Vektörler

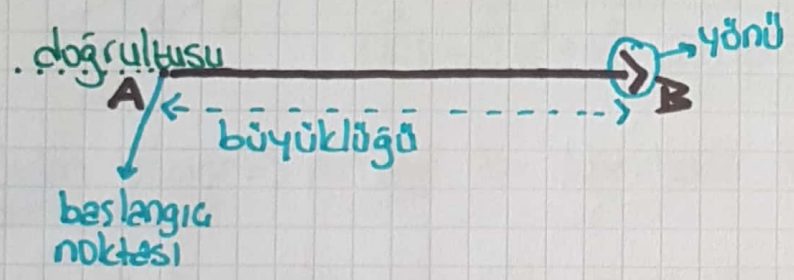
Skaler nicelik => Uygun bir birime sahip tek bir sayı ile belirtilebilir ve yönü yoktur.

Örn => Sıcaklık, kütle, enerji

Vektörel nicelik => Hem yönü hem de büyüklüğü olan niceliktir.

Örn => Yer değiştirme, hız, ivme, kuvvet

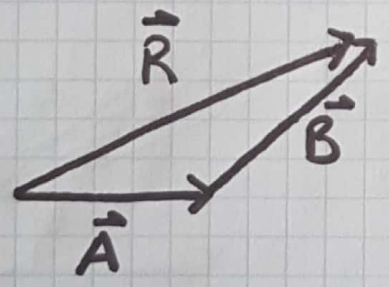
Bir vektörün üç elemanı vardır.



* büyüklük = şiddet = norm = boyut = $|\vec{a}| = a$ vektörün sayısal değeri

* iki vektörün eşit olabilmesi için vektörlerin doğrultuları, yönleri ve büyüklükleri aynı olmalıdır.

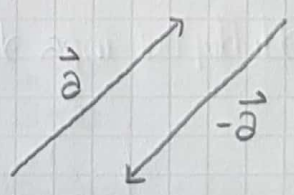
Vektörlerin Toplanması



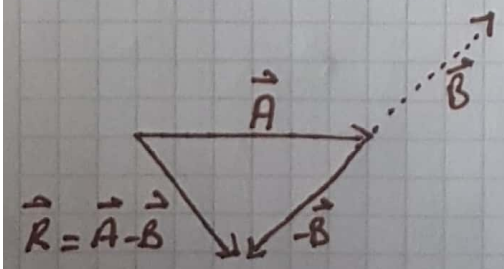
$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

* Vektörel toplama işleminin değişme özelliği vardır.

* $\vec{a}$ vektörünün negatifi $(-\vec{a})$, $\vec{a}$ vektörü ile aynı yönde fakat ters yöndedir.

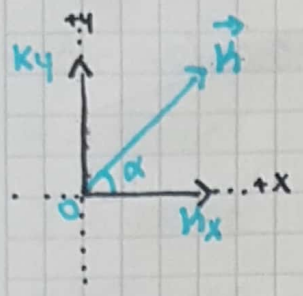


Vektörlerin Çıkarılması



$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

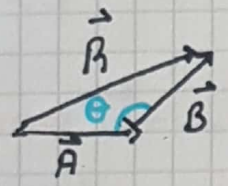
* Bir vektörün bileşenleri



$$\sin\alpha = \frac{K_y}{K} \qquad |\vec{K}| = \sqrt{K_x^2 + K_y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{K_x}{K} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{K_y}{K_x}\right)$$

*

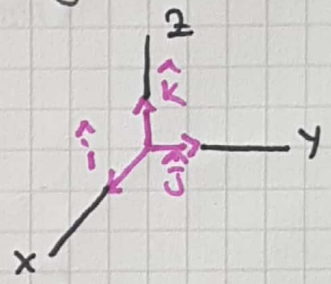


İki vektör arasındaki açı θ olmak üzere, $\vec{R}$ vektörünün büyüklüğü

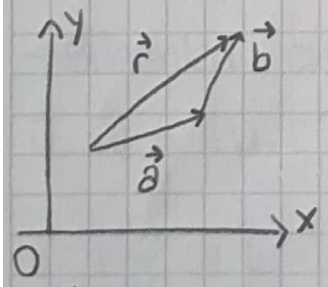
$$|\vec{R}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$$ Kosinüs Teoremi

Birim Vektör => Herhangi bir doğrultuda büyüklüğü 1 olan, boyutsuz bir vektördür.

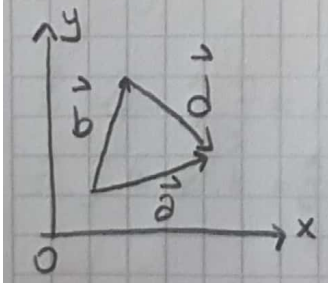
x, y ve z eksenleri yönündeki birim vektörler sırasıyla i, j ve k ile gösterilir.



Bileşenleri yardımıyla vektörlerin toplanması ve çıkarılması



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\\ \vec{b} &= b_x\hat{i} + b_y\hat{j}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\vec{r} &= \vec{a} + \vec{b}\\ \vec{r} &= (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j}\end{aligned}$$



$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= a_x\hat{i} + a_y\hat{j}\\ \vec{b} &= b_x\hat{i} + b_y\hat{j}\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned}\vec{d} &= \vec{a} - \vec{b}\\ \vec{d} &= (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j}\end{aligned}$$

Vektörlerde Çarpma

→ Bir vektörün bir skalerle çarpımı

$h \rightarrow$ skaler
$\vec{u} \rightarrow$ vektör

} bunların çarpımı $\vec{w} = h\vec{u}$ ile verilen yeni bir vektördür.

$h > 0$ ise, $\vec{w}$ vektörü $\vec{u}$ ile aynı yöndedir.
$h < 0$ " " " " " ters "

Örn ⇒ $\vec{u} = u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}$
$h \rightarrow$ skaler

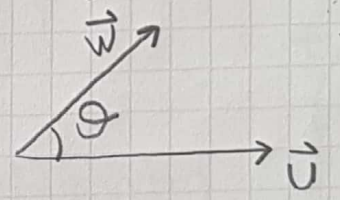
$$h\vec{u} = h(u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k})$$
$$h\vec{u} = hu_x\hat{i} + hu_y\hat{j} + hu_z\hat{k}$$

→ İki vektörün skaler çarpımı (nokta çarpım)

$\vec{u}$ ve $\vec{w}$ vektörlerin skaler çarpımı

$$\vec{u}.\vec{w} = |\vec{u}|.|\vec{w}|.\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}|.|\vec{w}|}$$



İki vektörün skaler çarpımından bir skaler (sayı) elde edilir.

→ Bileşenleri cinsinden skaler çarpım

$$\vec{u}.\vec{w} = (u_x\hat{i} + u_y\hat{j} + u_z\hat{k}).(w_x\hat{i} + w_y\hat{j} + w_z\hat{k})$$

$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$ olduğundan;

$$\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1.1.\cos 0 = 1$$
$$\hat{i}.\hat{j} = \hat{i}.\hat{k} = \hat{j}.\hat{k} = 1.1.\cos 90 = 0$$

$$\vec{u}.\vec{w} = u_x w_x + u_y w_y + u_z.w_z$$

→ Vektörel Çarpma (Çapraz Çarpım)

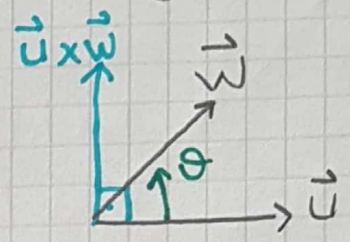
* İki vektörü vektörel çarpıldığında elde edilen bir vektör bu ikisinin oluşturduğu düzleme daima diktir.

* Vektörel çarpımda yer değiştirilemez.

* Elde edilen vektörün yönü sağ elin dört parmağı çarpım yönünü baş parmak elde edilen vektörün yönünü gösterir.

$$\vec{u} \times \vec{w} = |\vec{u}| . |\vec{w}| . \sin\theta . \hat{e}$$

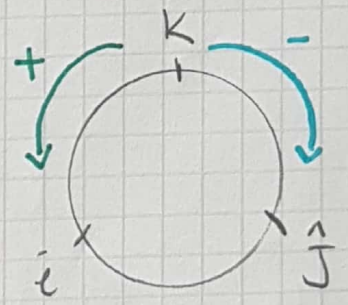
$$\vec{u} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{u})$$



→ Bileşenleri cinsinden vektörel çarpma

$$\vec{u} \times \vec{w} = (u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}) \times (w_x \hat{i} + w_y \hat{j} + w_z \hat{k})$$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 & \\ \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} & \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \\ k \times \hat{i} = \hat{j} & \hat{i} \times k = -\hat{j} \\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} & \hat{k} \times \hat{j} = -i \end{array}\right\} \text{olduğundan}$$



$$\vec{u} \times \vec{w} = (u_y w_z - u_z w_y)\hat{i} - (w_z u_x - u_z w_x)\hat{j} + (u_x w_y - u_y w_x)\hat{k}$$

* $\vec{u} \times \vec{w}$, determinant yolu ile de yapılabilir.

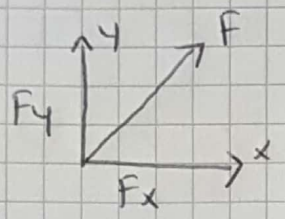
$$\vec{u} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$\hat{i}(u_y . w_z - u_z . w_y) - \hat{j}(w_z u_x - w_x . u_z) + \hat{k}(u_x w_y - w_x . u_y)$$

- Mekanik -

Kuvvet => Bir cismi ittiğimiz veya çektiğimiz zaman bu cisme bir kuvvet etki ettirmiş oluruz.

Kuvvet bir vektördür. Buna ek olarak bir uygulama noktası vardır. Kuvvetin bileşenleri belli doğrultulardaki parçalardır.



$\vec{F} = F_x i + F_y j$ $\quad F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$

Bileşke Kuvvet => Eğer bir cisme birden fazla kuvvet etki ediyorsa bu kuvvetlerin vektörel toplamı bileşke kuvveti verir.

$\vec{R} = 0$ ise cisim hareket etmez. Dengede kalır.
$\vec{R} \neq 0$ " " " 'e başlar.

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \dots +$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1} \vec{F_i}$$

$$\left.\begin{aligned} R_x &= R_{1x} + R_{2x} + \dots + R_{nx} = \sum_{i=1}^{n} R_{in} \\ R_y &= R_{1y} + R_{2y} + \dots + R_{ny} = \sum_{j=1}^{n} R_{jn} \end{aligned}\right\} \text{yön gözet}$$

* Hareket iki tür olabilir.

1) **Öteleme (translasyonel) Hareket** => Cismin bütünüyle hareket ettirir.

2) **Dönme (rotasyonel) Hareket**

Newton'un Birinci Yasası

* Duran bir cisim durmaya devam eder.
* Duran bir cisim dışardan bir kuvvet etki etmedikçe harekete geçmez.
* Hareket halindeki bir cisim dışardan bir kuvvet etki etmedikçe hareketin yönünü değiştirmez.

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad \left.\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0 \end{aligned}\right\} \text{yön gözet}$$

Hareket

1) Sabit Hızla Hareket

$$\boxed{P = V.t}$$

P = length = X

2) Sabit ivmeli Hareket

$$\bar{V} = \frac{V+V_0}{2}$$

$\bar{V}$ = ortalama hız

V = son hız

V_0 = ilk hız

$$X = \bar{V}t = \left(\frac{V+V_0}{2}\right)t$$

X = yol

$$a = \frac{V-V_0}{t}$$

a = ivme

$$X = V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

* Eğer a = sabit ise;

$$V = V_0 + at$$

$$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

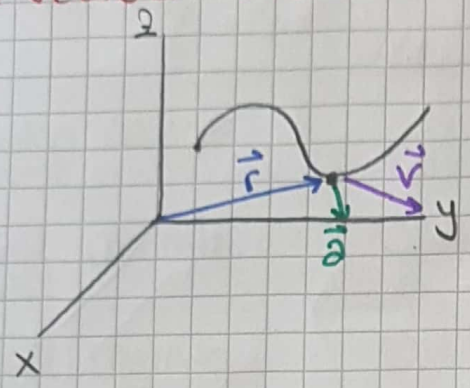
$$V^2 = V_0^2 + 2ax$$

3) Değişken ivmeli hareket

$V = \frac{dx}{dt}$ → hız yolun zamanla değişimidir.

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

* Vektörel Gösterim



* Hız daima gidilen yola teğettir.
* Hız, durum vektörünün ($\vec{r}$) zamanla değişimidir.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

* İvme hız vektörünün zamanla değişimidir.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2 \cdot \vec{r}}{dt^2}$$

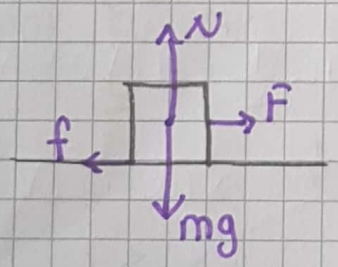
SÜRTÜNME KUVVETİ

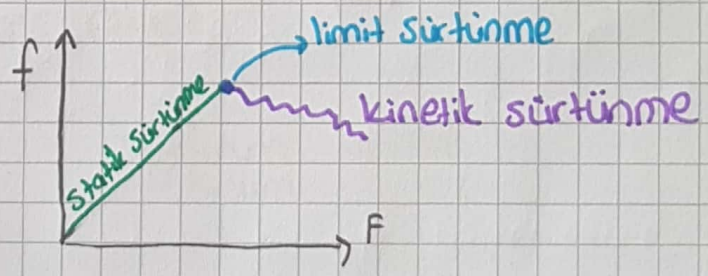
İki cisim birbirinin üzerinde kaydırılmak istenildiğinde daima hareketin aksi yönünde bir sürtünme kuvveti oluşur.

$f = \mu . N$

f = sürtünme kuvveti

μ = Sürtünme kat sayısı

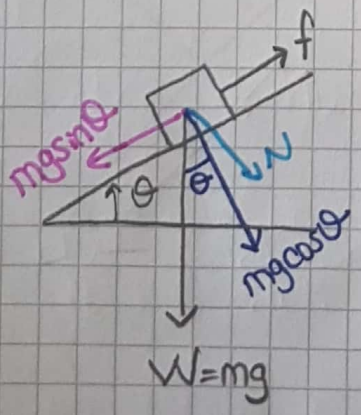




$f = \mu_s . N$

$f = \mu_l . N$

$f = \mu_k . N$



* mgsinθ cismi hareket ettirir.

$N = mg\cos\theta$

$f = \mu . mg\cos\theta$

* tam limit anında f ve mgsinθ dengededir. Birbirlerine eşittir.

$f = mg\sin\theta$

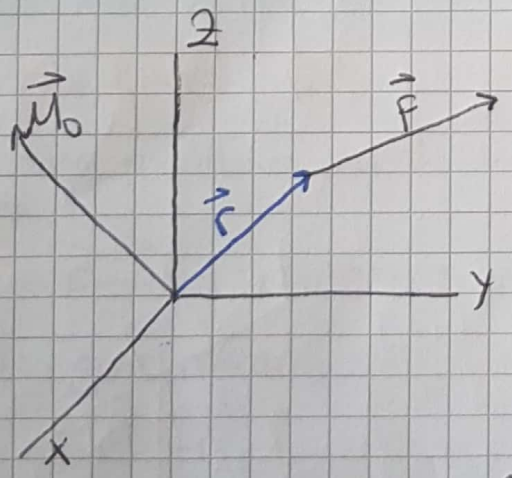
$\mu = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

Görüldüğü gibi sürtünme kuvvetleri 1'den büyük olabilir.

	μ_s	μ_k
Beton üzerinde lastik	1	0,8
Çelik üzerinde çelik	0,74	0,57
Çelik üzerinde alminyum	0,61	0,47
Cam üzerinde cam	0,94	0,4
Teflon üzerinde teflon	0,04	0,04
Buz üzerinde buz	0,1	0,03
İnsan eklemleri	0,01	0,03

Moment

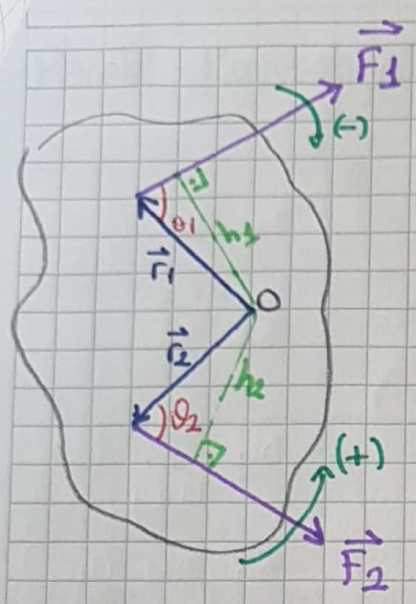
Moment kuvvetin döndürücü etkisidir.



$\vec{r}$ = durum vektörü
(konum ")

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

Bir vektörün O noktasına göre momenti bu kuvvetin O noktasına göre durum vektörüyle vektörel çarpımına eşittir.



* F_1 kuvveti cismi sağ doğru çekmek ve cisim O noktasında çakılı olduğu için saat yönünde döndürmek istemektedir.

* F_2 kuvveti cismi sağ doğru çekmek ve saatin aksi yönünde dönmek isteyecektir.

$\vec{F_1}$'in O'ya göre momenti

$$\vec{M_{O_1}} = \vec{r_1} \times \vec{F_1}$$

$$\vec{M_{O_1}} = |\vec{r_1}| . |\vec{F_1}| . \sin\theta_1 . \hat{e}_1$$

$$\vec{M_{O_1}} = \underbrace{r_1 . F_1 . \sin\theta_1}_{h_1} . \vec{e}_1$$

$$\vec{M_{O_1}} = h_1 . F_1 . \hat{e}_1$$

$$|\vec{M_{O_1}}| = h_1 . F_1 . \underbrace{|\hat{e}_1|}_{1}$$

$$\boxed{M_{O_1} = h_1 . F_1}$$

$$\boxed{M_{O_2} = h_2 . F_2}$$

$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

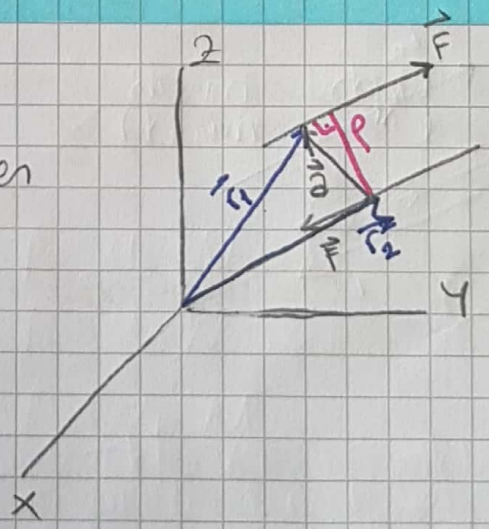
$$M_O = h . F$$

Joule = m.N

Örnek = Kuvvet Çifti

* Birbirine paralel ve zıt iki kuvvetten oluşur.

$$\vec{R} = \vec{F} - \vec{F} = 0 \text{ HAREKET YOK}$$



O'ya göre momenti

$$\vec{M_O} = \vec{r_1} \times \vec{F} - \vec{r_2} \times \vec{F}$$

$$= (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F}$$

$$\boxed{\vec{M_O} = \vec{a} \times \vec{F}}$$

$$\vec{M_O} = |\vec{a}| |\vec{F}| \sin\theta \, \hat{e}$$

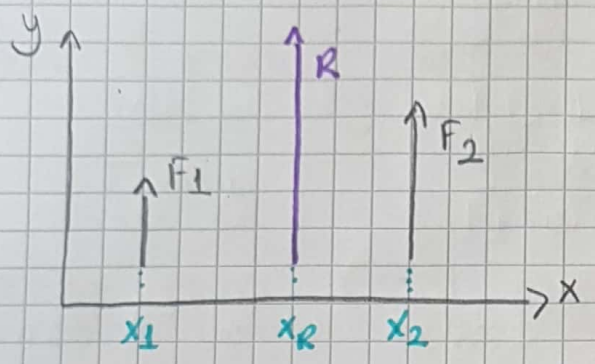
$$\vec{M_O} = a F . \sin\theta . \hat{e}$$

$$\vec{M_O} = \ell . F . \hat{e}$$

$$|M_O| = \ell F |\hat{e}|$$

$$\boxed{M_O = \ell . F}$$

Paralel Kuvvetlerin Bileşkesi



$$R = F_1 + F_2$$

* F_1 ve F_2'nin O'ya göre momenti olursa

$$M_O = x_1 F_1 + x_2 F_2$$

$$M_O = x_R \cdot R$$

$$x_R \cdot R = x_1 \cdot F_1 + x_2 F_2$$

$$x_R = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 F_2}{R}$$

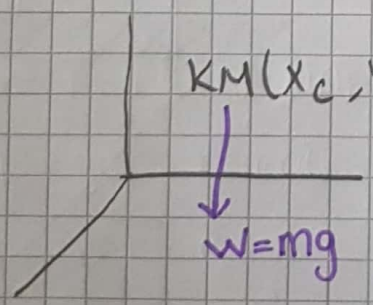
$$\boxed{x_R = \frac{x_1 \cdot F_1 + x_2 \cdot F_2}{F_1 + F_2}}$$

* Eğer iki den fazla paralel kuvvet varsa moment hesabına bunlar da eklenir.

$$\boxed{x_R = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i F_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}}$$

AĞIRLIK MERKEZİ - KÜTLE MERKEZİ

Bir cismin bütün kütlesi bir noktada toplanmış gibi kabul ederek bulma ve cismin toplam ağırlık kuvvetinin etki ettiği noktaya ağırlık merkezi denir.



Koordinatı $= (x_n, y_n, z_n)$

* Ağırlık kuvvetleri birbirine paraleldir. $\Delta W_1 // \Delta W_2 // \ldots // \Delta W_n // W$

* Bu kuvvetlerin O noktasına göre momentleri alınacak olunursa;

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i} ; \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i} ; \quad Z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \Delta W_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta W_i}$$

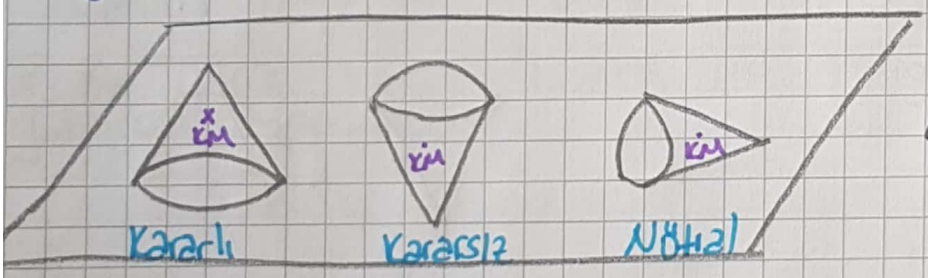
* Eğer cisim küçük parçalara bölünemiyorsa sonsuz küçük parçalara bölünerek toplam integral yöntemiyle alınır.

$\Delta W = dW$

$\Sigma = \int$

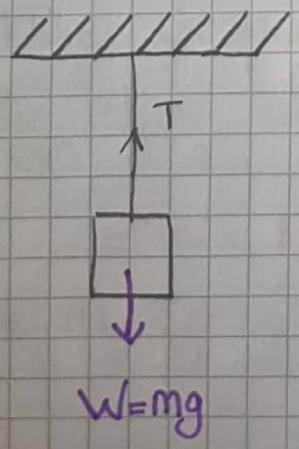
$$\left. X_c = \frac{\int x\,dW}{\int dW} , \quad Y_c = \frac{\int y\,dW}{\int dW} , \quad Z_c = \frac{\int z\,dW}{\int dW} \right\} KM$$

Denge Konumları



Ağırlık merkezi yere ne kadar yakınsa denge de o kadar KARARLIDIR.

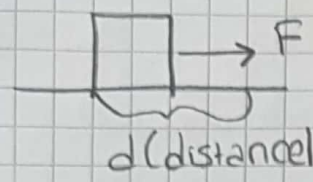
İş, Enerji ve Güç



T ve W yaptığı iş sıfırdır.

İş (Work → W)

(*)



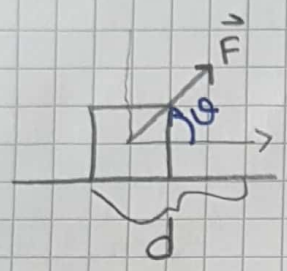
$W = F.d$

Joule = N.m (birim)

Erg = Dyn.cm (alt birim)

$\boxed{1J = 10^7 erg}$

(*)



$W = F.d.\cos\theta$

$W = \vec{F}.\vec{d}$

(*) Bir cisme bir F kuvveti etki ettiğinde Δx kadar gidiyorsa yapılan iş

$$\Delta W = F.\Delta x$$

Toplam iş => $W = \Sigma F \Delta x$

(*) Bir cisme bir F kuvveti etki ettiğinde dx kadar gidiyorsa yapılan iş

$$dW = F.dx$$

Toplam iş integral formülüyle elde edilir.

$W = \int dW$ $\quad$ $W = \int F dx$

Vektörel Gösterimi

(*) Bir cisme bir F kuvveti etki ettirildiğinde bu cisim ds vektörü kadar gidiyorsa yapılan iş

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

Toplam iş => $W = \int \vec{F}.d\vec{s}$

Enerji => Bir sistemin iş yapabilme kabiliyetidir.

Potansiyel Enerji (E_p)

Bir cismin durumu sebebiyle sahip olduğu enerjidir.

Örn => Yüksekte duran bir kaya parçası
Gerilmiş bir yay

Kinetik Enerji (E_k)

Bir cismin hızı sebebiyle sahip olduğu enerjidir.

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Mekanik Enerji

Bir cismin potansiyel enerjisi ile kinetik enerjisinin toplamıdır.

İş-Enerji Teoremi

1) Sabit ivmeli hareketle iş-enerji teoremi

(*) $a = \frac{V - V_0}{t}$ $\qquad F = ma$

$$\boxed{F = m \cdot \frac{V - V_0}{t}}$$

(*) $x = \bar{V} t$

$$\boxed{x = \left(\frac{V + V_0}{2}\right) t}$$

(*) $W = Fx$

$$W = m \frac{V - V_0}{t} \left(\frac{V + V_0}{2}\right) t$$

$$W = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

iş = Son E_k - ilk K_E

$W = E_k - E_{k0}$

$E_k < E_{k0}$ => W (-)

$E_k > E_{k0}$ => W (+)

2) Degisken ivmeli Hareket

(*) $a = \frac{dv}{dt}$ $\qquad a = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v} \cdot \frac{dv}{dx}$

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

(*) $F = ma$

$F\,dx = mv\,dv$

$dW = mv\,dv$

Toplam is => $W = \int dW = \int mv\,dv$

$W = m\int v\,dv$

ÖZEL OLARAK

v bir v_0'dan baslayip v'ye kadar degisirse

$$W = m\int_{v_0}^{v} v\,dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = m\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}\right)$$

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

Görüldügü gibi degisken ivmeli hareket, sabit ivmeli hareketi de kapsar.

GÜÇ (POWER → P) => Birim zamanda yapilan is miktarıdır.

$P = \frac{W}{t}$ $\qquad$ Watt = $\frac{\text{Joule}}{\text{saniye}}$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

$$P = F \cdot \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v}$$

$P = F.V$ $\qquad$ Watt = newton . $\frac{\text{metre}}{\text{saniye}}$

İmpuls ve Momentum

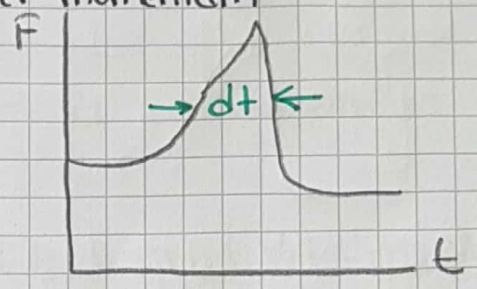
Momentum => Bir cismin kütlesiyle hızının çarpılmasıdır.

$\vec{P} = m.\vec{V}$ → lineer momentum

$\frac{d\vec{P}}{dt} = m.\frac{d\vec{V}}{dt}$ ($\vec{a}$)

$\frac{d\vec{P}}{dt} = m.\vec{a}$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$



Eğer momentum zamanla değişmiyorsa, yani sabitse zamana göre türevi sıfır olur. Bu durumda cisim üzerinde etki eden dış kuvvetlerin toplamı sıfır olur.

$F = 0$

$\frac{dP}{dt} = 0$ → Çizgisel Momentumun Korunumu ilkesi

İmpuls => Kısa sürede kuvvetin ani yükselmesidir.

$\frac{dP}{dt} = F$

$F.dt = dP$

$\int F dt = \int dP$

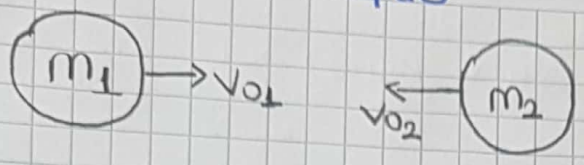
$\int F dt$ = impuls

* Özel olarak F sabitse

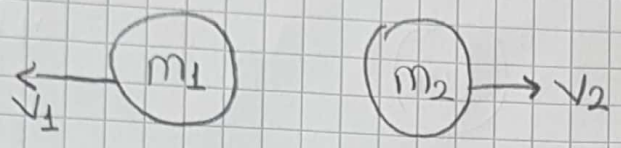
$F \int_0^t dt = \int_{P_0}^{P} dP$

$Ft = P - P_0$ → impuls = momentumlar farkı ($mv - mv_0$)

Çarpışmalar ve impuls



Çarpışmadan Hemen önce



Çarpışmadan Hemen Sonra

Birinci Cismin impulsu $\Rightarrow (Ft)_1 = m_1(-V_1) - m_1 V_{o1}$

İkinci " " $\Rightarrow (Ft)_2 = m_2 V_2 - m_2(-V_{o2})$

$$(Ft)_1 = -m_1 V_1 - m_1 V_{o1}$$

$$(Ft)_2 = m_2 V_2 + m_2 V_{o2}$$

* Bu iki impuls birbirine esit fakat zıt yondedir.

$$(Ft)_2 = -(Ft)_1$$

$$m_2 V_2 + m_2 V_{o2} = m_1 V_{o1} + m_1 V_1$$

$$\boxed{m_1 V_{o1} - m_2 V_{o2} = -m_1 V_1 + m_2 V_2}$$

Çarpışmadan hemen önceki momentumlar toplamı = Çarpışmadan hemen sonraki momentumlar toplamı