * 2^{133-127} * (1 + 0.25) = 80$

➢ ONDALIK MAKİNE SAYILARI

k basamaklı ondalık sayılar normalize edilmiş olarak gösterilir.
Örneğin; $159.789 = 0.159789 * 10^3$
Verilen $\pm 0, d_1 d_1 \ldots d_k d_{k+1} * 10^n$ şeklindeki herhangi bir pozitif reel sayı, iki türlü k-basamaklı bir normalize edilmiş bir onluk sayıya dönüştürülür.

✓ Yuvarlama Yöntemi :
Eğer $d_{k+1} \geq 5$ ise d_k'ya 1 eklenir ve sayı $\pm 0, d_1 d_1 \ldots d'_k * 10^n$ biçimine indirgenir. $(d'_k = d_k + 1)$

✓ Kesme Yöntemi :
k. basamaktan sonrası direk atılır. Yani sayı $\pm 0, d_1 d_1 \ldots d_k * 10^n$ şeklini alır.

❖ Örnek 8

π sayısını 5 basamaklı bir sistemde kesme ve yuvarlama ile ifade ediniz.

✓ Çözüm 8

$\pi = 3.14159265$
$\pi' nin\ normalize\ edilmiş\ hali : \pi = 0.314159265 * 10^1$
$Kesme\ ile = 0.31415 * 10^1\ (5\ Ondalık\ Basamak\ için)$
$Yuvarlama\ ile = 0.31416 * 10^1\ (5\ Ondalık\ Basamak\ için)$

➢ KARARLI VE KARARSIZ HESAPLAMALAR

Eğer bir sayısal sürecin bir adımında yapılan küçük hatalar ardışık adımlarda büyüyorsa ve hesaplamanın tamamındaki duyarlılığı ciddi olarak azaltıyorsa, bu sayısal süreç **kararsızdır** denir.

❖ Örnek 9

Reel sayıların ardışık olarak

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_{n+1} = \dfrac{13}{3} x_n - \dfrac{4}{3} x_{n-1}\ (n \geq 1) \end{cases}$$

ile tanımlı dizisini gözönüne alalım. Bu indirgeme bağıntısının $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ dizisinin oluşturduğu Tümevarım ile kolayca görülebilir.

Bu örneğin MATLAB çözümü ise aşağıdaki gibidir. **Not: MATLAB'a diziler 1. İndisten başlar.**

```
X=[];
Y=[];
X(1) = 1.0;
X(2) = 0.3333;
for n=2:30                    %dizi indisleri 1'den başlaması dolayısı ile döngü 2'den başlatılır.
        X(n+1) = (13*X(n) – 4*X(n-1))/3;
end

for n=0:28
        Y(n+1) = (0.3333)^n
end
```

HAFTA 4

➢ LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

✓ Bisection (Yarılama Yöntemi)

f, bir aralığın uç noktasında zıt işaretlere sahip sürekli bir fonksiyon olsun. Yani [a,b] de f sürekli ve $f(a)xf(b) < 0$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu [a,b] de bir sıfıra sahiptir. Yani $\exists r \in (a,b)$ vardır öyle ki $f(r) = 0$ dır.

Önce $u = f(a),\ v = f(b)$ alınır. $u\ ve\ v$ için $u.v < 0$ olmalıdır. $\frac{a+b}{2} = c$ bulunur. $w = f(c)$ hesaplanır.

i) Eğer $f(c) = 0$ ise kök bulunmuş olur.
ii) Eğer $u.w < 0$ ise f nin sınırı (a,c) dir.
iii) Eğer $w.v < 0$ ise f nin sınırı (c,b) dir.

Hata en fazla $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \ \varepsilon$ olur. Burada n: adım sayısı olmak üzere $\frac{\log(b-a)-log2\varepsilon}{log2} < n$ gerçekleşir.

NOT : İterasyonun sonlandırılması, ya x ler arasındaki farkın istenen hata toleransından küçük kalması ile belirlenir ya da f fonksiyonunun değerlerinin 0 a farkları yani f nin hata toleransından küçük kalması ile belirlenir.

❖ Örnek 1

$f(x) = 2^x - 5x + 2 = 0$ fonksiyonunun $[0,1]$ de bir kökü olduğunu gösteriniz. Bu köke $\varepsilon = 10^{-1}$ hata toleransı için Bisection metoduyla yaklaşınız.

✓ Çözüm 1

☆ $f(0) = 3, f(1) = \ -1$ zıt işaretli olduklarından ($yani\ f(0) * f(1) < 0$), bu aralıkta f nin en az bir sıfırı vardır. $x_0 = 0, x_1 = 1$ alalım. Bisection yöntemini uygulayalım.

$x_2 = \frac{x_0+x_1}{2} = 0.5$ bulunur.

$Hata = \ |x_2 - \ x_0| = \ |x_2 - \ x_1| = 0.5 > \ \varepsilon = 10^{-1}$ olduğundan iterasyona devam edilir.

☆ $f(x_2) = f(0.5) = 0.91421$ dir. $f(x_1) = f(1) = \ -1$ idi. O halde $f(x_2) * f(x_1) < 0$ olduğundan f fonksiyonunun x_1 ve x_2 arasında bir kökü vardır.

$x_3 = \frac{x_2+x_1}{2} = 0.75$ bulunur.

$Hata = \ |x_3 - \ x_2| = \ |x_3 - \ x_1| = 0.25 > \ \varepsilon = 10^{-1}$ olduğundan iterasyona devam edilir.

☆ $f(x_3) = f(0.75) = -0.06821$ dir. $f(x_2) = f(0.5) = \ 0.91421$ idi. O halde $f(x_3) * f(x_2) < 0$ olduğundan f fonksiyonunun x_2 ve x_3 arasında bir kökü vardır.

$x_4 = \frac{x_3+x_2}{2} = 0.625$ bulunur.

$Hata = \ |x_4 - \ x_3| = \ |x_4 - \ x_2| = 0.125 > \ \varepsilon = 10^{-1}$ olduğundan iterasyona devam edilir.

☆ $f(x_4) = f(0.625) = 0.41721$ dir. $f(x_3) = f(0.75) = \ -0.06821$ idi. O halde $f(x_4) * f(x_3) < 0$ olduğundan f fonksiyonunun x_3 ve x_4 arasında bir kökü vardır.

$x_5 = \frac{x_4+x_3}{2} = 0.6875$ bulunur.

$Hata = \ |x_5 - \ x_4| = \ |x_5 - \ x_3| = \mathbf{0.0625 < \ \varepsilon = 10^{-1}}$ olduğundan iterasyon sonlandırılır.

☆ Bisection metoduyla, $\varepsilon = 10^{-1}$ hata toleransı için $f(x) = 2^x - 5x + 2 = 0$ fonksiyonunun [0,1] deki yaklaşık kökü $\mathbf{x_5 = 0.6875}$ dir.

☆ Bisection'da önemli nokta bir sonraki iterasyona geçildiğinde yeni kökün değerine zıt olan değer alınır.

✓ Bisection Metodunda İterasyon Sayısı Bulma

Bunu bir örnekle açıklamak gerekirse eğer;

$[0,1]$ aralığında $f(x)$ işaret değiştirdiği bilindiğine göre $\varepsilon = 10^{-3}$ hata toleransı ile Bisection metoduyla köke yaklaşım için n ne olmalıdır?

✓ Çözüm

$$n > \frac{\log(b-a)-log2\varepsilon}{log2} \rightarrow \quad n > \frac{\log(1)-\log\ 2(10^{-3})}{\log\ (2)} \rightarrow \quad n > -1+3\frac{\log10}{\log2} \rightarrow n > 8{,}965874$$

olduğundan $n \geq 9$ olmalıdır.

Bisection için Fonksiyon hesaplayan örnek MATLAB Fonksiyonu

```
function [m] = f(x)
        m = 2^x – 5*x + 2;
end
```

İterasyon sayısına göre Bisection Methodu MATLAB Fonksiyonu

```
function [r] = bisection1(x0,x1,k)
        if f(x0)*f(x1) < 0
                for i=1:k
                        x2 = (x0+x1)/2;
                        if f(x0) * f(x2) < 0
                                x1 = x2;
                        elseif f(x1)*f(x2) < 0
                                x0 = x2;
                        end
                end
        end
        r = x2;
end
```

Hata Toleransına göre Bisection Methodu MATLAB Fonksiyonu (İteratif)

```
function [r] = bisection2(x0,x1,tol)
        hata = tol + 1;
        while hata > tol
                x2 = (x0+x1)/2;
                hata = abs(x2-x0);
                if f(x0) * f(x2) < 0
                        x1 = x2;
                elseif f(x1)*f(x2) < 0
                        x0 = x2;
                end
        end
        r = x2;
end
```

Hata Toleransına göre Bisection Methodu MATLAB Fonksiyonu (Rekürsif)

```
function [F] = bisectionRecursive(x0,x1,tolerans)
        x2 = (x0+x1)/2;
        hata = abs(x2-x0);
        if hata <= tolerans
                F = x2;
        elseif f(x0) * f(x2) < 0
                F = bisectionRecursive(x0,x2,tolerans);
        elseif f(x1)*f(x2) < 0
                F = bisectionRecursive(x1,x2,tolerans);
        end
end
```

✓ Newton-Raphson Yöntemi

Bu yöntemde kullanılacak olan formül;

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad (n \geq 0)$$

Bu yöntemin kullanılabilmesi için bir x_0 başlangıç değeri verilmesi gerekmektedir.

❖ Örnek 2

$a \in R^+$ olmak üzere $\sqrt[5]{a}$ değerini hesaplayan

$$x_{n+1} = 0.2\left(4x_n + \frac{a}{x_n^4}\right)$$

İterasyon formülünü bulunuz. Daha sonra $x_0 = 1.8$ alarak $\sqrt[5]{32}$ değerini hesaplayınız. ($\varepsilon = 10^{-2}$)

✓ Çözüm 2

$\sqrt[5]{a} = x \rightarrow x^5 = a \rightarrow f(x) = x^5 - a \quad , \quad f'(x) = 5x^4$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 - a}{5x_n^4} = 0.2\left(4x_n + \frac{a}{x_n^4}\right)$ buluruz.

$a = 32\ ve\ x_0 = 1.8$ alalım.

$$x_1 = 0.2\left(4x_0 + \frac{32}{x_0^4}\right) = 0.2\left(4 * 1.8 + \frac{32}{(1.8)^4}\right) = 2.0497$$

$Hata = |x_1 - x_0| = \mathbf{0.2497} > \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-2}}$ olduğundan devam edilir.

$$x_2 = 0.2\left(4x_1 + \frac{32}{x_1^4}\right) = 2.0024$$

$Hata = |x_2 - x_1| = \mathbf{0.0473} > \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-2}}$ olduğundan devam edilir.

$$x_3 = 0.2\left(4x_2 + \frac{32}{x_2^4}\right) = 2.0000$$

$Hata = |x_2 - x_1| = \mathbf{0.0024} < \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-2}}$ olduğundan iterasyon sonlandırılır.

$$\boldsymbol{Aranan\ k\ddot{o}k; r = x_3 = 2}$$

Yukarıdaki soru için Newton-Raphson Formülünü hesaplayan MATLAB Fonksiyonu

```
function [m] = F(x)
    m = (4*x + (32/(x^4)))/5;
end
```

İterasyon sayısına göre Newton-Raphson Methodu MATLAB Fonksiyonu

```
function [r] = newton1(x0,k)
    for i=1:k
        x1 = F(x0);
        x0 = x1;
    end
    r = x1;
end
```

Hata Toleransına göre Newton-Raphson Methodu MATLAB Fonksiyonu (İteratif)

```
function [r] = newton2(x0,tol)
    hata = tol + 1;
    while hata > tol
        x1 = F(x0);
        hata = abs(x1-x0);
        x0 = x1;
    end
    r = x1;
end
```

Hata Toleransına göre Newton-Raphson MATLAB Fonksiyonu (Rekürsif)

```
function [F] = newtonRecursive(x0,tolerans)
    x1 = F(x0);
    hata = abs(x1-x0);
    if hata <= tolerans
        F = newtonRecursive(x1,tolerans);
    else
        F = x1;
    end
end
```

NOT : TEST ETMEDİM AMA BU ŞEKİLDE ÇALIŞMASI GEREKİR DİYE DÜŞÜNÜYORUM.

HAFTA 5

❖ Örnek

$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 18}$ denkleminin

a) [4,5] daki çözümünü Bisection (Yarılama) yöntemi ile $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-1}}$ hata toleransı için yaklaşık olarak bulunuz.

b) $\boldsymbol{x_0 = 4}$ deki çözümünü Newton-Raphson yöntemi ile $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-2}}$ hata toleransı için yaklaşık olarak bulunuz.

✓ Çözüm

a) $\boldsymbol{x_0 = 4, x_1 = 5}$

1. İterasyon;

$f(x_0) = 4^2 - 18 = -2 < 0 \quad , f(x_1) = 5^2 - 18 = 2 > 0$ ve $f(x_0) * f(x_1) < 0$ olduğundan çözüm vardır.

$$x_2 = \frac{x_0 + x_1}{2} = 4.5$$

$\text{Hata} = |x_2 - x_0| = |x_2 - x_1| = 0.5 > \varepsilon = 10^{-1}$ iterasyona devam edilir.

2. İterasyon;

$f(x_2) = (4.5)^2 - 18 = 2.25 > 0 \quad , f(x_0) = -2 < 0$ ve $f(x_0) * f(x_2) < 0$

$$x_3 = \frac{x_0 + x_2}{2} = 4.25$$

$\text{Hata} = |x_3 - x_0| = |x_3 - x_2| = 0.25 > \varepsilon = 10^{-1}$ iterasyona devam edilir.

3. İterasyon;

$f(x_3) = (4.25)^2 - 18 = 0.0625 > 0 \quad , f(x_0) = -2 < 0$ ve $f(x_0) * f(x_3) < 0$

$$x_4 = \frac{x_0 + x_3}{2} = 4.125$$

$\text{Hata} = |x_4 - x_0| = |x_4 - x_3| = 0.125 > \varepsilon = 10^{-1}$
iterasyona devam edilir.

4. İterasyon;

$f(x_4) = (4.125)^2 - 18 = -0.984375 < 0 \quad , \qquad f(x_3) = 0.0625 > 0$ ve $f(x_3) * f(x_4) < 0$

$$x_5 = \frac{x_3 + x_4}{2} = 4.1875$$

$\text{Hata} = |x_5 - x_4| = |x_5 - x_3| = 0.0625 < \varepsilon = 10^{-1}$
İterasyon sonlandırılır.

$$\boldsymbol{Aranan\ kök; r = x_5 = 0.0625}$$

b) $x_0 = 4$, $f(x_n) = x_n^2 - 18$, $f'(x_n) = 2x_n$

$$x_{n+1} = X_n - {f(x_n)}/{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 18}{2Xn} = \frac{x_n^2 + 18}{2x_n}$$

1. **İterasyon;**

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 18}{2x_0} = \frac{34}{8} = 4.25$$

Hata $= |x_1 - x_0| = 0.25 > \varepsilon = 10^{-2}$ iterasyona devam edilir.

2. **İterasyon;**

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 18}{2x_1} = \frac{(4.25)^2 + 18}{2 * (4.25)} = 4.2426$$

Hata $= |x_2 - x_1| = 0.0074 < \varepsilon = 10^{-2}$ iterasyon sonlandırılır.

$$\boldsymbol{Aranan\ k\ddot{o}k; r = x_2 = 4.2426}$$

✓ Sabit Nokta (Basit) İterasyon Metodu

$F(x) = x - {f(x)}/{f'(x)}$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = s$ ise $F(s) = s$ olan noktaya **sabit nokta** denir.

Eğer *F* nin tanım bölgesindeki her *x* ve *y* noktası için

$|F(x) - F(y)| \leq \lambda\, |x - y|$ olacak şekilde 1'den küçük bir λ sayısı var ise *F* fonksiyonuna **büzülme** denir.

➢ **Teorem 1 ► Büzülme Dönüşümü**

❖ **Örnek**

Aşağıdaki şekilde ardışık olarak tanımlanan (x_n) dizisnin yakınsak olduğunu ispatlayınız.

$$\begin{cases} x_0 = 15 \\ x_{n+1} = 3 - \frac{1}{2}|x_n|,\ (n \geq 0) \end{cases}$$

✓ **Çözüm**

$$F(x) = 3 - \frac{1}{2}|x|$$

fonksiyonu bir büzülmedir, çünkü

$$|F(x) - F(y)| = \left|3 - \frac{1}{2}|x| - \left(3 - \frac{1}{2}|y|\right)\right| = \frac{1}{2}\big||y| - |x|\big| \leq \frac{1}{2}\ |y - x| = \frac{1}{2}|x - y|$$

Formülü ile sabit noktanın 2 olduğu görülebilir.

Sabit Nokta Büzülme Teoremi Örneği MATLAB Kodu

```
x=[];
x(1) = 15;
for n=1:20
        x(n+1) = 3-abs(x(n))/2;
end
```

► **Not :** Verilen bir $f(x) = 0$ denklemini $x = F(x)$ formunda yazalım.
$x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0,1,2,3,\ldots$ ardışık yaklaşımlarını oluşturalım.
Eğer oluşturulan dizi $x = F(x)$ denklemini sağlıyorsa bize x gerçek köküne yaklaşık değer verir.

- **Teorem 2 ► Sabit Nokta**

Örnek

$\boldsymbol{F(x) = x^2 - 2}$ fonksiyonunun sabit noktalarını bulunuz.

✓ **Çözüm**

$x = F(x) \to x = x^2 - 2 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1$ ve $x_2 = 2$ bulunur.

Örnek

$x = \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots}}}$ sayısının toplamını $x_0 = 0$ alarak ve $F(x) = \sqrt[3]{6 + x}$ alarak lineer iterasyon (Basit ya da Sabit nokta iterasyon) metodu ile bulunuz. (Virgülden sonra 5 ondalık duyarlılık ile işlem yapınız ve $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-3}}$ olsun.

✓ **Çözüm**

$x_{n+1} = F(x) \to x_{n+1} = \sqrt[3]{6 + x_n}$ olur. $x_0 = 0$ olduğundan $|F'(x_0)| = 0.101 < 1$ sağladığından bu iterasyon formülü ile $n = 0,1,2,\ldots$ için toplama yakınsanabilir. Buna göre;

$$F(x_0) = (6 + x)^{1/3} \quad \to \quad |F'(x_0)| = \left|\frac{1}{3}(6)^{-\frac{2}{3}}\right| = 0.101 < 1$$

$$x_1 = F(x_0) = 1.81712 \quad \to \quad Hata = |x_1 - x_0| = 1.81712 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$x_2 = F(x_1) = 1.98464 \quad \to \quad Hata = |x_2 - x_1| = 0.16752 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$x_3 = F(x_2) = 1.99872 \quad \to \quad Hata = |x_3 - x_2| = 0.01408 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$x_4 = F(x_3) = 1.99989 \quad \to \quad Hata = |x_4 - x_3| = 0.00117 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$x_5 = F(x_4) = 2.00000 \quad \to \quad Hata = |x_5 - x_4| = 0.00011 < \varepsilon = 10^{-3}$$

❖ **Örnek**

$f(x) = \cos(x) - x$ deki çözümünü $x_0 = {}^{\pi}/_{4}$ alarak sabit nokta iterasyon yöntemi ile $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-3}}$ için bulunuz.

✓ **Çözüm**

► $f(x) = \cos(x) - x = 0 \quad \rightarrow x = \cos(x) = F(x)$

► $|F'(x_0)| = \left|-\sin\left({}^{\pi}/_{4}\right)\right| = \sin\left({}^{\pi}/_{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0.70711 < 1$

$x_{n+1} = \cos(x_n)$

$$x_1 = cos(x_0) = \cos({}^{\pi}/_{4}) = 0.70711 \quad \rightarrow \quad Hata = |x_1 - x_0| = 0.07829 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$x_2 = cos(x_1) = 0.76024 \quad \rightarrow \quad Hata = |x_2 - x_1| = 0.05313 > \varepsilon = 10^{-3}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \rightarrow \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Sabit Nokta = 0.73880

Sabit Nokta Teoremi Örneği MATLAB Kodu

```
x=[];
tol = 10^(-3)
x(1) = pi/4;
for n=1:20
        x(n+1) = cos(x(n));
        hata = abs(x(n+1) – x(n));
        if hata < tol
                break;
        end
end
```

HAFTA 6

LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Direkt Methodlar

Cramer Yöntemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

şeklindeki n bilinmeyeni n denklemli bir sistem ve $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi olsun. Böylece verilen sistemi $AX = B$ biçiminde yazabiliriz. Burada

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ dir. Eğer $|A| \neq 0$ ise, yukarıdaki sistemin $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$ şeklinde bir tek çözümü vardır. Burada A_i , A nın i –inci sütununun B ile yer değiştirmesiyle elde edilen matristir. Çözümleme yapmak için aşağıdaki yöntem kullanılır.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Örnek

$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$ sistemin çözümünü Cramer metodu ile bulalım.

Çözüm

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$, $|A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$ olarak alalım. O halde

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{10} = 2 , y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

❖ **Örnek**

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 2 \\ 4x + y - z &= -5 \\ 6x - 2y + 2z &= 17 \end{aligned}$$ sistemin çözümünü Cramer metodu ile bulalım.

✓ **Çözüm**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 28 \qquad |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 17 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 14$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 6 & 17 & 2 \end{vmatrix} = -112 \qquad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 84$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}\,, y = \frac{|A_2|}{|A|} = -\frac{112}{28} = -4\,, z = \frac{84}{28} = 3$$

► Gauss Yok Etme ve Gauss Jordan Metodu

Verilen matris ya da denklem sisteminin matrise çevrilmiş hali üzerinde yer değiştirme, satır ekleme, satır çıkarma işlemleri yapılarak üst üçgensel forma çevrilir ardından değerler bulunur.

❖ **Örnek**

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. Bu matrisi Gauss Metoduna göre çözümlemek için gereken forma çeviriniz.

✓ **Çözüm**

Öncelikle işlem kolaylığı olması için matrisin 1. Satırı ile 3. Satırı yer değiştirilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Elde edilen matriste 1. Satır 1/3 ile çarpılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Satırın da forma uygun olması için 1. Satırın -2 katı 2. Satıra eklenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soruda verilen matris bu işlemlerle Gauss Metodlarına uygun hale gelmiştir.

❖ **Örnek**

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 - x_3 = 3$$

Yukarıda 3 bilinmeyenli olarak verilen denklem sistemini Gauss Yok Etme ve Gauss Jordan metoduna göre çözümleyelim.

✓ **Çözüm**

► **Gauss Yok Etme metodunda** Üst üçgensel matris bulunup lineer denklem sistemi ile bilinmeyenler bulunur.

► **Gauss Jordan metodunda ise** Üst üçgensel matris indirgenerek lineer denklem sistemi ile bilinmeyenler bulunur.

Öncelikle denklem sistemimizi ilaveli matrise çevirelim. $(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$

1.satırın (-2) katını 2. Satıra ve (-3) katını 3. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$

2.satırın (-1/5) katını alırsak eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$

2.satırın 6 katını 3. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$

3.satırın (-1/4) katını alırsak eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Matrisi tekrar lineer denklem sistemine çevirirsek eğer;
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_2 + x_3 = 2$$
$$x_3 = 3$$

Elde edilir. Bu durumda;
$$x_3 = 3$$
$$x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \rightarrow x_1 = 2$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ Üçgensel matrisimizi bu şekilde bulmuştuk. Şimdi Gauss Jordan işlemi yapacağız.

Bu matrisin 3. Satırının (-1) katını 2. Satıra ve (-3) katını 1. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

2.satırın (-2) katını 1. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$

Bu durumda $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ olarak bulunur.

❖ **Örnek**

$$x_1+2x_2+3x_3=6$$
$$2x_1-3x_2+2x_3=14$$
$$3x_1+x_2-x_3=-2$$

Yukarıda 3 bilinmeyenli olarak verilen denklem sistemini Gauss Yok Etme ve Gauss Jordan metoduna göre çözümleyelim.

✓ **Çözüm**

Öncelikle denklem sistemimizi ilaveli matrise çevirelim. $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\2&-3&2&14\\3&1&-1&-2\end{array}\right)$

1.Satırın (-2) katını 2. Satıra, (-3) katını 3. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&-7&-4&2\\0&-5&-10&-20\end{array}\right)$

2.satır ile 3. Satır yer değiştirir ve değişiklikten sonra 2.satır (-1/5) katı ile çarpılırsa eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&4\\0&-7&-4&2\end{array}\right)$

2.satırın 7 katı 3. Satıra eklenirse eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&4\\0&0&10&30\end{array}\right)$

3.satır 1/10 katı ile çarpılırsa eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&4\\0&0&1&3\end{array}\right)$

Matrisi tekrar lineer denklem sistemine çevirirsek eğer; $\begin{array}{r}x_1+2x_2+3x_3=6\\x_2+2x_3=4\\x_3=3\end{array}$

Elde edilir. Bu durumda; $\begin{array}{r}x_3=3\\x_2+2x_3=4\rightarrow x_2=-2\\x_1+2x_2+3x_3=6\rightarrow x_1=1\end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&6\\0&1&2&4\\0&0&1&3\end{array}\right)$ Üçgensel matrisimizi bu şekilde bulmuştuk. Şimdi Gauss Jordan işlemi yapacağız.

Bu matrisin 3. Satırının (-1) katını 2. Satıra ve (-3) katını 1. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&-3\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)$

2.satırın (-2) katını 1. Satıra eklersek eğer; $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&3\end{array}\right)$

Bu durumda $\begin{array}{l}x_1=1\\x_2=-2\\x_3=3\end{array}$ olarak bulunur.

❖ **Örnek**

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 2 \\ 4x + y - z &= -5 \\ 6x - 2y + 2z &= 17 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümünü Gauss metodları ile bulalım.

✓ **Çözüm**

Öncelikle denklem sistemimizi ilaveli matrise çevirelim.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -5 \\ 6 & -2 & 2 & 17 \end{array}\right)$$

1.satırın (-2) katını 2. Satıra ve (-3) katını 3. Satıra eklersek eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

2.satır ile 3. Satır yer değiştirilir ise eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & -9 \end{array}\right)$$

2.satırın (-3) katı 3. Satıra eklenirse eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \end{array}\right)$$

3.satır (-1/14) katı ile çarpılırsa eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Bu durumda; $\begin{aligned} z &= 3 \\ y + 5z = 11 &\rightarrow y = -4 \\ 2x - y - z = 2 &\rightarrow x = 1/2 \end{aligned}$ (Gauss Yok Etme Metodu)

Gauss Jordan için Üçgensel matriste 3. Satırın -5 katını 2. Satıra ve 1 katını 1. Satıra eklersek eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

2.satırın 1 katını 1. Satıra eklersek eğer;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Bu durumda; $x = 1/2$, $y = -4$, $z = 3$ olur.

Gauss Metodu Son Örnek MATLAB Kodu

```
A = [2 -1 -1; 4 1 -1; 6 -2 2];
B = [2 -5 17];
X = [];
n = 3;
for k=1:n-1                                  % Üçgensel forma çevirme
        for i=k:n-1
                carpim = A(i+1,k)/A(k,k)
                for j=1:n
                        A(i+1,j) = A(i+1,j)+A(k,j)*carpim;
                end
                B(i+1) = B(i+1)+B(k)*carpim;
        end
end
A       % üçgensel formun A matrisinin karşılığını yazdırma
B       % üçgensel formun B matrisinin karşılığını yazdırma
for j=n:(-1):1                               % x değerlerini bulma.
        toplam = 0;
        for i=j+1:n
                toplam = toplam + A(j,i)*X(i);
        end
        x(j) = (B(j)-toplam)/A(j,j);
end
X       % x değerlerini yazdırma.
```

HAFTA 7

➢ VİZE ÖNCESİ ÖZET VE SORU ÇÖZÜMÜ

$f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası civarındaki Maclaurin seri açılımı

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!} + HataTerimi$$

Maclaurin seri açılımında $x_0 = 0$ alırsak Taylor seri açılımı elde edilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)(x)^k}{k!} + HataTerimi$$

❖ Örnek 1 >> Maclaurin Serisi

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun $x_0 = 0.9$ noktası civarındaki Maclaurin seri açılımını bulunuz. (İlk 4 terim alınız, virgülden 4 ondalık duyarlılık ile işlem yapıp, yuvarlama yapınız)

b) (a) şıkkındaki hesaplamaları kullanarak $f(0.95)$ değerini hesaplayarak mutlak hatayı bulunuz.

✓ Çözüm 1

a)

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0.0001$$
$$f^{(1)}(x_0) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 = -0.004$$
$$f^{(2)}(x_0) = 12x^2 - 24x + 12 = 0.12$$
$$f^{(3)}(x_0) = 24x - 24 = -2.4$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}$$
$$= \frac{f^{(0)}(0.9)(x-0.9)^0}{0!} + \frac{f^{(1)}(0.9)(x-0.9)^1}{1!} + \frac{f^{(2)}(0.9)(x-0.9)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0.9)(x-0.9)^3}{3!}$$
$$= 0.0001 + (-0.004)(x-0.9)^1 + \frac{(0.12)(x-0.9)^2}{2} + \frac{(-2.4)(x-0.9)^3}{6}$$

b)

Yaklaşık Değer

$$f(0.95) \cong 0.0001 - (0.004)(0.05) + (0.06)(0.05)^2 - (0.4)(0.05)^3 \cong -5.3926 * 10^{-3}$$

Gerçek Değer → $f(0.95) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 6.25x10^{-6}$

Mutlak Hata→ $|GerçekDeğer - YaklaşıkDeğer| \cong 0{,}00000625 = 6.25 * 10^6$

❖ Örnek 2 >> Newton-Raphson

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$ fonksiyonunun yaklaşık kökünü Newton-Raphson yöntemini kullanarak $x_0 = 0.9$ başlangıç noktası için hesap ediniz.

✓ Çözüm 2

Newton-Raphson Iterasyon Formülü $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \qquad \text{ve} \qquad f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \rightarrow x_n - \frac{x_n^4 - 4x_n^3 + 6x_n^2 - 4x_n + 1}{4x_n^3 - 12x_n^2 + 12x_n - 4} = \frac{3x_n^4 - 8x_n^3 + 6x_n^2 - 1}{4x_n^3 - 12x_n^2 + 12x_n - 4}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{3x_0^4 - 8x_0^3 + 6x_0^2 - 1}{4x_0^3 - 12x_0^2 + 12x_0 - 4} \rightarrow x_0 = 0.9 \; için \; x_1 = 0.925$$

Hata $= |x_1 - x_0| = |0.925 - 0.9| = 0.025$

$\rightarrow x_2 = 0.94375$

Hata $= |x_2 - x_1| = |0.94375 - 0.925| = 0.01875$

❖ Örnek 3 >> Sabit Nokta

$f(x) = 2x^2 + 6e^{-x} - 4$ ün bir sıfırını bulmak için iki farklı sabit-nokta yordamı yazınız.

$x_0 = 0.5$

✓ Çözüm 2

$$f(x) = 0 \rightarrow F(x) = x$$

$f(x) = 2x^2 + 6e^{-x} - 4 = 0 \quad \rightarrow \mathbf{2x^2 + 6e^{-x} - 4 + x = x}$

$\rightarrow \; F(x) = \; 2x^2 + 6e^{-x} - 4 + x$

$|F'(x_0)| = |\mathbf{4x_0 + 6e^{-x_0} + 1}| = \mathbf{0.63918 < 1}$ olduğundan F fonksiyonunun sabit noktası vardır.

$x_{n+1} = F(x_n), Hata = |x_{n+1} - x_n|$

$x_{n+1} = 2x_n^2 + 6e^{-x_n} + x_n \quad \rightarrow iterasyon\ formülü$

$x_1 = 2x_0^2 + 6e^{-x_0} + x_0 = 0.63918 \quad \rightarrow Hata = |x_1 - x_0| = 0.13918$

$x_2 = 2x_1^2 + 6e^{-x_1} + x_1 = 0.62263 \quad \rightarrow Hata = |x_2 - x_1| = 0.01655$

$x_3 = 2x_2^2 + 6e^{-x_2} + x_2 = 0.61716 \quad \rightarrow Hata = |x_3 - x_2| = 0.00547$

Örnek 3 (Sabit Nokta) için MATLAB Kodu

```
X=[];
tol = 10^(-5);
B = [2 -5 17];
for k=1:30
        x(n+1) = 2*x(n)^2+6*exp(-x(n))-4+x(n);
        hata = abs(x(n+1) – x(n));
        if hata<tol
                break;
        end
end
```

FİNAL İÇİNDEKİLER

HAFTA 9

➢ LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

✓ İteratif Methodlar

► Jacobi İterasyon Yöntemi

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

şeklindeki n bilinmeyenli n denklemli bir sistem verilsin. Bu sistemde $x_1, x_2, \dots, x_n$ i yalnız bırakırsak;

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_1 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n)}{a_{11}}$$
$$x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n)}{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n(n-1)}x_{n-1}\right)}{a_{nn}}$$

Eşitlikleri elde edilir. Jacobi iterasyon yönteminde bilinmeyenlere tahmini bir başlangıç değeri verilir. Örneğin bu başlangıç değerleri sıfır olsun. $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, \dots, x_n^0 = 0$

Yeni $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ değerleri bu başlangıç değerlerine göre hesaplanır.

$$x_1^{k+1} = \frac{b_1 - \left(a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \cdots + a_{1n}x_n^k\right)}{a_{11}}$$
$$x_2^{k+1} = \frac{b_2 - \left(a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k + \cdots + a_{2n}x_n^k\right)}{a_{22}}$$
$$\vdots$$
$$x_n^{k+1} = \frac{b_n - \left(a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + \cdots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^k\right)}{a_{nn}}$$

Her iterasyon sonunda istenen hata toleransına ulaşıp ulaşılmadığı kontrol edilir. Eğer bütün bilinmeyenler bu hata seviyesinin altına inmişse iterasyon durdurulur.

$$\left|x_i^{k+1} - x_i^k\right| < \varepsilon, i = 1,2, \dots, n$$

❖ Örnek

$$\begin{aligned} 20x + y - 2z &= 17 \\ 3x + 20y - \ z &= -18 \\ 2x - 3y + 20z &= 25 \end{aligned}$$

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin çözümünü Jacobi İterasyon Yöntemini kullanarak $x^0 = 1.1, y^0 = -0.9, z^0 = 1$ başlangıç değerleri için bulunuz. (Hata toleransı $\varepsilon = 0.1$ ve 3 ondalık için işlem yapıp yuvarlayınız)

✓ Çözüm

$$x = \frac{17 - y + 2z}{20} \rightarrow x^{k+1} = \frac{17 - y^k + 2z^k}{20}$$

$$y = \frac{-18 - 3x + z}{20} \rightarrow y^{k+1} = \frac{-18 - 3x^k + z^k}{20}$$

$$z = \frac{25 - 2x + 3y}{20} \rightarrow z^{k+1} = \frac{(25 - 2x^k + 3y^k)}{20}$$

➔ **1. İterasyon** $\boldsymbol{x^0 = 1.1, y^0 = -0.9, z^0 = 1}$

$$x^1 = \frac{17 - y^0 + 2z^0}{20} = \frac{17 - (-0.9) + 2(1)}{20} = \frac{19.9}{20} = 0.995$$

$$y^1 = \frac{-18 - 3x^0 + z^0}{20} = \frac{-18 - 3(1.1) + 1}{20} = -\frac{20.3}{20} = -1.015$$

$$z^1 = \frac{(25 - 2x^0 + 3y^0)}{20} = \frac{25 - 2(1.1) + 3(-0.9)}{20} = \frac{20.1}{20} = 1.005$$

☆ **Hata Hesaplamaları**

- $|x^1 - x^0| = |1.1 - 0.995| = 0.105 > \varepsilon = 0.1$
- $|y^1 - y^0| = |-0.9 - (-1.015)| = 0.115 > \varepsilon = 0.1$
- $|z^1 - z^0| = |1 - 1.005| = 0.005 < \varepsilon = 0.1$

İterasyonun durması için bütün hataların $<$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ olması gerekmektedir.

➔ **2. İterasyon** $\boldsymbol{x^1 = 0.995, y^1 = -1.015, z^1 = 1.005}$

$$x^2 = \frac{17 - y^1 + 2z^1}{20} = \frac{17 - (-1.015) + 2(1.005)}{20} = 1.001$$

$$y^2 = \frac{-18 - 3x^1 + z^1}{20} = \frac{-18 - 3(0.995) + 1.005}{20} = -0.999$$

$$z^2 = \frac{(25 - 2x^1 + 3y^1)}{20} = \frac{25 - 2(0.995) + 3(-1.015)}{20} = 0.998$$

☆ **Hata Hesaplamaları**

- $|x^2 - x^1| = |0.995 - 1.001| = 0.006 < \varepsilon = 0.1$
- $|y^2 - y^1| = |-1.015 - (0.999)| = 0.016 < \varepsilon = 0.1$
- $|z^2 - z^1| = |1.005 - 0.998| = 0.007 < \varepsilon = 0.1$

Bütün hatalar $<$ $\boldsymbol{\varepsilon}$ olduğundan iterasyon sonlandırılır.

➔ **Aradığımız kök :** $\boldsymbol{x = x^2 = 1.001, y = y^2 = -0.999, z = z^2 = 0.998}$

Örnek (Jacobi İterasyon) için İterasyona göre MATLAB Kodu

```
X=[];   X(1) = 1.1;
Y=[];   Y(1) = -0.9;
Z=[];   Z(1) = 1;
for k=1:15
        X(k+1) = ((17-Y(k)+2*Z(k))/20;
        Y(k+1) = ((-18-3*X(k)+Z(k))/20;
        Z(k+1) = ((25-2*X(k) + 3*Y(k))/20;
end
```

Örnek (Jacobi İterasyon) için Hata Toleransına göre MATLAB Kodu

```
X=[];   X(1) = 1.1;
Y=[];   Y(1) = -0.9;
Z=[];   Z(1) = 1;
tol = 10^(-1);
hata_X = tol+1; hata_Y = tol+1; hata_Z = tol+1;
k = 1;
while hata_X > tol || hata_Y > tol || hata_Z > tol
        X(k+1) = ((17-Y(k)+2*Z(k))/20;
        Y(k+1) = ((-18-3*X(k)+Z(k))/20;
        Z(k+1) = ((25-2*X(k) + 3*Y(k))/20;
        hata_X = abs(X(k+1) – X(k));
        hata_Y = abs(Y(k+1) – Y(k));
        hata_Z = abs(Z(k+1) – Z(k));
        k = k + 1;
end
```

► Gauss-Siedel Yöntemi

☆ **Not : Jacobi'den farkı güncel değerler kullanılır.**

❖ **Örnek**

$$20x + y - 2z = 17$$
$$3x + 20y - z = -18$$
$$2x - 3y + 20z = 25$$

Yukarıdaki lineer denklem sisteminin çözümünü Gauss-Siedel Yöntemini kullanarak $x^0 = 1.1, y^0 = -0.9, z^0 = 1$ başlangıç değerleri için 2 iterasyonda bulunuz.

✓ **Çözüm**

$$x = \frac{17 - y + 2z}{20} \rightarrow x^{k+1} = \frac{17 - y^k + 2z^k}{20}$$

$$y = \frac{-18 - 3x + z}{20} \rightarrow y^{k+1} = \frac{-18 - 3x^{k+1} + z^k}{20}$$

$$z = \frac{25 - 2x + 3y}{20} \rightarrow z^{k+1} = \frac{(25 - 2x^{k+1} + 3y^{k+1})}{20}$$

➔ **1. İterasyon $\boldsymbol{x^0 = 1.1, y^0 = -0.9, z^0 = 1}$**

$$x^1 = \frac{17 - y^0 + 2z^0}{20} = \frac{17 - (-0.9) + 2(1)}{20} = 0.995$$
$$y^1 = \frac{-18 - 3x^1 + z^0}{20} = \frac{-18 - 3(0.995) + 1}{20} = -0.999$$
$$z^1 = \frac{(25 - 2x^1 + 3y^1)}{20} = \frac{25 - 2(0.995) + 3(-0.999)}{20} = 1.001$$

➔ **2. İterasyon $\boldsymbol{x^1 = 0.995, y^1 = -0.999, z^1 = 1.001}$**

$$x^2 = \frac{17 - y^1 + 2z^1}{20} = \frac{17 - (-0.999) + 2(1.001)}{20} = 1$$
$$y^2 = \frac{-18 - 3x^2 + z^1}{20} = \frac{-18 - 3(1) + 1.005}{20} = -1$$
$$z^2 = \frac{(25 - 2x^2 + 3y^2)}{20} = \frac{25 - 2(1) + 3(-1)}{20} = 1$$

➔ **Aradığımız kök : $\boldsymbol{x = x^2 = 1, y = y^2 = -1, z = z^2 = 1}$**

Örnek (Gauss-Siedel) için İterasyona göre MATLAB Kodu

```
X=[];   X(1) = 1.1;
Y=[];   Y(1) = -0.9;
Z=[];   Z(1) = 1;
for k=1:15
        X(k+1) = ((17-Y(k)+2*Z(k))/20;
        Y(k+1) = ((-18-3*X(k+1)+Z(k))/20;
        Z(k+1) = ((25-2*X(k+1) + 3*Y(k+1))/20;
end
```

Örnek (Gauss-Siedel) için Hata Toleransına göre MATLAB Kodu

```
X=[];   X(1) = 1.1;
Y=[];   Y(1) = -0.9;
Z=[];   Z(1) = 1;
tol = 10^(-1);
hata_X = tol+1; hata_Y = tol+1; hata_Z = tol+1;
k = 1;
while hata_X > tol || hata_Y > tol || hata_Z > tol
        X(k+1) = ((17-Y(k)+2*Z(k))/20;
        Y(k+1) = ((-18-3*X(k+1)+Z(k))/20;
        Z(k+1) = ((25-2*X(k+1) + 3*Y(k+1))/20;
        hata_X = abs(X(k+1) – X(k));
        hata_Y = abs(Y(k+1) – Y(k));
        hata_Z = abs(Z(k+1) – Z(k));
        k = k + 1;
end
```

HAFTA 10

➢ INTERPOLASYON

✓ Lagrange İnterpolasyon Yöntemi

► Weierstrass Yaklaşım Teoremi

n. dereceden bir polinomu ($a_n \neq 0$)

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Şeklinde gösterelim. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ değerleri polinomun katsayılarıdır. $n \geq 0$ dır. $f(x)$'in $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli bir fonksiyon olduğunu varsayalım. Her $\varepsilon > 0$ için bir $P(x)$ polinomu vardır ki;

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

İfadesi $[a,b]$ aralığındaki her x için geçerlidir.

► Lagrange Polinomu

$ax + b$ gibi birinci dereceden bir polinomu belirlemek için (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarını bildiğimizi kabul edelim. Aslında bu veri $y_0 = f(x_0)$ ve $y_1 = f(x_1)$ şeklinde bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0 ve x_1 noktalarında aldığı değerler olarak düşünülürse;

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \text{ ve } L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Şeklinde tanımlanmak üzere (x_0, y_0) ve (x_1, y_1) noktalarından geçen birinci dereceden (Lineer) Lagrange Interpolasyon Polinomu;

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

şeklinde hesaplanır. Aşağıda hesaplandığı gibi $P(x_0) = f(x_0)$ ve $P(x_1) = f(x_1)$ olur ve

$$L_0(x_0) = 1, L_0(x_1) = 0, L_1(x_0) = 0, L_1(x_1) = 1$$

elde edilir. Buna göre;

$$P(x_0) = 1 * \ f(x_0) + 0 * f(x_0) = f(x_0) = y_0$$

$$ve$$

$$P(x_1) = 0 * \ f(x_1) + 1 * f(x_1) = f(x_1) = y_1$$

Şimdi bunu genelleştirelim.

$$P(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 + \cdots + L_n(x)f_x = \sum_{k=0}^{n} L_k(x)f_k$$

Aradığımız interpolasyon polinomu olup, her bir $L_k(x)$ derecesi n'den büyük olmayan birer polinomdur. Böylece biz istenilen mertebeden interpolasyon polinomu yazabiliriz. Pek çok hal için en yüksek mertebeden bir polinom amacımıza daha uygun olabilir. Bu ifade daha kısa olarak;

$$P(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_k+1)\dots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\right)$$

❖ Örnek 1

$(2, 4)$ ve $(5, 1)$ noktalarından geçen 1. Dereceden Lagrange polinomunu bulunuz.

✓ Çözüm 1

$$\boldsymbol{x_0 = 2, \quad f(x_0) = y_0 = 4, \quad x_1 = 5, \quad f(x_1) = y_1 = 1}$$

$$L_0 = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} = \frac{x-5}{2-5} = \frac{5-x}{3}$$

$$L_1 = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{x-2}{5-2} = \frac{x-2}{3}$$

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{5-x}{3}4 + \frac{x-2}{3}1 = \frac{20-4x+x-2}{3} = \frac{18-3x}{3} = 6-x$$

❖ Örnek 2

$2, 2.75$ ve 4 noktalarından geçen 2. Dereceden Lagrange polinomunu bulunuz. $\boldsymbol{f(x) = {}^{1}/_{x}}$

✓ Çözüm 2

$$\boldsymbol{x_0 = 2, \quad x_1 = 2.75, \quad x_2 = 4}$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2.75)(x-4)}{(2-2.75)(2-4)} = \frac{(x-2.75)(x-4)}{1.5} = 0.66667(x-2.75)(x-4)$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(2.75-2)(2.75-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{-0.9375} = -1.0667(x-2)(x-4)$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-2)(x-2.75)}{(4-2)(4-2.75)} = \frac{(x-2)(x-2.75)}{2.5} = 0.4(x-2.75)(x-4)$$

$$\boldsymbol{P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2f(x_2)}$$

$$\boldsymbol{0.66667(x-2.75)(x-4) * \frac{1}{2} - 1.0667(x-2)(x-4) * \frac{1}{2.75} + 0.4(x-2.75)(x-4) * \frac{1}{4}}$$

❖ Örnek 3

$f(x) = e^{x/2}$ fonksiyonu verilsin.

x	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.3499	1.4918	1.6487

$f(x)$ fonksiyonunu interpole eden 2. Dereceden Lagrange pol. bulunuz. $\boldsymbol{P(0.9)}$ değerini hesaplayınız.

✓ Çözüm 3

$$\boldsymbol{x_0 = 0.6, \quad x_1 = 0.8, \quad x_2 = 1.0}$$
$$\boldsymbol{f(x_0) = y_0 = 1.3499, f(x_1) = y_1 = 1.4918, f(x_2) = y_2 = 1.6487}$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0.8)(x-1)}{(0.6-0.8)(0.6-1)} = 12.5(x-0.8)(x-1)$$
$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.6)(x-1)}{(0.8-0.6)(0.8-1)} = -25(x-0.6)(x-1)$$
$$L_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.6)(x-0.8)}{(1-0.6)(1-0.8)} = 12.5(x-0.6)(x-0.8)$$

$$\boldsymbol{P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2 f(x_2)}$$
$$\boldsymbol{12.5(x-0.8)(x-1) * 1.3499 - 25(x-0.6)(x-1) * 1.4918 + 12.5(x-0.6)(x-0.8) * 1.6487}$$

$\boldsymbol{P(0.9) = 12.5(0.1)(-0.1) * 1.3499 - 25(0.3)(-0.1) * 1.4918 + 12.5(0.3)(0.1) * 1.6487 = 1.5684}$
(yaklaşık değer)

$\boldsymbol{f(0.9) = e^{\left(\frac{0.9}{2}\right)} = e^{4.5} = 1.5683}$ ***(gerçek değer)***

Mutlak Hata = |gerçek değer – yaklaşık değer | = $\boldsymbol{|1.5684 - 1.5683| = 0.0001}$

Örnek 3 (Lagrange Polinomu) için MATLAB Kodu

```
X=[0.6   0.8   1.0];  f=[1.3499    1.4918    1.6487]
toplam = 0;   a = 0.9;
for k=1:3
        carpim = 1.0;
        for j=1:3
                if j~=k
                        carpim = carpim * ( a – x(j) ) / ( x(k) – x(j) );
                end
        end
        toplam = toplam + carpim * f(k);
end
```

HAFTA 11

✓ Sonlu Farklar İnterpolasyon Yöntemi

▶ İleri Yönlü Sonlu Farklar İnterpolasyonu

$P_n(x)$ n. Mertebeden Lagrange enterpolasyon polinomu olsun. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ verilen noktalar ve $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler olsun. Buna göre;

$$P_n(x_i) = y_i (i = 0,1,2, \dots, n)$$

olmak üzere

$$P_n(x) = y_0 + \Delta y_0(x - x_0) + \Delta^2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \Delta^n y_0(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

Şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki polinomdaki $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \dots, \Delta^n y_0$ değerleri ileri yönlü sonlu farklar katsayılarıdır ve şu şekilde hesaplanır:

$x = x_0$ için $P_n(x_0) = y_0$

$x = x_1$ için $P_n(x_1) = y_0 + \Delta y_0(x_1 - x_0) = y_1$ ise $\Delta y_0 = {y_1 - y_0}/{x_1 - x_0}$

İleri yönlü sonlu farklar tablosu özet olarak aşağıdaki gibidir.

i (indis)	x	$f(x) = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
3	x_3	y_3	Δy_3			
4	x_4	y_4				

Buna göre 1. Dereceden ileri yönlü sonlu farklar;

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

$$\vdots$$

$$\Delta y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

Buna göre 2. Dereceden ileri yönlü sonlu farklar;

$$\Delta^2 \mathrm{y}_0 = \frac{\Delta \mathrm{y}_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0}$$

$$\Delta^2 \mathrm{y}_1 = \frac{\Delta \mathrm{y}_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^2 \mathrm{y}_\mathrm{i} = \frac{\Delta \mathrm{y}_{\mathrm{i}+1} - \Delta y_i}{x_{\mathrm{i}+2} - x_\mathrm{i}}$$

Buna göre 3. Dereceden ileri yönlü sonlu farklar;

$$\Delta^3 \mathrm{y}_0 = \frac{\Delta^2 \mathrm{y}_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0}$$

$$\Delta^3 \mathrm{y}_1 = \frac{\Delta^2 \mathrm{y}_2 - \Delta^2 y_1}{x_4 - x_1}$$

$$\vdots$$

$$\Delta^3 \mathrm{y}_\mathrm{i} = \frac{\Delta \mathrm{y}_{\mathrm{i}+1} - \Delta y_i}{x_{\mathrm{i}+3} - x_\mathrm{i}}$$

Buna göre n. Dereceden ileri yönlü sonlu farklar;

$$\Delta^\mathrm{n} \mathrm{y}_\mathrm{i} = \frac{\Delta^{\mathrm{n}-1} \mathrm{y}_{\mathrm{i}+1} - \Delta^{\mathrm{n}-1} y_i}{x_{\mathrm{i}+\mathrm{n}} - x_\mathrm{i}}$$

❖ Örnek

Tabloda verilen noktalardan geçen interpolasyon polinomunu ileri farklar yöntemi ile bulunuz. $P(1.25) = ?$

x	1.0	1.5	2.0	2.5
$y = f(x)$	3.01	5.885	11.01	19.135

✓ Çözüm

Birinci derece sonlu farklar

$$\Delta y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5.885 - 3.01}{1.5 - 1.0} = \mathbf{5.75}$$

$$\Delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11.01 - 5.885}{2.0 - 1.5} = 10.25$$

$$\Delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{19.135 - 11.01}{2.5 - 2.0} = 16.25$$

İkinci derece sonlu farklar

$$\Delta^2 y_0 = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{x_2 - x_0} = \frac{10.25 - 5.75}{2.0 - 1.0} = \mathbf{4.5}$$

$$\Delta^2 y_1 = \frac{\Delta y_2 - \Delta y_1}{x_3 - x_1} = \frac{16.25 - 10.25}{2.5 - 1.5} = 6.0$$

Üçüncü derece sonlu farklar

$$\Delta^3 y_0 = \frac{\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0}{x_3 - x_0} = \frac{6.0 - 4.5}{2.5 - 1.0} = \mathbf{1.0}$$

Buna göre;

i $(indis)$	x	$f(x) = y$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	1.0	**3.01**	**5.75**	**4.5**	**1.0**
1	1.5	5.885	10.25	6.0	
2	2.0	11.01	16.25		
3	2.5	19.135			

$$P_3(x) = 3.01 + 5.75(x-1) + 4.5(x-1)(x-1.5) + 1(x-1)(x-1.5)(x-2)$$
$$= x^3 + x + 1.01 \rightarrow \boldsymbol{P(1.25) = 4.2131}$$

► Geri Yönlü Sonlu Farklar İnterpolasyonu

$P_n(x)$ n. Mertebeden Lagrange enterpolasyon polinomu olsun. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ verilen noktalar ve $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonun bu noktalarda aldığı değerler olsun. Buna göre;

$$P_n(x_i) = y_i (i = 0,1,2, \dots, n)$$

olmak üzere

$$P_n(x) = y_n + \nabla \mathrm{y_n}(x - x_n) + \nabla^2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \cdots + \nabla^{\mathrm{n}} y_n (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1)$$

Şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki polinomdaki $\mathrm{y_n}, \nabla \mathrm{y_n}, \nabla^2 y_n, \dots, \nabla^{\mathrm{n}} y_n$ değerleri geri yönlü sonlu farklar katsayılarıdır ve şu şekilde hesaplanır:

$\mathrm{x} = \mathrm{x_n}$ için $\mathrm{P_n}(x_n) = y_n$

$x = x_{n-1}$ için $P_n(x_{n-1}) = y_n + \nabla \mathrm{y_0}(x_{n-1} - x_n) = y_{n-1}$ ise $\nabla \mathrm{y_n} = {y_n - y_{n-1}}/{x_n - x_{n-1}}$

Buna göre 1. Dereceden geri yönlü sonlu farklar;

$$\nabla \mathrm{y_1} = \frac{\mathrm{y_1} - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$\Delta \mathrm{y_i} = \frac{\mathrm{y_i} - y_{i-1}}{x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i-1}}}$$

Buna göre 2. Dereceden geri yönlü sonlu farklar;

$$\nabla^2 \mathrm{y_2} = \frac{\nabla \mathrm{y_2} - \nabla y_1}{x_2 - x_0}$$

$$\vdots$$

$$\nabla^2 \mathrm{y_i} = \frac{\nabla \mathrm{y_i} - \nabla y_{i-1}}{x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i-2}}}$$

Buna göre n. Dereceden ileri yönlü sonlu farklar;

$$\nabla^{\mathrm{n}} \mathrm{y_i} = \frac{\nabla^{\mathrm{n-1}} \mathrm{y_i} - \nabla^{\mathrm{n-1}} y_{i-1}}{x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i-n}}}$$

$\boldsymbol{i\ (indis)}$	$\mathbf{x}$	$\boldsymbol{f(x) = y}$	$\boldsymbol{\nabla \mathrm{y}}$	$\boldsymbol{\nabla^2 y}$	$\boldsymbol{\nabla^3 y}$	$\boldsymbol{\nabla^4 y}$
0	$\mathrm{x_0}$	$\mathrm{y_0}$				
1	$\mathrm{x_1}$	$\mathrm{y_1}$	$\nabla \mathrm{y_1}$			
2	$\mathrm{x_2}$	$\mathrm{y_2}$	$\nabla \mathrm{y_2}$	$\nabla^2 \mathrm{y_2}$		
3	$\mathrm{x_3}$	y_3	$\nabla \mathrm{y_3}$	$\nabla^2 \mathrm{y_3}$	$\nabla^3 \mathrm{y_3}$	
4	$\mathrm{x_4}$	$\mathrm{y_4}$	$\boldsymbol{\nabla y_4}$	$\boldsymbol{\nabla^2 \mathrm{y_4}}$	$\boldsymbol{\nabla^3 \mathrm{y_4}}$	$\boldsymbol{\nabla^4 \mathrm{y_4}}$

❖ Örnek

Tabloda verilen noktalardan geçen interpolasyon polinomunu ileri farklar yöntemi ile bulunuz. $P(2.25) = ?$

x	1.0	1.5	2.0	2.5
$y = f(x)$	3.01	5.885	11.01	19.135

✓ Çözüm

Birinci derece sonlu farklar

$$\nabla \mathrm{y}_1 = \frac{\mathrm{y}_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{5.885 - 3.01}{1.5 - 1.0} = 5.75$$

$$\nabla \mathrm{y}_2 = \frac{\mathrm{y}_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{11.01 - 5.885}{2.0 - 1.5} = 10.25$$

$$\nabla \mathrm{y}_3 = \frac{\mathrm{y}_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{19.135 - 11.01}{2.5 - 2.0} = \mathbf{16.25}$$

İkinci derece sonlu farklar

$$\nabla^2 \mathrm{y}_2 = \frac{\nabla \mathrm{y}_1 - \nabla y_0}{x_2 - x_0} = \frac{10.25 - 5.75}{2.0 - 1.0} = 4.5$$

$$\nabla^2 \mathrm{y}_3 = \frac{\nabla \mathrm{y}_2 - \nabla y_1}{x_3 - x_1} = \frac{16.25 - 10.25}{2.5 - 1.5} = \mathbf{6.0}$$

Üçüncü derece sonlu farklar

$$\nabla^3 \mathrm{y}_3 = \frac{\nabla^2 \mathrm{y}_1 - \nabla^2 y_0}{x_3 - x_0} = \frac{6.0 - 4.5}{2.5 - 1.0} = \mathbf{1.0}$$

$\boldsymbol{i\ (indis)}$	$\mathbf{x}$	$\boldsymbol{f(x) = y}$	$\boldsymbol{\nabla y}$	$\boldsymbol{\nabla^2 y}$	$\boldsymbol{\nabla^3 y}$
0	1.0	3.01			
1	1.5	5.885	5.75		
2	2.0	11.01	10.25	4.5	
3	2.5	$\mathbf{19.135}$	$\mathbf{16.25}$	$\mathbf{6.0}$	$\mathbf{1.0}$

$$P_3(x) = 19.135 + 16.25(x - 2.5) + 6.0(x - 2.5)(x - 2.0) + 1(x - 2.5)(x - 2.0)(x - 1.5)$$
$$= \mathrm{x}^3 + \mathrm{x} + 1.01 \quad \rightarrow \mathbf{P_3(2.25) = 14.651}$$

HAFTA 12

✓ Sayısal Türev

► İleri Fark ve Geri Fark ile Türev Tanımı

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \rightarrow \begin{matrix} \boldsymbol{\Delta y_0\ Formulune\ Benzer} \\ (\boldsymbol{Ileri\ Fark\ 1.Turev}) \end{matrix}$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi) \rightarrow Baslangıc\ Noktası\ Taylor\ Teoremi\ Formudur$$

❖ **Örnek**

Eğer $f(x) = cosx$ türevini $x = {}^{\pi}/_{4}$ te $h = 0.01$ ile hesaplamak için İleri Fark 1. Türev formülü kullanılırsa yanıt ne olur ve duyarlılığı nedir?

✓ **Çözüm**

Gerçek Değer = $f'({}^{\pi}/_{4}) = -sin\,{}^{\pi}/_{4} = -0.70711$

Bir hesap makinesi kullanarak yaklaşık değer;

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] = \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \frac{0.700000476 - 0.707106781}{0.01}$$

$$= -0.71063051$$

Mutlak Hata = |Gerçek Değer – Yaklaşık Değer| = $|-0.70711 - (-0.71063051)| = 0.00352$

İLERİ FARK 2. TÜREV TANIMI

$$f''(x) = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)'$$

$$= \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$= \frac{\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h}$$

$$= \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

İleri fark ikinci türev tanımındaki hata nedir?

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(2h)^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots$$

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f^{(3)}(\xi)\rightarrow x<\ \xi<x+h$$

$$f''(x)=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}+O(h)$$

GERİ FARK 1. TÜREV TANIMI

$$f'(x)=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

GERİ FARK 2. TÜREV TANIMI

$$f''(x)=\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$

❖ **Örnek [Eski Sınav Sorusu]**

Tablo değerlerinden faydalanılarak İleri-Fark ve Geri-Fark birinci ve ikinci türev formüllerini kullanarak $f'(1)$ ve $f''(7)$ türev değerlerini bulunuz.

x	1	3	5	7
$f(x)$	-3	1	2	4

✓ **Çözüm**

Tablodan görüldüğü gibi h = 2 ‘dir.
İleri fark birinci türev formülünü kullanarak;

$$f'(x)\approx\frac{1}{h}[f(x+h)-f(x)]$$
$$f'(1)=\frac{1}{2}\big(f(3)-f(1)\big)=2$$

Geri fark ikinci türev formülünü kullanarak;

$$f''(x)=\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}$$
$$f''(7)=\frac{f(7)-2f(5)+f(3)}{4}=\frac{4-2*2+1}{4}=0.25$$

❖ Örnek [Eski Sınav Sorusu]

Tablo değerlerinden faydalanılarak İleri-Fark ve Geri-Fark birinci ve ikinci türev formüllerini kullanarak $f'(7)$ ve $f''(1)$ türev değerlerini bulunuz.

x	1	3	5	7
$f(x)$	-3	1	2	4

✓ Çözüm

Tablodan görüldüğü gibi h = 2 ‘dir.
Geri fark birinci türev formülünü kullanarak;

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x) - f(x-h)]$$
$$f'(7) = \frac{1}{2}(f(7) - f(5)) = 1$$

İleri fark ikinci türev formülünü kullanarak;

$$f''(x) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$
$$f''(1) = \frac{f(5) - 2f(3) + f(1)}{4} = \frac{2 - 2*1 - 3}{4} = -0.75$$

❖ Örnek

$f'(x) \approx \frac{1}{4h}[f(x+3h) - f(x-h)]$ türev formülünü bulunuz. Bu türev formülünü tablo değerleri için kullanınız. h = 0.1 alıp $f'(1)$ değerini bulunuz.

x	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	4	5	8

✓ Çözüm

$$f(x+3h) = f(x) - 3hf'(x) + \frac{((3h)^2)}{2!}f''(\xi) \rightarrow (a)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(\xi) \qquad \rightarrow (b)$$

(a) ve (b) formüllerinden;

$$f(x+3h) - f(x-h) = 4hf'(x) + 4h^2f''(\xi)$$
$$f'(x) = \frac{1}{4h}[f(x+3h) - f(x-h)] - hf''(\xi) \rightarrow -hf''(\xi) = O(h)$$

$$\boldsymbol{f'(1) \approx \frac{1}{4h}[f(x+3h) - f(x-h)] = \frac{1}{0.4}(f(1.3) - f(0.9) = \frac{4}{0.4} = 10}$$

► Richardson Dışkestirimi

Merkezi ileri fark formülü kullanılarak;

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$$

Taylor teoreminin iki ifadesi kullanılarak;

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(\xi) \rightarrow (a)$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(\xi) \rightarrow (b)$$

(a) ve (b) yeniden düzenlenerek;

$$f'(x) = \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi) \qquad \rightarrow -\frac{h^2}{6}f'''(\xi) = O(h^2)$$

Burada hata f''' terimini içerdiğinden sadece f''' mevcut ise uygulanabilirdir.

Eğer $\phi(h) = {f(x+h) - f(x-h)}/{2h}$ alırsak $f'(x) = \phi(h)$ yazabiliriz. Ayrıca

$$D(1,1) = \phi\left({h}/{2}\right) = \frac{f\left(x + {h}/{2}\right) - f\left(x - {h}/{2}\right)}{h}$$

formülü oluşur. $D(n,1) = \phi\left(\frac{h}{2^n}\right), n = 1,2, \ldots$ biçiminde tanımlayalım. Bu tanımdan;

$$D(n,m+1) = D(n,m) + \frac{1}{4^m - 1}[D(n,m) - D(n-1,m)]$$

eşitliği elde edilir.

☆ **NOT**

$$\begin{array}{llll}
D(1,1) = \phi\left({h}/{2}\right) & & & \\
D(2,1) & D(2,2) & & \\
D(3,1) & D(3,2) & D(3,3) & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
D(N,1) & D(N,2) & D(N,3) & \cdots\ D(N,N)
\end{array}$$

$D(1,1)$, $O(h^2)$ türünden bir yaklaşım, $D(N,N)$, $O(h^{2N})$ türünden bir yaklaşımdır.
$D(N,N)$ deki yaklaşım $D(1,1)$ deki yaklaşımdan daha iyidir.

❖ **Örnek**

$f(x) = cosx$ fonksiyonu için tablo değerleri aşağıdadır. h = 0.1 alarak $f'(0.4)$ değerine extrapolasyon yöntemi ile h^4. Basamaktan yaklaşınız.

x	0.3	0.35	0.375	0.4	0.425	0.45	0.5
$f(x)$	0.95534	0.93937	0.93051	0.92106	0.91104	0.90045	0.87758

✓ **Çözüm**

$f'(x) \approx \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)]$ ifadesinden hesaplanırsa hata O(h) basamaktan olur.

$$f'(0.4) \approx \frac{1}{0.1}[f(0.5) - f(0.4)] = -0.43480$$

$f'(x) \approx \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)]$ ifadesinden hesaplanırsa hata $O(h^2)$ basamağından olur.

$$f'(0.4) \approx \frac{1}{0.2}[f(0.5) - f(0.3)] = -0.38880$$

Ayrıca $f(x) \approx \phi(h)$ alırsak,

$$D(1,1) = \phi\left({}^{h}/_{2}\right) = \frac{f\left(x + {}^{h}/_{2}\right) - f\left(x - {}^{h}/_{2}\right)}{h}$$

$x = 0.4, h = 0.1$ için;

$$D(1,1) = \frac{f(0.45) - f(0.35)}{0.1} = -0.38920$$

$$D(2,1) = \phi\left({}^{h}/_{2^2}\right) = \frac{f\left(x + {}^{h}/_{4}\right) - f\left(x - {}^{h}/_{4}\right)}{{}^{h}/_{2}} = \frac{f(0.425) - f(0.375)}{0.05} = -0.38940$$

$$D(2,2) = D(2,1) + \frac{1}{4^1 - 1}[D(2,1) - D(1,1)] = -0.38940 + \frac{1}{3}[-0.38940 - (-0.38920)] = -0.38947$$

$$f(x) = cosx \quad \rightarrow \quad f'(x) = -sinx \quad \rightarrow \quad f'(0.4) = -sin0.4 = -0.38942 \rightarrow gerçek\ değer$$

$$Mutlak\ Hata = |f'(0.4) - D(2,2)| = |-0.38942 - (-0.38947)| = 0.00005$$

Extrapolasyon'da kullanılacak (cosx için) Fi Fonksiyonu MATLAB Kodu

```
function [m] = fi(x,h)
        m = (cos(x+h)-cos(x-h))/(2*h);
end
```

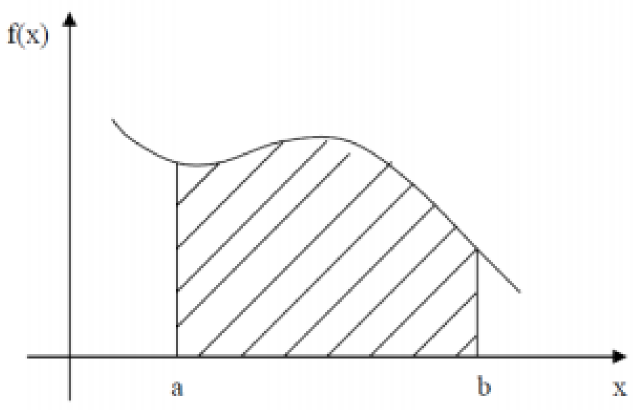
Extrapolasyon Hesabı MATLAB Kodu

```
D = zeros(3,3);
x=0.4; h=0.1;
for n=1:3
        D(n,1) = fi(x, h/(2^n));
end

for n=2:3
        for m=1:n-1
                D(n,m+1) = D(n,m)+ ( ( D(n,m) – D(n-1,m) ) / (4^m -1));
        end
end
```

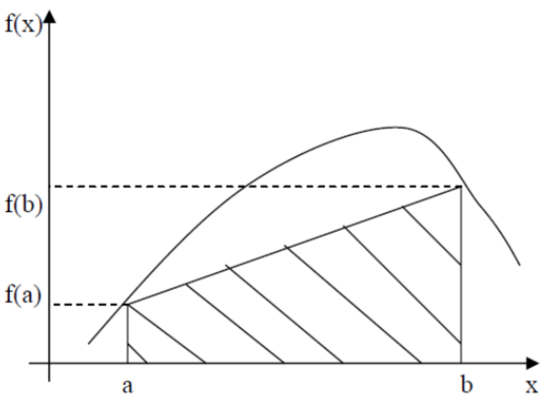
HAFTA 13

✓ Sayısal İntegral



$I = \int_a^b f(x)dx$ integralinin $[a, b]$ de X ekseni ve $y = f(x)$ eğrisi arasında kalan alanı verdiğini biliyoruz.

► Trapozoid (Yamuk) Kuralı



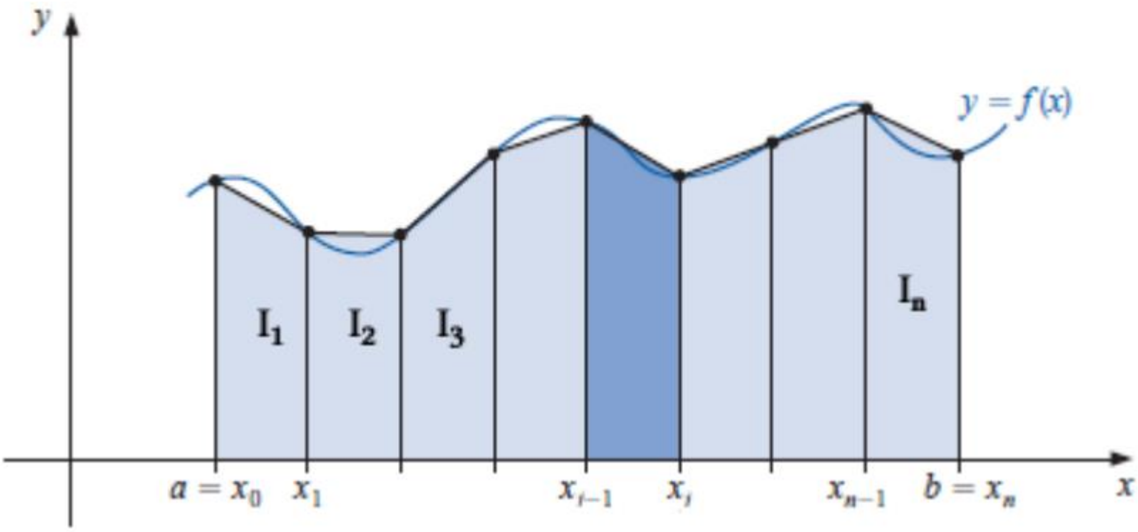
$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \frac{f(a) + f(b)}{2} * (b - a)$$

$f(a)$: yamuğun tavan uzunluğu

$f(b)$: yamuğun taban uzunluğu

$h = (b - a)$: yamuğun yüksekliği

İntegral bölgesinin n eşit parçaya bölerek yamuk kuralını uygularsak;



$$I = \int_a^b f(x)d_x \cong I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$

$$I = \int_a^b f(x) d_X = \int_{x_0}^{x_1} f(x) + \int_{x_1}^{x_2} f(x) + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n$$

$$h = x_{i+1} - x_i = \frac{(b-a)}{n} \; olmak \text{ üzere};$$

$$I \cong h\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right] + h\left[\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right] + \cdots + h\left[\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right]$$

$$I \cong \frac{h}{2}[f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)]$$

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] + O(h^2)$$

❖ **Örnek 1**

$f(x) = 0.9x^2 - 1.01x + 0.81$ fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyona ait bazı tablo değerleri verilmiştir;

x	$x_0 = 0.1$	$x_1 = 0.2$	$x_2 = 0.3$	$x_3 = 0.4$	$x_4 = 0.5$
$y = f(x)$	$y_0 = 0.718$	$y_1 = 0.644$	$y_2 = 0.558$	$y_3 = 0.55$	$y_4 = 0.53$

$I = \int_{0.1}^{0.5} f(x)dx$ integralini n=4 için YAMUK metodunu kullanarak bulunuz.

✓ **Çözüm**

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0.1}{4} = 0.1 \rightarrow Adım\ Aralığı$$

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$I \cong \frac{0.1}{2}[f(0.1) + 2[f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)] + f(0.5)]$$

$$= 0.05(0.718 + 2 * (0.644 + 0.588 + 0.55) + 0.53) = \mathbf{0.2376}$$

Yaklaşık değeri bulunur.

Gerçek değer ise,

$$I = \int_{0.1}^{0.5} (0.9x^2 - 1.01x + 0.81)dx = 0.24$$

$$Mutlak\ Hata = |Gercek - Yaklasık| = |0.24 - 0.2376| = 0.0024$$

❖ Örnek 2 [Eski Sınav Sorusu]

Aşağıda tablo değerleri verilen $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	36	49	64

$I = \int_0^8 f(x)dx$ integralini n=4 için YAMUK metodunu kullanarak bulunuz.

✓ Çözüm

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{4} = 2 \rightarrow Adım\ Aralığı$$

Bu adım aralığına göre $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6, x_4 = 8$ olur. Yamuk yöntemi ile $I = \int_0^8 f(x)dx$

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

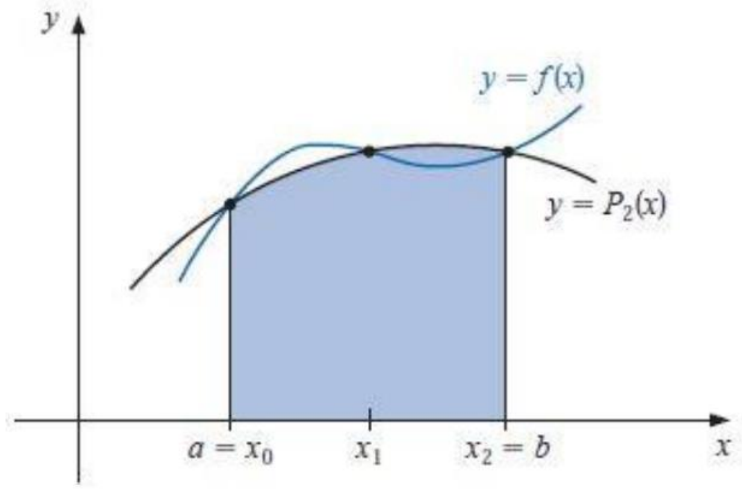
$$I \cong \frac{2}{2}[f(0) + 2[f(2) + f(4) + f(6)] + f(8)] = 1(0 + 2 * (4 + 16 + 36) + 64) = \mathbf{176}$$

olarak bulunur.

Örnek 2 için Yamuk metodu MATLAB Kodu

```
x=[0.1:0.1:0.9];
f = x.*x;                    % .* vektör çarpımıdır.
a = 1; b=length(x);          % a ilk elemanın, b son elemanın indeksidir.
n = 4;
h = (b-a)/n;
hh = (x(b)-x(a))/n;
toplam = f(a) + f(b);
for i=a+h:h:b-h
        toplam = toplam + 2*f(i);
end
toplam = toplam * (hh/2);
```

► Simpson (1/3) Kuralı



Buradaki 1/3, üç nokta alınıp, 2 eşit bölgeye bölündüğü içindir. $[a, b]$ aralığını aşağıdaki gibi üç parçaya ayıralım.

$$x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

Bu üç nokta için $f(x)$ fonksiyonu ikinci dereceden Lagrange interpolasyon polinomunu yazalım.

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b P_2(x)dx$$

$$I \cong \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_1)(x_1-x_2)} f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

Bu integral işleminde gerekli kısaltmalar yapılırsa;

$$I = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

elde edilir.

Eğer (a,b) aralığı eşit parçaya bölünürse;

$$I = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n) \right] + O(h^4)$$

formülü elde edilir.

❖ Örnek [Eski Sınav Sorusu]

Tabloda değerleri verilen $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım.

x	1	1.25	1.5	1.75	2
$y = f(x)$	10	8	7	6	5

a) $x = 1, 1.5, 2$ de verilen fonksiyon değerlerini kullanarak Simpson (1/3) metodu ile $I = \int_1^2 f(x)dx$ e yaklaşınız. (n=2 alt aralık)

b) $x = 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2$ de verilen fonksiyon değerlerini kullanarak Simpson (1/3) metodu ile $I = \int_1^2 f(x)dx$ e yaklaşınız. (n=4 alt aralık)

✓ Çözüm

a) $h = {b-a}/{n} = {2-1}/{2} = 0.5$

$$I = \int_1^2 f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

$$= \frac{0.5}{3}[f(1) + 4f(1.5) + f(2)] = \frac{0.5}{3}[10 + 4 * 7 + 5] \cong \mathbf{7.1667}$$

b) $h = {b-a}/{n} = {2-1}/{4} = 0.25$

$$I = \int_1^2 f(x)dx$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 2f(x_2) + 4f(x_1) + 4f(x_3) + 4f(x_4)]$$

$$= \frac{0.25}{3}[f(1) + 2f(1.5) + 4f(1.25) + 4f(1.75) + f(2)]$$

$$= \frac{0.25}{3}[10 + 2 * 7 + 4 * 8 + 4 * 6 + 5] \cong \mathbf{7.083}$$

Simpson (1/3) metodu MATLAB Kodu

```
x=[0.1:0.1:0.9];
f = x.*x;                  % .* vektör çarpımıdır.
a = 1; b=length(x);        % a ilk elemanın, b son elemanın indeksidir.
n = 4;
h = (b-a)/n;
hh = (x(b)-x(a))/n;
toplam = f(a) + f(b);
sayac = 1;
for i=a+h:h:b-h
    if mod(sayac,2) == 1
        toplam = toplam + 4*f(i);
    else
        toplam = toplam + 2*f(i);
    end
    sayac = sayac + 1;
end
toplam = toplam * (hh/3);
```

HAFTA 14

✓ Adi Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümü

► Taylor Serisi Yöntemi

❖ **Örnek**

$y' = -2x - y \quad , \; y(0) = -1$ problemini ele alalım.

Bu denklemin analitik çözümü $y = -3e^{-x} - 2x + 2$ şeklinde olup, $x = x_0$ daki taylor açılımı yapılırsa;

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

Şayet $x - x_0 = h$ denilirse;

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)h + \frac{y''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}h^3 + \cdots$$

Burada $y(x_0)$ terimi başlangıç şartından $y(0) = -1$ olarak bilinmektedir. Serideki ikinci terimin katsayısı denklemde $x = 0$ ve $y = -1$ konularak;

$$y'(x_0) = y'(0) = -2 * 0 - (-1) = 1$$

şeklinde elde edilebilir. İkinci veya daha yüksek dereceden türevler, birinci türev için verilen eşitliğinden ardarda türevler alınarak elde edilecektir. Bu türevlerin değerleri $x = 0$ da hesaplanarak serinin yüksek dereceden terimlerinin katsayıları elde edilir:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -2 - y' &&\rightarrow \quad y''(0) = -2 - y'(0) = -3 \\ y'''(x) &= -y'' &&\rightarrow \quad y'''(0) = -y''(0) = 3 \\ y^{(4)}(x) &= -y''' &&\rightarrow \quad y^{(4)}(0) = -y'''(0) = -3 \end{aligned}$$

Böylece $x = h$ (çünkü $x_0 = 0$) noktasında fonksiyonun değerini elde etmek için seri çözümü;

$$y(x) = -1 + 1 * h - 1.5 * h^2 + 0.5 * h^3 - 0.125 * h^4 + Hata\ Terimi$$

şeklinde yazılır.

Aşağıdaki tabloda $x = 0$ ile $x = 0.6$ arasındaki sayısal ve analitik çözümler yer almaktadır.

		4. türeve kadar sayısal		5. türeve kadar sayısal	
x	Analitik	y(x)	Hata	y(x)	Hata
0,00	-1,00000	-1,00000	0,00000	-1,00000	0,00000
0,10	-0,91451	-0,91451	0,00000	-0,91451	0,00000
0,20	-0,85619	-0,85620	-0,00001	-0,85619	0,00000
0,30	-0,82245	-0,82251	-0,00006	-0,82245	0,00000
0,40	-0,81096	-0,81120	-0,00024	-0,81094	-0,00002
0,50	-0,81959	-0,82031	-0,00072	-0,81953	-0,00006
0,60	-0,84643	-0,84820	-0,00177	-0,84626	-0,00018

Görüldüğü gibi $x < 0.3$ için uyum iyi iken $x > 0.3$ halinde fark giderek artmaktadır. Seride daha fazla terim alınması halinde uyumlu bölgenin genişleyeceği açıktır. Örneğin seride;

$$y(x) = -1 + 1 * h - 1.5 * h^2 + 0.5 * h^3 - 0.125 * h^4 + 0.025 * h^5 + \ Hata\, Terimi$$

Şeklinde beşinci dereceye kadar türevlerin alınması halindeki sonuçlar tablonun sağ kolonlarında görülmektedir. Bu hesaptaki hata serideki kullanılan en son terimden sonraki terimin değeri 0 ile x arasındaki herhangi bir noktada hesaplanarak elde edilebilir:

$$Hata\, Terimi = \frac{y^5(\xi)}{5!}(x - x_0)^5 = \frac{y^5(\xi)}{120}x^5, \quad x_0 < \xi < x_0 + h$$

Son noktada hatanın büyük olacağı düşüncesiyle hatanın tahmini değeri $x = 0.6$ noktasında;

$$Hata\, Terimi = \frac{0.6^5}{120}y^5(0) = \frac{y^5(\xi)}{120}3 = 0.00194$$

Olarak elde edilir ki tabloda mevcut hata değerine yakındır.

☆**NOT 1 :** $y'(x)$ türevini ifade eden fonksiyonun yukarıdaki gibi basit olmadığı hallerde yüksek dereceden türevlerin hesaplanması da kolay olmaz. Aşağıdaki denklem buna güzel bir örnektir. ☆

$$y'(x) = \frac{x}{y+x^2}$$

❖ Örnek 2

$y' = 2y$ diferansiyel denklemin analitik çözümü $y(x) = ce^{2x}$ olduğu bilinmektedir. Şimdi taylor açılımını kullanalım. Bunun için ilk önce türev değerlerini hesaplayalım.

$$y'' = 2y' = 4y$$
$$y''' = 4y'' = 8y$$

Buradan;

$$y(x) = y(x_0 + h) = y(x_0) + 2hy(x_0) + \frac{4h^2 y(x_o)}{2!} + \frac{8h^3 y(x_0)}{3!} + \cdots$$

$$y(x_0 + h) = y(x_0)\left[1 + 2h + \frac{4h^2}{2!} + \frac{8h^3}{3!} + \cdots\right] = ce^{2x} \quad , \quad c = y(x_0)$$

Olup Taylor açılımının analitik çözümle aynı çözümü verdiği görülmektedir. Ancak çözümün seri olarak verilmesi halinde hassasiyet seride alınacak terim sayısına bağlı olacaktır.

► Euler Yöntemi

Euler yöntemi Taylor serisinin sadece birinci dereceden terimini kullanan bir yöntemdir:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + Hata\ Terimi$$

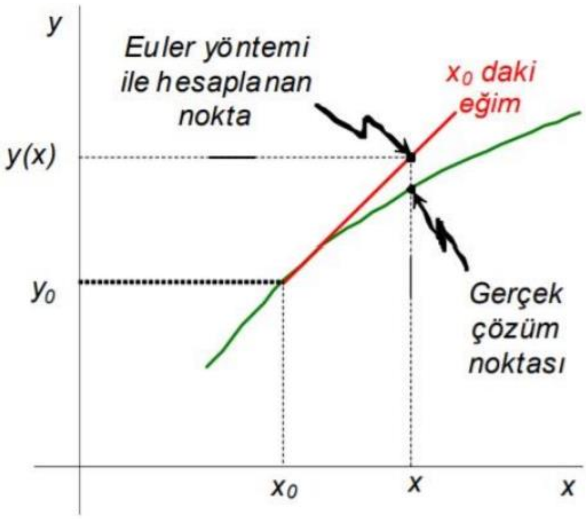
Burada $Hata\ Terimi = \frac{h^2}{2} y''(\xi) = O(h^2)$

Bu ifade;

$$y'(x_0) = {y(x) - y(x_0)}/{x - x_0}$$

şeklinde düzenlenirse fonksiyonun x noktasındaki değerinin $(x_0, y(x_0))$ noktasından çizilen bir teğet ile elde edilmekte olduğu ve bu bakımdan bir miktar hata içereceği kolaylıkla görülebilir.

Şayet $h = x - x_0$ artımı yeterince küçük tutulursa hata küçük olacaktır. Bir kez $x = x_0 + h$ noktasında y değeri elde edildikten sonra yeni bir adımda aynı hesap tekrar edilebilir.



$$y_{n+1} = y_n + hy_n' + O(h^2)$$

Buradaki hata lokal hata olup, çok sayıda adım atıldıktan sonraki hata $O(h)$ mertebesinde olacaktır.

❖ Örnek 3

$y' = x + \frac{y}{2}$, $y(0) = -2$ başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü $[0, 0.6]$ aralığında $h = 0.2$ adım aralığı için Euler yöntemini kullanarak bulunuz.

✓ Çözüm

$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ olduğunu ileri yönlü sonlu farklardan biliyoruz.

Ayrıca, $x_n = x_0 + nh = 0 + n(0.2) = 0.2 * n$ dir. O zaman;

$$y' = x + \frac{y}{2} \rightarrow y_n' = x_n + \frac{y_n}{2} \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = x_n + \frac{y_n}{2}$$

$$y_{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_n + hx_n \rightarrow y_{n+1} = 1.1 * y_n + (0.2) * (0.2) * n$$

İterasyon formülü elde edilir. Bu formül kullanılarak;

$y_1 = 1.1 * y_n + (0.2) * (0.2) * n = 1.1 * y_0 + (0.2) * (0.2) * 0 = 1.1 * (-2) = -2.2$
$y_2 = 1.1 * y_1 + (0.2) * (0.2) * 1 = 1.1 * (-2.2) + 0.04 = -2.38$
$y_3 = 1.1 * y_2 + (0.2) * (0.2) * 1 = 1.1 * (-2.38) + 0.08 = -2.538$

❖ Örnek 4

$y' = -2x - y$, $y(2) = -2.406$ başlangıç değer probleminin çözümünü Euler yöntemini kullanarak 3 iterasyon için yaklaşık olarak bulunuz. Bu hesaplamadaki mutlak hatayı tespit ediniz. (h = 0.1)
$Gerçek\ değer = y(x) = -3e^{-x} - 2x + 2$

✓ Çözüm

$$x_0 = 2, \quad x_1 = 2 + h = 2.1, \quad x_2 = 2 + 2h = 2.2, x_3 = 2 + 3h = 2.3$$
$$x_n = 2 + 0.1 * n \qquad \text{ve} \qquad y_0 = y(2) = -2.406$$

$y_n' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ olduğunu ileri yönlü sonlu farklardan biliyoruz.

O zaman;

$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = -2x_n - y_n \rightarrow y_{n+1} = -2hx_n + (1 - h)y_n \rightarrow y_{n+1} = -2(0.1)(2 + (0.1)n) + 0.9y_n$

İterasyon formülü elde edilir. Bu formül kullanılarak;

$y_1 = -2(0.1)(2 + (0.1) * 0) + 0.9 * (-2.406) = -0.2 * 2 - 2.1654 = -2.5654$
$y_2 = -2(0.1)(2 + (0.1) * 1) + 0.9 * (-2.5654) = -0.2 * 2.1 - 2.30886 = -2.72886$
$y_3 = -2(0.1)(2 + (0.1) * 2) + 0.9 * (-2.72886) = -0.2 * 2.2 - 2.455974 = -2.895974$

$y_{gercek}(2.3) = -3e^{-x} - 2x + 2 = -2.9008$
$Mutlak\ Hata = |gercek - yaklasık| = |-2.9008 - (-2.895974)| = 0.0048$

Örnek 4 için (Euler metodu) MATLAB Kodu

```
y=[];
y(1) = -2.406;
y0 = -2.406;
x0=2;
h=0.1;
gercekDeger = 2.9;
for n=1:3
    y(n+1) = -0.4-(0.02*(n-1))+0.9*y(n);
end
mutlakHata = abs(gercekDeger - y(4));
```

HAFTA 15

► Basit Euler Yönteminin İyileştirilmesi

Euler yönteminde x_0 başlangıç noktasında hesaplanan birinci dereceden türev aslında gerçek fonksiyonun temsil ettiği eğrinin bu noktadaki teğetidir. Bu teğet üzerinde x doğrultusunda h kadar ilerlenerek bulunan y_1 noktası, h adımının büyüklüğüne bağlı olarak eğrinin uzağına düşmektedir. Bu noktayı eğriye yaklaştırmanın, yani daha doğru çözüm elde etmenin bir yolu x_0 daki türev yerine ortalama bir türev kullanmaktır.

Euler yönteminde iyileştirme herhangi bir x_n noktasındaki eğim yerine, bununla bir sonraki x_{n+1} noktasında elde edilecek türevin ortalamasını kullanarak (Maclaurin Seri açılımından);

$$y_{n+1} = y_n + h\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

Şeklinde yapılabilir fakat bu şekilde doğrudan kullanılamaz. Çünkü y'_{n+1} değeri bilinmemektedir. Bu nedenle y'_{n+1} değeri Basit Euler yönteminde yaklaşık olarak bulunarak bu iyileştirme formülünde kullanılacak ve y_{n+1}'in yeni değeri hesaplanacaktır. Birinci aşamada Basit Euler ile bulunan y_{n+1} değeri hata içerdiğinden elde edilen y'_{n+1} de bir miktar hatalı olacaktır fakat Basit Euler'den daha az olacaktır.

❖ **Örnek**

$y' = x + y \quad , \; y(0) = 1$ başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü $[0,2]$ aralığında $h = 0.1$ adım aralığı için Euler yöntemini kullanarak bulunuz.

✓ **Çözüm**

$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ olduğunu ileri yönlü sonlu farklardan biliyoruz.

Ayrıca $x_n = x_0 + nh = 0 + n(0.1) = 0.1 * n$ dir.

$y'_n = x_n + y_n \quad \text{ve} \quad y'_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ elde edilir. O zaman;

$$\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2} = y' = \frac{y_{n+1} - y_n}{h} \rightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(y'_n + y'_{n+1})$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(x_n + y_n + x_{n+1} + y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(0.1 * n + y_n + 0.1 * (n+1) + y_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + 0.05(0.1 * n + y_n + 0.1 * (n+1) + y_{n+1})$$

$$0.95y_{n+1} = y_n + 0.05(0.2 * n + y_n + 0.1)$$

$0.95y_{n+1} = 1.05y_n + 0.01 * n + 0.005$ iterasyon formülü elde edilir.

20 iterasyon için sonuçlar aşağıdaki gibi elde edilir.

```
A[1]=1.110526
A[2]=1.243213
A[3]=1.400394
A[4]=1.584646
A[5]=1.798819
A[6]=2.046063
A[7]=2.329859
A[8]=2.654055
A[9]=3.022903
A[10]=3.441103
A[11]=3.913850
A[12]=4.446887
A[13]=5.046560
A[14]=5.719882
A[15]=6.474606
A[16]=7.319302
A[17]=8.263439
A[18]=9.317485
A[19]=10.493010
A[20]=11.802800
```

☆**NOT :** İyileştirilmiş Euler yönteminin hatası, Taylor seri yöntemiyle karşılaştırılarak elde edilebilir☆

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n(\xi) + \cdots \rightarrow x_n < \xi < x_{n+1}$$

Buradaki ikinci türev yerine;

$$y''_n = \frac{y'_{n+1} - y'_n}{h}$$

şeklinde ileri fark yaklaşımı alınırsa;

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{y'_{n+1} - y'_n}{h} + O(h)\right) + O(h^3)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}\right) + O(h^3)$$

Görüldüğü gibi iyileştirilmiş Euler yönteminin hatası $O(h^3)$ mertebesinde olup, basit yönteme göre bir mertebe daha iyidir. Ancak bu hata lokal hata olup, adım adım yapılan bir integrasyon sırasında hata birikmesi olacaktır. İntegral aralığındaki toplam hata $O(h^2)$ mertebesinde olacaktır.

❖ **Örnek**

$y' = -2x - y$, $y(2) = -2.406$ başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünü iyileştirilmiş Euler yöntemini kullanarak 3 iterasyon için yaklaşık olarak bulunuz. Bu hesaplamadaki mutlak hatayı tespit ediniz. (h = 0.1)

$Gerçek\ değer = y(x) = -3e^{-x} - 2x + 2$

✓ **Çözüm**

$$x_n = 2 + 0.1 * n \qquad \text{ve} \qquad x_0 = 2, \ y_0 = y(2) = -2.406$$

$$y' = -2x - y, \qquad y'_n = 2x_n - y_n, \qquad y'_{n+1} = -2x_{n+1} - y_{n+1}$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

$$y_{n+1} - y_n = h\frac{(-2x_{n+1} - y_{n+1} - 2x_n - y_n)}{2}$$

$$y_{n+1} = 0.1\frac{(-2x_{n+1} - y_{n+1} - 2x_n - y_n)}{2} + y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{-0.1x_{n+1} - 0.1x_n + 0.95y_n}{1.05}$$

$$y_1 = \frac{-0.1x_1 - 0.1x_0 + 0.95y_0}{1.05} = \frac{-0.1*(2.1) - 0.1*2 + 0.95*(-2.406)}{1.05} = -2.5673$$

$$y_2 = \frac{-0.1x_2 - 0.1x_1 + 0.95y_1}{1.05} = \frac{-0.1*(2.2) - 0.1*2.1 + 0.95*(-2.5673)}{1.05} = -2.7323$$

$$y_3 = \frac{-0.1x_3 - 0.1x_2 + 0.95y_2}{1.05} = \frac{-0.1*(2.3) - 0.1*2.2 + 0.95*(-2.7323)}{1.05} = -2.9007$$

$$y_{gercek}(2.3) = -3e^{-x} - 2x + 2 = -2.9008$$

$$Mutlak\ Hata = |gercek - yaklasık| = |-2.9008 - (-2.9007)| = 0.0001$$

► 2. Dereceden Runge-Kutta Yöntemleri

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1)$$

$$\alpha = \beta = 1, a = b = \frac{1}{2}\ seçersek, y'_n = f(x_n, y_n), \qquad y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})\ ise;$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hy'_n$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = hy'_{n+1}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{hy'_n + hy'_{n+1}}{2}$$

❖ Örnek

$y' = (xy)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 1$ başlangıç-değer problemi verilsin. $y(1.1)$ yaklaşık çözümü $h = 0.1$ adım aralığı için 2. Mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanarak bulunuz.

✓ Çözüm

$f(x,y) = (xy)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad c = 1, \quad d = 1.1$

$n = \frac{d-c}{h} = \frac{1.1-1.0}{0.1} = 1$ adımda çözüm bulunmalıdır.

$n = 0, x_0 = y_0 = 1\ için;$

$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1 * f(1,1) = 0.1 * (1-1) = 0$

$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1 * f(1 + 0.1, 1 + 0) = 0.1 * \left((1.1)^3 - \frac{1}{1.1}^2\right) = 0.0505$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = y_1 = y_0 + \frac{1}{2} * (0 + 0.0505) = 1 + 0.02525 = 1.02525$

elde edilir.

❖ Örnek 2

$y' + xy - 3x = 0$, $y(0) = 4$ başlangıç-değer problemi verilsin. $y(0.2)$ yaklaşık çözümü $h = 0.1$ adım aralığı için 2. Mertebeden Runge-Kutta yöntemini kullanarak bulunuz.

✓ Çözüm

$y' + xy - 3x = 0 \rightarrow y' = 3x - xy$

$f(x,y) = (xy)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad c = 0, \quad d = 0.2$

$n = \frac{d-c}{h} = \frac{0.2-0.0}{0.1} = 2$ adımda çözüm bulunmalıdır.

$n = 0, x_0 = 0, y_0 = 4\ için;$

$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1 * f(0,4) = 0.1 * (0-0) = 0$

$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0.1 * f(0 + 0.1, 4 + 0) = 0.1 * (3 * 0.1 - 4 * 0.1) = -0.01$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{2} * (0 - 0.01) = 4 - 0.005 = 3.995$

elde edilir.

$n = 1, x_1 = 0.1, y_1 = 3.995\ için;$

$k_1 = hf(x_1, y_1) = 0.1 * f(0.1\,, 3.995) = 0.1 * (3 * 0.1 - 3.995 * 0.1) = 0.00995$

$k_2 = hf(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0.1 * f(0.1 + 0.1, 3.995 + 0.00995) = 0.000199$

$y_2 = y_1 + \frac{1}{2} * (-0.00995 + 0.000199) = 3.995 + \frac{1}{2}(-0.009751) = 3.9901245$

Örnek 2 için Runge-Kutta Fonksiyon Hesaplama MATLAB Kodu

```
function [m] = f_(x,y)
	m = 3*x – x*y;
end
```

Örnek 2 için Runge-Kutta MATLAB Kodu

```
function [m] = f_(x,y)
	m = 3*x – x*y;
end
x=[]; y=[];
x(1) = 0; y(1) = 4;
i = 3;
h = 0.1;
for n=1:3
	k1 = h*f_(x(n),y(n));
	k2 = h*f_(x(n)+h, y(n)+k1);
	y(n+1) = y(n) + ((k1+k2)/2);
	x(n+1) = x(n)+h;
end
```