Semana 03 Métodos Computacionales

Sandra Arce Mena
Angela María Cubillos Garay

03 Termodinámica

a)

INFO
400K → izquierda
pistón derecha : 1/3
$K = 389.6$
$A = 0.01 m^2$
$L = 0.30 m$
$T_0^2 = 200 K$

$PV = nRT$ ↳ ecuación de gas ideal

usamos la ecuación para ambos lados

$$\frac{V_{izq}}{n_{izq} R T_{izq}} = \frac{V_{der}}{n_{der} R T_{der}}$$

despejamos la temperatura de la derecha así:

$$T_{der} = \frac{V_{der}}{V_{izq}} \cdot T_{izq} \quad (1)$$

por definición sabemos que el volumen de un cilindro es:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot h \cdot r^2$$

donde conocemos h del lado derecho, por ende; deducimos también el lado izquierdo.

$$V_{der} = \pi \left(\frac{1}{3}\right) r^2$$

$$V_{izq} = \pi \left(\frac{2}{3}\right) r^2$$

reemplazamos en (1)

$$T_{der} = \left(\frac{\cancel{\pi} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cancel{r^2}}{\cancel{\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \cancel{r^2}} \right) (400 K) \quad 1/2$$

$T_{der} = 200 K$ ↳ Temperatura en equilibrio del lado derecho.

b)

$$Q = -KA \frac{dT}{dx}$$ ↳ Ley de Fourier (transferencia de calor)

$$du = n c_v dT = dQ$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{-KA(T_1 - T_2)}{L} = n c_v \frac{dT_1}{dt} = \frac{-KA(T_1 - T_2)}{L}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{-KA(T_2 - T_1)}{L} = n c_v \frac{dT_2}{dt} = \frac{KA(T_1 - T_2)}{L}$$

obtenemos el siguiente resultado...

$$\frac{dT_1}{dt} = -C(T_1 - T_2)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = C(T_1 - T_2)$$

sabemos que $T_0^2 = 200K$ entonces

$$\left.\frac{dT_1}{dt}\right|_{t=0} = -C \cdot 200K \; ; \; \left.\frac{dT_2}{dt}\right|_{t=0} = C \cdot 200K$$

concluimos que ... $C = \frac{KA}{n c_v L}$ ↳ se definió a partir de las condiciones.

c)

Sistema de ecuaciones

$$\frac{dT_1}{dt} = -C(T_1 - T_2) \;;\; \frac{dT_2}{dt} = C(T_1 - T_2)$$

de ahí que... se traduce en 1 sola expresión en matricer así:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = -C\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)$$

matriz identidad

del $\det(M - \lambda I)$, obtenemos que λ puede tomar 2 valores 0; 2

cuando $\lambda = 0$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ entonces el espacio generado es: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

cuando $\lambda = 2$ $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ el espacio generado es: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

espacios generados

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2tc} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = 2bc\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2tc}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{T=0} = 2bc\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

además, sabemos el valor de T_1 y T_2, por lo tanto reemplazamos en la matriz

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -100 \\ 100 \end{pmatrix} e^{-2tc}$$

$$\begin{pmatrix} a - 100k = 400k \\ a + 100k = 200k \end{pmatrix}$$

$\rightarrow a = 300k$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = 300k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + -100k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2tc}$$

$T_1 = 300k - 100e^{-2tc}$

$T_2 = 300k + 100e^{-2tc}$