Subject :

Matris Cebiri

Date :...../...../.....

Tanım => Elemanları reel ya da kompleks sayı olan elemanlarının satır veya sütunlar halinde yazılmasıyla elde edilen tabloya matris denir.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to 1.\text{Satır} \\ \to 2.\text{satır} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \\ 1. & 2. & & \\ \text{Sütun} & \text{sütun} & & \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

i.satır j.sütun (kolon) bulunan a_{ij} elemanına ij-giriş veya ij-eleman denilir. $A = [a_{ij}]$

m satır ve n sütundan oluşan matris, $m \times n$ matris olarak adlandırılır. (m,n) sayı çiftine matrisin büyüklüğü (boyutu) mertebesi denir.

Eğer A ve B matrislerinin boyutları aynı veya karşılık elemanları eşitse A ve B matrislerine eşit denir ve $A = B$ yazılır.

Bir matris sadece bir satıra sahipse satır matrisi veya satır vektörü, sadece bir sütuna sahipse kolon matrisi veya kolon vektörü olarak adlandırılır.

Eğer matrisin tüm elemanları sıfırsa sıfır matrisi adı verilir.

Örn =>

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 4} \Bigg\} \text{ 2x4 boyutunda sıfır matrisi}$$

Matris Toplamı ve Skalerle Çarpma

Subject: Date :...../...../.....

* $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri $m \times n$ boyutunda iki matris olsun.

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

* A matrisinin bir k skalerle çarpımı kA veya kA biçiminde ve A'nın her bir elemanı ile çarpılmasıyla elde edilir.

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

* $-A=(-1)A$ $\qquad$ $A-B=A+(-B)$

Örn ⇒ $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 1 & -3 & -7 \end{bmatrix}$

→ $A+B = \begin{bmatrix} 1+4 & -2+6 & 3+8 \\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 11 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

→ $3A = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.(-2) & 3.3 \\ 3.0 & 3.4 & 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

→ $\underbrace{2A-3B}_{\text{lineer birleşim}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 0 & 8 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -18 & -24 \\ -3 & 9 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -22 & -18 \\ -3 & 17 & 31 \end{bmatrix}$

Subject : Date :...../...../.....

Teorem = A, B, C herhangi matrisleri (aynı boyutlu) ve k, k' de skaler sayılar olsun.

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(ii) $A+0 = 0+A = A$

(iii) $A+(-A) = (-A)+A = 0$

(iv) $A+B = B+A$

(v) $k(A+B) = kA+kB$

(vi) $(k+k')A = kA+k'A$

(vii) $(kk')A = k(k'A)$

(viii) $1.A = A$

* (ii) ve (iii)'teki 0 sembolü sıfır matrisini göstermektedir. Ayrıca (i) ve (iv) özellikleriyle birlikte matrislerin herhangi adetteki toplamı

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

Parantez gerektirmez ve matrislerin yazılış sırasına bağlı değildir.

$$A+A=2A \qquad A+A+A=3A \quad \dots$$

Matris Çarpımı

$A=[a_{ik}]$ ve $B=[b_{kj}]$ matrisleri, A'nın sütun sayısı B nin satır sayısına eşit olacak şekilde iki matris, yani A matrisi bir $m \times p$ matris, B matrisi de bir $p \times n$ olsun;

AB çarpımı $m \times n$ tipinde bir matris olup ij-elemanı A nın i.satırı ile B nin j sütunu çarpılarak elde edilir.

Örn =>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

1 satır, 1. sütun

1 satır 2. sütun

$$AB = \begin{bmatrix} -1+(-4)+15 & 0+14+12 \\ 0+2+10 & 0+(-7)+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

* $A.B \neq B.A$ matrislerde çarpma işleminin değişme özelliği yoktur.

Subject : Date :...../...../.....

Teorem = A, B, C herhangi üç matris olsun.

(i) $(AB)C = A(BC)$ Birleşme Kuralı

(ii) $A(B+C) = AB + AC$ Soldan Dağılma Özelliği

(iii) $(B+C)A = BA + CA$ Sağdan " "

(iv) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$, burada k bir skaler sayıdır.

→ O sıfır matrisi olmak üzere $OA = O$ ve $BO = O$

Örn ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 12 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}_{3\times 2}$

$AB = C$

$$AB = \begin{bmatrix} 3+(-14)+40 & 5+(-18)+55 \\ -6+21+96 & -10+27+132 \\ 15+84+56 & 25+108+77 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Örn ⇒ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

→ $AB = \begin{bmatrix} 5+0 & 6-4 \\ 15+0 & 18-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix}$

→ $BA = \begin{bmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 0-6 & 0-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$

Örn ⇒ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

$$AB = \begin{bmatrix} 4+3-4 & -2+9-1 & 0-15+2 & 12+3-2 \\ 8-2+20 & -4-6+5 & 0+10-10 & 24-2+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 6 & -13 & 13 \\ 26 & -5 & 0 & 32 \end{bmatrix}_{2\times 4}$$

Bir matrisin Transpozu

Satırı sütun haline (veya sütunu satır hâle getirme) işlemidir.
Eğer $A=[a_{ij}]$ bir $m\times n$ matris ise $b_{ij}=a_{ji}$ olmak üzere
$A^T=[b_{ij}]$ de bir $n\times m$ matristir.

Teorem ⇒

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T$ (iii) $(kA)^T=kA^T$

(ii) $(A^T)^T=A$ (iv) $(AB)^T=B^T.A^T$

Örn ⇒

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}_{2\times3} \qquad A^T=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{bmatrix}_{3\times2}$$

Kare Matris

Satır ve sütun sayıları eşit olan matristir. Bir $n\times n$ kare matris n.mertebeden denir ve n-kare matris olarak adlandırılır.

Köşegen

$A=[a_{ij}]$ bir n-kare matris olsun. A'nın **köşegeni** (esas köşegeni) aynı indisli elemanlardan oluşur.

$i=j \qquad a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$

Örn ⇒

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-4&-4&-4\\5&6&7\end{bmatrix}$$

3. mertebeden kare matristir.

A'nın köşegeni = {1, -4, 7}

Matrislerde Cebirsel İşlemler

Subject: Date: ...../...../.....

i) Matrislerde çarpma işlemi tanımlıdır. Çarpmanın kapalılık özelliği $\forall A, B$

$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$A = (a_{ij})_{n\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times n}$ $\quad M_n(\mathbb{R})$ kare matris

$M_{mn}(\mathbb{C})$ elemanları kompleks sayıdan ve boyutu $m\times n$ olan dikdörtgen matrisler ailesi

ii) Matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (C)_{n\times r}$, $C = (c_{ij})_{r\times p}$ olsun $\quad (AB).C = A(BC)$

$AB = (\ )_{m\times n}(\ )_{n\times n} = (\ )_{m\times n}$

① ve ② aynı mertebeden

① $\boxed{(AB)C} = (\ )_{m\times r}.(\ )_{r\times p} = (\ )_{m\times p}$

$BC = (\ )_{n\times r}(\ )_{r\times p} = (\ )_{n\times p}$

② $\boxed{A(BC)} = (\ )_{m\times n}(\ )_{n\times p}$

$= (\ )_{m\times p}$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

→ Çarpmanın değişme özelliği olmadığını gösterdik.

Örnek

$$A \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

$B = (\ )_{4\times 2}$, $A = (\ )_{4\times 4}$

$A.B = (\ )_{4\times 4}.(\ )_{4\times 2} = (c_{ij})_{4\times 2}$

$$C = \begin{bmatrix} 34 & -4 \\ 16 & 0 \\ 15 & -2 \\ 40 & -2 \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

Birim Matris

Köşegen elemanları 1, diğer bütün elemanları 0 olan n-kare matrise **n-kare özdeşlik** veya **birim matris** denir. I_n veya I ile gösterilir.

Herhangi bir n-kare matris A için;

$AI_n = I_nA = A$ olduğundan, çarpma isleminde I_n birim matrisi 1 skaları gibi davranır.

Örn

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}_{4\times4}$$

Skaler Matris (Scalar Matrix)

Herhangi bir k skaları için köşegen elemanları k, diğer bütün elemanları 0 olan kI_n matrisine k ye karşılık gelen **skaler matris** adı verilir.

$(kI_n)A = k(I_nA) = kA$ olduğuda görülebilir. Yani bir A matrisini kI_n skalar matrisiyle çarpmak, A matrisinin k skalarıyla çarpmak demektir.

Örn

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3} \quad k=5$$

* δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonu

$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ ile tanımlanır. $\rightarrow I = [\delta_{ij}]$ (birim matris)

Tersinebilir (Tekil Olmayan) Matrisler

$A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$ $A,B \in M_n(\mathbb{R})$ I_n birim matris olmak üzere;

$A.B = I_n = B.A$ sağlanıyorsa B matrisine A'nın tersi denir.

$B = A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$

$$A.\underset{\substack{\downarrow \\ \text{sağ} \\ \text{tersi}}}{A^{-1}} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{sol} \\ \text{tersi}}}{A^{-1}}.A = I_n$$

(KARE olmak zorunda)

eşittir.

Örnek ⇒ $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

matrislerinin birbirinin tersi olduklarını gösteriniz.

AB çarpımı hesaplanır

$$AB=\begin{bmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$AB=I$ olduğundan $BA=I$ dır.

Örnek ⇒ (2x2 matrisinin tersini bulma)

$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ tersini bul.

1) $|A| = 5(2)-3(4) = -2$

2) Köşegendeki elemanlar yer değiştirilir. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

3) Köşegende olmayan elemanların negatifleri alınır. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

4) Elde edilen matris $|A|$ ya bölünür. $\begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Subject: Date: ...../...../.....

Örnek=>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{3\times3}$$ olmak üzere $$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$ bulalım.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1+y_1+z_1=1$ $\quad$ $x_2+y_2+z_2=0$ $\quad$ $x_3+y_3+z_3=0$

$y_1+2z_1=0$ $\quad$ $y_2+2z_2=1$ $\quad$ $y_3+2z_3=0$

$x_1+2y_1+4z_1=0$ $\quad$ $x_2+2y_2+4z_2=0$ $\quad$ $x_3+2y_3+4z_3=1$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Örn=>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times4} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}_{4\times4}$$

$$A.A^{-1} = I_4 = A^{-1}.A$$

$$\boxed{* \quad A+(-A) = (-A)+A = [0] \quad * \qquad A^{-1} = -A}$$ → toplamaya göre ters eleman

Subject: Date: ...../...../.....

Köşegen Matris (Diagonal Matrix)

Bir $D=[d_{ij}]$ kare matrisinin köşegen olmayan tüm elemanları sıfır ise matris köşegendir.

$$D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$$

Örn =>

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{diag}(3,-7,2)$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{diag}(4,-5)$$

Alt Üçgen Matris (Lower Triangular Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ddots & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Üst Üçgen Matris (Upper Triangular Matrix)

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ & & b_{33} & b_{34} \\ & & & b_{44} \end{bmatrix} \qquad U_{ij} = \begin{cases} U_{ij}, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$$

Teorem => Her $n \times n$ kare matris, bir alt üçgen (esas köşegeni 1 olan) ile bir üst üçgen matrisin çarpımı ile yazılır.

$$A = (a_{ij})_{n \times n} \qquad A = \underbrace{L}_{\text{alt}} . \underbrace{U}_{\text{üst}}$$

Subject: Date :...../...../.....

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix}$$

Matris Çarpımı;

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & L_{12}U_{12}+U_{22} & L_{21}U_{13}+U_{23} \\ L_{31}+U_{11} & L_{31}U_{12}+L_{32}U_{22} & L_{31}U_{13}+L_{32}\cdot U_{23}+U_{33} \end{bmatrix}$$

$U_{11} = 2$ $\quad L_{21} = -1$

$U_{12} = 6$ $\quad L_{21} \cdot U_{12} + U_{22} = -5$

$U_{13} = 8$ $\quad U_{22} = 1$

$L_{21} \cdot U_{11} = -2$

$$= \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \boxed{3/2} & \boxed{-5} & \boxed{1} \end{bmatrix}}^{L} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 17 \\ 0 & 0 & 73 \end{bmatrix}}^{U}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 8 + (-5) \cdot 17 + 73 = 0$$

Simetrik Matrisler

Subject Date :...../...../.....

* Eğer $A^T = A$ ise A matrisi simetriktir. (Transpozu kendisine eşit olan)

$\rightarrow a_{ij} = a_{ji}$ ise $A = [a_{ij}]$ simetriktir.

! Kare matris olmalıdır.

* Bir A matrisi için eğer $A^T = -A$ veya eş değer olarak her $a_{ij} = -a_{ji}$ ise $A = [a_{ij}]$ ters simetriktir.

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

A'daki simetrik elemanları eşit veya $A^T = A$ olduğu kontrol edilerek görülebilir.

A simetriktir.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

B'nin köşegen elemanları sıfır, simetrik elemanları da birbirinin ters işaretlisi veya $B^T = -B$'dir.

B ters simetriktir.

Teorem => Her $A = (a_{ij})_{n \times n}$ kare matrisi, bir simetrik matris ile bir ters simetrik matrisin toplamı olarak yazılır.

$$\text{Simetrik Matris} = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$\text{Ters Simetrik Matris} = \frac{1}{2}(A + (-A^T))$$

$$A = S + T$$

Subject :

Date :...../...../.....

Ex

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & \frac{11}{2} \\ 2 & -5 & \frac{13}{2} \\ \frac{11}{2} & \frac{13}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2}(A + (-A)^T)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -6 & 5 & -4 \\ -8 & -9 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \frac{5}{2} \\ -4 & 0 & 5/2 \\ -5/2 & -5/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = S + T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -5 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrislerde Elemanter İslemler

Matrislerde elemanter satır islemleri ve elemanter sütun islemlei olmak üzere iki tip elemanter islem vardır.

1) Matrisin herhangi iki satırı aralarında yer degistirir.

row (satır) "r"

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

2. satır ile 3. satırı yer degistir.

$$r_2 \leftrightarrow r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

Benzer sekilde herhangi iki sütun aralarında yer degistirir.

column (sütun) "c"

2) Matrisin herhangi bir satırı k sıfırdan farklı bir reel sayı ile çarpılır.

Benzer sekilde sütun için geçerlidir.

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{①\ C_2 \leftrightarrow C_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$② \frac{1}{2} C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

3) Matrisin herhangi bir satırın sıfırdan farklı katının başta bir satıra ilave edilmesi

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

① $r_3 \to -2r_1 + r_3$

3. satırı değiştir → 1. satırı -2 ile çarp, 3. satırla topla.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

② $r_2 \to r_1 + r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 10 & 13 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

③ $r_2 \to \left(\frac{1}{2}\right) r_2$

$r_3 \to -r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 13/2 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

④ $r_3 \to -r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 13/2 \\ 0 & 0 & -3 & 5/2 \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad \text{Çevir} \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

① $C_2 \rightarrow -2C_1 + C_2$ ② $C_2 \rightarrow \left(\frac{-1}{2}\right) C_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 5 & -4 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

③ $C_3 \rightarrow -3C_1 + C_3$ ④ $C_3 \rightarrow 4C_2 + C_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & 2 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem => Matrislerde elemanter satır islemleri uygulayarak elde edilen matris bastaki matrise satırca denk olma bir denklik bağıntısıdır. Aynısı sütun içinde geçerlidir.

$A = (a_{ij})_{m\times n}$

(i) Yansıma Özelliği => Her matris sütunca denktir.

(ii) Simetri " => A B'ye sütunca denkse, B matrisi de A'ya sütunca denktir. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$

(iii) Geçişme Özelliği => $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Subject : Date :...../...../.....

Eselon Matris

(i) Her bir satırında sıfırdan farklı karşılacağım ilk eleman 1 olmalıdır.

(ii) Herhangi bir satırdaki 1, bir alt satırdaki 1'in solunda bulunur.

(iii) Varsa tamamen sıfır satırı en sonda bulunur.

bu şartları sağlayan matrise eselon matris denir.

Aynı şartlar sütun için geçerlidir.

Örn

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Satır Eselon Matris — Sütun Eselon Matris

Örn=> $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$ matrisini satır eselon forma getirelim.

Yani 3. satır 0 0 1 olmalıdır.

① $r_3 \to -4r_1 + r_3$ ② $r_3 \to 3r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

③ $r_3 \to \left(\frac{1}{2}\right) r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Satır Eselon Matris

İndirgenmiş Eşelon Matris

A eşelon matris olsun. (satır eşelon)

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her bir 1 elemanının bulunduğu sütundaki diğer tüm elemanlar SIFIR olmalıdır.

1 bulunduğu sütunun "Lider 1"i olmalıdır. Sütundaki 1'in dışındaki tüm terimler sıfır olmalıdır.

Örn

$$A = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 3 \\ 0 & \underline{1} & 2 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

→ sıfırlanmalı.

① $r_2 \to -2r_3 + r_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

② $r_1 \to -3r_3 + r_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

A'nın indirgenmiş eşelon formu I_3 birim matrisidir.

Örn $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ a) Satır eşelon matris haline getirin.

① $r_2 \to r_1 + r_2$

$r_3 \to -r_1 + r_3$

$r_4 \to r_1 + r_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

② $r_2 \to (-1)r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

③ $r_3 \to -2r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

④ $r_3 \to \left(\frac{1}{2}\right) r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

⑤ $r_4 \to r_3 + r_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix}$$

⑥ $r_4 \to \left(\frac{2}{5}\right) r_4$

$$\begin{bmatrix} \underline{1} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \underline{1} & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}$$

Satır eselon matris

b) indirgenmiş eselon forma getir.

① $r_3 \to \left(\frac{1}{2}\right) r_4 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

② $r_2 \to r_4 + r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ $r_1 \to -r_4 + r_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

④ $r_2 \to r_3 + r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

⑤ $r_1 \to r_2 + r_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A'nın indirgenmiş eselon matrisi I_4 birim matristir.

Bir $n \times n$ Matrisinin Tersini Bulma Uygulaması

Adım 1 => $M = [A, I]$ matrisini $n \times 2n$ (blok) biçiminde oluştur. Burada M nin sol yarısı A, sağ yarısı I birim matrisidir.

Adım 2 => M yi satırca eşelon biçime indirge. Eğer bu yöntem A'da bir sıfır satırı üretirse bu durumda DUR A'nın tersi yoktur (Aksi halde A üçgensel biçimdedir)

Adım 3 => M yi satırca kanonik biçime indirge

$$[A, I] \sim [I, A^{-1}]$$

Örn => $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ matrisinin tersini bulalım.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$*\, r_3 \to -4r_1 + r_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$*\, r_3 \to 3r_2 + r_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$*\, r_3 \to \frac{1}{2} r_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$*\, r_1 \to -3r_3 + 1$
$\quad r_2 \to -2r_3 + r_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -9/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{I_3} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{A^{-1}}$$

$$A \cdot A^{-1} = I_3 = A^{-1} \cdot A$$

Subject : Date :...../...../.....

=> Determinantlar <=

Elemanları reel (kompleks) sayı olan tüm $n \times n$ kare matrisler ailesi

$M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere;

tüm kare matrisleri bir reel sayıya karşılık getiren fonksiyona determinant fonksiyonu denir.

$\forall$ => her

$$f: \underbrace{M_n(\mathbb{R})}_{\text{Tanım kümesi}} \to \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{Değer kümesi}}$$

$$\forall A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n(\mathbb{R})$$

$$f(A) = \det A = |A| \in \mathbb{R}$$

fonksiyonun kuralı

1 ve 2 Mertebeli Determinantlar

$|a_{11}| = a_{11}$ ve $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

* 1×1 bir $A = [a_{11}]$ matrisinin determinantı a_{11} skaleridir, yani $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$.

* ikinci mertebeden bir determinant ;

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

+ −

$(a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21})$

Örnek

* $\det(27) = 27$, $\det(-7) = -7$, $\det(+-3) = +-3$

* $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} = (-5).4 - (7.8) = -76$

$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 5.6 - 3.4 = 18$

3 Mertebeli Determinantlar

Sadece 3x3 boyutlu matrislerin determinatını hesaplamak için Sarrus kuralı uygulanılır.

$$\begin{array}{cccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ - & a_{11} & a_{12} & a_{13} \; + \\ - & a_{21} & a_{22} & a_{23} \; + \\ - & & & \end{array}$$

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$

Örnek => Satır ve Sütuna göre;

* $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 8 \\ -8 & & -2 \\ -4 & & -4 \end{array}$$

$= (8 + (-2) + (-4)) - (2 + (-8) + (-4))$

$= 12$

$\boxed{\det A = 12}$

* $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{matrix}$

$$\begin{array}{cccccc} 2 & -8 & -4 & 8 & -4 & -2 \end{array}$$

$= (8 + (-4) + (-2)) - (2 + (-8) + (-4))$

$= 12$

$\boxed{\det A = 12}$

Determinatların Özellikleri

Date :...../...../.....

* Teorem => B'nin A'dan bir temel satır (kolon) işlemiyle elde edilebildiğini kabul edelim.

(i) Eğer A'nın iki satırı (kolonu) karşılık yer değiştirirse (bir kez)

$|B| = -|A|$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad (a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21})$$

$r_1 \leftrightarrow r_2$

$$B = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \quad (a_{21}.a_{22} - a_{11}.a_{22})$$

$$-\det A = \det B$$

(ii) Eğer A'nın bir satırı (kolonu) bir k skaleriyle çarpılırsa $|B| = k\,|A|$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad r_2 \to k r_2 \qquad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{vmatrix}$$

$$= k\,(a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12})$$

$$\boxed{|B = k.\,|A|}$$

(iii) Eğer A'nın bir satırının (kolonunun) bir katı diğer bir satıra (kolona) eklenirse $|B| = |A|$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad r_1 \to kr_2 + r_1 \qquad B = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{11}+ka_{21})a_{22} - (a_{12}+ka_{22})a_{21}$$

$$= a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$$

$$\boxed{|B| = |A|}$$

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek

sıfırlanmalı

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{4\times 4}$$

①

$*\ r_2 \to -r_1 + r_2$
$r_3 \to -r_1 + r_3$
$r_4 \to -r_1 + r_4$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

r_2 den 3 çarpanını dışarı atalım.
r_4 ten 2 çarpanını dışarı atalım.

②

$$* \quad 3.2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

sıfırla

③

$*\ r_3 \to r_2 + r_3$
$r_4 \to -r_2 + r_4$

$$6. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

4 katını at.

④

$$* \quad 24. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -2 \end{vmatrix}$$

sıfırla

⑤

$*\ r_4 \to r_3 + r_4$

$$24 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

-3 katını at.

⑥

$$* \quad 24.(-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

→ üst üçgen matris

$$\boxed{\det A = -72}$$

$*\ r_3 \to r_4 + r_3$
$r_2 \to 3r_4 + r_2$
$r_1 \to r_4 + r_1$

$$-72 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$*\ r_1 \to -r_3 + r_1$
$r_2 \to -r_3 + r_2$

$$-72 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$*\ r_1 \to r_2 + r_1$

$$-72 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

→ I_4 birim matris

Subject : Date :...../...../.....

Teorem => Bir üst üçgen matrisin (alt üçgen matrisin) determinatı esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımıdır.

→ Alt üçgen forma getirmek için matris elementer sütun işlemleri uygulanarak determinant elde edilir.

Teorem => Köşegen matrisin determinatı esas köşegen elemanlarının çarpımıdır.

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} = \det D$$

Teorem => İki A ve B matrisinin çarpımının determinantı, bunların determinantların çarpımıdır

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Teorem => Bir A matrisinin ve A^T transpozunun determinantı eşittir.

$$|A| = |A^T|$$

Alt Matris

$A=(a_{ij})_{m\times n}$ matrisinin herhangi bir satır ve sütunun silinmesiyle elde edilen matristir.

Örn⇒

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Esas Alt Matris

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ kare matrisin i.satır ve i.sütunun silinmesiyle elde edilen alt matrise denir.

Örn⇒

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad A_{44} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \qquad A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Minör ve Kofaktör

$A=a_{ij}$ matrisinin i yinci satırı ve j yinci sütununun silinmesiyle elde edilen bir alt matrisin determinantına minör denir.

a_{ij}'nin kofaktörü de işaretli minör olarak tanımlanır.

$$\underbrace{\alpha_{ij}}_{\text{işaretli minör}} = (-1)^{i+j} \underbrace{M_{ij}}_{\text{minör}}$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} -1 = (-1)^{i+j} & i+j \text{ tek} \\ 1 = (-1)^{i+j} & i+j \text{ çift} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Subject : Date :...../...../.....

Örn ⇒ $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ Alt Matris

$M_{33} = (5.1) - (4.2) = \boxed{-3}$

↳ Alt matrisin determinanti

$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} M_{33}$

$\alpha_{33} = \boxed{-3}$ → isaretli minör

→ $A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

$M_{23} = (8.1) - (7.2) = \boxed{-6}$

$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} . M_{23} = \boxed{6}$

Determinantların Hesaplanması (Herhangi bir satıra veya sütuna göre)

$n > 1$ olmak üzere sıfırdan farklı bir kare matris $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

→ i satırına göre determinantı

i. satır → $[a_{i1} \; a_{i2} \; \dots \; a_{in}]$

$$\det A = a_{i1} . \alpha_{i1} + a_{i2} . \alpha_{i2} + \dots + a_{in} . \alpha_{in}$$

→ j sütununa göre determinantı

j. sütun $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{1j} \alpha_{1j} + a_{2j} \alpha_{2j} + \dots + a_{nj} . \alpha_{nj}$$

Örn ⇒ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ işaretli minör ⇒ $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 12 \\ 12 \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \\ 8 \end{matrix}$$

$$\boxed{|A| = -14}$$

→ 2. satıra göre determinantı

$$\det A = 2 \cdot \alpha_{21} + 0 \cdot \alpha_{22} + 4 \cdot \alpha_{23} = \boxed{-14}$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(6-1) = -5$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(3-2) = -1$$

→ 3. sütuna göre determinantı

$$\det A = 1 \cdot \alpha_{13} + 4 \cdot \alpha_{23} + 3 \cdot \alpha_{33} = \boxed{-14}$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 2$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow -1$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow -4$$

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$*$ $r_2 \to -r_1 + r_2$
$r_3 \to -r_1 + r_3$
$r_4 \to -r_1 + r_4$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\to$ 1. sütuna göre determinantı

$$1.\alpha_{11} + 0.\alpha_{21} + 0.\alpha_{31} + 0.\alpha_{41} \Rightarrow \boxed{-72}$$

1. yol

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \boxed{-72}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

2. yol

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad r_1 \leftrightarrow r_2 \quad = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ 3 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$r_2 \to 3r_1 + r_2$
$r_3 \to 2r_1 + r_3$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 12 & -12 \\ 0 & 6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\alpha_{11} = (-)(-1) \begin{vmatrix} 12 & -12 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} \Rightarrow -72$$

Subject : Date :...../...../.....

Örnek

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & m \\ x^2 & y^2 & z^2 & m^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & m^3 \end{vmatrix}$$ Vandermonde Determinanti

* $C_2 \to (-1)C_1 + C_2$
$C_3 \to (-1)C_1 + C_3$
$C_4 \to (-1)C_1 + C_4$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x & m-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 & m^2-x^2 \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 & m^3-x^3 \end{vmatrix}$$

→ 1. satıra göre determinantı

$$\det A = 1 \cdot \alpha_{11} + 0 \cdot \alpha_{12} + 0 \cdot \alpha_{13} + 0 \cdot \alpha_{14}$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} y-x & z-x & m-x \\ y^2-x^2 & z^2-x^2 & m^2-x^2 \\ y^3-x^3 & z^3-x^3 & m^3-x^3 \end{vmatrix}$$

$$(y-x)(z-x)(m-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y+x & z+x & m+x \\ y^2+xy+x^2 & z^2+xz+x^2 & m^2+mx+x^2 \end{vmatrix}$$

* $C_2 \to (-1)C_1 + C_2$
$C_3 \to (-1)C_1 + C_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y+x & z-y & m-y \\ y^2+xy+x^2 & (z-y)(z+y+1) & (m-y)(m+y+1) \end{vmatrix}$$

Dışarı çıkar.

$$(y-x).(z-x).(m-x).(z-y).(m-y) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ z+y+1 & m+y+1 \end{vmatrix}$$

$(m-z)$

$$= 1 \cdot (y-x)(z-x)(m-x)(z-y)(m-y)(m-z)$$

Adjoint Matris (Klasik Ek Matris)

Bir $n \times n$ matris $A = [a_{ij}]$ olsun ve A_{ij} de a_{ij} nin kofaktörünü göstersin.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

A'nın kofaktörler transpozuna adjoint matris denir ve $adj\,A$ ile gösterilir.

$$Adj\,A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{n2} \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorem => A herhangi bir matris olsun. Bu durumda I birim matris olmak üzere

$$A(adj\,A) = (adj\,A)A = |A|\,I$$

Böylece eğer $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{1}{\underbrace{|A|}_{\hookrightarrow \det A}}(adj\,A)$$

Subject : Date :...../...../.....

Örn $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ $\rightarrow \alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$\alpha_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -18$ $\alpha_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2$ $\alpha_{13} = +\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -11$ $\alpha_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14$ $\alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5$

$\alpha_{31} = +\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -10$ $\alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$ $\alpha_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -8$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

det A = 2. satıra göre alsak

$= 0.\alpha_{21} + -4.\alpha_{22} + 2.\alpha_{23}$

$= 0 + (-4).14 + 2.5$

$= -46$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}.(\text{adj } A) = \frac{-1}{46}.\begin{bmatrix} -18 & -11 & -10 \\ 2 & 14 & -4 \\ 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{23} & \frac{11}{46} & \frac{10}{46} \\ \frac{-1}{23} & \frac{-7}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{-2}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{4}{23} \end{bmatrix}$$

Subject :

* Sınav Sorusu => Genel terimi $a_{ij} = \begin{cases} 0 \; ; & i,j\text{'nin tam sayı katı} \\ i+1 \; ; & i,j\text{'nin " " " değil} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan

a) $A = (a_{ij})_{5\times5}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $A^T . A$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 40 & 56 & 20 \\ 0 & 40 & 74 & 49 & 38 \\ 0 & 56 & 49 & 65 & 29 \\ 0 & 20 & 38 & 29 & 54 \end{bmatrix}$$

---

* Sınav Sorusu => Genel terimi $a_{ij} = \begin{cases} j-1 & j,i\text{'nin tam sayı katı} \\ 0 & j,i\text{'nin " " " değil} \end{cases}$

a) $A = (a_{ij})_{5\times5}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) $A . A^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 10 & 4 & 9 & 16 \\ 10 & 10 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 9 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

VIZE 1

Subject :

Date :...../...../.....

Sinav Sorusu ⇒

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{eselon}]{\text{Çevir satır}} \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; r_1 \leftrightarrow r_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; r_1 \to \frac{1}{2} r_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; r_3 \to -3r_1 + r_3$

$r_2 \to \frac{1}{2} r_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{+1}{2} \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; r_3 \to -2r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$* \; r_4 \to -3r_2 + r_4$

$r_3 \to -r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$* \; r_4 \to \frac{-3}{2} r_3 + r_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$* \; r_4 \to \frac{-1}{2} r_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Rank}(A) = 4$

Vize 2

Subject : Date :...../...../.....

Sınav Sorusu $\Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Devir sütun eselon $\rightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$

* $C_1 \leftrightarrow C_4$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

* $C_3 \rightarrow C_3 + C_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

* $C_4 \rightarrow -C_3 + C_4$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

* $C_2 \leftrightarrow C_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

* $C_3 \rightarrow -2C_1 + C_3$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

* $C_4 \rightarrow -C_3 + C_4$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

* $C_2 \rightarrow \frac{1}{2} C_2$

$C_3 \rightarrow \frac{1}{2} C_3$

$C_4 \rightarrow \frac{-1}{2} C_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

vize 3

Subject : Date : ...../...../.....

* $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\det A = (-3).7 - ((-2).8) = \boxed{-5}$

* $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$ $\det B = 12(-2) - ((-5).7) = \boxed{11}$

* $A = \begin{array}{c|ccc|c} & 3 & 4 & 1 & \\ & -4 & 5 & 6 & \\ 5 & 1 & 6 & -2 & -30 \\ 108 & 3 & 4 & 1 & -24 \\ 32 & -4 & 5 & 6 & 24 \end{array}$ $\Rightarrow (-30)+(-24)+24-(108+32+5)$

$= \boxed{-175}$

* $B = \begin{array}{c|ccc|c} & -4 & 3 & 1 & \\ & 5 & 4 & 6 & \\ 24 & 6 & 1 & -2 & 32 \\ -24 & -4 & 3 & 1 & 5 \\ -30 & 5 & 4 & 6 & 108 \end{array}$ $\Rightarrow 32+5+108-(24+(-24)-30)$

$= \boxed{175}$

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & 5 & -2 \\ 8 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\det A = ?$

1 2 3

* $r_2 \to r_2 - \frac{7}{3} r_1$
$r_3 \to r_3 - \frac{8}{3} r_1$
$r_4 \to r_4 - \frac{1}{3} r_1$

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -2 & 5/3 & 11/3 \\ 0 & -2 & 7/3 & -2/3 \end{vmatrix}$

* $r_3 \to r_3 - \frac{2}{7} r_2$
$r_4 \to r_4 - \frac{2}{7} r_2$

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 11/7 & 25/7 \\ 0 & 0 & 47/21 & -16/21 \end{vmatrix}$

* $r_4 \to r_4 - \frac{47}{33} r_3$

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{11}{7} & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-193}{33} \end{vmatrix}$

$3.(-7).\frac{11}{7}.\left(\frac{-193}{33}\right) = \boxed{193}$

VIZE4

Subject :

Date :...../...../.....

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \det A = ?$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$* \; R_2 \to R_2 + 3R_1$

$R_3 \to R_3 + 3R_1$

$R_4 \to R_4 + 2R_1$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -4 \\ 0 & 11 & 1 & -2 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$* \; R_3 \to R_3 - \frac{11}{9} R_2$

$R_4 \to R_4 - 1R_2$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3} & \frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$* \; R_4 \to R_4 - \frac{21}{25} R_3$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{25}{3} & \frac{26}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{193}{75} \end{vmatrix}$$

$$-1 \cdot 9 \cdot \frac{25}{3} \cdot \frac{193}{75} = \boxed{-193}$$

Vi2E 5

Subject : Date :...../...../.....

Lineer Denklem Sistemleri

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenli bir lineer denklem; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b sabitler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

standart biçimidir.

Bir $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayı dizisine lineer denkleminin bir çözümü denir.

Örn

$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13$ → Üç bilinmeyenli Denklem

$x_1 = 2 \quad x_2 = 3 \quad x_3 = -4$

Örn

$\mathbb{R}^2$'de $3x + 2y = -5$ bir doğru denklemi olup x ve y bilinmeyenler olmak üzere $(a_1 = 3, a_2 = 2, b = -5)$ iki bilinmeyenli lineer denklem

TANIM

n tane $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilinmeyenli, m tane $L_1, L_2, \ldots, L_m$ lineer denklem sisteminin standart biçimi; a_{ij} ve b_i sabitler olmak üzere;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

Matris formu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

şeklindedir.

→ Kat Sayılar Matrisi

Subject : Date :...../...../.....

* $m=n$ esitse **kare sistem** adı verilir.

* Denklem sistemin bir çözümü yoksa denklem sistemine **tutarsız** denir.

* Denklem sisteminde $b_1=b_2=b_3 \dots =b_n=0$ ise bu sisteme **homojen sistem** denir. $(A.x=0)$

* $AX=0$ lineer denklem sisteminde tutarsızlık yoktur. Sistemin daima **aşikar çözümü** vardır.

*

Lineer Denklem Sistemi
- Tutarsız
  - Çözüm Yok $d_1 // d_2$
- Tutarlı
  - Tek Çözüm: ikki doğru bir noktada kesişmesi
  - Sonsuz Sayda Çözüm: $d_1=d_2$

* $AX=\begin{bmatrix} b_1\neq 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ En az bir b sıfırdan farklı ise **homojen olmayan lineer denklem sistemi** denir. Tutarsızdır.

* ilaveli Matris;

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

$$[\quad A \quad : \quad B \quad]$$

→ Eğer $\text{rank } A = \text{rank } [A:B]$ ise sistem tutarlıdır ve çözümü vardır.

→ $\text{rank } A \neq \text{rank } [A:B]$ ise sistem tutarsızdır.

* **Tek çözüm**

$\text{rank } A = \text{rank } B = \text{rank } [A:B] =$ bilinmeyen sayısı $= n$

Subject : Date :...../...../.....

Rank Bulma ⇒ A matrisi satır (sütun) eselon hale getirilir. Eselon formdaki, tamamen sıfır olmayan satırların (sütun) sayısı satır rankını (sütun rankını) verir.

Satır rankı = sütun rankı = Rank A

Örnek

I. $x_1 + x_2 - 3x_2 + x_4 = 1$

II. $5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4$

III. $2x_1 + 5x_2 - 22x_3 + 8x_4 = 5$

homojen olmayan l.d.s tutarsızdır ve çözümü yoktur. x_1, x_2, x_3, x_4 bilinmeyen ve 3 denklemden oluşan l.d.s'in tutarlı olması demek, kat sayılar matrisinin rankını ilavelı [A:B] matrisinin rankına eşit olmalıdır.

* $r_2 \to r_2 - 5r_1$
$r_3 \to -2r_1 + r_3$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 16 & -6 & -1 \\ 0 & 3 & -16 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

* $r_2 \to -\frac{1}{3} r_2$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & -16 & 6 & 3 \end{array}\right]$$

* $r_3 \to -3r_2 + r_3$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{3} & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \boxed{0 = 2}$$

Tutarsız

* $r_3 \to \frac{1}{2} r_3$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -16/3 & 2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

rank[A : B] = 3

Subject :

Date :...../...../.....

Örnek

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 6 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

→ [redacted] eselon haline getirelim

* $r_2 \to -3r_3 + r_2$
  $r_1 \to -4r_3 + r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

* $r_1 \to -2r_2 + r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$x_1 - x_3 = -5$ $\qquad$ $\boxed{x_1 = x_3 - 5}$

$x_2 + 2x_3 = 3$ $\qquad$ $\boxed{x_2 = -2x_3 + 3}$

$\boxed{x_4 = 1}$ $\qquad$ $x_3 =$ keyfi değer

Bilinmeyen Sayı $= 4$

rank $A = 3$

rank $[A:B] = 3$

* Bilinmeyen sayı $= n$

Rank A = rank $[A:B] = r$

Bu durumda $n-r$ parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır. Parametre ataması, kat sayılar matrisi eselon forma getirilir.

Gauss Eleminasyon (Yok Etme) Yöntemi

Date :...../...../.....

Lineer denklem sistemini adım adım eşelon forma getirme işlemidir.

1) 1. denklemdeki x_1 bilinmeyenin kat sayısı 1 yapılır. Altında kalan tüm değerler sıfırlanır.

2) n. denklemdeki x_n bilinmeyenin kat sayısı 1 yapılır. Altında kalan tüm değerler sıfırlanır.

Örnek=>

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\boxed{A\,X = 0}$

$* \; r_1 \to \frac{1}{3} r_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$* \; r_2 \to r_2 - 4r_1$

$r_3 \to r_3 - r_1$

$r_4 \to r_4 - 6r_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$* \; r_2 \to \frac{1}{3} r_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1/3 & 5/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$* \; r_3 \to r_3 - \frac{1}{3} r_2$

$r_4 \to r_4 - r_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{rank}(A) = 2$$

$* \; r_1 \to \frac{-2}{3} r_2 + r_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 - 4x_3 = 0$

$x_2 + 5x_3 = 0$

$* \; x_1 = 4x_3$

$* \; x_2 = -5x_3$

$* \; x_3 =$ keyfi değer

* sistem tutarlıdır.

Gauss - Jordan Yöntemi $\boxed{AX=B}$

Lineer denklem sistemini adım adım indirgenmiş eşelon haline getirelim.

Örnek

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

① $r_1 \to \frac{1}{3} r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

② $r_2 \to r_2 - 2r_1$

$r_3 \to r_3 - r_1$

$r_4 \to r_4 - 2r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & -8/3 & 5/3 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

③ $r_2 \to \frac{1}{3} r_2$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 5/3 & -5/3 & -8/3 & 5/3 \\ 0 & 7/3 & 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{array}\right]$$

④ $r_3 \to r_3 - \frac{5}{3} r_2$

$r_4 \to r_4 - \frac{7}{3} r_2$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

⑤ $r_3 \leftrightarrow r_4$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

⑥ $r_3 \to \frac{1}{3} r_3$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

⑦ $r_4 \to -r_4$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -2/3 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{rank}(A) = 4$

Eşelon formu

Subject : Date :...../...../.....

(8) $r_3 \to \frac{-2}{3} r_4 + r_3$

$r_2 \to r_4 + r_2$

$r_1 \to \frac{1}{3} r_4 + r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(9) $r_2 \to r_3 + r_2$

$r_1 \to \frac{-2}{3} r_3 + r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

(10) $r_1 \to \frac{2}{3} r_2 + r_1$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

rank $(A) = 4$
rank $[A:B] = 4$

$x_1 = 1$
$x_2 = 0$
$x_3 = -1$
$x_4 = 0$

Sistem tutarlıdır.
Bilinmeyen sayısı $= 4$

Cramer Kuralı

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir $AX = B$ sistemi; kat sayılar matrisi (kare) $A = [a_{ij}]$ ve sabitlerin kolon vektörü de $B = [b_i]$ dir. A'nın i yinci kolonu, B kolon vektörü ile değiştirilerek elde edilen matris de A_i olsun.

Teorem ⇒ $AX = B$ sisteminin tek bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır.

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A} \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det A}$$

Teorem ⇒ $AX = 0$ homojen kare sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $D = |A| = 0$ olmasıdır.

Subject : Date :...../...../.....

Örn=> $x_1 + x_2 + x_3 = 5$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1$
$2x_1 + x_2 - x_3 = 3$

sistemini çözelim. → 4, -2, 3

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2-6+1+4+3+1 = 5$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20 \qquad x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det A} = 4$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -10 \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det A} = -2$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 \qquad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det A} = 3$$

2.Yol=> Gauss-Jordan Yöntemi ile aynı sonuç çıkıyor.

Örn => $-2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1$
$x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$
$-2x_1 - x_2 + x_3 = -3$

sistemini çözelim → 2, 3, 4

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} =$$

Subject :

Date :...../...../.....

Ters Matris Yöntemi

$AX=B$ denklemi, değişken sayısı denklem sayısına eşit olan (A, kareseL matris) bir doğrusal denklem sistemi olsun.

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$
$$\Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B$$
$$\Rightarrow I_n X = A^{-1}B$$
$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

Böylece $AX=B$ matris denkleminin çözümü $X=A^{-1}B$ olur.

ÖDEV

$$\begin{aligned} 11x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + 5x_3 - 12x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$AX=0$ homojen l.d.s tek çözümü sadece $X=0$ çözümü midir?

Yoksa sıfır çözümü dışında parametreye bağlı sonsuz çözüm var mıdır?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 11 & 8 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & -11 & 5 & -12 & 0 \end{array}\right]$$

gerekli satır işlemleri yapıldıktan sonra

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + (-1/2)\,x_4 &= 0 \\ x_3 + (-7/2)\,x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

→ Sistem tutarlıdır.
→ Sistemin sonsuz sayıda çözümü vardır.

→ Rank $A = 3$

$x_1 = 0$

$x_2 = (1/2)\,x_4$

$x_3 = (7/2)\,x_4$

$x_4 =$ keyfi değer

Örn ⇒ $x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$ homojen l.d.s

$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$

$3x_1 + 11x_2 + 3x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

① $r_2 \to -2r_1 + r_2$

$r_3 \to -3r_1 + r_3$

② $r_2 \to \frac{1}{7} r_2$

$r_3 \to -2r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/7 & -2/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = (11/7)\, x_3 + (-18/7)\, x_4 + (-22/7)\, x_5$

$x_2 = (3/7)\, x_3 + (3,7)\, x_4 + (6/7)\, x_5$

$x_3 = x_4 = x_5 =$ keyfi değer

rank $A = 2$

(n − rank) = parametre

3 parametreye bağlı sonsuz çözüm (Bilinmeyen sayı − rank)

---

* rank $A \neq$ rank $[A:B]$ ise sistem tutarsız.
* rank $A =$ rank $B =$ rank $[A:B] =$ bilinmeyen sayısı $= n$ ise

sistemin sadece tek çözümü vardır.

* rank $A =$ rank $[A:B]$ ve rank $A <$ bilinmeyen sayı ise

parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

* $AX = 0$ (homojen sistem) lineer denklem sisteminde tutarsızlık yoktur. Sistemin daima asıl çözümü vardır.

*

* $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$
* $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $T \cdot S = \frac{1}{2}(A + (-A)^T)$ $\Big\}$ $A = S + TS$
* $A = L \cdot U$

$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{M_{ij}}_{\text{minör}}$

minör ⇒ alt matrisin determinantı

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{adj } A)$

adjoint ⇒ A'nın kofaktörler transpozu

Altuzay

1) 0 vektörü W'ya aittir. $W \neq \emptyset$

2) Her $u, v \in W$ $u+v \in W$

3) Her $u, v \in W$ ve k herhangi bir gerçek sayı $(k \in W)$ $ku \in W$

Örn => $W = \{(x,y,z) : x+2y=0\}$ kümesi $V = R^3$ vektör uzayının alt uzayı mıdır?

1. Koşul => $W \neq \emptyset$ ✓

2. Koşul => $u = (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow u_1 + 2u_2 = 0$

$v = (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0$

$u + v = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$

$u_1 + v_1 + 2(u_2+v_2) = 0$ ☺ $u+v \in W$ ✓

3. Koşul => $W(x,y,z)$

$kw = (kx, ky, kz) \in W$ $kw \in W$ ✓

$k\underbrace{(x+2y)}_{0} = 0$

$0 = 0$

Sonuç => Altuzaydır.

Örn => $W = \{(x,y) : y = x+1, x \in R\}$ kümesi R^2'nin bir alt uzayı mıdır?

1. Koşul

$x=0 \quad y=1 \quad 0=(0,0) \notin W$

küme bir altuzay değildir.

* $W = \{(x,y,z) : x \leq y \leq z\}$
* $W = \{(x,y,z) : xy = 0\}$
* $W = \{(x,y,z) : x^2 = y\}$
* $W = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Alt uzay değil.

Lineer Bağımlılık ve Bağımsızlık

Örn ⇒ R^3 te $u=(1,1,0)$, $v=(1,3,2)$, $w=(4,9,5)$ vektörlerin lineer bağımlı olup olmadığını belirleyin.

1. YOL ⇒ $K(k_1, k_2, k_3)$

$k_1(1,1,0)+k_2(1,3,2)+k_3(4,9,5)=(0,0,0)=0$

sağlarsa lineer bağımlı

$K=(3,5,-2)$

$3(1,1,0)+5(1,3,2)-2(4,9,5)=0$

2. Yol ⇒ det=0 bağımlı, det≠0 bağımsız

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \det=0$$

3. Yol ⇒ Eselon matris haline getirildiğinde

* her sütunda pivot olursa lineer bağımsız
* herhangi bir sütunda pivot olmazsa lineer bağımlı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} ① \ r_2 \to -r_1+r_2 \\ ② \ r_2 \to \frac{1}{2} r_2 \\ ③ \ r_3 \to -2r_2+r_3 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Kolonları verilen vektörler olan

Üçüncü sütun bir pivota sahip değildir.

4. Yol ⇒ $xu+yv+zw=0$ ise $x=0, y=0, z=0$ lineer bağımsız

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}4\\9\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+y+4z&=0 \\ x+3y+9z&=0 \\ x+2y+5z&=0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x+(3/2)z&=0 \\ y+(5/2)z&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

z = keyfi değer

Pivot ⇒ Sıfırdan farklı ilk bileşen

Sonuç ⇒ Bağımlı

Baz

Bir $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vektör kümesi;

1) S kümesi lineer bağımsızdır.
2) S " V yi gerer.

} Bu iki koşulu sağlıyorsa V'nin bir bazıdır.

Soru => $S = \{(1,1,1), (1,2,3), (2,-1,1)$ $V = R^3$ uzayında bir baz mıdır?

1. Koşul =>

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= a \\ x + 2y - z &= b \\ x + 3y + z &= c \end{aligned}$$

$x = a + b - c$ $\quad y = \dfrac{b + 3(c + a - 2b)}{5}$

$z = \dfrac{c + a - 2b}{5}$

2. Koşul => Bu üç vektörün bir baz olabilmesi için gerek ve yeter şart lineer bağımsız olmalıdır. Buna göre satırları verilen vektörler olan bir matris oluşturulur ve bu matris satırca eselon biçime indirgenir.

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 3\\2 & -1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & -3 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

Bu eselon matrisin sıfır satırı yoktur, o hâlde bu üç vektör lineer bağımsızdır ve böylece R^3 ün bir bazını oluşturur.

Boyut

n boyutlu bir V vektör uzayının bir altuzayı W olsun.

Bu durumda boy $W \leq n$ 'dir.

→ Bazdaki lineer bağımsız vektör sayısı, vektör uzayının boyutu olarak tanımlanır.

Örn ⇒ R^4 ün aşağıdaki vektörler tarafından gerilen bir altuzayı W olsun,

$$u_1 = (1,-2,5,-3) \ , \ u_2 = (2,3,1,4) \ , \ u_3 = (3,8,-3,-5)$$

Satırları verilen vektörler olan matris oluşturulur ve satırca eşelon biçime indirgenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eşelon matris sıfır olmayan u_1 ve u_2 vektörleri, A'nın satır uzayının ve dolayısıyla W'nun bir bazıdır.

Böylece boy $W = 2$ 'dir.

Subject : Date :...../...../.....

→ A, 4. mertebeden bir kare matris ve $\det(A)=3$ olduğuna göre $\det(-2A)$ nedir?

$\det(A) = 3$ $\det(-2A) = (-2)^4 \cdot 3 = 48$

* $\det(cA) = c^n \det(A)$

→ $x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0$ homojen l.d.s.

$2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0$

$3x_1 + 11x_2 + 3x_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

① $r_2 \to -2r_1 + r_2$
$r_3 \to -3r_1 + r_3$

② $r_2 \to \frac{1}{7} r_2$
$r_3 \to -2r_2 + r_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/7 & -2/7 & -6/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 = x_4 = x_5 =$ keyfi değer

Bilinmeyen Sayısı $= n = 5$

rank $A = 2$

* Parametre Sayısı $= n - \text{rank}(A)$ $(\text{rank}(A) < n)$

3 parametreye bağlı sonsuz çözüm

---

* Sonsuz Çözüm 0 0 0 : 0
* Tek Çözüm 0 0 $\square$: $\square$ → her şey olabilir.
  ↳ sıfır olamaz X
* Çözüm yok 0 0 0 : ↳ Sayı

Subject :

Date :...../...../.....

homojen olmayan $(AX=B)$

$\rightarrow$ $x_1 + x_2 - x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$
$x_1 + x_2 + (a^2-5)x_3 = a$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a^2-5 & a \end{array}\right]$$

① $r_2 \rightarrow (-r_1)+r_2$
$r_3 \rightarrow (-r_1)+r_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right]$$

$a^2-4=a-2$

$\boxed{a=2}$

* $\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$

Sonsuz çözüm

Bilinmeyen Sayısı $=3$
rank$(A)=2$

Parametreye bağlı sonsuz çözüm vardır.

$\rightarrow$ $ax + 2y + 3z = 1$
$4x + 5y + bz = 2$
$7x + 8y + 9z = b$

homojen olmayan $(AX=B)$ f.d.s'in sonsuz çözümdür.

$a+b=?$ $\quad 1+3=\boxed{4}$

$a=1$ verirsek;

① $r_3 \rightarrow (-7r_1)+r_3$ $\quad 0 \quad -b \quad -12 \quad : \quad b-7$

② $r_3 \rightarrow 3r_1+r_3$ $\quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad : \quad b-4$

③ $r_3 \rightarrow r_1+r_3$ $\quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad : \quad b-3$

$b-3=0$

$b=3$

$\rightarrow$ Bilinmeyen sayısı $=3$

$\rightarrow$ rank$(A)=2$