Diferansiyel Denklemler

24.09.19

Tanım ⇒ Bilinmeyen fonksiyonun türevini içeren denklemlere "diferansiyel denklem" denir. Bilinmeyen fonksiyon yalnız bir değişkene bağlı ise, diferansiyel denkleme adi diferansiyel denklem, birden fazla değişkene bağlı ise kısmi (türevli) diferansiyel denklem denir.

ÖR

* $\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + 2xy = x+y+3$, $\underbrace{y=y(x)}$ olduğundan Adi diferansiyel denklem
  ↳ y fonk. sadece x'e bağlı

* $\underbrace{\frac{d^2y}{dx^2}}_{y''} + 3x\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} = 3x+5$, $y=y(x)$ Adi Diferansiyel Denklem

* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Kısmi Diferansiyel Denklem

  $u = u(\underbrace{x,y})$
  ↳ bağımsız değişkenler
  ↳ bilinmeyen fonksiyon

Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Tanım ⇒ Bir diferansiyel denklemde en büyük türevin basamağına diferansiyel denklemin mertebesi denir.

ÖR

* $y' + xy = \sin x$
* $(y')^2 - 4x^2 = 0$

} 1. mertebeden adi diferansiyel denklemler

* $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$
* $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

} 1 mertebeden kısmi diferansiyel denklemler

* $xy'' + 3y' + y\cos x = 0$
  $y'' + 4x^2(y')^3 + 3xy = 0$

} 2. mertebeden adi diferansiyel denklemler

* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ } 2. Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemler

Tanım => Eğer bir diferansiyel denklem var olan tüm türevlere göre bir polinom biçiminde yazılabiliyorsa, en yüksek mertebeden türevin kuvveline **diferansiyel denklemin derecesi** denir.

ÖR

* $\boxed{(y'')^3} + 5.(y')^5 + 3x^2 y^4 = 0$

denklem 2. mertebeden 3. dereceden diferansiyel denklem

NOT => Tüm diferansiyel denklemlerin mertebesi vardır ama derecesi olmak zorunda değildir.

ÖR

* $y'' + e^{xy'} + \cos(x+y) = 0$ → 2. merteden dif. denklem, derecesi yok.

* $y'' + e^x y' + \cos xy = 0$ → 2. mertebeden 1. dereceden adi dif. denklem

Tanım => Bir diferansiyel denklemdeki bağımlı değişken ve tüm türevleri birinci dereceden ise, diferansiyel denkleme **lineer diferansiyel denklem** denir.

ÖRN

* $y' = 3 + xy^2$ → 1. mertebeden 1. dereceden lineer olmayan dif. denklem

$(y')^{①} - xy^{②} = 3$

* $(y'')' + 2x(y')' + (y)' = 0$ → 2. mertebeden lineer diferansiyel denklem

* $(y''')^2 - y'' + y' - y = 0$ → 3. mertebeden 2. dereceden lineer olmayan denk.

* $y'' + xy' - \exp(y) = 0$ → 2. mertebeden lineer olmayan adi dif. denklem

* $\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = x\exp(x)$ → 4. merteden lineer adi dif. denklem

Diferansiyel Denklemlerin Olusturulmasi

Bir diferansiyel denklemi elde etmek için verilen fonksiyondan art arda türevler almak suretiyle elde edilen fonksiyonlarla verilen fonksiyonlar arasında sabitlerin yok edilmesi suretiyle elde edilir.

ÖR

* $y = x + C$ eğri ailesinin dif. denklemini bulunuz.

Türev alarak $\boxed{y' = 1}$ elde edilir.

* $y = C.x^2$ eğri ailesinin dif. denklemini bulunuz.

$$\frac{y'}{y} = \frac{2cx}{cx^2} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = \frac{2}{x}y \qquad \boxed{xy' - 2y = 0}$$

* $y = ae^{2x} + b.e^{-3x}$ fonksiyonun sağladığı dif. denklemini bulunuz.

$$* \frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$y' = 2ae^{2x} - 3be^{-3x}$$

$$y'' = 4ae^{2x} + 9be^{-3x}$$

$$+$$

$$y' + y'' = 6ae^{2x} + 6be^{-3x}$$

$$= 6(ae^{2x} + be^{-3x}) \Rightarrow y'' + y' - 6y = 0$$

* $y = ae^{-2x} + be^{-3x}$ fonksiyonun sağladığı dif. denklemini bulunuz.

$$y' = -2ae^{-2x} - 3be^{-3x} \qquad 5y' = -10ae^{-2x} - 15be^{-3x}$$

$$y'' = 4ae^{-2x} + 9be^{-3x} \qquad y'' = 4ae^{-2x} + 9be^{-3x}$$

$$+$$

$$5y' + y'' = -6ae^{-2x} - 6be^{-3x} = -6(ae^{-2x} + be^{-3x})$$

$$5y' + y'' + 6y = 0$$

Baslangıc ve Sınır Deger Problemleri

Bir diferansiyel denklem ve bilinmeyen fonksiyon türevleri üzerinde tümü bağımsız degiskenin aynı degerinde verilen kosullar, bir baslangıc deger problemi olustuur. Yardımcı kosullara, baslangıc kosulları denir.

Eger yardımcı kosullar bagımsız degiskenin birden fazla degerinde verilise problem bir sınır deger problemidir ve kosullara sınır kosulları denir.

ÖR

* $\underbrace{y'' + 2y' = e^x}_{\text{Dif. denklem}}$, $\underbrace{y(0) = 1 \quad y'(0) = 2}_{\text{baslangıc şartları}}$ → Baslangıc deger Problemi

* $\underbrace{y'' + 2y' = e^x}_{\text{Dif. denklem}}$, $\underbrace{y(0) = 1 \quad y(5) = 5}_{\text{sınır şartları}}$ → Sınır-deger Problemi

ÖR

* $y'' + 4y = 0$ dif. denklemi çözümünün $y(x) = c_1 . \sin 2x + c_2 . \cos 2x$ olduğu biliniyorsa

$y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$ baslangıc deger çözümünü bulun.

$y(x) = c_1 . \sin 2x + c_2 . \cos 2x$

$y'(x) = 2c_1 . \cos 2x - 2c_2 . \sin 2x$

* $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

* $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$y(0) = c_1 . \underbrace{\sin 0}_{0} + c_2 . \underbrace{\cos 0}_{1} = 0$

* $\sin(0) = 0$ * $\cos(0) = 1$

$c_2 = 0$

$y'(0) = 2c_1 . \cos 0 - 2c_2 . \sin 0 = 1$

$c_1 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x}$$

* $y=\ln x$ 'in $xy''+y'=0$ 'in $(0,\infty)$ üzerinde bir çözümü olduğunu ancak $(-\infty,\infty)$ üzerinde bir çözümü olmadığını gösteriniz.

$y=\ln x$

$y'=\frac{1}{x}$

$y''=\frac{-1}{x^2}$

$xy''+y'=x\left(\frac{-1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=0$ olduğundan $y=\ln x$ bu dif. denkleminin $(0,\infty)$ aralığında bir çözümüdür. Çünkü logaritma fonk. pozitif sayılar için tanımlıdır.

$y=\ln x$ bu dif. denkleminin $(-\infty,\infty)$ aralığında bir çözümü değildir. Çünkü logaritma fonksiyonu negatif sayılar için tanımlı değildir.

ÖR'li Tanım

$y''+4y=0$ dif. denkleminin genel çözümü $y(x)=C_1\cdot\sin 2x+C_2\cdot\cos 2x$ olduğu biliniyor. $C_1=5$ ve $C_2=-2$ alınırsa;

$y(x)=5\cdot\sin 2x-2\cos 2x$ çözümüne $y''+4y=0$ dif. denkleminin bir özel çözümü denir.

Singular (Tekil) Çözümler

Genel çözümde c sabitine değer verilerek elde edilemeyen çözümlerdir.

ÖR

* $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

* $y'=y^{2/3}$ dif. denkleminin

→ Genel çözümü elde edilir.

$\frac{dy}{dx}=y^{2/3}$

$\frac{dy}{y^{2/3}}=dx$

$\int y^{-2/3}dy=\int dx$

$3y^{1/3}=x+C$

$\underbrace{y=\left(\frac{x+C}{3}\right)^3}_{\text{genel çözümü}}$

→ Bu çözümde c'ye ne değeri verilirse verilsin $y=0$ çözümü elde edilemez. Bu yüzden $y=0$ çözümüne Singular (tekil) çözüm denir.

01 10.19

Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Diferansiyel Denklemler

Birinci mertebeden ve birinci dereceden diferansiyel denklem

(1) $y' + p(x) \cdot y^n = q(x)$ biçiminde yazılabilir.

→ Eğer $n=1$ ise, (1) denklemi lineerdir.

→ Eğer $n \neq 1$ ise, (1) " lineer olmayan denklemdir.

Standart Biçim = $y(x)$ bilinmeyen fonksiyonun, birinci mertebeden dif. denkleminin standart biçimi

$* \; y' = q(x) - p(x) \cdot y^n$

(2) $y' = f(x,y)$ 'dir.

(2)'de, $f(x,y)$ fonksiyonu $M(x,y)$ ve $-N(x,y)$ fonksiyonlarının bir oranı olarak yazılabilir. O zaman (2) denklemi

$$y' = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-M(x,y)}{N(x,y)}$$

(3) $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ denklemine dönüşür.

Değişkenlerinden Ayrılabilir Denklemler

Eğer (3)'de, $M(x,y) = A(x)$ ve $N(x,y) = B(y)$ oluyorsa, bu denkleme değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemler denir.

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

(4) $A(x)\,dx + B(y)\,dy = 0$

(4) dif denkleminin çözümü integral alınarak bulunur.

ÖR => $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ dif. denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Diferensiyel denkleminin her iki tarafını $\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)}$ ile çarpalım.

$$\frac{1}{(1+y^2)(1+x^2)} \cdot (1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} + \int \frac{dy}{1+y^2} = \int 0 \quad \left(\begin{array}{c}\text{Ayrılabilir} \\ \text{Dif. Denklem}\end{array}\right)$$

$$\arctan(x) + \arctan(y) = C$$

$$\arctan(y) = C - \arctan(x)$$

$$\tan(\arctan(y)) = \tan(C - \arctan(x))$$

$$y = \tan(C - \arctan(x))$$

ÖR => $\frac{dy}{dx} = (x-2)^2(y-3)$ dif. denkleminin genel çözümünü bulun.

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int (x-2)^2 dx$$

$y-3 = u$ $\quad$ $x-2 = v$

$dy = du$ $\quad$ $dx = dv$

$$\int \frac{du}{u} = \int v^2 dv$$

$$\ln|u| + C_1 = \frac{v^3}{3} + C_2$$

$$\ln|u| = \frac{v^3}{3} + \underbrace{C_2 - C_1}_{C}$$

$$\ln|y-3| = \frac{(x-2)^3}{3} + C$$

$$|y-3| = e^{\frac{(x-2)^3}{3} + C}$$

$$|y-3| = e^{C} \cdot e^{\frac{(x-2)^3}{3}}$$

$$y-3 = \mp d \cdot e^{\left(\frac{x-2}{3}\right)^3}$$

$$y = 3 \mp d \cdot e^{\frac{(x-2)^3}{3}}$$

→ $y = 3$'de bu dif. denklemin bir çözümüdür.
(Singular (tekil) çözüm)

ÖR= $3.e^x \tan y\,dx + (2-e^x)\sec^2 y\,dy = 0$

$$\int \frac{3e^x\,dx}{(2-e^x)} + \int \frac{\sec^2 y\,dy}{\tan y} = 0$$

$$-3\ln(|2-e^x|) + \ln(|\tan(y)|) = \ln C$$

$$\ln((2-e^x)^{-3}.\tan y) = \ln C \qquad * \ln(x) + \ln(y) = \ln(x.y)$$

$$\frac{\tan y}{(2-e^x)^3} = C$$

$$\tan y = C(2-e^x)^3$$

$$\arctan(\tan y) = \arctan(C(2-e^x)^3)$$

$$y = \arctan(C(2-e^x)^3)$$

Tam Diferansiyel Denklemler

Tanım => $f(x,y)$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^m f(x,y)$ oluyorsa bu $f(x,y)$ fonksiyonuna m. dereceden homojen denir.

ÖR => $f(x,y) = x.y + 3x^2 + 5y^2$ olsun.

$$= (\alpha.x)(\alpha.y) + 3(\alpha x)^2 + 5(\alpha y)^2$$

$$= \alpha^2.x.y + 3\alpha^2 x^2 + 5\alpha^2 y^2$$

$$= \alpha^2 \underbrace{(xy + 3x^2 + 5y^2)}_{f(x,y)}$$

olduğundan f fonksiyonu 2. dereceden homojendir.

ÖR => $f(x,y) = e^{x/y} + \tan\frac{y}{x}$ olsun.

$$= e^{\frac{\alpha x}{\alpha y}} + \tan\frac{\alpha y}{\alpha x}$$

$$= e^{x/y} + \tan\frac{y}{x}$$

$= \alpha^0 f(x,y)$ olduğundan f fonksiyonu 0. dereceden homojendir.

ÖR => $f(x,y) = 2x + 5y$ 1 dereceden homojendir.

$$f(\alpha x + \alpha y) = 2(\alpha x) + 5(\alpha y)$$
$$= \alpha^1 \underbrace{(2x+5y)}_{f(x,y)}$$

TANIM => $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi verilsin. $M(x,y)$ ve $N(x,y)$ fonksiyonlarının her ikisi de aynı dereceden homojen ise bu taktirde verilen denkleme "homojen diferensiyel denklem" denir.

Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

eşitliğinin sağ tarafındaki fonksiyon sıfırıncı dereceden homojendir.

Homojen bir fonksiyon $\frac{y}{x}$'in bir fonksiyonu şeklinde yazılabilir.

Homojen bir denklemde $u = \frac{y}{x}$ dönüşümü yapılacak denklem değişkenlerine ayrılabilir hale getirilir.

ÖR: $(2x-5y)dx + (4x-y)dy = 0$, $y(1) = 4$ başlangıç-değer probleminin çözümünü bulun.

Verilen denklem, ayrılabilir denklem değildir. Dif. denkleminin standart biçimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y-2x}{4x-y}$$ olarak elde edilir.

$$f(x,y) = \frac{5y-2x}{4x-y} \Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = \frac{5\alpha y - 2\alpha y}{4\alpha x - \alpha y}$$
$$= \frac{\alpha(5y-2x)}{\alpha(4x-y)}$$
$$= \alpha^0 f(x,y)$$

0. dereceden homojendir.

$\longrightarrow$

$$y' = \frac{5y-2x}{4x-y} = \frac{\frac{5y-2x}{x}}{\frac{4x-y}{x}} = \frac{5\frac{y}{x}-2}{4-\frac{y}{x}}$$

$$\frac{y}{x} = u$$

$$y' = u'.x + u$$

$$u'.x + u = \frac{5u-2}{4-u}$$

$$\frac{du}{dx}.x = \frac{5u-2}{4-u} - u$$

$$= \frac{u^2+u-2}{4-u}$$

$$\boxed{\frac{4-u}{u^2+u-2}\,du = \frac{dx}{x}}$$

Ayrılabilir Dif. Denklem

$$\int \frac{4-u}{u^2+u-2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{4-u}{u^2+u-2} = \frac{A}{(u+2)} + \frac{B}{(u-1)}$$

$$\frac{4-u}{u^2+u-2} = \frac{A(u-1)+B(u+2)}{(u+2).(u-1)}$$

$$4-u = 2B-A+(A+B)u$$

$$2B-A=4$$

$$+\ A+B=-1$$

$$A=-2$$
$$B=1$$

$$\frac{4-u}{u^2+u-2} = \frac{-2}{u+2} + \frac{1}{u-1}$$

$$\int \frac{4-u}{u^2+u-2}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-2\,du}{u+2} + \int \frac{1}{u-1}\,du = \int \frac{dx}{x}$$

$$-2\ln|u+2| + \ln|u-1| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{u-1}{(u+2)^2}\right| = \ln|c.x|$$

$$\frac{u-1}{(u+2)^2} = c.x$$

$$\boxed{\frac{\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}+2\right)^2} = c.x}$$

Dif. Denkleminin Çözümü

$$y(1)=4 \qquad y=4,\ x=1$$

$$\frac{\frac{4}{1}-1}{\left(\left(\frac{4}{1}\right)+2\right)^2} = c.1 \qquad \boxed{c=\frac{1}{12}}$$

$$\boxed{\frac{\frac{y}{x}-1}{\left(\frac{y}{x}+2\right)^2} = \frac{x}{12}}$$

Başlangıç-değer problemin Çözümü

ÖR=> $y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3}$ denklemini çözünüz. (Syf 26 - 4.12)

→ Bu diferensiyel denklem ayrılabilir değildir. Bunun yerine $y' = f(x,y)$ biçiminde

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{2(\alpha y^4 + \alpha x^4)}{(\alpha x)(\alpha y)^3} = \frac{\alpha^4(2y^4+x^4)}{\alpha^4(xy^3)} = \frac{2y^4+x^4}{xy^3} = f(x,y) \cdot \alpha^0$$

→ 0. dereceden homojendir. Şimdi denklemden $\frac{y}{x}$ oluşturmaya çalışalım.

$$y' = \frac{2y^4+x^4}{xy^3} = \frac{\frac{2y^4+x^4}{x^4}}{\frac{xy^3}{x^4}} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^4+1}{\left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

$\frac{y}{x} = u$

$y' = u' \cdot x + u$

$$u' \cdot x + u = \frac{2u^4+1}{u^3}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{2u^4+1}{u^3} - u$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u^4+1}{u^3}$$

$$\boxed{\frac{u^3 du}{u^4+1} = \frac{dx}{x}}$$

Ayrılabilir dif. denklemi

$$\int \frac{u^3 du}{\boxed{u^4+1}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{4v} dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{4} \ln|v| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|v| = 4 \ln|c \cdot x|$$

$$\ln|v| = \ln(cx)^4$$

$$\ln|u^4+1| = \ln(cx)^4$$

$$\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^4+1\right| = \ln(cx)^4$$

$$\ln(y^4+x^4) - 4\ln(x) = 4\ln(cx)$$

$$\ln(y^4+x^4) = 4\ln(cx^2)$$

$$y^4+x^4 = c^4 \cdot x^8$$

$$\boxed{y^4 = c^4 x^8 - x^4}$$

08.10.19

ÖR $\Rightarrow y' = \dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2.e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$ denklemini çözünüz. (Sayfa 28 - 4.17)

→ Bu diferensiyel denklem ayrılabilir değildir.

$$f(\alpha x,\alpha y) = \frac{2(\alpha x)(\alpha y)e^{(\alpha x/\alpha y)^2}}{(\alpha x)^2+(\alpha x)^2.e^{(\alpha x+\alpha y)^2}+2(\alpha x^2).e^{(\alpha x/\alpha y)^2}}$$

$$f(\alpha x,\alpha y) = \frac{\alpha^2(2xye^{(x/y)^2})}{\alpha^2(y^2+y^2.e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2})}$$

$$= \alpha^0.f(x,y)$$

→ 0. dereceden homojendir.

→ $y' = \dfrac{dy}{dx}$ Her tarafı y^2'e bölünecek.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}{2xye^{(x/y)^2}}$$

$\dfrac{x}{y} = u$

$x' \quad u'$

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{du}{dy}.y+u$

$$u'.y = \frac{1+e^{u^2}+2u^2e^{u^2}}{2ue^{u^2}} - u$$

$$\frac{du}{dy}.y = \frac{1+e^{u^2}}{2u(e^{u^2})}$$

$1+e^{u^2} = v$

$2ue^{u^2}du = dv$

$$\frac{du.2u(e^{u^2})}{1+e^{u^2}} = \frac{dy}{y}$$

$$\int\frac{dv}{v} = \int\frac{dy}{y}$$

$$\ln|v| = \ln|x|.\ln|c|$$

$$\boxed{y = c(1+e^{(x/y)^2})}$$

Homojen Hâle İndirgenebilen Denklemler

Tanım ⇒ f sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 \cdot y + c_1}{a_2 x + b_2 \cdot y + c_2}\right)$$

formundaki diferensiyel denklemlere "homojen hale indirgenebilen dif. denklem" denir.

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ve $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ olsun.

$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$

$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

Sistemin tek çözümü vardır. Bu çözüm (a,b) olsun.

$X = x - a$, $Y = y - b$ ötelemesi yapalım.

$dX = dx$, $dY = dy$

$x = X + a$, $y = Y + b$

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 (X+a) + b_1 (Y+b) + c_1}{a_2 (X+a) + b_2 (Y+b) + c_2}\right)$$

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y + \overbrace{a_1 a + b_1 b + c_1}^{0}}{a_2 X + b_2 Y + \underbrace{a_2 a + b_2 b + c_2}_{0}}\right) = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$$

dif. denklemi homojen tiptedir.

$u = \frac{Y}{X}$ dönüşümü ile ayrılabilir hâle dönüştürülerek, integral alınarak çözüm elde edilir.

ÖR ⇒ $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$ dif. denkleminin genel çözümü nedir?

$X = x - a$ $\quad$ $Y = y - b$

$x = X + 1$ $\quad$ $y = Y + 2$

$$\left.\begin{array}{l} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = a = 1 \\ y = b = 2 \end{array}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 1 - (Y+2) + 1}{X + 1 + Y + 2 - 3} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

→

$\Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = \dfrac{\alpha x - \alpha y}{\alpha x + \alpha y} = \dfrac{\alpha(x-y)}{\alpha(x+y)} = \alpha^0 . f(x,y)$ homojendir.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x-y}{x}}{\frac{x+y}{x}} = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$\dfrac{y}{x} = u$

$\underbrace{y}_{\frac{dy}{dx}} = u' . x + u$

$$u' . x + u = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} . x = \frac{1-u}{1+u} - u$$

$$\boxed{\frac{1+u}{1-2u-u^2} du = \frac{dx}{x}}$$

Ayrılabilir dif. denklemi

$$\int \frac{1+u}{\underbrace{1-2u-u^2}_{v}} du = \int \frac{dx}{x}$$

$v = 1 - 2u - u^2$

$dv = -2(1+u)du$

$$\int \frac{\frac{-1}{2} dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{2} \ln|v| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|v| = -2\ln|x.c|$$

$$\ln|v| = \ln(cx)^{-2}$$

$$v = c^{-2} . x^{-2}$$

$$1 - 2u - u^2 = \frac{1}{c^2 . x^2}$$

$$1 - 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{c^2 x^2}$$

$$1 - 2\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2 = \frac{1}{c^2 (x-1)^2}$$

Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemler

Tanım => $y' + p(x)y = q(x)$ şeklindeki denklemlerdir. Bu denklemin her iki tarafını $e^{\int p(x)dx}$ ile çarpalım.

$$\underbrace{y'.e^{\int p(x).dx} + y.p(x).e^{\int p(x)dx}} = e^{\int p(x).dx}.q(x)$$

$$\left(y.e^{\int p(x).dx}\right)' = q(x).e^{\int p(x).dx}$$

$$\int \left(y.e^{\int p(x).dx}\right)' = \int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx$$

$$y.e^{\int p(x).dx} = \int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + C$$

$$y = e^{-\int p(x).dx}.\left\{\int q(x).e^{\int p(x).dx}.dx + C\right\} \#$$

ÖR= $y' - 3y = 6$ dif. denkleminin çözümünü bulun. Syf 42 - 6.1

=> $y' + p(x)y = q(x)$ formülünden $p(x) = -3$, $q(x) = 6$

=> $\int p(x)dx = \int -3\,dx = -3x$

=> $I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-3x}$

$$y'.e^{-3x} - 3y.e^{-3x} = 6.e^{-3x}$$

$$\int (y.e^{-3x})'dx = \int 6.e^{-3x}dx$$

$$y.e^{-3x} = -2.e^{-3x} + C$$

$$\boxed{y = Ce^{3x} - 2}$$

ÖR $\Rightarrow y' - 2xy = \underbrace{x}_{q(x)}$ dif. denkleminin çöz. bul. Syf 43 - 6.3

$\Rightarrow P(x) = -2x \quad \int p(x)dx = \int(-2x)\,dx = -x^2$

$\Rightarrow I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-x^2}$

$y' \cdot e^{-x^2} - 2x \cdot e^{-x^2} \cdot y = x \cdot e^{-x^2}$

$\int (y \cdot e^{-x^2})' dx = \int x \cdot e^{-x^2} dx$

$y \cdot e^{-x^2} = \frac{-1}{2} \cdot e^{-x^2} + C$

$y = C \cdot e^{x^2} \frac{-1}{2}$

ÖR $\Rightarrow y' + \frac{4}{x} y = \underbrace{x^4}_{q(x)}$ dif. denkleminin çöz. bul Syf 43 - 6.5

$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{x} \quad \int p(x)dx = \int \frac{4}{x} dx = 4\ln|x| = \ln x^4$

$\Rightarrow I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{\ln x^4} = x^4$

$y' \cdot x^4 + 4x^3 \cdot y = x^8$

$\int (y \cdot x^4)' dx = \int x^8 dx$

$y x^4 = \frac{1}{9} \cdot x^9 + C$

$$\boxed{y = \frac{C}{x^4} + \frac{1}{9} x^5}$$

ÖR=> $\frac{dx}{dt} = x^2-2x+2$ denklemini çözünüz. Syf 24 -4.7

$\frac{dx}{x^2-2x+2} - dt = 0$ -> Ayrılabilir dif. denklem

$\int \frac{dx}{x^2-2x+2} - \int dt = C$

$\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} - \int dt = C$

* $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$

$\arctan(x-1) - t = C$

$\arctan(x-1) = C+t$

$x-1 = \tan(t+C)$

$\boxed{x = 1+\tan(t+C)}$

ÖR=> $e^x dx - y dy = 0$; $y(0)=1$ baslangıç değer problemini çözün. Syf 24 -4.8

$\int e^x dx - \int y du = 0$

$e^x - \frac{y^2}{2} = C$

$2(e^x-C) = y^2$

$\sqrt{2(e^x-C)} = y$

$x=0 \quad y=1$

$2(e^x-C) = y^2$

$2(e^0-C) = 1$

$C = 1/2$

$2(e^x-C) = y^2$

$\sqrt{2e^x - \frac{1}{2}} = y$

15.10.19

Bernoulli Diferensiyel Denklemleri

Tanım => $y' + p(x)y = q(x).y^n$ biçimindeki denklemlerdir.

Bu denklemde $n=0$ ise denklem lineer
$n=1$ " " değişkenlerine ayrılabilir tipten denklemdir

$y \neq 0$ için y^{-n} ile dif. denklemin her iki tarafını çarpalım;

$$y'.y^{-n} + p(x).y^{1-n} = q(x)$$ denklemine dönüşür.

$v = y^{1-n}$ dönüşümü yaparsak

$$v' = (1-n)y^{-n}.y'$$

=> her tarafı $(1-n)$ ile çarpalım.

$$(1-n).y^{-n}.y' + (1-n).p(x).y^{1-n} = (1-n).q(x)$$

$$v' + (1-n).p(x).v = (1-n).q(x)$$

(*) Dif. denkleminin, 1. mertebeden lineer dif. denklemdir. Bu denklem çözülüp değişkenler geriye doğru yerine yazılarak orijinal denklemin çözümü bulunmuş olur.

ÖR => $y' + \frac{3}{x}y = x^2 y^2$ Bernoulli dif. denkleminin genel çözümü nedir?
→ Sundan kurtul

$$y^{-2}.y' + \frac{3}{x}\boxed{y^{-1}} = x^2$$

$y^{-1} = v$
$y^2.y' = -v'$

$$-v' + \frac{3}{x}.v = x^2$$

$$\boxed{v' - \frac{3}{x}v = -x^2}$$ 1. mertebeden lineer dif. denklem

→

$\Rightarrow P(x) = \frac{-3}{x} \qquad \int p(x)\,dx = \int \frac{-3}{x}\,dx = -3\ln(x)$

$\Rightarrow I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-3\ln|x|} = x^{-3}$

Denklemin her tarafını $I(x)$ ile çarpalım.

$v' - \frac{3}{x} \cdot v = -x^2$

$x^{-3} \cdot v' - 3x^{-4} \cdot v = -x^{-1}$

$(x^{-3} \cdot v)' = \frac{-1}{x}$

$\int (x^{-3} \cdot v)' = -\int \frac{1}{x}\,dx$

$x^{-3} \cdot v = -\ln|x| + \ln c$

$x^{-3} \cdot v = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$v = x^3 \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$y^{-1} = x^3 \ln\left|\frac{c}{x}\right|$

$$\boxed{y = \frac{1}{x^3 \ln \frac{c}{x}}}$$

ÖR $\Rightarrow y' - \frac{4}{x} y = x\sqrt{y}$ Bernoulli dif. denkleminin çöz. bul.

$\sqrt{y}$ → kurtul

$y^{-1/2} y' - \frac{4}{x} \cdot \boxed{y^{1/2}} = x$

$y^{1/2} = v$

$\frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y' = v'$

$y^{-1/2} \cdot y' = 2v'$

$$\boxed{v' - \frac{2}{x} v = \frac{x}{2}}$$

1. mertebeden lineer dif. denklem

$\Rightarrow P(x) = \frac{-2}{x} \qquad \int p(x)\,dx = \int \frac{-2}{x} = -2\ln(x)$

$\Rightarrow I(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-2\ln(x)} = x^{-2}$

$\longrightarrow$

Denklemin her tarafını $I(x)$ ile çarpalım.

$$x^{-2} v' - 2x^{-3} \cdot v = \frac{1}{2x}$$

$$\int (x^{-2} v') = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx$$

$$x^{-2} \cdot v = \frac{1}{2} \ln x + \ln C$$

$$x^{-2} \cdot v = \ln |c\sqrt{x}|$$

$$v = x^2 \ln |c\sqrt{x}|$$

$$y^{1/2} = x^2 \ln |c\sqrt{x}|$$

$$y = (x^2 \ln |c\sqrt{x}|)^2$$

ÖR => $y' + \frac{1}{x} \cdot y = -2x^5 \boxed{y^4}$ denklemini çözün.

↳ kurtul

$$v = y^{-3}$$

$$v' = -3y^{-4} \cdot y'$$

$$\frac{v'}{-3} = y^{-4} \cdot y'$$

$$y' \cdot y^{-4} + \frac{1}{x} \cdot \boxed{y^{-3}} = -2x^5$$

$$\frac{v'}{-3} + \frac{1}{x} \cdot v = -2x^5$$

$$v' - \frac{3}{x} \cdot v = 6x^5$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{-3}{x} \qquad \int P(x) dx = \int \frac{-3}{x} dx = \ln x^{-3} = -3 \ln |x|$$

$$\Rightarrow e^{\int P(x) dx} = x^{-3}$$

$$x^{-3} \cdot v' - 3x^{-4} \cdot v = 6x^2$$

$$\int (x^{-3} \cdot v')' = \int 6x^2 dx$$

$$x^{-3} \cdot v = 2x^3 + C$$

$$v = x^3 (2x^3 + C)$$

$$v = 2x^6 + Cx^3$$

$$y^{-3} = 2x^6 + Cx^3$$

$$y = (2x^6 + Cx^3)^{-1/3}$$

Tam Diferensiyel Denklemler

Tanım ⇒ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dif. denkleminde

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

oluyorsa bu denkleme, "tam diferensiyel denklem" denir.

NOT $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ dif. denklemi tam ise bu taktirde;

(*) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

(**) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

olacak şekilde bir $F(x,y)$ fonksiyonu vardır ve verilen dif. denkleminin genel çözümü $F(x,y) = C$ formundadır.

ÖR ⇒ $\underbrace{2xy}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(1+x^2)}_{N(x,y)}dy = 0$ dif. denklemi tam mıdır?

Syf 33 - 5.1

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\, 2xy}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (1+x^2)}{\partial x} = 2x$$

dif. denklemi tamdır.

ÖR ⇒ $\underline{y}dx - \underline{x}dy = 0$ dif. denklemi tam mıdır?

Syf 33 - 5.3

$M(x,y)$ $N(x,y)$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (-x)}{\partial x} = -1$$

dif. denklemi tam değildir.

Syf 33 - 5.5

ÖR=> $(x+\sin y)dx + (x\cos y - 2y)dy = 0$ dif tam mıdır? dif. denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x+\sin y)}{\partial y} = \cos y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (x\cdot\cos y - 2y)}{\partial x} = \cos y$$

dif. denklemi tamdır.

(**) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$$\int F(x,y) = \int N(x,y)dy + hx$$
$$= \int (x\cos y - 2y)dy + h(x)$$
$$= x\sin y - y^2 + h(x)$$

(*) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$$\frac{d}{dx}(x\sin y - y^2 + hx)) = x + \sin y$$

$$\sin y + h'(x) = x + \sin y$$

$$h'(x) = x \qquad h(x) = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{F(x,y) = x\sin y - y^2 + \frac{x^2}{2} + C}$$

ÖR=> $(3x^2+4xy)dx + (2x^2+2y)dy = 0$ dif. denkleminin genel çöz. bulun

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (3x^2+4xy)}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (2x^2+2y)}{\partial x} = 4x$$

dif. denklemi tamdır.

(*) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$

$$\int F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y)$$
$$= \int 3x^2 + 4xy\,dx + g(y)$$
$$= x^3 + 2x^2y + g(y)$$

(**) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + 2y + g(y)) = 2x^2 + 2y$$

$$2x^2 + g'(y) = 2x^2 + 2y$$

$$g'(y) = 2y$$

$$g(y) = y^2 + C$$

$$F(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + C$$

ÖR => $(2+ye^{xy})dx + (x.e^{xy}-2y)dy=0$ Syf 34 - 5.b

$$\frac{\partial m(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(2+ye^{xy})}{\partial y} = e^{xy}+xy.e^{xy}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(x.e^{xy}-2y)}{\partial x} = e^{xy}+xy.e^{xy}$$

tam

** $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$

$$\int F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x)$$
$$= \int x.e^{xy}-2y\,dy + h(x)$$
$$= e^{xy}-y^2+h(x)$$

* $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = m(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x} e^{xy}-y^2+h(x) = 2+ye^{xy}$$
$$y.e^{xy}-2y+h'(x) = 2+ye^{xy}$$
$$h'(x) = 2+ye^{xy}-ye^{xy}$$
$$h'(x) = 2 \quad , \quad h(x) = 2x$$

$$F(x,y) = e^{xy}-y^2+2x+C$$

Tam Diferensiyel Denklem Haline Getirilebilen Denklemler

24.10.2019

Tanım => Eğer $m(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ denklemi tam diferensiyel denklem değilse, bazen bu denklem uygun bir $\lambda=\lambda(x,y)$ fonksiyonu ile çarpılmasıyla elde edilen $\lambda m(x,y)dx + \lambda N(x,y)dy = 0$ denklemi tam olur. Denklemi tam yapan bu $\lambda(x,y)$ fonksiyonuna diferensiyel denklemin integral çarpanı denir.

ÖR => $\lambda = xy^2$'nin $(2y-6x)dx + \left(3x - \frac{4x^2}{y}\right)dy = 0 \quad (y\neq 0)$

denkleminin bir integral çarpanı olduğunu gösteriniz.

$$\frac{\partial m(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(2y-6)}{\partial y} = 2$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial\left(3x-\frac{4x^2}{y}\right)}{\partial y}\right) = 3-\frac{8x}{y}$$

$\neq$ tam değildir.

$\longrightarrow$

$$\overbrace{(2xy^3-bx^2y^2)}^{m_1(x,y)}dx+\overbrace{(3x^2y^2-4x^3y)}^{N_1(x,y)}dy=0$$

$$xy^2\left\{(2y-bx)dx+\left(3x-\frac{4x^2}{y}\right)dy\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}m_1(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}=(2xy^3-bx^2y^2)=bxy^2-12x^2y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}N_1(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2-4x^3y)=bxy^2-12x^2y$$

dif tamdır.

Integral Çarpanının Bulunması

$\lambda=\lambda(x,y)$, $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ denkleminin bir integral çarpanı olsun.

Bu takdirde

$\lambda M(x,y)dx+\lambda N(x,y)dy=0$ dif denklemi tamdır. Böylece;

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda M)=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda N)$$

$$\lambda_y\cdot M+\lambda M_y=\lambda_x N+\lambda\cdot N_x$$

$$(*)\ \lambda(M_y-N_x)=N\lambda_x-M\lambda_y$$

elde edilir. Bu denklem λ bilinmeyenine göre bir kısmi diferensiyel denklemdir.

I) λ yalnız x'in bir fonksiyonu olsun. O halde $\lambda_y=0$ olup * denklemi

$\lambda(M_y-N_x)=N\cdot\lambda_x$

$\lambda_x=\frac{M_y-N_x}{N}\cdot\lambda$ biçiminde yazılabilir. λ yalnız x'in bir fonksiyonu olduğundan

$\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, de yalnız x'in bir fonksiyonudur. Bu durumda integral çarpanı

$\lambda=e^{\int f(x)dx}$ olur.

II) λ yalnız y'nin bir fonksiyonu olsun. O halde $\lambda_x=0$ * denklemi

$\lambda(M_y-N_x)=-M\lambda_y \Rightarrow \lambda_y=\frac{M_y-N_x}{-M}\cdot\lambda$ biçiminde yazılabilir. λ yalnız

y'nin bir fonksiyonu olduğundan $\frac{M_y-N_x}{-M}=g(y)$ de yalnız y'nin bir fonksiyonudur.

Bu durumda integral çarpanı $\lambda=e^{\int g(y)dy}$'dir.

ÖR=> $(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0$ dif. denkleminin çözümü bir integral çarpanı bularak elde ediniz.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (x^2+y^2+2x)}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (2y)}{\partial x} = 0$$

// tam değildir. (1)

I) $\frac{M_y - N_x}{N} \overset{?}{=} f(x) \Rightarrow \frac{2y-0}{2y} = f(x) \Rightarrow f(x)=1$

II) $\frac{M_y - N_x}{-M} = g(y) \Rightarrow \frac{2y-0}{-(x^2+y^2+2x)} \neq g(y)$

$$\lambda = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 1 dx} = e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} M_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(e^x x^2 + e^x 2x + e^x y^2) = 2y.e^x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} N_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x . 2y) = 2y.e^x$$

// dif. tamdır. (2)

Genel çözümümüz $F(x,y)=C$ olsun.

(**) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N_1(x,y)$

$$\int F(x,y) = \int N_1(x,y)dy + h(x)$$
$$= \int e^x . 2y dy$$
$$= (e^x . y^2 + h(x))$$

(*) $\frac{\partial}{\partial x} F(x,y) = M_1(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(e^x y^2 + h(x)) = e^x . x^2 + e^x 2x + e^x y^2$$

$$\cancel{e^x . y^2} + h'(x) = e^x . x^2 + e^x . 2x + \cancel{e^x y^2}$$

$$h'(x) = e^x . x^2 + e^x . 2x$$

$$h'(x) = (e^x . x^2)'$$

$$h(x) = e^x . x^2 + C$$

(3)

$$F(x,y) = e^x . y^2 + e^x . x^2 + C$$

ÖR $\Rightarrow$ $y\,dx + (3x - y^3)\,dy = 0$ dif. denklemini tam yapan bir integral çarpanı bularak çözümüz.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (y)}{\partial y} = 1$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (3x - y^3)}{\partial x} = 3$$

$\neq$ dif. denklemi tam değildir.

I) $\dfrac{M_y - N_x}{N} \overset{?}{=} f(x) \Rightarrow \dfrac{1-3}{3x-y^3} \neq f(x)$

II) $\dfrac{M_y - N_x}{-M} \overset{?}{=} g(y) \Rightarrow \dfrac{1-3}{-y} \Rightarrow g(y) = \dfrac{2}{y}$

$$\lambda = e^{\int g(y)\,dy} = e^{\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{\ln y^2} = y^2 \#$$

$$y^2 \{ y\,dx + (3x - y^3)\,dy \} = 0$$

$$\underbrace{y^3}_{M_1}dx + \underbrace{(3xy^2 - y^5)}_{N_1}dy = 0$$ dif. denklemi tamdır.

Dif. denklemnin çözümü $F(x,y) = C$ olsun.

(*) $\dfrac{\partial}{\partial x} F(x,y) = M_1(x,y)$

$$F(x,y) = \int M_1(x,y)\,dx$$
$$= \int y^3\,dx$$
$$= xy^3 + g(y)$$

(**) $\dfrac{\partial}{\partial y} F(x,y) = N_1(x,y)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3 + g(y)\right) = 3xy^2 - y^5$$

$$3xy^2 + g'(y) = 3xy^2 - y^5$$

$$g'(y) = -y^5$$

$$g(y) = \frac{-y^6}{6} + C$$

$$F(x,y) = xy^3 - \frac{y^6}{6} + C \#$$

Basit integral Çarpanı Bulma

* $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy.x - ydx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2}$ $\quad$ * $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$

* $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dxy - xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ $\quad$ * $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

* $d(x^2+y^2) = 2xdx + 2ydy$

* $d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = \frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{ydx - xdy}{y^2}}{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ #

* $d\left(\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}} = \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{\frac{y}{x}} = \frac{xdy - ydx}{xy}$

ÖR => $(2x^3 - y)dx + xdy = 0$

$2x^3dx + xdy - ydx = 0$ → her iki tarafı x^2'ye bölelim.

$2xdx + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$

$\int d(x^2) + \int d\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{y}{x} = C$

ÖR => $xdy - ydx - (1-x^2)dx = 0$

$\frac{xdy - ydx}{x^2} - \frac{1}{x^2}dx + dx = 0$

$d\left(\frac{y}{x}\right) + d\left(\frac{1}{x}\right) + dx = 0$

$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = C$

ÖR => $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

$xdx + ydx - xdy + ydy = 0$

$xdx + ydy + ydx - xdy = 0$

denklemin her iki tarafını x^2+y^2'ye bölelim.

$\frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0$

$x^2+y^2 = u$

$2xdx + 2ydy = du$

$xdx + ydy = \frac{du}{2}$

$\frac{\frac{du}{2}}{u} + d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = 0$

$\frac{1}{2}d(\ln u) + d\left(\arctan\frac{x}{y}\right) = 0$

$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y} = C$ #

ÖR => $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2+y^2)^2 dy = 0$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4y^3(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} dy = 0$$

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^2} + 4y^3 dy = 0 \qquad u = x^2+y^2$$

$$\frac{\frac{1}{2}du}{u^2} + d(y^4) = 0$$

$$\frac{1}{2} d\left(-\frac{1}{u}\right) + d(y^4) = 0$$

$$\frac{-1}{2(x^2+y^2)} + y^4 = C$$

ÖR => $x\,dy - y\,dx + x^2 y e^{-x^2} dx = 0$

denklemin her iki tarafını xy'ye bölelim.

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} + x \cdot e^{-x^2} dx = 0$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) + \frac{1}{-2}\left(-2xe^{-x^2} dx\right) = 0$$

$$d\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{1}{2} d\left(e^{-x^2}\right) = 0 \qquad d(e^{-x^2}) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

$$\ln\frac{y}{x} - \frac{1}{2} e^{-x^2} = C$$

ÖDEV => $x\,dy - y\,dx = (4x^2 + y^2)dy$ dif. denkleminin genel çöz. bulun.

Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemler

İkinci dereceden sabit katsayılı

(*) $a_2 y''(x) + a_1 y'(x) + a_0(x) y = 0$

dif. denklemi verilsin $y = e^{rx}$ biçiminde üstel tipten bir çözüm arayalım.

$y = e^{rx}$

$y' = r.e^{rx}$

$y'' = r^2.e^{rx}$

$a_2.r^2 e^{rx} + a_1.r_1.e^{rx} + a_0.e^{rx} = 0$

$\underbrace{e^{rx}}_{\neq 0} \{a_2 r^2 + a_1 r + a_0\} = 0$

(**) $a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$ denklemine dönüşür.

1. ÖR => $y'' - 4y' + 4y = 0$

$y = e^{rx}$

$y' = r.e^{rx}$

$y'' = r^2.e^{rx}$

$r^2.e^{rx} - 4r.e^{rx} + 4e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 - 4r + 4) = 0$

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$r_{1,2} = 0$

ÖR => $y'' + 2y' + 5y = 0$

$r^2.e^{rx} + 2r.e^{rx} + 5e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 + 2r + 5) = 0$

$r^2 + 2r + 5 = 0$

$r^2 + 2r + 4 + 1 = 0$

$(r+1)^2 = -4 = 4i^2$

$r + 1 = \pm 2i$

$r = -1 \mp 2i$

2. ÖR => $y'' - 3y' + 2y = 0$

$r^2.e^{rx} - 3r.e^{rx} + 2.e^{rx} = 0$

$e^{rx}(r^2 - 3r + 2) = 0$

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$(r-1)(r-2) = 0$

$r_1 = 1$

$r_2 = 2$

Diferensiyel denklemin genel çözümü

1. Durum => (r_1 ve r_2 reel ve farklı olsun)

iki lineer bağımsız çözüm $e^{r_1 x}$ ve $e^{r_2 x}$ tir ve genel çözümü

$y(x) = C_1.e^{r_1 x} + C_2.e^{r_2 x}$ 'dir.

2. ÖR'deki denklemin çözümü

$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$ 'dir.

$y_1(x) = e^{x}$'in

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$e^{x} - 3e^{x} + 2e^{x} = 0$

$0 = 0$

$y_2(x) = e^{2x}$

$y'' - 3y' + 2y = 0$

$4e^{2x} - 3.2.e^{2x} = 0$

$0 = 0$

dif. denkleminin bir çözümüdür.

ÖR => $y''-3y'+2y=0$ dif. denkleminin çözümünün $y(x)=c_1.e^{x}+c_2.e^{2x}$ olduğunu görelim.

$y(x) = c_1.e^{x}+c_2.e^{2x}$

$y'(x) = c_1.e^{x}+c_2.2.e^{2x}$

$y''(x) = c_1.e^{x}+4c_2.e^{2x}$

$y''-3y'+2y=0$

$c_1.e^{x}+4c_2.e^{2x}-3(c_1.e^{x}+c_2.2e^{2x})+2(c_1.e^{x}+c_2.e^{2x})=0$

$0=0$ ✓

2. Durum => ($r_1=r_2$ iki eşit reel kök)

iki lineer bağımsız çözüm e^{r_1x} ve xe^{r_1x}'dir. Dif denkleminin genel çözümü

$y(x)=c_1.e^{r_1x}+c_2.x.e^{r_1x}$'dir.

1. ÖR'deki gibi $y''-4y'+4y=0$ denklemi verilsin. Bunun genel çözümü

$y(x)=c_1.e^{2x}+c_2.x.e^{2x}$'dir.

ÖR => $y''-4y'+4y=0$ dif. denkleminin $y_2(x)=x.e^{2x}$ olduğunu görelim.

$y_2(x) = x.e^{2x}$

$y_2'(x)=e^{2x}+2e^{2x}x$

$y_2''(x) = 2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}$

$=4xe^{2x}+4e^{2x}$

$4xe^{2x}+4e^{2x}-4(e^{2x}+2e^{2x}x)+4(xe^{2x})=0$

$4(xe^{2x}+e^{2x}-e^{2x}+2e^{2x}x+xe^{2x})=0$

$0=0$ ✓

3. Durum => $\left.\begin{array}{l} r_1=c+di \\ r_2=c-di \end{array}\right\}$ iki kompleks kök olsun.

iki lineer bağımsız çözüm $e^{(c+di)x}$ ve $e^{(c-di)x}$'dir.

Genel Çözüm

$y(x)= c_1.e^{(c+di)x}+c_2.e^{(c-di)x}$

$= c_1.e^{cx}.e^{idx}+c_2.e^{-idx}e^{c}$

$=e^{cx}(c_1.e^{idx}+c_2.e^{-idx})$

$=e^{cx}\{(c_1+c_2)\cos dx+(c_{1i}-c_{2i})\sin dx\}$

$=e^{cx}(b_1.\cos dx+b_2.\sin dx)$

3. ÖR'teki $y'' + 2y' + 5y = 0$ dif. denkleminin karakteristik denkleminin çözümü

$r_{1,2} = -1 \mp 2$'dir.

$c = -1,\ d = 2$ olduğundan dif. denklemnin çözümü

$y(x) = e^{-1x}(b_1 . \cos 2x + b_2 . \sin 2x)$

$= e^{-x}\{b_1 . \cos 2x + b_2 \sin 2x\}$ #

ÖR => $y'' - 8y' + 15y = 0$

Karakteristik denklem => $r^2 - 8r + 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4.15 = 4$

$r_1 = \frac{8-2}{2} = 3$

$r_2 = \frac{8+2}{2} = 5$

$y(x) = c_1 . e^{3x} + c_2 . e^{5x}$ #

ÖR => $y'' + 9y = 0$

Karakteristik Denklem => $r^2 + 9 = 0$

$r^2 = -9$

$r^2 = 9i^2$

$r_{1,2} = \mp 3i$

$c = 0,\ d = 3$

$y(x) = \underbrace{e^{0x}}_{1}\{b_1 . \cos 3x + b_2 . \sin 3x\}$

$= b_1 . \cos 3x + b_2 . \sin 3x$

ÖR => $y^{IV} + 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$

Karakteristik Denklem => $r^4 - 4r^3 + 6r^2 - 4r + 1 = 0$

$(r-1)^4 = 0$

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 1$

$y(x) = c_1 . e^x + c_2 x e^x + c_3 . e^x . x^2 + c_4 . x^3 e^x$

ÖR => $y'' + 8y' + 17y = 0$

Karakteristik Denklem => $r^2 + 8r + 17 = 0$

$r^2 + 8r + 16 + 1 = 0$

$(r+4)^2 = i^2$

$r + 4 = \mp i$

$r = -4 \mp i$

$\boxed{\begin{matrix} c = -4 \\ d = 1 \end{matrix}}$

$y(x) = e^{cx}(b_1 . \cos dx + b_2 . \sin dx)$

$= e^{-4x}(b_1 . \cos x + b_2 . \sin x)$ #

ÖR => $y'' + 4y' = 0$

Karak. Denklem => $r^2 + 4r = 0$

$r(r+4) = 0$

$r_1 = 0 \quad , r_2 = -4$

$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 . e^{-4x}$

$= c_1 + c_2 . e^{-4x}$

ÖR => $y''' = 0$

$r^3 = 0$

$r_{1,2,3} = 0$

$y(x) = c_1 . e^{0x} + c_2 . x . e^{0x} + c_3 . x^2 . e^{0x}$

$= c_1 + c_2 . x + c_3 . x^2$

ÖR => $y^{IV} - 16y = 0$

Karak. Denklem => $r^4 - 16 = 0$

$(r^2)^2 - 4^2 = 0$

$(r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0$

$r^2 - 4 = 0$ $\qquad$ $r^2 + 4 = 0$

$r^2 = 4$ $\qquad$ $r^2 = -4 = 4i^2$

$r_{1,2} = \mp 2$ $\qquad$ $r_{3,4} = \mp 2i + 0$

$y(x) = c_1 . e^{2x} + c_2 . e^{-2x} + \underbrace{e^{0x}}_{=1} \{ c_3 . \cos 2x + c_4 . \sin 2x \}$

Belirsiz Katsayılar Yöntemi

12.11.19

ÖR => $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ dif. denk. Çözümünü bulun.

NOT => Dif. denk. genel çözümü

$$y(x) = \underbrace{yh(x)}_{} + yö(x) \rightarrow e^{5x}$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$

homojen dif. denk.

Çözüm

Case I => Önce homojen denk. Çöz. bulalım.

$y'' - 3y' + 2y = 0$ → homojen dif. denk.

$r^2 - 3r + 2 = 0$ → karakteristik denk.

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{array}\right\} \quad yh(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

Case II => Bir özel çözüm bulalım.

$yö(x) = Ae^{5x}$

$yö'(x) = 5Ae^{5x}$

$yö''(x) = 25Ae^{5x}$

$y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$

$25Ae^{5x} - 3(5Ae^{5x}) + 2Ae^{5x} = e^{5x}$

$12Ae^{5x} = e^{5x}$

$A = 1/12 \qquad yö(x) = \frac{1}{12} e^{5x}$

$y(x) = yh(x) + yö(x)$

$= C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{12} e^{5x}$

ÖR => $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

Case 1

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$r_1 = 1$

$r_2 = 2$

$y_h(x) = C_1 . e^{x} + C_2 e^{2x}$

Case 2

$y_ö(x) = A . x . e^{2x}$

$y_ö'(x) = A e^{2x} + 2A . x e^{2x} = (A + 2Ax) . e^{2x}$

$y_ö''(x) = 4A . e^{2x} + 4A . x e^{2x} = (4A + 4Ax) . e^{2x}$

$y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$

$(4A + 4Ax) e^{2x} - 3(A + 2Ax) e^{2x} + 2Ae^{2x} = e^{2x}$

$Ae^{2x} = e^{2x}$

$\boxed{A = 1}$

$y_ö(x) = x . e^{2x}$

$y(x) = y_ö(x) + y_h(x)$

$= C_1 . e^{x} + C_2 . e^{2x} + x . e^{2x}$

ÖR => $y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$

Case 1

$r^2 - 4r + 4 = 0$

$(r-2)^2 = 0$

$r_1 = 2$
$r_2 = 2$

$y_h(x) = C_1 . e^{2x} + C_2 e^{2x} . x$

Case 2

$y_ö(x) = A x^2 e^{2x}$

$y_ö'(x) = 2A x e^{2x} + 2A x^2 . e^{2x} = (2Ax + 2Ax^2) e^{2x}$

$y_ö''(x) = 2A . e^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax e^{2x} + 4Ax^2 . e^{2x}$

$= (2A + 8Ax + 4Ax^2) e^{2x}$

$y'' - 4y' + 4y = 8e^{2x}$

$(2A + 8Ax + 4Ax^2) e^{2x} - 4 . (2Ax + 2Ax^2) e^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} = 8e^{2x}$

$2Ae^{2x} = 8e^{2x}$

$\boxed{A = 4}$

$y_ö(x) = 4x^2 e^{2x}$

$y(x) = y_h(x) + y_ö(x)$

$C_1 . e^{2x} + C_2 . x e^{2x} + 4x^2 e^{2x}$

ÖR => $y'' - 5y' + 4y = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$

Case 1

$r^2 - 5r + 4 = 0$

$r_1 = 4 \quad r_2 = 1$

$C_1 . e^{4x} + C_2 . e^{x} = y_h(x)$

Case 2

$y_ö(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

$y_ö'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$

$y_ö''(x) = 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x}$

$y'' - 5y' + 4y = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$

$4Ae^{2x} + 4Be^{-2x} - 5(2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}) + 4.(Ae^{2x} + Be^{-2x}) = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$

$4Ae^{2x} + 4Be^{-2x} - 10Ae^{2x} + 10Be^{-2x} + 4Ae^{2x} + 4Be^{-2x} = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$

$-2Ae^{2x} + 18Be^{-2x} = 3e^{2x} + 4e^{-2x}$

$A = \frac{-3}{2} \qquad B = \frac{2}{9}$

$y(x) = C_1 . e^{x} + C_2 . e^{4x} - \frac{3}{2} e^{2x} + \frac{2}{9} e^{-2x}$

ÖR => $y'' - y' - 12y = 3\sin 2x$

$r^2 - r - 12 = 0$

$r_1 = 4$

$r_2 = -3$

$C_1 . e^{4x} + C_2 . e^{-3x} = y_h(x)$

$y_ö(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$

$y_ö'(x) = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$

$y_ö''(x) = -4A\sin 2x - 4B\cos 2x$

$y'' - y' - 12y = 3\sin 2x$

$-4A\sin 2x - 4B\cos 2x - (2A\cos 2x - 2B\sin 2x) - 12(A\sin 2x + B\cos 2x) = 3\sin 2x$

$\underbrace{(2B - 16A)}_{3}\sin 2x + \underbrace{(-2A - 16B)}_{0}\cos 2x = 3\sin 2x$

$2B - 16A = 3$

$-2A - 16B = 0$

$y(x) = C_1 . e^{4x} + C_2^{-3x} - \frac{12}{65}\sin 2x + \frac{3}{130}\cos 2x$

$A = -12/65$

$B = 3/130$

ÖR => $y'' + 9y = 6\cos 3x$

$r^2 + 9 = 0$

$r^2 = -9$

$r = 3i$

$y_h(x) = C_1 e^0 \cos(3x) + C_2 e^0 \sin(3x)$

$= C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

$y_ö(x) = Ax\cos 3x + Bx\sin 3x$

$y_ö'(x) = A\cos 3x + Ax - 3\sin 3x + B\sin 3x + Bx\, 3\cos 3x$

$y_ö''(x) = -6A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 6B\cos 3x - 9Bx\sin 3x$

$y'' + 9y = 6\cos 3x$

$-6A\sin 3x - 9Ax\cos 3x + 6B\cos 3x - 9Bx\sin 3x + 9(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x) = 6\cos 3x$

$\underbrace{-6A\sin 3x}_{A=0} + \underbrace{6B\cos 3x}_{B=1} = 6\cos 3x$

$y_ö(x) = x\sin 3x$

$y(x) = y_h(x) + y_ö(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x\sin 3x$

ÖR => $y'' - 5y' - 14y = 14x^2 - 4x - 35$

$r^2 - 5r - 14 = 0$

$r_1 = 7$

$r_2 = -2$

$y_h(x) = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-2x}$

$y_ö(x) = ax^2 + bx + C$

$y_ö'(x) = 2ax + b$

$y_ö''(x) = 2a$

$2a - 5(2ax + b) - 14(ax^2 + bx + C)$

$2a - 10ax - 5b - 14ax^2 - 14bx - 14C$

$14x^2 - 4x - 35 = -14ax^2 + (-14b - 10a)x - 5b + 2a - 14C$

$a = -1,\ b = 1,\ C = 2$

$y(x) = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-2x} - x^2 + x + 2$

ÖR => $y'' = 9x^2 + 2x - 1$

I. YOL

$$\int y'' = \int (9x^2 + 2x - 1)\,dx$$

$$\int y' = \int (3x^3 + x^2 - x + C_1)\,dx$$

$$\rightarrow y(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C_1 . x + C_2$$

II. Yol

Belirsiz katsayılar ile çözelim.

→ Önce homojen denklemin çözümünü bulalım.

$$y'' = 0 \Rightarrow r^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 0$$

$$y_h(x) = C_1 . \underbrace{e^{0x}}_{1} + C_2 . \underbrace{x . \underbrace{e^{0x}}_{1}}_{x}$$

→ Şimdi özel çözüm bulalım. $(ax^2 + bx + c).x^2$

$$y_ö(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

$$y_ö'(x) = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$

$$y_ö''(x) = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$9x^2 + 2x - 1 = \underbrace{12A}_{9}x^2 + \underbrace{6B}_{2}x + \underbrace{2C}_{-1}$$

$$A = \frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{-1}{2}$$

$$y_ö(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = y_ö(x) + y_h(x)$$

$$= \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2 x + C_1$$

19.11.19

ÖDEV

* $y' - 5y = (x-1)\sin x + (x+1)\cos x$
* $y' - 5y = 3e^x - 2x + 1$
* $y' - 5y = x^2 e^x - x e^{5x}$

NOT

* Sabit katsayılı homojen denklem
$\rightarrow 2y'' - 4y' + 8y = 0$
* Değişken katsayılı homojen dif. denklem
$\rightarrow x^2 y'' - xy' + y = 0$

* Sabit katsayılı homojen olmayan dif. denklem
$\rightarrow 2y'' - 4y' + 8y = e^{2x}$
* Değişken katsayılı homojen olmayan dif. denklem
$\rightarrow x^2 y'' - xy' + y = x^3$

Parametrelerin Değişimi Yöntemi

İkinci mertebeden

(1) $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = q(x)$

değişken katsayılı dif. denklemine ait

(2) $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

homojen denklemin genel çözümünün

(3) $y_h(x) = C_1 . y_1(x) + C_2 . y_2(x)$

olduğunu kabul edelim. (3)'de C_1 ve C_2 yerine sırasıyla $V_1(x)$ ve $V_2(x)$ alınırsa

(4) $y_p(x) = V_1(x)\, y_1(x) + V_2(x)\, y_2(x)$

şeklinde elde edilir.

$y_p' = V_1' y_1 + V_1 y_1' + V_2' y_2 + V_2 y_2'$

$y_p'' = V_1'' y_1 + 2V_1' y_1' + V_2 y_2'' + V_2'' y_2 + 2V_2' y_2' + V_2 y_2''$

(1) denkleminde bunları yerine yazarsak

(5) $a_0(V_1'' y_1 + 2V_1' y_1' + V_2 y_2'' + V_2'' y_2 + 2V_2' y_2' + V_2 y_2'') +$
$a_1(V_1' y_1 + V_1 y_1' + V_2' y_2 + V_2 y_2') + a_2(V_1 y_1 + V_2 y_2) = q(x)$

$\rightarrow V_1(a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + V_2(a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + a_0(V_1'' y_1 + 2V_1' y_1' + V_2'' y_2 + 2V_2' y_2') + a_1(V_1' y_1 + V_2' y_2) = q(x)$

$\rightarrow a_0(\underline{V_1'' y_1 + V_1' y_1' + V_2'' y_2 + V_2' y_2'}) + a_0(V_1' y_1' + V_2' y_2') + a_1(V_1' y_1 + V_2' y_2) = q(x)$

(6) $a_0(V_1' y_1 + V_2' y_2)' + a_0(V_1' y_1' + V_2' y_2') + a_1(V_1' y_1 + V_2' y_2) = q(x)$

(6)'da $V_1' y_1 + V_2' y_2 = 0$ kabul edilirse

$\rightarrow a_0(V_1' y_1' + V_2' y_2') = q(x)$ elde edilir.

$$\left.\begin{aligned} V_1' y_1 + V_2' y_2 &= 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' &= \frac{q(x)}{a_0} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

* (7) denklem sisteminden, V_1 ve V_2 elde edilerek (1) dif. denklemi için bir parametreli çözüm elde edilir.

ÖR => $1\overset{a_0}{y''} - y' - 2y = \overset{q(x)}{\boxed{e^{3x}}}$ dif. denkleminin çözümünü bulun.

Önce homojen denklemin çözümünü bulalım

$r^2 - r - 2 = 0$ => Karak. Denk.

$r_1 = 2$, $r_2 = -1$ $\qquad y_h(x) = C_1 \underbrace{\boxed{e^{2x}}}_{y_1(x)} + C_2 \underbrace{\boxed{e^{-x}}}_{y_2(x)}$ ✓

Şimdi

$$y_p(x) = V_1(x) y_1(x) + V_2(x) y_2(x)$$

olacak şekilde bir parametreli çözüm arayalım.

$$\left.\begin{aligned} V_1' y_1 + V_2' y_2 &= 0 \\ V_1' y_1' + V_2' y_2' &= \frac{q(x)}{a_0} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(I)\ V_1' e^{2x} + V_2' e^{-x} = 0 \\ &(II)\ 2V_1' e^{2x} - V_2' e^{-x} = e^{3x} \end{aligned}$$

$(I) + (II) = 3V_1' \cdot e^{2x} = e^{3x}$

$V_1' = \frac{e^x}{3}$

$V_1 = \frac{e^x}{3}$ ✓

I'de yerine yazarsak

$V_2' = \frac{-e^{4x}}{3}$

$V_2 = \frac{-e^{4x}}{12}$ ✓

$y_p(x) = \frac{1}{4} e^{3x}$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}$

Sayfa 106 / 12.3

ÖR => $\underbrace{1}_{a_0} y'' - 2y' + y = \underbrace{\boxed{\frac{e^x}{x}}}_{q(x)}$

→ $y_p(x) = V_1(x)\,y_1(x) + V_2(x)\,y_2(x)$

(I) $V_1 e^x + V_2' x.e^x = 0$

(II) $V_1' e^x + V_2'(e^x + x.e^x) = \frac{e^x}{x}$

→ Önce homojen denklemin çözümünü bulalım.

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1$

$y_h(x) = C_1.\underbrace{\boxed{e^x}}_{y_1(x)} + C_2.\underbrace{\boxed{x.e^x}}_{y_2(x)}$ ✓

(II) − (I) = $V_2' e^x = \frac{e^x}{x}$

$V_2' = \frac{1}{x}$

$V_2 = \ln|x|$ ✓

(I)'de yerine yazarsak

$V_1' = -1$

$V_1 = -x$ ✓

$y_p(x) = -x.e^x + x\ln|x|.e^x$

$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

$= C_1.e^x + C_2.x.e^x - xe^x + x\ln|x|.e^x$

ÖR => $y''' + y' = \sec x$

→ Önce homojen denk. çöz. bulalım.

$r^3 + r = 0$

$r(r^2+1) = 0$

$r_1 = 0 \quad r^2 + 1 = 0 \quad b = 0,\ d = 1$

$r_{2,3} = \mp i$

$y_h(x) = C_1.e^{0x} + e^{0x}\{C_2.\cos x + C_3.\sin x\}$

(I) $V_1' y_1 + V_2' y_2 + V_3' y_3 = 0$

(II) $V_1' y_1' + V_2' y_2' + V_3' y_3' = 0$

(III) $V_1' y_1'' + V_2' y_2'' + V_3' y_3'' = \frac{q(x)}{a_0}$

$y_h(x) = C_1.\underbrace{\boxed{1}}_{y_1(x)} + C_2.\underbrace{\boxed{\cos x}}_{y_2(x)} + C_3.\underbrace{\boxed{\sin x}}_{y_3(x)}$ ✓

→ (I) $V_1'.1 + V_2'.\cos x + V_3'\sin x = 0$

(II) $V_1'.0 - V_2'\sin x + V_3'\cos x = 0$

(III) $V_1'.0 - V_2'\cos x - V_3'\sin x = \sec x$

I + III = $V_1' = \sec x$

$V_1 = \ln|\sec x + \tan x|$ ✓

$\sin x.(\mathrm{II}) + \cos x(\mathrm{III}) =$

$$-V_2'\sin^2 x + V_3'\underbrace{\cos x.\sin x}_{0} - V_2'.\cos^2 x - V_3'\underbrace{\sin x.\cos x}_{0} - 1 = 0$$

$$-V_2'\underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = 1 \qquad -V_2' = 1$$

$$V_2 = -x \checkmark$$

II'de $\underbrace{-V_2'}_{1}\sin(x) + V_3'\cos x = 0$

$$V_3' = \frac{-\sin x}{\cos x} \qquad V_3 = \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx \qquad \begin{array}{l}\cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt\end{array}$$

$$= -\int -\frac{1}{t}dt$$

$$V_3 = \ln|\cos x| \checkmark$$

$$y_p(x) = V_1 y_1 + V_2 y_2 + V_3 y_3$$

$$= \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln|\cos x|\sin x$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + \ln|\sec x + \tan x| - x\cos x + \ln|\cos x|\sin x \ \#$$

ÖR=> $\overbrace{\boxed{x^2}}^{a_0(x)}y'' - xy' = x^3.e^x$ dif. denklemi verilsin. Bu denklemin homojen kısmının iki çözümünün $\underbrace{\boxed{1}}_{y_1(x)}$ ve $\underbrace{\boxed{x^2}}_{y_2(x)}$ olduğu biliniyor. Parametre çözümünü bulunuz.

Sağlaması

① $y_1 = 1$

$y_1' = 0$ $\qquad x^2y'' - xy' = 0 \checkmark$

$y_1'' = 0$

② $y_2 = x^2$

$y_2' = 2x$ $\qquad x^2\underbrace{y_2''}_{2} - x\underbrace{y'}_{2x} = 0 \checkmark$

$y_2'' = 2$

$$y_h(x) = C_1 + x^2C_2$$

$$y_p(x) = v_1(x)\,\overbrace{y_1(x)}^{1} + v_2(x)\,\overbrace{y_2(x)}^{x^2}$$

(I) $v_1' y_1 + v_2' y_2 = 0$

(II) $v_1' y_1' + v_2' y_2' = \frac{g(x)}{a_0}$

(I) $v_1' + v_2' x^2 = 0$

(II) $v_1' . 0 + v_2' 2x = x.e^x$

$v_2' = \frac{e^x}{2}$ $\quad v_2 = \frac{e^x}{2}$ ✓

I'de yerine koyarsak

$v_1' = \frac{-e^x . x^2}{2}$

$$v_1 = \int \frac{-e^x x^2}{2} dx$$

$$= \frac{-1}{2} \int x^2 . e^x . dx$$

* Kısmi integrasyon formülü $= \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = x^2$ $\quad dv = e^x dx$

$du = 2x\,dx$ $\quad v = e^x$

$$= \frac{-1}{2} . (x^2 e^x - \int e^x . 2x\,dx)$$

$$= \frac{-1}{2} . (x^2 . e^x - 2 . \int x . e^x dx)$$

$u = x$ $\quad dv = e^x dx$

$du = dx$ $\quad v = e^x$

$$= \frac{-1}{2} (x^2 . e^x - 2(x e^x - \int e^x dx))$$

$$v_1 = \frac{-x^2 . e^x}{2} + x . e^x - e^x$$ ✓

$$y_p(x) = \frac{-x^2 e^x}{2} + x . e^x - e^x + \frac{e^x}{2} x^2 = e^x (x-1)$$

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 + c_2 x^2 + e^x (x-1)$$ #

"ÖDEV => $\boxed{x^3}y''' + 3x^2y'' = 1$ dif. denklemi verilsin. Bu dif. denklemin homojen kısmının üç lineer bağımsız çözümü $\frac{1}{x}$, 1 ve x olduğu biliniyor. Parametreli çözümünü bulunuz.

$a_0(x)$

$y_1 = \frac{1}{x}$, $y_2 = 1$, $y_3 = x$

Sağlaması

$y_1 = \frac{1}{x}$	$y_2 = 1$	$y_3 = x$	$x^3 \cdot \frac{-6}{x^4} + 3x^2 \cdot \frac{-2}{x^3} = 0$ ✓
$y_2' = \frac{-1}{x^2}$	$y_2' = 0$	$y_3' = 1$	$x^3 \cdot 0 + 3x^2 \cdot 0 = 0$ ✓
$y_2'' = \frac{2}{x^3}$	$y_2'' = 0$	$y_3'' = 0$	$x^3 \cdot 0 + 3x^2 \cdot 0 = 0$ ✓
$y_2''' = \frac{-6}{x^4}$	$y_2''' = 0$	$y_3''' = 0$	

$$y_h(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 + C_3 \cdot x$$

$$(I)\ v_1' \cdot \frac{1}{x} + v_2' \cdot 1 + v_3' \cdot x = 0$$

$$(II)\ -v_1' \cdot \frac{1}{x^2} + v_2' \cdot 0 + v_3' \cdot 1 = 0$$

$$(III)\ v_1' \cdot \frac{2}{x^3} + v_2' \cdot 0 + v_3' \cdot 0 = \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{x}{2} \cdot III + II \Rightarrow v_3' = \frac{1}{2x^2}$$

$$v_3 = \frac{-1}{2x} \checkmark$$

$$(II) \Rightarrow -v_1' \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2}$$

$$-v_1' = \frac{-1}{2}$$

$$v_1' = \frac{1}{2} \qquad v_1 = \frac{1}{2}x \checkmark$$

$(I) \rightarrow$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + v_2' + \frac{1}{2x^2} \cdot x = 0$$

$$v_2' = \frac{-1}{x}$$

$$v_2 = -\ln|x| \checkmark$$

$$y_p(x) = -\ln|x|$$

$$y(x) = \frac{1}{x} C_1 + C_2 + x \cdot C_3 - \ln|x|$$

Operatörlerin Çarpanlara Ayrılması

26.11.19

(1) $a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = Q(x)$

denkleminden ortaya çıkan

$L(D) = a_0(x)\,D^n + a_1(x)\,D^{n-1} + \dots\dots + a_{n-1}(x)\,D + a_n(x)$

diferensiyel operatörün

$a_0(D-r_1)(D-r_2)\dots\dots(D-r_n)$

biçiminde n lineer çarpana ayrıldığını varsayalım. Burada $r_1, r_2, \dots, r_n$ genellikle x'in fonksiyonlarıdır. Bu durumda (1) denklemi

$$L(D)\,y = Q(x)$$

(2) $a_0(D-r_1)(D-r_2)\dots\dots(D-r_n)\,y = Q(x)$

biçiminde yazılabilir. Burada

$(D-r_n)\,y = V_1$

$(D-r_{n-1})\,V_1 = V_2$

$(D-r_{n-2})\,V_2 = V_3$

$\vdots$

$(D-r_2)\,V_{n-2} = V_{n-1}$

$a_0(D-r_1)\,V_{n-1} = Q(x)$

n tane 1. mertebeden diferensiyel denklem elde edilir. Denklemler aşağıdan yukarıya sıra ile çözülerek (1) dif. denklemin genel çözümü bulunur.

ÖR => $y'' + y' - by = 1 - bx$ dif. denkleminin genel çözümünü operatör yöntemi ile bulunuz.

$L(D) = D^2 + D - b$ operatörü sabit katsayılıdır ve

$L(D) = D^2 + D - b = (D-2)(D+3)$

şeklinde çarpanlarına ayrılabilir.

$\longrightarrow$

$L(D)y = Q(x)$

$(D-2)(D+3)y = 1-6x$

$(D+3)y = v$ (I)

$(D-2)v = 1-6x$ (II)

(II) denklemi çözelim.

$(D-2)v = 1-6x \Rightarrow v' - 2v = 1-6x$

Bu denklemin çözümünü belirsiz katsayılar yöntemi ile çözelim.

Önce homojen denklemin çözümü bulalım.

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow r-2=0 \quad r_1 = 2 \quad v_h(x) = c_1 . e^{2x}$

Şimdi bir özel çözüm arayalım.

$v_ö(x) = Ax + B$ olsun.

$v_ö'(x) = A$

$v_ö' - 2v_ö = 1-6x$

$A - 2(Ax+B) = 1-6x$

$\underbrace{A-2B}_{1} \underbrace{-2A}_{-6}x = 1-6x$

$A=3 \ , B=1$

$v_ö(x) = 3x+1$

$v(x) = v_h(x) + v_ö(x)$

$= \boxed{c_1 . e^{2x} + 3x + 1}$

$v(x)$

(I) denklemi çözelim.

$(D+3)y = v \Rightarrow y' + 3y = c_1 . e^{2x} + 3x + 1$

Önce homojen denklemin çözümünü bulalım.

$y' + 3y = 0 \Rightarrow r+3=0 \quad r_1 = -3 \quad y_h(x) = c_2 . e^{-3x}$

$y_ö(x)' = 2Ae^{2x} + B$

$y_ö' + 3y_ö = c_1 . e^{2x} + 3x + 1$

$2A . e^{2x} + B + 3(A . e^{2x} + Bx + D) = c_1 . e^{2x} + 3x + 1$

$5A . e^{2x} + 3Bx + B + 3D = c_1 . e^{2x} + 3x + 1$

$A = \frac{c_1}{5}$

$B = 1$

$D = 0$

$y_ö(x) = \frac{c_1}{5} e^{2x} + x$

$y(x) = y_h(x) + y_ö(x)$

$= c_2 e^{-3x} + \underbrace{\boxed{\frac{c_1}{5}}}_{c_3} . e^{2x} + x$

ÖR $\Rightarrow xy'' + (x-1)y' - y = x^2$ dif. denkleminin genel çözümünü operatör yöntemi ile bulunuz.

$L(D) = xD^2 + (x-1)D - 1 \Rightarrow (xD-1)(D+1)$

$L(D)y = Q(x)$

$(xD-1)(D+1)y = x^2$

$(D+1)y = V \quad (I)$

$(xD-1)V = x^2 \quad (II)$

(II) denklemi çözelim.

$(xD-1)V = x^2$

$xV' - V = x^2$

$\frac{xV' - V}{x^2} = 1$

$\int \left(\frac{V}{x}\right)' = \int 1\, dx$

$V = x^2 + C_1 x$

(I) denklemi çözelim.

$(D+1)y = V$

$y' + y = x^2 + C_1 x$

$r + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = -1 \qquad y_h(x) = C_2 e^{-x}$

Özel çözümü bulalım.

$y_ö(x) = Ax^2 + Bx + D$

$y_ö' = 2Ax + B$

$y_ö(x) + y_ö'(x) = x^2 + C_1 x$

$2Ax + B + Ax^2 + Bx + D = x^2 + C_1 x$

$Ax^2 + (2A + Bx + B + D) = x^2 + C_1 x$

$A = 1 \qquad 2A + B = C_1 \qquad B + D = 0$

$B = C_1 - 2 \qquad D = -B = 2 - C_1$

$y_ö(x) = x^2 + (C_1 - 2)x + (2 - C_1)$

$y(x) = y_h(x) + y_ö(x)$

$= C_2 e^{-x} + x^2 + (C_1 - 2)x + (2 - C_1)$

ÖDEV => $x^2y'' - (3x^2+2)y' + 6y = x+5$ dif. denkleminin genel çözümünü operatör yöntemi ile bulunuz.

Cauchy - Euler Denklemi

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ reel sabitler

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 . x^{(n-1)} . y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

lineer dif. denklemine, "n. mertebeden homojen Cauchy-euler denklemi" denir.

$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$ dönüşümü yapılarak (1) denklemi sabit katsayılı lineer dif. denklemine dönüştürülür. Bunun için,

$$x^n y^n = D(D-1) \ldots (D-n+1)y$$

eşitliği kullanılır.

$$x^2 y^{(2)} = D(D-1)y$$

$$x\, y' = Dy$$

$$x^3 y^{(3)} = D(D-1)(D-2)y$$

ÖR => $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$ cauchy-euler dif. denklemi ile çözün.

$D(D-1)y - 3Dy + 3y = 0$

$(D^2 - D - 3D + 3)y = 0$

$(D^2 - 4D + 3)y = 0$

$y'' - 4y' + 3y = 0$

$r^2 - 4r + 3 = 0$

$r_1 = 1 \quad r_2 = 3$

$y(t) = c_1 . e^t + c_2 . e^{3t}$

$y(x) = c_1 . x + c_2 . x^3$

$x = e^t$

$y = y(x) \Rightarrow y = y(t)$

ÖR => $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ cauchy-euler dif. denklemi ile çözün.

$D(D-1)y - 5Dy + 9y = 0$

$(D^2 - D - 5D + 9)y = 0$

$y'' - 6y' + 9y = 0$

$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 3$

$y(t) = c_1 . e^{3t} + c_2 . t . e^{3t}$

$y(x) = c_1 . x^3 + c_2 \ln x . x^3$

ÖR => $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$

$D(D-1)y - 2Dy + 2y = e^{3t}$

$y(D^2 - D - 2D + 2) = e^{3t}$

$y(D^2 - D - 2D + 2) = e^{3t}$

$y'' - 3y + 2y = e^{3t}$

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \quad r_2 = 1$

$y_h(t) = c_1 . e^t + c_2 . e^{2t}$

Özel çözüm bulalım.

$y_ö(t) = A . e^{3t}$

$y_ö(t)' = 3A . e^{3t}$

$y_ö(t)'' = 9A . e^{3t}$

$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{3t}$

$9A . e^{3t} - 3(3A . e^{3t}) + 2A . e^{3t} = e^{3t}$

$A = \frac{1}{2}$

$y_ö(t) = \frac{1}{2} e^{3t}$

$y(t) = y_ö(t) + y_h(t) = \frac{1}{2} . e^{3t} + c_1 . e^t + c_2 . e^t$

$y(x) = c_1 . x + c_2 . x^2 + \frac{1}{2} x^2$

ÖDEV => $9x^2y'' + 3y' + y = x^2$

Laplace Dönüşümleri

Tanım => $f(x)$ $0 \leq x < \infty$ için tanımlı olsun ve s bir gelişigüzel reel değişken göstersin. $f(x)$'in $\mathcal{L}\{f(x)\}$ veya $F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü, genelleştirilmiş integralin yakınsadığı tüm s değerleri için

(1) $$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

ile verilir. Yakınsama,

(2) $$\lim_{R\to\infty} \int_0^R e^{-sx} f(x)\,dx$$

limiti var olduğunda elde edilir. Eğer limiti yoksa genelleştirilmiş integral ıraksar ve $f(x)$ in Laplace dönüşümü yoktur. (1)'deki integral hesaplanırken s değişkeni bir sabit işlem görür. Çünkü integrasyon x'e göredir.

Laplace Dönüşümünün Özellikleri

$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}\{g(x)\} = G(s)$ olsun

(i) c_1 ve c_2 sabitler olmak üzere

$$\mathcal{L}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 \mathcal{L}\{f(x)\} + c_2 \mathcal{L}\{g(x)\}$$

(ii) a bir sabit olmak üzere

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

(iii) n pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\mathcal{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}[F(s)]$$

(iv) $$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

ÖR => $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ integralinin yakınsak olup olmadığını belirleyin. Syf 210 / 21.1

$$\lim_{R\to\infty} \int_2^R \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{x}\right)\Big|_2^R = \lim_{R\to\infty} \left(\cancel{-\frac{1}{R}}^{\,0} + \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

YAKINSAK

ÖR=> $\int_9^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ genellestirilmis integralinin yakınsak olup olmadıgını belirleyin.
syf 210/21.2

$$\lim_{R\to\infty} \int_9^{R} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \ln|x| \Big|_9^{R} = \lim_{R\to\infty} (\cancel{\ln R}^{\,\infty} - \ln 9) = \infty$$

IRAKSAK

ÖR=> $\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx$ genellestirilmis integralinin yakınsadıgı s degerlerini bulunuz.
syf 210/21.3

→ $s=0$ icin

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx = \int_0^{\infty} e^{-(0)x}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} 1\,dx = \lim_{R\to\infty} x \Big|_0^{R} = \lim_{R\to\infty} R = \infty$$

seklindedir. Böylece integral ıraksar.

→ $s\neq 0$ icin

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} e^{-sx}\,dx = \lim_{R\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_{x=0}^{x=R}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sR}}{-s} - \lim_{R\to\infty} \frac{e^{-s0}}{-s}$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{-1}{s} e^{-sR} + \frac{1}{s}\right)$$

→ $s<0$ iken $-sR>0$ 'dır.

$$-\lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sR}}{s} = \infty \text{ (IRAKSAK)}$$

→ $s>0$ iken $-sR<0$ 'dır.

$$-\lim_{R\to\infty} \frac{e^{-sR}}{s} = 0 \text{ (YAKINSAK)}$$

Böylece limit $\frac{1}{s}$ 'dir ve integral yakınsar.

ÖR=> $f(x) \equiv 1$ in Laplace dönüşümünü bulun. Syf 210/21.4

$$\mathcal{L}\{f(x) = \int_0^\infty e^{-sx}(1)\,dx = \frac{1}{s} \quad (s>0 \text{ için})$$

ÖR=> $\mathcal{L}\{e^{ax}\}$'i bulunuz.

$$e^{-sx+ax} = e^{-(s-a)x}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax}\,dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}\,dx = \frac{1}{s-a} \quad (s>a \text{ için})$$

EK

$f(x)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$
1	$\frac{1}{s}$ $(s>0)$
x	$\frac{1}{s^2}$ $(s>0)$
x^{n-1} $(n=1,2..)$	$\frac{(n-1)!}{s^n}$ $(s>0)$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$ $(s>a)$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$ $(s>0)$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $(s>\lvert a\rvert)$
$x\sin ax$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$ $(s>0)$
$x\cos ax$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ $(s>0)$
$x^{n-1}e^{ax}$ $(n=1,2..)$	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$ $(s>a)$

$f(x)$	$\mathcal{L}\{f(x)\}$
$e^{bx}\sin ax$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$ $(s>b)$
$e^{bx}.\cos ax$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$ $(s>b)$

ÖR => $f(x) = 3 + 2x^2$ (Syf 212 / 21.10)

$$F(s) = \mathcal{L}\{3+2x^2\} = 3\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{x^2\}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{2}{s^3} = \frac{3}{s} + \frac{4}{s^3}$$

ÖR => $f(x) = 5\sin 3x - 17 \cdot e^{-2x}$ (Syf 213 / 21.11)

$$F(s) = \mathcal{L}\{5\sin 3x - 17 \cdot e^{-2x}\} = 5\mathcal{L}\{\sin 3x\} - 17\mathcal{L}\{e^{-2x}\}$$

$$= 5 \cdot \frac{3}{s^2+(3)^2} - 17 \frac{1}{s-(-2)}$$

$$= \frac{15}{s^2+9} - \frac{17}{s+2}$$

ÖR => $f(x) = 2\sin x + 3\cos 2x$ (Syf 213 / 21.12)

$$F(s) = \mathcal{L}\{2\sin x + 3\cos 2x\} = 2\mathcal{L}\{\sin x\} + 3\mathcal{L}\{\cos 2x\}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{s^2+1} + 3 \cdot \frac{s}{s^2+4} = \frac{2}{s^2+1} + \frac{3s}{s^2+4}$$

ÖR => $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ (Syf 213 / 21.13)

$$F(s) = \mathcal{L}\{2x^2 - 3x + 4\} = 2\mathcal{L}\{x^2\} - 3\mathcal{L}\{x\} + 4\mathcal{L}\{1\}$$

$$= 2\left(\frac{2}{s^3}\right) - 3\left(\frac{1}{s^2}\right) + 4\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} + \frac{4}{s}$$

ÖR => $f(x) = x \cdot e^{4x}$ (Syf 213 / 21.14)

$$\mathcal{L}\{x e^{4x}\} = \frac{1}{(s-4)^2} \qquad (n=2,\ a=4)$$

ÖR => $f(x) = e^{-2x} \sin 5x$ (Syf 214 / 21.15)

$$\mathcal{L}\{e^{-2x} \sin 5x\} = \frac{5}{[s-(-2)]^2 + (5)^2} = \frac{5}{(s+2)^2 + 25}$$

ÖR=> $f(x) = (\cos\sqrt{7}x)$

$\mathcal{L}(\cos\sqrt{7}x) = \frac{s}{s^2+7}$

Ters Laplace Dönüşümleri → Syf 223

ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-8}\right\} = e^{8x}$

ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6}\right\} = \cos\sqrt{6}x$

ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\,\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{5}{2}\cdot x\cdot\sin x$

ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2-9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-9}\right\}$

$= \cosh 3x + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{s^2-(3)^2}\right\}$

$= \cosh 3x + \frac{1}{3}\cdot\sinh 3x$

(*) ÖR=> $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-2)^2+9}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-2)+2)}{(s-2)^2+9}\right\}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+9}\right\}$

$e^{2x}\cos 3x + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{3}{(s-2)^2+9}\right)\right\}$

$e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}e^{2x}\cdot\sin 3x$

ÖR $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$ $\quad s^2+4s+8=(s^2+4s+4)+(8-4)=(s+2)^2+(2)^2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right\}=e^{-2x}\cos 2x+e^{-2x}\sin 2x$$

ÖR $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\}$

$$\frac{s+3}{(s-2)(s+1)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s+1}$$

$s+3=A(s+1)+B(s-2)$ $\qquad A+B=1 \qquad B=-2/3$

$\quad =(A+B)s+A-2B$ $\qquad A-2B=3 \qquad A=5/3$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5/3}{s-2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2/3}{s+1}\right\}$$

$$=\frac{5}{3}\cdot e^{2x}-\frac{2}{3}\cdot e^{-x}$$

ÖDEV $\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+9}\right\}$ $\quad s^2-2s+9=(s^2-2s+1)+(9-1)$

$\qquad =(s-1)^2+(\sqrt{8})^2$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{8}}\,\frac{\sqrt{8}}{(s-1)^2+(\sqrt{8})^2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{8}}\cdot e^{x}\cdot\sin\sqrt{8}x$$

ÖDEV => $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$$

$$1 = s^2\underbrace{(A+B)}_{0} + s\underbrace{(B+C)}_{0} + \underbrace{(A+C)}_{1}$$

$A = \frac{1}{2}$ $\quad B = -\frac{1}{2}$ $\quad C = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1/2}{(s+1)} + \frac{-1/2\, s + 1/2}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$$

Ek Problemler Laplace dönüşümlerini bulun. (sayf 220)

* (21.43) $f(x) = x^7$

$$F(s) = \mathcal{L}\{x^7\} = \frac{7!}{s^8}$$

* (21.44) $f(x) = x\cos 3x$

$$\mathcal{L}\{x\cos 3x\} = \frac{s^2 - 3^2}{(s^2+3^2)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

* (21.45) $f(x) = x^5 . e^{-x}$

$$\mathcal{L}\{x^5 . e^{-x}\} = \frac{(6-1)!}{(s-(-1))^6} = \frac{120!}{(s+1)^6}$$

* (21.46) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad \mathcal{L}\left\{\frac{1}{x}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

* (21.47) $f(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3}$ $\quad \frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{-1/3x}\} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{3}} = \frac{1}{3s+1}$

* (21.48) $f(x) = 5e^{-x/3}$ $\quad 5.\mathcal{L}\{e^{-1/3.x}\} = 5.\frac{1}{s+\frac{1}{3}} = \frac{15}{1+3s}$

* (21.49) $f(x) = 2\sin^2\sqrt{3}x$ $\quad 2.\mathcal{L}\{\sin^2\sqrt{3}x\} = 2.\left[\frac{6}{s(s^2+12)}\right] = \frac{12}{s^3+12s}$

* $\mathcal{L}\{\sin^2 ax\} = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$

* (21.50) $f(x) = 8e^{-5x}$ $\quad 8.\mathcal{L}\{e^{-5x}\} = \frac{8}{s+5}$

* (21.51) $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$ $\quad 3.\mathcal{L}\left\{\sin\frac{x}{2}\right\} = 3.\frac{1/2}{s^2+1/4} = \frac{6}{4s^2+1}$

* (21.52) $f(x) = -\cos\sqrt{19}x$ $\quad -\mathcal{L}\{\cos\sqrt{19}x\} = -\frac{s}{s^2+19}$

* (21.54) $f(x) = e^{-x}\sin 2x$ $\quad \mathcal{L}\{e^{-x}.\sin 2x\} = \frac{2}{(s+1)^2+4}$

* (21.55) $f(x) = e^{x}\sin 2x$ $\quad \mathcal{L}\{e^{x}\sin 2x\} = \frac{2}{(s-1)^2+4}$

* (21.57) $f(x) = e^{3x}.\cos 2x$ $\quad \mathcal{L}\{e^{3x}.\cos 2x\} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4}$

* (21.62) $f(x) = x^3 + 3\cos 2x$ $\quad \mathcal{L}\{x^3\} + \mathcal{L}\{3\cos 2x\}$

$$\frac{3!}{s^4} + \frac{3s}{s^2+4}$$

* (21.63) $f(x) = 5e^{2x} + 7e^{-x}$ $\quad 5\mathcal{L}\{e^{2x}\} + 7\mathcal{L}\{e^{-x}\}$

$$\frac{5}{s-2} + \frac{7}{s+1}$$

* (21.65) $f(x) = 3 - 4x^2$ $\quad \mathcal{L}\{3\} - 4\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{3}{s} - \frac{8}{s^3}$

* (21.66) $f(x) = 2x + 5\sin 3x$ $\quad 2\mathcal{L}\{x\} + 5\mathcal{L}\{\sin 3x\}$

$$\frac{2}{s^2} + \frac{15}{s^2+9}$$

* (21.67) $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$ $\quad 2\mathcal{L}\{\cos 3x\} - \mathcal{L}\{\sin 3x\}$

$$2\frac{s}{s^2+9} - \frac{3}{s^2+9} = \frac{2s-3}{s^2+9}$$

Ek Problemler ters Laplace dönüşümlerini, x'in bir fonksiyonu olarak bulunuz.

* (22.20) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = x$

* (22.21) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} = 2x$

* (22.22) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\} = x^2$

* (22.23) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{x^2}{2}$

* (22.24) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{x^3}{6}$

* (22.25) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$ $\quad \frac{1}{s-a} \Rightarrow e^{-2x}$

* (22.26) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{s-2}\right\}$ $\quad -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -2e^{2x}$

* (22.27) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{3s+9}\right\}$ $\quad 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = 4e^{-3x}$

* (22.28) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s-3}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s-3/2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3/2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot e^{3/2x}$

* (22.29) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(s-2)^3}\right\} = \frac{1}{2}\cdot x^2 e^{2x}$

* (22.30) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{(s+5)^4}\right\}$ $\quad 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6^{3!}}{(s+5)^4}\right\} = 2\cdot x^3 e^{-5x}$

* (22.31) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$ $\quad 3\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{3}{2}(\sin x + x\cos x)$

* $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}(\sin ax + ax\cos ax)\right\} = \frac{as^2}{(s^2+a^2)^2}$

* (22.33) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right)$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot\sin 2x$

* (22.34) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2+9}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\,\frac{2\cdot 3}{(s-2)^2+3^2}\right\} = \frac{2}{3}\cdot e^{2x}\cdot\sin 3x$

* (22.35) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2+5}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-1}{(s+1)^2+(\sqrt{5})^2}\right\}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{5})^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}\,1}{(s+1)^2+(\sqrt{5})^2}\right\}$$

$$e^{-x}\cdot\cos\sqrt{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}\,e^{-x}\cdot\sin\sqrt{5}x$$

* (22.36) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s-1)^2+7}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+1-3+3}{(s-1)^2+(\sqrt{7})^2}\right\}$

$$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+\sqrt{7}^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}\ \frac{3\sqrt{7}\,1}{(s-1)^2+(\sqrt{7})^2}\right\}$$

$$2.e^{x}.\cos\sqrt{7}x+\frac{3}{\sqrt{7}}e^{x}.\sin\sqrt{7}x$$

---

* (22.37) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2+1}\right\}$ $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin\frac{1}{\sqrt{2}}x$

---

* (22.38) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+2}\right\}$ $\quad s^2-2s+2=s^2-2s+1+1=(s-1)^2+1^2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+1^2}\right\}=e^{x}.\sin x$$

---

* (22.39) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+2s+5}\right\}$ $\quad s^2+2s+5=(s+1)^2+2^2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2}+\frac{2}{(s+1)^2+2^2}\right\}=e^{-x}.\cos 2x+e^{-x}.\sin 2x$$

---

* (22.40) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-s+\frac{17}{4}}\right\}$ $\quad s^2-s+\frac{1}{4}+\frac{16}{4}=\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2^2$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}+\frac{\overset{2}{\cancel{4\cdot\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{4}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}\right\}=e^{(1/2)x}\cos 2x+\frac{1}{4}e^{(1/2)x}.\sin 2x$$

$$\left(s+\frac{3}{2}\right)^2$$

* (22.41) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+3s+5}\right\}$ $\qquad s^2+3s+5=\boxed{s^2+3s+\frac{9}{4}}+\frac{11}{4}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}-\frac{\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{\cancel{2}}{\sqrt{11}}}{\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2}\right\}$$

$$e^{-(3/2)x}\cos\frac{\sqrt{11}}{2}x-\frac{1}{\sqrt{11}}e^{-3/2x}\sin\frac{\sqrt{11}}{2}x$$

---

* (22.42) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s^2}{(s-1)(s^2+1)}\right)$

$$\frac{2s^2}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{(s-1)}+\frac{Bs+C}{s^2+1}$$

$2s^2=A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)$

$2s^2=s^2\underbrace{(A+B)}_{2}+s\underbrace{(C-B)}_{0}+\underbrace{(A-C)}_{0}$

$A=1$
$B=1$
$C=1$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$e^x+\cos x+\sin x$$

---

* (22.43) $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}\right)$ $\qquad s^2-1=(s-1)(s+1)$

$1=A(s+1)+B(s-1)$

$1=s(A+B)+(A-B)$

$A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{-1}{2}$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{(s-1)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/2}{(s+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}e^{-x}$$

Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklemlerin Laplace Dönüşümleri ile Çözümleri

10.12.19

$\mathcal{L}\{y(x)\}$, $Y(s)$ ile gösterelim. Bu durumda çok kabe koşullar altında $y(x)$'in n. inci türevinin $(n=1,2,3\ldots)$ Laplace dönüşümü

(1) $$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} Y(0) - s^{n-2} Y'(0) \ldots s Y^{(n-2)}(0) - Y^{(n-1)}(0)$$

Eğer, $x=0$'da $Y(x)$ üzerindeki başlangıç koşulları

(2) $Y(0) = C_0$, $Y'(0) = C_1 \ldots$, $Y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$ şeklinde verilirse (1) denklemi

(3) $$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n y}{dx^n}\right\} = s^n Y(s) - s^{n-1} C_0 - s^{n-2} C_1 \ldots - s C_{n-2} - C_{n-1}$$

(3)'de, $n=1$ ve $n=2$ için

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dx}\right\} = s Y(s) - C_0$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y}{dx^2}\right\} = s^2 Y(s) - sC_0 - C_1$$

Dif denklemlerin çözümleri;

Laplace dönüşümleri kullanılarak, diferensiyel denklemlerin çözümü (2) eşitliği yardımıyla kullanılabilir. Dif denklemi laplace dönüşümü uygulanarak bir cebirsel denklem elde edilir. Daha sonra bu cebirsel denklene ters laplace dönüşümü uygulanarak başlangıç değerleri ile verilen dif denklemin çözümü elde edilir.

ÖR => $y' - 5y = 0$; $y(0) = 2 \rightarrow C_0$ başlangıç değer problemini çözünüz. syf 239 / 24.1

$\mathcal{L}\{y'\} - 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$

$[s Y(s) - 2] - 5Y(s) = 0$

$Y(s) = \frac{2}{s-5}$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-5}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-5}\right\} = \boxed{2e^{5x}}$

* $\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$

ÖR => $y' - 4y = e^{4x}$, $y(0) = 2$

$\mathcal{L}\{y'\} - 4\,\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{4x}\}$

$[s\,Y(s) - 2] - 4\,Y(s) = \frac{1}{s-4}$

$Y(s) = \frac{1}{(s-4)^2} + \frac{2}{(s-4)}$

$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-4}\right\}$

$y(x) = x.e^{4x} + 2.e^{4x}$

(24.3)

ÖR => $y' + y = \sin x$, $y(0) = 1$

$\mathcal{L}\{y'\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin x\}$

$[s\,Y(s) - 1] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$

$Y(s) = \boxed{\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}} + \frac{1}{s+1}$

$= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + e^{-x}$

$= \boxed{\frac{3}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x}$

$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$

$1 = A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$

$1 = s^2\underbrace{(A+B)}_{0} + s\underbrace{(B+C)}_{0} + \underbrace{(A+C)}_{1}$

$A = 1/2 \quad B = -1/2 \quad C = 1/2$

$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{1/2}{s+1} + \frac{-1/2\,s + 1/2}{s^2+1}$

$\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$

$= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

ÖR => $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 2^{c_0}$, $y'(0) = 2^{c_1}$

$\mathcal{L}\{y''\} + 4\,\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$

$[s^2 Y(s) - 2s - 2] + 4Y(s) = 0$

$Y(s) = \frac{2s+2}{(s^2+4)} = \frac{2s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$

$2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\}$

$\boxed{2\cos 2x + \sin 2x}$

$$\ddot{O}R \Rightarrow y'' - 6y' + 8y = 0 \; ; \; y(0) = \overset{C_0}{\overset{\shortparallel}{2}} \; , \; y'(0) = \overset{C_1}{\overset{\shortparallel}{6}}$$

$$\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} + 8\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$[s^2 Y(s) - 2s - 6] - 6[sY(s) - 2] + 8Y(s) = 0$$

$$(s^2 - 6s + 8) \cdot Y(s) = 2s - 6$$

$$Y(s) = \frac{2s-6}{s^2-6s+8} \Rightarrow \frac{1}{(s-4)} + \frac{1}{(s-2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = e^{4x} + e^{2x}$$

$$\ddot{O}R \Rightarrow y' + 2y = 12 \; , \; y(0) = \overset{C_0}{10}$$

$$\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{12\}$$

$$[sY(s) - 10] + 2Y(s) = \frac{12}{s}$$

$$Y(s) = \boxed{\frac{12}{s(s+2)}} + \frac{10}{s+2}$$

$$\frac{12}{s(s+2)} = \frac{A}{\underset{(s+2)}{s}} + \frac{B}{\underset{(s)}{s+2}}$$

$$12 = (A+B)s + 2A$$

$$A = 6 \; , \; B = -6$$

$$Y(s) = \frac{6}{s} - \frac{6}{s+2} + \frac{10}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{6}{s} + \frac{4}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s+2}\right\}$$

$$Y(x) = 6 + 4e^{-2x} \; \#$$

ÖR => $y'' - y = x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

$$[s^2 Y(s) - 1 - s] - Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)(s^2 - 1) = \frac{1}{s^2} + s + 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2-1)} + \frac{s+1}{s^2-1}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2-1)} = \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{(s^2-1)}$$

$$(s^2-1) \qquad (s^2)$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s^2} + \frac{1}{s^2-1} + \frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = -x + \sinh x + e^{x}$$

EK PROBLEMLER Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

* (24.17) $y' + 2y = 0$; $y(0) = 1 \rightarrow C_0$

$$\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{0\}$$

$$[sY(s) - 1] + 2Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2x}$$

$$y = e^{-2x}$$

---

* (24.18) $y' + 2y = 2$; $y(0) = 1 \rightarrow C_0$

$$[sY(s) - 1] + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$Y(s)(s+2) = \frac{2}{s} + 1$$

$$= \boxed{\frac{2}{s(s+2)}} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{s+2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$\frac{2}{s(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2}$$

$$(A+B)s + 2A = 2$$

$$\boxed{A = 1 \ , \ B = -1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$y = 1$$

* (24.19) $y' + 2y = e^{x}$; $y(0) = 1$

$$[sY(s) - 1] + 2Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \boxed{\frac{1}{(s-1)(s+2)}} + \frac{1}{(s+2)}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \boxed{\frac{1}{3}e^{x} + \frac{2}{3}e^{-2x}} \Rightarrow y$$

$$\frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s+2)} = \frac{1}{(s-1)(s+2)}$$

$$As + 2A + Bs - B = 1$$

$$s\underbrace{(A+B)}_{0} \underbrace{-B+2A}_{1} = 1$$

$$A = 1/3 \quad B = -1/3$$

* (24.22) $y' - 5y = e^{5x}$; $y(0) = 2$

$$[sY(s) - 2] - 5Y(s) = \frac{1}{(s-5)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-5)^2} + \frac{2}{(s-5)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \boxed{xe^{5x} + 2e^{5x}}$$

Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri

17.12.19

x ve y bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere birinci mertebeden değişken katsayılı lineer diferensiyel denklem sistemi genel olarak,

$(x = x(t),\ y = y(t))$

$$1 \begin{cases} a_1(t)x' + a_2(t)y' + a_3(t)x + a_4(t)y = F_1(t) \\ b_1(t)x' + b_2(t)y' + b_3(t)x + b_4(t)y = F_2(t) \end{cases}$$

şeklinde yazılır. Burada, t bağımsız değişkendir.

ÖR1 => $2x' + 3y' - 2x + y = t^2$

$x' - 3y' + 3x + 4y = e^t$

1. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklem sistemidir.

NOT

$$2 \begin{cases} x' = a_1(t)x + a_2(t)y + F_1(t) \\ y' = b_1(t)x + b_2(t)y + F_2(t) \end{cases}$$

Yukarıdaki dif. denklem sistemi "standart biçim"de verilmiştir.

ÖR2 =>

(a)

$$\left.\begin{aligned} x' &= t^2x + (t+1)y + t^3 \\ y' &= te^tx + t^3y - e^t \end{aligned}\right\}$$

1. mertebeden değişken katsayılı lineer dif. denklem sistemidir. Bu dif. denklem sistemi, standart biçimde yazılmıştır.

(b)

$$\left.\begin{aligned} x' &= 5x + 7y + t^2 \\ y' &= 2x - 3y + 2t \end{aligned}\right\}$$

1. mertebeden sabit katsayılı lineer dif. denklem sistemidir.

Sabit Katsayılı Lineer Diferensiyel Denklem Sistemleri için Operatör Yöntemi

ÖR => $\left.\begin{array}{l} 2x'-2y'-3x=t \\ 2x'+2y'+3x+8y=2 \end{array}\right\}$ lineer sabit katsayılı dif. denklem sistemi verilsin.

$$\left.\begin{array}{l} 2x'-3x-2y'=t \\ 2x'+3x+2y'+8y=2 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} (2D-3)x-2Dy=t & /\ (2D+8) \\ (2D+3)x+(2D+8)y=2 & /\ 2D \end{array}$$

$$* \quad (2D+8)(2D-3)x - \cancel{2D(2D+8)y} = \boxed{(2D+8)t} \rightarrow 2\overset{1}{t'}+8t = 8t+2$$

$$+ \quad (2D)(2D+3)x + \cancel{2D(2D+8)y} = \boxed{2D(2)} \rightarrow 2(2)' = 0$$

$$[(2D+8)(2D-3)+(2D)(2D+3)]x = 8t+2$$

$$[4D^2-6D+16D-24+4D^2+6D]x = 8t+2$$

$$[8D^2+16D-24]x = 8t+2$$

$$8[D^2+2D-3]x = 8t+2$$

$$(D^2+2D-3)x = t+\frac{1}{4}$$

$$\boxed{x''+2x'-3x = t+\frac{1}{4}}$$

→ Önce homojen denklem çözelim.

$x''+2x'-3x=0$

$r^2+2r-3=0 \qquad r_1=-3,\ r_2=1$

$x_h(t) = c_1.e^{-3t}+c_2.e^{t}$

→ Özel çözüm bulalım.

$x_ö(t) = At+B \quad , \quad x_ö' = A \quad , \quad x_ö''=0$

$x_ö''+2x_ö'-3x_ö = t+\frac{1}{4}$

$0+2A-3A-3At-3B = t+\frac{1}{4}$

$A = \frac{-1}{3}$

$2A-3B = \frac{1}{4} \Rightarrow B = \frac{-11}{36}$

$$X(t) = X_h(t) + X_ö(t)$$
$$= c_1 . e^{-3t} + c_2 . e^{t} - \frac{1}{3} t - \frac{11}{36}$$

* $y(t)$'i bulmak için;

$$2x' - 2y' - 3x = t$$
$$+ \quad 2x' + 2y' + 3x + 8y = 2$$

$$4x' + 8y = t + 2$$
$$8y = t + 2 - 4x'$$
$$y = \frac{t + 2 - 4x'}{8}$$
$$y = t + 2 - 4\left(c_1 . e^{-3x} + c_2 . e^{t} - \frac{1}{3} t - \frac{11}{36}\right)'$$

$$y = \frac{t + 2 - 4\left(-3c_1 . e^{-3t} + c_2 . e^{t} - 1/3\right)}{8}$$

$$= \frac{t + 2 + 12 c_1 . e^{-3t} - 4 c_2 . e^{t} + 4/3}{8}$$

$$y(t) = \frac{3}{2} c_1 e^{-3t} - \frac{1}{2} c_2 . e^{t} + \frac{3t + 10}{24}$$

ÖR => $\left.\begin{array}{l} x' - y' - 2x + 4y = t \\ x' + y' - x + y = 1 \end{array}\right\}$ Sabit katsayılı lineer dif sisteminin çözümünü bulun.

$$\left.\begin{array}{l} x' - 2x - y' + 4y = t \\ x' - x + y' - y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} (D-2)x - (D-4)y = t & / (D-1) \\ (D-1)x + (D-1)y = 1 & / (D-4) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} * & (D-2)(D-1)x - (D-4)(D-1)y = \boxed{(D-1)t} \rightarrow t' - t = \underline{1-t} \\ + & (D-1)(D-4)x + (D-4)(D-1)y = \boxed{(D-4)\,1} \rightarrow \underline{-4} \end{array}$$

$$[(D-2)(D-1) + (D-1)(D-4)]x = 1 - t + 4$$

$$[D^2 - 3D + 2 + D^2 - 5D + 4]x = -t - 3$$

$$[2D^2 - 8D + 6]x = -t - 3$$

$$[D^2 - 4D + 3]x = \frac{-t-3}{2}$$

$$\boxed{x'' - 4x' + 3x = \frac{-t-3}{2}}$$

→ Önce homojen denklem çözelim

$$x'' - 4x' + 3x = 0$$

$$r^2 - 4r + 3 = 0 \qquad r_1 = 1,\ r_2 = 3$$

$$x_h(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{3t}$$

→ Özel çözüm bulalım.

$$x_ö(t) = At + B \quad , x_ö' = A \quad , x_ö'' = 0$$

$$x_ö'' - 4x_ö' + 3x_ö = \frac{-t-3}{2}$$

$$0 - 4A + 3At + 3B = \frac{-t-3}{2}$$

$$A = \frac{-1}{6}$$

$$B = \frac{-13}{18}$$

$$x_ö(t) = \frac{-1}{6}t - \frac{13}{18}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_ö(t)$$

$$= C_1 e^{t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{6}t - \frac{13}{18}$$

→

* $y(t)$'i bulmak için;

$$x' - y' - 2x + 4y = t$$
$$+ \quad x' + y' - x + y = 1$$
$$2x' - 3x + 3y = t + 1$$

$$3y = t + 1 - 2x' + 3x$$
$$y = \frac{t + 1 - 2x' + 3x}{3}$$

$$= t + 1 - 2c_1 e^{t} - 6c_2 e^{3t} + \frac{1}{3} + 3c_1 e^{t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{2}t - \frac{13}{6}$$

$$= c_1 e^{t} - 3c_2 e^{3t} + \frac{t}{2} - \frac{5}{6}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}c_1 e^{t} - c_2 e^{3t} + \frac{1}{6}t - \frac{5}{18}$$

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} - \frac{1}{6}t - \frac{13}{18}$$

$$x(t)' = c_1 e^{t} + 3c_2 e^{3t} - \frac{1}{6}$$

Sabit Katsayılı Sistemler için Üstel Tipten Çözümler

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \star$$

homojen sistemini ele alalım. Sabit katsayılı homojen denklemin çözümünü

$$x = Ae^{\lambda t}$$

$$y = Be^{\lambda t}$$

biçimde arayalım.

$$x = Ae^{\lambda t} \qquad y = Be^{\lambda t}$$

$$x' = A.\lambda e^{\lambda t} \qquad y' = B\lambda e^{\lambda t}$$

türevlerini ($\star$)'da yerine yazarsak

$$A.\lambda e^{\lambda t} = a_{11} A.e^{\lambda t} + a_{12} B.e^{\lambda t}$$

$$B.\lambda e^{\lambda t} = a_{21} A e^{\lambda t} + a_{22} B.e^{\lambda t}$$

sistemini elde ederiz.

$$A.\lambda = a_{11} A + a_{12} B$$

$$B.\lambda = a_{21} A + a_{22} B$$

$$(a_{11} - \lambda) A + a_{12} B = 0$$

$$a_{21} A + (a_{22} - \lambda) B = 0$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümün olması için

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

olması gerekir.

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21}.a_{12} = 0$$

$$a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{21}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \quad (\star\star)$$

denklemini elde ederiz.

SINAV

I. Durum (Ayrık Reel Kökler)

λ_1 ve λ_2, (2 ★) karakteristik denkleminin farklı iki reel kökü olsun.

$$x = A_1 . e^{\lambda_1 t} \qquad x = A_2 e^{\lambda_2 t}$$

ve

$$y = B_1 e^{\lambda_1 t} \qquad y = B_2 . e^{\lambda_2 t}$$

fonksiyonları (★) denklem sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$x = C_1 . A_1 . e^{\lambda_1 t} + C_2 A_2 . e^{\lambda_2 t}$$
$$y = C_1 . B_1 . e^{\lambda_1 t} + C_2 B_2 . e^{\lambda_2 t}$$

olarak yazarız. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir.

ÖR $x' = 6x - 3y$, $x(0) = 7$
$y' = 2x + y$, $y(0) = 5$

denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

$$x = A . e^{\lambda t} , \quad y = B . e^{\lambda t}$$

$$A . \lambda . e^{\lambda t} = 6A . e^{\lambda t} - 3B . e^{\lambda t}$$
$$B . \lambda . e^{\lambda t} = 2A . e^{\lambda t} + B . e^{\lambda t}$$

$$A\lambda = 6A - 3B$$
$$B\lambda = 2A + B$$
$$\left.\begin{aligned} (6-\lambda)A - 3B &= 0 \\ 2A + (1-\lambda)B &= 0 \end{aligned}\right\} (1)$$

$$(6-\lambda)(1-\lambda) - 2 . (-3) = 0$$
$$6 - 7\lambda + \lambda^2 + 6 = 0$$
$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$$
$$\lambda_1 = 3 , \quad \lambda_2 = 4$$

→

→ $\lambda_1 = 3$ 'ü (1)'de yerine yazarsak;

$$\left.\begin{array}{l} 3A - 3B = 0 \\ 2A - 2B = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = B \\ A_1 = B_1 = 1 \end{array}$$

→ $\lambda_2 = 4$ (1)'de yerine yazarsak;

$$\left.\begin{array}{l} 2A - 3B = 0 \\ 2A - 3B = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2A = 3B \\ A_2 = 3, \ B_2 = 2 \end{array}$$

$$x(t) = C_1 . A_1 . e^{\lambda_1 . t} + C_2 . A_2 . e^{\lambda_2 . t} = C_1 . 1 e^{3t} + C_2 . 3 . e^{4t} \Rightarrow C_1 e^{3t} + 3C_2 . e^{4t}$$

$$y(t) = C_1 . B_1 . e^{\lambda_1 . t} + C_2 B_2 . e^{\lambda_2 . t} = C_2 \ 1 . e^{3t} + C_2 . 2 . e^{4t} \Rightarrow C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{4t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 7 \Rightarrow C_1 + 3C_2 = 7 \\ y(0) = 5 \Rightarrow C_1 + 2C_2 = 5 \end{array}\right\} C_1 = 1, C_2 = 2$$

$$x(t) = e^{3t} + 6 . e^{4t}$$

$$y(t) = e^{3t} + 4 . e^{4t}$$

ÖR $x' = -2x + 7y$, $x(0) = 9$

$y' = 3x + 2y$, $y(0) = -1$

denklem sisteminin çözümünü bulun.

$$x = A . e^{\lambda t}, \quad y = B . e^{\lambda t}$$

$$A . \lambda . e^{\lambda t} = -2A . e^{\lambda t} + 7B . e^{\lambda t}$$

$$B . \lambda . e^{\lambda t} = 3 . A . e^{\lambda t} + 2B . e^{\lambda t}$$

$$A\lambda = -2A + 7B$$

$$B\lambda = 3A + 2B$$

$$\left.\begin{array}{l} (-2-\lambda)A + 7B = 0 \\ 3A + B(2-\lambda) = 0 \end{array}\right\} (1)$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 7 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(-2-\lambda)(2-\lambda) - (7.3) = 0}$$

$$\lambda^2 - 25 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = -5$$

$\lambda_1 = 5$ 'i (1) 'de yerine yazarsak

$$\left.\begin{array}{l} -7A+7B=0 \\ 3A-3B=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A=B \\ A_1=B_1=1 \end{array}$$

$\lambda_2 = -5$ 'i 1'de yerine yazarsak

$$\left.\begin{array}{l} 3A+7B=0 \\ 3A+7B=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 3A=-7B \\ A_2=-7 \ , \ B_2=3 \end{array}$$

$$x(t) = C_1 . A_1 . e^{\lambda_1 . t} + C_2 . A_2 . e^{\lambda_2 . t} = C_1 . e^{5t} - 7C_2 . e^{-5t}$$

$$y(t) = C_1 . B_1 . e^{\lambda_1 t} + C_2 . B_2 . e^{\lambda_2 . t} = C_1 . e^{5t} + 3C_2 e^{-5t}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = 9 \Rightarrow C_1 - 7C_2 = 9 \\ y(0) = -1 \Rightarrow C_1 + 3C_2 = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_1 = 2 \\ C_2 = -1 \end{array}$$

$$x(t) = -e^{5t} - 14e^{-5t}$$
$$y(t) = -e^{5t} + 6e^{-5t}$$

---

2. Durum (Çakışık iki reel kök)

$$x = A . e^{\lambda t} \qquad x = (A_1 . t + A_2) . e^{\lambda t}$$
$$\text{ve}$$
$$y = B . e^{\lambda t} \qquad y = (B_1 . t + B_2) e^{\lambda t}$$

(★) sisteminin lineer bağımsız çözümleridir ve genel çözüm

$$x = C_1 . A . e^{\lambda t} + C_2 (A_1 . t + A_2) . e^{\lambda t}$$

$$y = C_1 A . e^{\lambda t} + C_2 (B_1 . t + B_2) . e^{\lambda t}$$

ÖR $x' = 4x - y$ Sisteminin Çözümünü bulunuz.

$y' = x + 2y$

$$\begin{vmatrix} (4-\lambda) & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

① $8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$(\lambda - 3)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$ (çakışık ikiz reel kök)

② $(4-\lambda)A - B = 0$

$A + (2-\lambda)B = 0$

$\lambda = 3$ yazarsak

$A = B = 1$

③ $x = Ae^{\lambda t} = e^{3t}$

$y = B.e^{\lambda t} = e^{3t}$

④

$x(t) = (A_1 t + A_2)e^{3t}$

$y(t) = (B_1 . t + B_2)e^{3t}$

$x' = A_1 . e^{3t} + (3A_1 . t + 3A_2)e^{3t}$

$y' = B_1 . e^{3t} + (3B_1 . t + 3B_2)e^{3t}$

$x(t) = (A_1 . t + A_2)e^{3t}$

$y(t) = (B_1 . t + B_2)e^{3t}$

Çözümlerini verilen denklemde yerine yazarsak;

$x' = 4x - y$

$y' = x + 2y$

$A_1 + 3A_1 t + 3A_2 = 4A_1 t + 4A_2 - B_1 t - B_2$

$B_1 + 3B_2 t + 3B_2 = A_1 . t + A_2 + 2B_1 + 2B_2$

$A_1 - A_1 t - A_2 + B_1 t + B_2 = 0$

$B_1 + B_1 t + B_2 - A_1 t - A_2 = 0$

$(B_1 - A_1)t + (A_1 - A_2 + B_2) = 0$

$(B_1 - A_1)t + (B_1 + B_2 - A_2) = 0$ $\longrightarrow$

$\boxed{B_1 = A_1 = 1}$

$A_1 - A_2 + B_2 = 0$

$B_1 + B_2 - A_2 = 0$

$2A_1 - 2(A_2 - B_2) = 0$

$\underset{1}{\underset{\parallel}{A_1}} = \underset{1}{\underset{\parallel}{A_2}} - \underset{0}{\underset{\parallel}{B_2}}$

$x(t) = (t+1)e^{3t}$

$y(t) = t.e^{3t}$

$x = C_1.e^{3t} + C_2(t+1)e^{3t}$

$y = C_1.e^{3t} + C_2.t.e^{3t}$

3. Durum (Kompleks Eşlenik Kökler)

$\lambda_1 = a + ib \ , \ \lambda_2 = a - ib$

$x = e^{at}(A_1 \cos bt - A_2 \sin bt)$

$y = e^{at}(B_1 . \cos bt - B_2 \sin bt)$

ve

$x = e^{at}(A_2 . \cos bt + A_1 . \sin bt)$

$y = e^{at}(B_2 . \cos bt + B_1 . \sin bt)$