偏微分方程

1. 一阶拟线性方程

1.1 一般理论

一阶拟线性方程具有形式：

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

其中，$u = u(x,y)$，方向(a,b,c)称为方程的特征方向，它在R^3中定义了一个向量场，称处处与方向(a,b,c)相切的曲线是方程的特征曲线，设特征曲线的参数形式为：

$$x = x(t)，y = y(t)，z = z(t)，t \in \mathrm{R}^3(\Omega \subseteq \mathrm{R}^3)$$

则沿特征曲线成立下式：

$$\frac{dx}{a(x,y,u)} = \frac{dy}{b(x,y,u)} = \frac{dz}{c(x,y,u)}$$

既有：

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u)，\frac{dy}{dt} = b(x,y,u)，\frac{dz}{dt} = c(x,y,u)$$

上式称为一阶拟线性方程的特征方程。积分曲面$z = u(x,y)$（即一阶拟线性方程的解）就是处处与特征方向相切的曲面。特征曲线和积分曲面有如下关系：

Thm. 若特征曲线γ上一点$P(x_0,y_0,z_0)$位于积分曲面$S: z = u(x,y)$上，则γ整个位于S上

上述定理告诉我们积分曲面是特征曲线的并

一阶拟线性方程解的存在唯一性：

Thm. 设曲线$\gamma: (x,y,z) = \big(f(s),g(s),h(s)\big)$光滑，且$f'^2 + g'^2 \neq 0$，在点$P(x_0,y_0,z_0) = \big(f(s_0),g(s_0),h(s_0)\big)$处的行列式$K$：

$$K = \begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

又设$a(x,y,z)$，$b(x,y,z)$，$c(x,y,z)$在γ附近光滑，则初值问题：

$$\begin{cases} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \\ u\big(f(s),g(s)\big) = h(s) \end{cases}$$

在参数$s = s_0$的一个邻域内存在唯一解，这样的解称为局部解

例 1：已知曲线γ：

$$x=s，y=s，z=\frac{s}{2}，0<s<1$$

求解初值问题：

$$\begin{cases} uu_x+u_y=1 \\ u|_\gamma=\dfrac{s}{2} \end{cases}$$

解：首先，在γ上计算行列式K：

$$K=\begin{vmatrix} f'(s_0) & g'(s_0) \\ a(x_0,y_0,z_0) & b(x_0,y_0,z_0) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{s}{2} & 1 \end{vmatrix}=1-\frac{s}{2}\neq 0，0<s<1$$

下面解常微分方程组的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z，\dfrac{dy}{dt}=1，\dfrac{dz}{dt}=1 \\ u(x,y,z)|_{t=0}=\left(s,s,\dfrac{s}{2}\right) \end{cases}$$

得到方程的解为：

$$z=t+\frac{s}{2}，y=t+s，x=\frac{t^2}{2}+\frac{st}{2}+s$$

1.2 传输方程

形如：

$$u_t+b\cdot \mathrm{D}u=0，x\in \mathrm{R^n}，t\in(0,\infty)$$

的方程，称为传输方程，其中$b=(b_1,\cdots,b_n)$是已知的n维向量，$u=u(x,t)$，$Du=(u_{x_1},\cdots,u_{x_n})$

设方程有光滑解$u(x,t)$，由方程的形式可以看出，$u(x,t)$沿一个具体的方向的方向微商等于 0，固定一点$(x,t)\in R^{n+1}$，令：

$$z(s)=u(x+bs,t+s)，s\in R$$

于是：

$$\frac{dz}{ds}=Du(x+bs,t+s)\cdot b+u_t(x+bs,t+s)=0$$

因此，函数$z(s)$在过点(x,t)且具有方向$(b,1)$的直线上取常数。因此，知道解u在这条直线上一点的值，这就得到它沿此直线的值

Thm. 齐次方程的初值问题 行波解

设$a \in R^n$是已知常向量，$f: R^n \to R$是给定函数，考察传输方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = 0, & (x,t) \in R^n \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in R^n \end{cases}$$

如上取定(x,t)，过点(x,t)且具有方向$(a,1)$的直线的参数形式为$(x+as, t+s)$，当$s=-t$时，此直线与平面$\Gamma: R^n \times \{t=0\}$相交于点$(x-at,0)$，由上文分析，可知$u$沿此直线取常数值，由初始条件得到：$u(x-at,0)=f(x-at)$，得到：

$$u(x,t) = f(x-at), \quad x \in R^n, \quad t \geq 0$$

因此，若方程有解，则必由上式表示，解是唯一的

Thm. 非齐次传输方程的初值问题

考虑非齐次传输方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t + a \cdot Du = f, & (x,t) \in R^n \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x \in R^n \end{cases}$$

仍然取定$(x,t) \in \mathrm{R}^{n+1}$，对$s \in R$，令$z(s) = u(x+at, t+s)$，则：

$$\frac{dz}{ds} = Du(x+as,t+s) \cdot a + u_t(x+as,t+s) = f(x+as,t+s)$$

因此：

$$u(x,t) - g(x-at) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \frac{dz}{ds} ds = \int_{-t}^{0} f(x+as,t+s)\, ds$$

$$u(x,t) - g(x-at) = \int_0^t f(x+a(s-t),s)\, ds$$

于是，对于非齐次传输方程，解具有下面的表达式：

$$u(x,t) = g(x-at) + \int_0^t f(x+a(s-t),s)\, ds, \quad x \in R^n, \quad t \geq 0$$

1.3 课后习题

（1） 求下列初值问题的解

(a) $u_y + uu_x = 0$，$u(x,y)|_{y=0} = h(x)$

解：方程等价于求解常微分方程组初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z，\dfrac{dy}{dt} = 1，\dfrac{dz}{dt} = 0 \\ x = s，y = 0，z = h(s)，t = 0 \end{cases}$$

由$dz/dt = 0$，解得$z = C$，由初始条件，得到$C = h(s)$，因此$z = h(s)$

由$dy/dt = 1$，解得$y = t + C$，由初始条件，得到$C = 0$，因此$y = t$

由$dx/dt = z$，解得$x = zt + C$，由初始条件，得到$C = s$，因此$x = h(s)t + s$

综上，初值问题的解为：

$$x = h(s)t + s,\ \ y = t,\ \ z = h(s)$$

(b) $x^2u_x + y^2u_y = u^2$，$u(x,y)|_{y=2x} = 1$

解：方程等价于求解常微分方程组初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2，\dfrac{dy}{dt} = y^2，\dfrac{dz}{dt} = z^2 \\ x = s，y = 2s，z = 1，t = 0 \end{cases}$$

由$dz/dt = z^2$，得到：

$$\frac{1}{z^2}dz = dt$$

两边同时积分，得到：

$$\int \frac{1}{z^2}dz = \int 1\,dt \to -\frac{1}{z} = t + C$$

从而解得z：

$$z = \frac{1}{-t + C}$$

由初始条件，得到$C = 1$，因此$z = 1/(1 - t)$

同理，可以得到：

$$x = \frac{1}{-t + C},\ y = \frac{1}{-t + C}$$

由初始条件，解得$x = 1/(1/s - t)$，$y = 1/(1/2s - t)$

综上，初值问题的解为：

$$x = \frac{1}{1/s - t},\ \ y = \frac{1}{1/2s - t},\ \ z = \frac{1}{1 - t}$$

(c) $xu_x+yu_y+u_z=u$，$u(x,y,0)=h(x,y)$

解：方程等价于求解常微分方程组初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x，\dfrac{dy}{dt}=y，\dfrac{dz}{dt}=1，\dfrac{dw}{dt}=w \\ x=s，y=v，z=0，w=h(s,v)，t=0 \end{cases}$$

由$dw/dt=w$，得到：

$$\frac{1}{w}dw=dt$$

两边同时积分，得到：

$$\int\frac{1}{w}dw=\int 1\,dt\rightarrow\ln w=t+C$$

从而解得w：

$$w=Ce^t$$

由初始条件，得到$C=h(s,v)$，因此$w=h(s,v)e^t$

同理，可以得到：

$$x=Ce^t，y=Ce^t$$

由初始条件，解得$x=se^t$，$y=ve^t$

由$dz/dt=1$，得到$z=t+C$，由初始条件，可得$C=0$，因此$z=t$

综上，初值问题的解为：

$$x=se^t，y=ve^t，z=t，w=h(s,v)e^t$$

（2） 在（1）(a)中，求在xy平面上，过点$(s,0)$的特征投影，由此出发证明：

(a) 当$h(s)$不恒等于常数时，问题（1）(a)在$y\in R$上没有整体光滑解

(b) 沿着特征投影计算微商$u_x(x,y)$，由此确定微商$u_x(x,y)$变为无穷大时y的值（设$h'(s)<0$）

证明：(a) 仅考虑（1）(a)常微分方程中的前两个分量，得到：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=z，\dfrac{dy}{dt}=1 \\ x=s，y=0，t=0 \end{cases}$$

解得：

$$x=h(s)t+s，y=t$$

因此特征投影为$x=h(s)y+s$，当$h(s)$不恒等于常数时，则存在$s_1\neq s_2$，使得$h(s_1)\neq h(s_2)$

由s_1，s_2可得到两条投影直线$x=h(s_1)y+s_1$和$x=h(s_2)y+s_2$，因为$h(s_1)\neq h(s_2)$，因此两条直线必定相交，在平面(x,y)的交点处，一个取值为$u=h(s_1)$，一个取值为$u=h(s_2)$

这说明方程的解不唯一，解是局部解，因此方程在$y \in R$上没有整体光滑解

(b) 计算微商u_x得到：

$$u_x = \frac{du}{dx} = \frac{du}{ds} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{ds}} = \frac{h'(s)}{h'(s)t + 1} = \frac{h'(s)}{h'(s)y + 1}$$

因为$h'(s) < 0$，当$y \to -1/\, h'(s)$时，$u_x(x, y) \to \infty$，因此当u_x变为无穷大时y的值为：

$$y = -\frac{1}{h'(s)}$$

2. 波动方程

2.1 一维波动方程的初值问题

本节讨论波动方程：

$$u_{tt}-a^2\Delta u=f$$

其中，$a>0$是常数，$t>0$，$x\in\Omega\subseteq R^n$（开集），$u=u(x,t)$是未知实值函数，$f=f(x,t)$是已知实值函数，Δ是关于空间变量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的 Laplace 算子

d’Alembert 公式

先考察初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0，x\in R，t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x)，u_t(x,0)=\psi(x)，x\in R \end{cases}$$

由算子的运算作用，可得到：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u=u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

令$v(x,t)$：

$$v(x,t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}-a\frac{\partial}{\partial x}\right)u$$

则由算子作用，可得：

$$v_t(x,t)+av_x(x,t)=0，x\in R，t>0$$

这是齐次传输方程，且可得其初值条件为：

$$v(x,0)=\psi(x)-a\varphi'(x)$$

于是，由传输方程的解，可得：

$$v(x,t)=\psi(x-at)-a\varphi'(x-at)$$

将v代入u，得到：

$$u_t-au_x=\psi(x-at)-a\varphi'(x-at)$$

其中$(x,t)\in R\times(0,\infty)$，这是非齐次传输方程，已知$u(x,0)=\varphi(x)$，因此：

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\int_0^t[\psi(x-a(s-t)-as)-a\varphi'(x-a(s-t)-as)]\,ds$$

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\int_0^t[\psi(x-2as+at)-a\varphi'(x-2as+at)]\,ds$$

做积分变元替换，得到：

$$u(x,t)=\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}[\psi(y)-a\varphi'(y)]\,dy$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(y)\,dy$$

上式称为 d'Alembert 公式，它表示齐次波动方程初值问题的形式解，当$\varphi\in C^2,\psi\in C$时，公式所表示的函数$u(x,t)$满足问题的方程和初始条件。即解的存在可由 d'Alembert 公式表示，求解过程又能看出任何解都可以由 d'Alembert 公式表示，所有有解必定唯一。

在有限区间$[0,T]$内，考虑方程解的稳定性（对初值的连续依赖性），设有估计式：

$$\sup_{x,t}|u(x,t)|\le\sup_{x}|\varphi(x)|+T\cdot\sup_{x}|\psi(x)|$$

假设有下面的两个初值问题：

$$\begin{cases}u_{1,tt}-a^2u_{1,xx}=0，\ x\in R，\ t>0\\ u_1(x,0)=\varphi_1(x)，\ u_{1,t}(x,0)=\psi_1(x)，\ x\in R\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{2,tt}-a^2u_{2,xx}=0，\ x\in R，\ t>0\\ u_2(x,0)=\varphi_2(x)，\ u_{2,t}(x,0)=\psi_2(x)，\ x\in R\end{cases}$$

令$u=u_1-u_2$，则u满足初值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0，\ x\in R，\ t>0\\ u(x,0)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)，\ u_t(x,0)=\psi_1(x)-\psi_2(x)，\ x\in R\end{cases}$$

从而得到估计式：

$$\sup_{x,t}|u(x,t)|\le\sup_{x}|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|+T\cdot\sup_{x}|\psi_1(x)-\psi_2(x)|$$

因此，在连续函数空间范数意义下，若初值变化很小，则相应解的变化也很小，所以方程的解是稳定的，又因为方程的古代解存在且唯一，因此方程是适定的

反射法

考虑半直线$R_+=\{x>0\}$上的初边值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-u_{xx}=0，\ x\in R_+，\ t>0\\ u(x,0)=g，\ u_t(x,0)=h，\ x\in R_+\\ u(0,t)=0，\ t\ge 0\end{cases}$$

其中，g,h是已知函数，且满足$g(0)=h(0)=0$

先把问题转换到全空间中，为此对函数u,g,h进行奇延拓，如下：

$$\overline{u}(x,t)=\begin{cases}u(x,t)，\ x\ge 0，\ t\ge 0\\ -u(-x,t)，\ x\le 0，\ t\ge 0\end{cases}$$

$$\overline{g}(x)=\begin{cases}g(x), & x\geq 0\\ -g(-x), & x\leq 0\end{cases}$$

$$\overline{h}(x)=\begin{cases}h(x), & x\geq 0\\ -h(-x), & x\leq 0\end{cases}$$

则$\overline{u}(x,t)$满足问题：

$$\begin{cases}\overline{u}_{tt}-\overline{u}_{xx}=0, & (x,t)\in R\times(0,\infty)\\ \overline{u}(x,0)=\overline{g}, \ \overline{u}_t(x,0)=\overline{h}, & x\in R\end{cases}$$

由 d’Alembert 公式，得到：

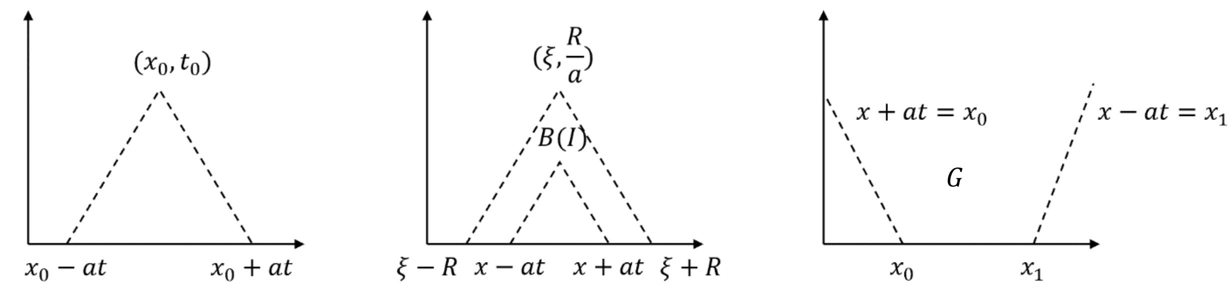
$$\overline{u}(x,t)=\frac{1}{2}[\overline{g}(x+t)+\overline{g}(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\overline{h}(y)\,dy$$

注意到$\overline{u}(x,t)$，$\overline{g}(x)$，$\overline{h}(x)$的定义，使得当$x\geq 0$，$t\geq 0$时的原问题的解为：

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}h(y)\,dy, & x\geq t\geq 0\\ \frac{1}{2}[g(x+t)-g(t-x)]+\frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x+t}h(y)\,dy, & t\geq x\geq 0\end{cases}$$

将已知函数进行奇延拓或偶延拓之后求得原问题的解的方法称为反射法

依赖区域 决定区域 影响区域



从 d’Alembert 公式看出，$u(x_0,t_0)$的取值，仅与初值函数φ,ψ在$[x_0-at,x_0+at]$上的值有关，因此称$[x_0-at,x_0+at]$为点(x_0,t_0)的依赖区域，更改初值在区间外处的值，不会影响$u(x,t)$在(x_0,t_0)处的取值。

类似的，确定区间$[\xi-R,\xi+R]$后，利用特征方向作特征线，得到三角形的闭区域$B(I)$，则$u(x,t)$在$B(I)$内的值已经由区间$[\xi-R,\xi+R]$确定，称$B(I)$是$[\xi-R,\xi+R]$的决定区域。

而对于任意区间$[x_0,x_1]$，初值函数在其上的值会影响$u(x,t)$在哪些范围内的值呢？过两端点做特征曲线，得到的开放无边界区域G即为区间$[x_0,x_1]$的影响区域。

弱解

从 d'Alembert 公式解出的$u(x,t)$对初值函数有一定的光滑性要求：

$$\varphi \in C^2, \ \psi \in C^1$$

当初值函数仅连续而不具有光滑性时，d'Alembert 公式得出的解仍满足方程，此时得到的解称为广义解，或弱解。

设初值函数连续，考虑任意区间$[-r,r]$，$r>0$，有 Weierstrass 逼近定理，存在两列多项式$\varphi_n \in C^2$，$\psi_n \in C^1$，在$[-r,r]$上一致收敛于φ，ψ，记初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \varphi_n, \ u_t(x,0) = \psi_n, \ n = 1,2,\cdots \end{cases}$$

的解为$u_n(x,t)$，则有估计：

$$\sup_G |u_n(x,t) - u_m(x,t)| \le \sup_{|x|\le r} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| + T \cdot \sup_{|x|\le r} |\psi_n(x) - \psi_m(x)| \to 0 (m,n \to \infty)$$

于是，函数列$\{u_n(x,t)\}$在(x,t)平面的任一有界区域G上一致收敛到一个连续函数$u(x,t)$，又有：

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi_n(x+at) + \varphi_n(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_n(y)\,dy$$

上式令$n \to \infty$，得到：

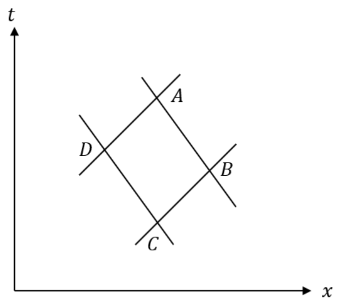
$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(y)\,dy$$

因此，弱解仍然由 d'Alembert 公式表示，且上面的推证明表明：弱解也是适定的

2.2 一维波动方程的初边值问题

齐次方程特征线法

在解空间(x,t)中，由四条特征线构成的特殊的平行四边形$ABCD$：



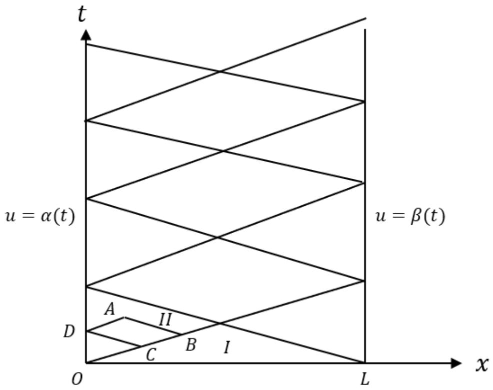
验证可得对顶点上的值得和相等，即：

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

现在考虑初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0，0<x<L，t>0 \\ u(x,0)=f(x)，u_t(x,0)=g(x)，0\le x\le L \\ u(0,t)=\alpha(t)，u(L,t)=\beta(t)，t\ge 0 \end{cases}$$

用特征线法求解，用通过角点的特征线将区域$0<x<L$，$t>0$分成无数个小区域：



对于闭区域I中的点，它正是区间$[0,L]$的决定区域，因此区域I中任一点处的值可直接由 d'Alembert 公式计算得到，且它的值仅由初值函数在$[0,L]$上的值决定，与边值无关。

对于闭区域II中的点，例如$A=(x,t)$，过A做特征线与其他边界相交于B,C,D，则由：

$$u(A)=-u(C)+u(B)+u(D)$$

其中，$u(D)$由边界条件给出，而C,B位于闭区域I上，因此$u(C)$，$u(B)$可由 d'Alembert 公式直接计算，从而$u(A)$的值可求，其他区域同理可得。这个方法便成为齐次方程的特征线法

注：为了保证解$u(x,t)$满足$u(x,t)\in C^2$，则要求函数满足相容条件：

$$\begin{cases} \alpha(0)=f(0)，\alpha'(0)=g(0)，\alpha''(0)=a^2f''(0) \\ \beta(0)=f(L)，\beta'(0)=g(L)，\beta''(0)=a^2f''(L) \end{cases}$$

其中，$f,\alpha,\beta\in C^2$，$g\in C^1$

齐次方程分离变量法

分离变量法又称为 Fourier 方法，考虑两端固定的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0，0<x<l，t>0 \\ u(x,0)=f(x)，u_t(x,0)=g(x)，0\le x\le l \\ u(0,t)=0，u(l,t)=0，t\ge 0 \end{cases}$$

其中，f,g满足相容条件：

$$f(0)=f(l)=0，g(0)=g(l)=0$$

分离变量法的具体步骤如下：

（1） 分离变量，求满足其次边界条件，形如：

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$$

的解，将它代入方程，整理得到：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

上式左端仅是t的函数，右端仅是x的函数，因此当且仅当它们都是常数时，等式恒成立，记这个常数为$-\lambda$，得到：

$$\begin{cases} T''(t)+\lambda a^2T(t)=0，\ t>0 \\ X''(x)+\lambda X(t)=0，\ 0<x<l \end{cases}$$

为使得$u(x,t)$满足边界条件，需要$X(0)=X(l)=0$

（2） 解特征值问题，即：

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(t)=0，\ 0<x<l \\ X(0)=X(l)=0 \end{cases}$$

非零的实数解λ称为特征值，λ对应的非零函数解称为特征函数

由 ODE 知识，上述方程仅当$\lambda>0$时，方程有解，记$\lambda=k^2$，则通解为：

$$X(x)=A\cdot\cos kx+B\cdot\sin kx$$

由边界条件$X(l)=X(0)=0$，得到$A=0$，又因为$B\cdot\sin kl=0$，而要求$B\neq 0$，得到：

$$k=\frac{n\pi}{l}\ \text{or}\ \lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2，\ n=1,2,\cdots$$

即为特征值，对应的特征函数为：

$$X_n(x)=B\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x，\ n=1,2,\cdots$$

将特征值代入到关于t的方程，可解得：

$$T_n(t)=C_n'\sin\frac{an\pi}{l}t+D_n'\cos\frac{an\pi}{l}t，\ n=1,2,\cdots$$

其中C_n'，D_n'是任意常数，于是，方程的解：

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=\left[C_n'\sin\frac{an\pi}{l}t+D_n'\cos\frac{an\pi}{l}t\right]B\sin\frac{n\pi}{l}x，\ n=1,2,\cdots$$

已经满足边界条件，常系数为保证方程的解满足初值条件，待定

（3） 叠加所有的$u_n(x,t)$，令$u(x,t)$：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\sin\frac{an\pi}{l}t+D_n\cos\frac{an\pi}{l}t\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

假设上面的级数一致收敛，且关于t逐项微分后仍然一致收敛，则由初值条件得到：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x)$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{an\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=g(x)$$

由 Fourier 级数理论，如果f,g有一阶连续微商且满足$f(0)=f(l)=g(0)=g(l)=0$，则：

$$D_n,\ C_n\frac{an\pi}{l}$$

就分别是f,g在区间$[0,l]$上的正弦级数系数，于是：

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

$$C_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

将系数代入$u(x,t)$，即得到齐次方程初边值问题的解

注：分离变量法得到的解是形式的，不一定是方程的解，这是因为不知道级数是否一致收敛，以及对t微商后是否一致收敛，为此，需对初值函数施加一些条件，得到定理：

Thm. （存在性定理）若$f\in C^4$，$g\in C^3$，并且f,f'',g满足相容条件，则齐次方程初边值问题的古典解存在，且可由分离变量法表示。

非齐次方程 特征函数展开法

下面考虑非齐次方程的齐次初边值问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ 0<x<l,\ t>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\ge 0\end{cases}$$

齐次问题分离变量法求解得到的特征函数是：

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x\ ,\ n=1,2,\cdots$$

受 ODE 中常数变易法的启发，将t视为参数，寻求如下的形式解：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中$T_n(t)$即为 Fourier 系数，这正是要求解的函数，验证可得上面的函数级数满足边界条件，因此，接下来仅需将形式解代入原方程，使其满足方程的解，并满足初值条件即可。

代入方程得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x=f(x,t)$$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)\sin\frac{n\pi}{l}x=0$$

并将$f(x,t)$在函数系$\{\sin n\pi x/l\}$上展开得到系数$\{f_n\}$，上面上式需满足方程：

$$\begin{cases}T_m''(t)+\left(\frac{am\pi}{l}\right)^2 T_m(t)=f_m(t)\\ T_m(0)=T_m'(0)=0\end{cases}$$

其中，系数$f_m(t)$：

$$f_m(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{m\pi}{l}x\,\mathrm{d}x，\ m=1,2,\cdots$$

通过 ODE 知识，上述常微分方程初值问题的解为：

$$T_m(t)=\frac{l}{am\pi}\int_0^t f_m(\tau)\sin\frac{am\pi}{l}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau，\ m=1,2,\cdots$$

于是得到非齐次问题的形式解为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{l}{an\pi}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

上式可写为更加紧凑的形式：

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$$

其中：

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi$$

注：为了使形式解满足方程，需对函数施加一些条件，得到定理：

Thm. （存在性）若$f(x,t)$连续，且$f(x,t)\in C_x^3$，f,f_{xx}当$x=0,l$时取 0，则由特征函数展开法求得的函数$u(x,t)$是非齐次方程齐次初边值问题的古典解

至此，我们得到了两种求解波动方程初边值问题的方法，它们适用于不同的范围：

分离变量法： 齐次方程带齐次边界条件和任意初始条件

特征函数展开法： 非齐次方程带有齐次的初边值条件

对于一般的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t)，0 < x < l，t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x)，u_t(x,0) = \psi(x)，0 \le x \le l \\ u_x(0,t) = \alpha(t)，u(l,t) = \beta(t)，t \ge 0 \end{cases}$$

为此，先将边界条件齐次化，若能找到函数$h(x,t)$，使得：

$$h_x(0,t) = \alpha(t)，h(l,t) = \beta(t)$$

则函数$v(x,t) = u - h$满足齐次边界条件：

$$v_x(0,t) = 0，v(l,t) = 0$$

因此，问题的关键在于寻找$h(x,t)$，由$h(x,t)$的条件，可得：

$$h(x,t) = \alpha(t)x + \beta(t) - l\alpha(t)$$

是满足条件的最简单形式，用这个h作变换：

$$v(x,t) = u - h = u(x,t) - \alpha(t)x - \beta(t) + l\alpha(t)$$

则原问题转换为具有齐次边界条件的初边值问题：

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = f(x,t) - h(h_{tt} - a^2 h_{xx})，0 < x < l，t > 0 \\ v_x(0,t) = 0，v(l,t) = 0，t \ge 0 \\ v(x,0) = \varphi(x) - h(x,0)，v_t(x,0) = \psi(x) - h_t(x,0)，0 \le x \le l \end{cases}$$

利用叠加原理，令$v(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$，其中w, z分别满足：

$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0，0 < x < l，t > 0 \\ w_x(0,t) = 0，w(l,t) = 0，t \ge 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) - h(x,0)，w_t(x,0) = \psi(x) - h_t(x,0)，0 \le x \le l \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_{tt} - a^2 z_{xx} = f(x,t) - h(h_{tt} - a^2 h_{xx})，0 < x < l，t > 0 \\ z_x(0,t) = 0，z(l,t) = 0，t \ge 0 \\ z(x,0) = 0，z_t(x,0) = 0，0 \le x \le l \end{cases}$$

于是，可用分离变量法求解$w(x,t)$，用特征函数展开法求解$z(x,t)$，最终得到：

$$u(x,t) = v(x,t) + h(x,t) = w(x,t) + z(x,t) + h(x,t)$$

注： 解题的关键在于边界条件的齐次化

2.3 Sturm-Liouville 特征值问题

在函数空间中（不一定是光滑的）考虑问题：

$$\begin{cases} A(t)u_{tt}+C(x)u_{xx}+D(t)u_t+E(x)u_x+\big(F_1(t)+F_2(x)\big)u=0，\ a<x<b，\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x)，\ u_t(x,0)=\psi(x)，\ a\le x\le b \\ \alpha_1 u(a,t)+\alpha_2 u_x(a,t)=0，\ \beta_1 u(b,t)+\beta_2 u_x(b,t)=0，\ t\ge 0 \end{cases}$$

其中，α_i,β_i是常数，且$\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$，$\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$，$A(t)\ge A_0>0$，$C(x)\le C_0<0$，$A_0,C_0$是常数，方程系数在$a\le x\le b$，$t\ge 0$上连续，不失一般性，设$F_2(x)>0$

设解具有形式$u(x,t)=X(x)T(t)$，代入原方程和边界值条件，分离变量后，得到关于$T(t)$的方程和$X(x)$的特征值问题：

$$AT''(t)+DT'(t)+F_1T+\lambda T=0$$

$$\begin{cases} CX''+EX'+F_2X-\lambda X=0 \\ \alpha_1 X(a)+\alpha_2 X'(a)=0 \\ \beta_1 X(b)+\beta_2 X'(b)=0 \end{cases}$$

问题转换为求上述边值问题非零解的特征值及对应的特征函数

首先将方程化为其自伴随形式，用待定函数$-S(x)$乘方程两边，得到：

$$(-SCX')'+(SC)'X'-SEX'-SF_2X+\lambda SX=0$$

寻找函数$S(x)$使得$(SC)'X'-SEX'=0$，得到：

$$S=\frac{-1}{C}\exp\left\{\int_a^x\frac{E}{C}\mathrm{d}x\right\}$$

因为$C\le C_0<0$，从而$-SC>0$，令：

$$p(x)=-SC，\ q(x)=SF_2$$

于是原方程化为自伴随形式：

$$[p(x)X']'-q(x)X+\lambda SX=0$$

方程重新改写为：

$$\begin{cases} [p(x)X']'-q(x)X+\lambda SX=0 \\ \alpha_1 X(a)+\alpha_2 X'(a)=0 \\ \beta_1 X(b)+\beta_2 X'(b)=0 \end{cases}$$

其中：

$$p(x)=-SC\ge\exp\left\{\int_a^x\frac{|E|}{C_0}\mathrm{d}x\right\}\equiv p_0>0$$

$$q(x)>0，\ S(x)>0$$

上述问题即为 Sturm-Liouville 问题，简称 S-L 问题

特征函数的性质

Thm. （特征函数空间一维性）设X_1与X_2是对应同一个特征值的特征函数，则它们线性相关

Proof：在$x = a$处有：

$$\begin{cases} \alpha_1 X_1(a) + \alpha_2 X_1'(a) = 0 \\ \alpha_1 X_2(a) + \alpha_2 X_2'(a) = 0 \end{cases}$$

因为$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$，故$X_1$和$X_2$的 Wronski 行列式在$x = a$处的值等于 0，从而二者线性相关

Thm. （加权正交性）若X_1，X_2分别是对应于特征值λ_1，λ_2（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）的特征函数，则它们在$[a, b]$上加权$S(x)$正交，即：

$$\int_a^b S(x) X_1 X_2 \,\mathrm{d}x = 0$$

Proof：将X_1, X_2代入方程，得到：

$$\begin{cases} [p(x)X_1']' - q(x)X_1 + \lambda_1 S X_1 = 0 \\ [p(x)X_2']' - q(x)X_2 + \lambda_2 S X_2 = 0 \end{cases}$$

上式第一式乘以X_2减去第二式乘以X_1，得到：

$$(\lambda_1 - \lambda_2) S X_1 X_2 = X_1[p(x)X_2'] - X_2[p(x)X_1']' = [X_1(pX_2') - X_2(pX_1')]'$$

上式在$[a, b]$上积分，利用边界条件，得到：

$$\int_a^b S(x) X_1 X_2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \int_a^b [X_1(pX_2') - X_2(pX_1')]' \,\mathrm{d}x = [X_1(pX_2') - X_2(pX_1')]|_a^b = 0$$

特征值与特征函数的存在性

注：本部分先构造比光滑函数空间更大的函数空间，并相应地把特征值问题的解理解为弱解

记在$[a, b]$上加权$S(x)$平方可积的函数空间为$L_{2,S}$，定义内积为：

$$(y_1, y_2)_S = \int_a^b S(x) y_1(x) y_2(x) \,\mathrm{d}x，\quad y_1, y_2 \in L_{2,S}$$

其中，$0 < S(x) \in C[a, b]$，再在$C_0^1[a, b]$中定义内积：

$$(y_1, y_2)_H = \int_a^b [p(x) y_1' y_2' + q(x) y_1 y_2] \,\mathrm{d}x,，\quad y_1, y_2 \in C_0^1[a, b]$$

其中，$p(x)$和$q(x)$是$[a, b]$上的连续函数，且对某常数p_0，有$p(x) \geq p_0 > 0$，$q(x) > 0$

记内积$(y_1, y_2)_H$诱导得到的范数为$||\cdot||_H$，$C_0^1[a, b]$按此范数完备化后的空间记为$H_{p,q}^{0,1}$

将X记为y，考虑第一类边界条件，则特征值问题为：

$$\begin{cases}[p(x)y']' - qy + \lambda Sy = 0 \\ y(a) = y(b) = 0\end{cases}$$

下面给出弱解的定义：

Def. 若$y \in H_{p,q}^{0,1}$对任意的$\eta \in C_0^1[a,b]$成立$(y,\eta)_H = \lambda(y,\eta)_S$，则称$y$是上述方程的弱解

注：易得y是方程的古典解则必是弱解，相反，若弱解$y \in C[a,b] \cap C^2(a,b)$，则$y$是古典解

为了证明弱解的存在性，考虑泛函：

$$K(y) = \frac{(y,y)_H}{(y,y)_S}\text{，}\ y \in H_{p,q}^{0,1}$$

先给出两个引理：

Lemma. （极小函数与弱解）若$0 \neq y_0 \in H_{p,q}^{0,1}$满足：

$$K(y_0) = \inf_{y \in H_{p,q}^{0,1}} K(y)$$

则y_0必定是方程的弱解，此时：

$$\lambda = \frac{(y_0,y_0)_H}{(y_0,y_0)_S}$$

Proof：对任意$\eta \in C_0^1[a,b]$及实数a，有：

$$P \equiv (y_0 + a\eta, y_0 + a\eta)_H = (y_0,y_0)_H + 2a(y_0,\eta)_H + a^2(\eta,\eta)_H$$

$$Q \equiv (y_0 + a\eta, y_0 + a\eta)_S = (y_0,y_0)_S + 2a(y_0,\eta)_S + a^2(\eta,\eta)_S$$

则$K[a] \equiv K(y_0 + a\eta)$在$a = 0$处取得极小值，固有$K'[0] = 0$，即：

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' |_{a=0} = 0$$

计算上式可得：

$$(y_0,\eta)_H - \frac{(y_0,y_0)_H}{(y_0,y_0)_S}(y_0,\eta)_S = 0$$

记λ：

$$\lambda = \frac{(y_0,y_0)_H}{(y_0,y_0)_S}$$

立刻得到：

$$(y,\eta)_H - \lambda(y,\eta)_S = 0\text{，}\ \forall \eta \in C_0^1[a,b]$$

综上，y_0是方程的弱解

Lemma. （紧性）空间$H_{p,q}^{0,1}$中的有界集合在$C[a,b]$中是紧集

下面给出方程弱解的存在性定理

Thm. （极小函数存在性，弱解存在性）存在$y \in H_{p,q}^{0,1}$使得：

$$K(y) = \inf_{z \in H_{p,q}^{0,1}} K(z)$$

第一特征值

记$K_1 = H_{p,q}^{0,1}$，称：

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{y \in K_1 \\ y \neq 0}} \frac{(y,y)_H}{(y,y)_S}$$

是特征值问题的第一个特征值，又叫主特征值，并称使得：

$$\frac{(y_1,y_1)_H}{(y_1,y_1)_S} = \lambda_1$$

成立的$0 \neq y_1 \in K_1$是对应于特征值λ_1的特征函数

由极小函数存在定理，特征函数y_1总是存在的，再取K_2：

$$K_2 = \{y \in K_1 | (y,y_1)_S = 0\}$$

则变分问题：

$$\lambda_2 = \inf_{y \in K_2} \frac{(y,y)_H}{(y,y)_S}$$

的极小函数$0 \neq y_2 \in K_2$存在，使得：

$$\lambda_2 = \frac{(y_2,y_2)_H}{(y_2,y_2)_S}$$

一般地，取：

$$K_n = \{y \in K_1 | (y,y_1)_S = (y,y_2)_S = \cdots = (y,y_{n-1})_S = 0\}$$

则变分问题：

$$\lambda_n = \inf_{y \in K_n} \frac{(y,y)_H}{(y,y)_S}$$

的极小函数$0 \neq y_n \in K_n$存在，使得：

$$\lambda_n = \frac{(y_n,y_n)_H}{(y_n,y_n)_S}$$

从而得到定理：

Thm. （多个特征值和特征函数）称λ_n是特征值问题的第n个特征值，y_n是对应于λ_n的特征函数，且显然成立：$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$

两个特征值不可能相等，否则由特征函数空间的一维性，设$\lambda_n = \lambda_{n+1}$，得到：

$$y_n = c y_{n+1}$$

这会与$(y_n, y_{n+1})_S = 0$产生矛盾

特征函数系的完备性

这个部分讨论两个问题：

（1） 特征值序列是否有有限的极限？

（2） 特征函数组成的函数系是否完备？

Thm. （特征值的无界性）当$n \to \infty$时，$\lambda_n \to +\infty$

Proof：由特征函数y_n的构造方法，可知它们是正交的，不妨设它们是规范的，则$(y_n, y_n) = 1$

反证法：假设$n \to \infty$时，λ_n不趋于无穷，则存在$k > 0$，使得$\lambda_n < k^2$，$\forall n \in N$，从而：

$$||y_n||_H < k，\ n = 1,2,\cdots$$

即$\{y_n\}$是$H_{p,q}^{0,1}$中的有界序列，进而是$C[a,b]$中的紧序列，从而是$L_{2,S}$中的紧序列，固有子列，仍然记为$\{y_n\}$，在$L_{2,S}$中收敛，即有：$||y_n - y_m||_S^2 \to 0$，但这与：

$$||y_n - y_m||_S^2 = ||y_n||_S^2 + ||y_m||_S^2 - 2(y_n, y_m)_S = 2，\ m, n = 1,2,\cdots, m \neq n$$

相互矛盾，从而当$n \to \infty$时，$\lambda_n \to +\infty$

Thm. （特征函数系的完备正交性）特征函数系$\{y_n\}$是$L_{2,S}$中完备正交系

由以上结论，知对任意$f \in L_{2,S}$，它的 Fourier 展开：

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n$$

其中：

$$c_n = (f, y_n)_S = \int_a^b S(x) f y_n \,\mathrm{d}x，\ n = 1,2,\cdots$$

是f在规范正交特征函数系$\{y_n\}$上的 Fourier 展开系数

Sturm-Liouville 初边值问题的解

对于方程：

$$\begin{cases} A(t)u_{tt} + C(x)u_{xx} + D(t)u_t + E(x)u_x + \big(F_1(t) + F_2(x)\big)u = 0，\ a < x < b，\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x)，\ u_t(x,0) = \psi(x)，\ a \le x \le b \\ \alpha_1 u(a,t) + \alpha_2 u_x(a,t) = 0，\ \beta_1 u(b,t) + \beta_2 u_x(b,t) = 0，\ t \ge 0 \end{cases}$$

已经得知它的特征值问题为：

$$\begin{cases}[p(x)X']' - q(x)X + \lambda SX = 0 \\ \alpha_1 X(a) + \alpha_2 X'(a) = 0 \\ \beta_1 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0\end{cases}$$

由 S-L 特征值理论，可知问题的特征值λ_n存在，特征函数系$\{X_n\}$是$L_{2,S}$中的完备正交系，将λ_n代入到分离变量后得到的二阶线性方程中：

$$AT''(t) + DT'(t) + F_1 T + \lambda T = 0$$

由 ODE 知识，可得上述方程的通解为：

$$T_n(t) = a_n T_n^*(t) + b_n T_n^{**}(t)$$

其中，$T_n^*(t)$和$T_n^{**}(t)$是线性无关的特解，且满足：

$$T_n^*(0) = 1，\ \frac{dT_n^*}{dt}(0) = 0$$

$$T_n^{**}(0) = 0，\ \frac{dT_n^{**}}{dt}(0) = 1$$

叠加得到：

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n T_n^*(t) + b_n T_n^{**}(t)\right)X_n(x)$$

由初值条件，得到：

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) = \varphi(x)，\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) = \psi(x)$$

只要$\varphi(x)$，$\psi(x) \in L_{2,S}$，就有：

$$a_n = \frac{1}{M}\int_a^b S(x)\varphi(x)X_n\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{M}\int_a^b S(x)\psi(x)X_n\,dx$$

其中：

$$M = \int_a^b S(x)X_n^2(x)\,dx$$

将系数$\{a_n\},\{b_n\}$代入即可得到初边值问题的形式解$u(x,t)$

2.4 高维波动方程的初值问题

球面平均法 Kirchhoff 公式

考虑三维波动方程初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0，\ x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3，\ t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x)，\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

若初值函数是形如$\varphi(x) = \varphi(r)$，$\psi(x) = \psi(r)$且$\varphi(0) = \psi(0) = 0$的径向函数，其中：

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

此时，可求形如$u = u(r, t)$的径向解，问题中的方程可转换为：

$$u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r} u_r\right)$$

令$ru = w$，则可得到关于w的方程及初值条件：

$$\begin{cases} w_{tt} = a^2 w_{rr}，\ r > 0，\ t > 0 \\ w|_{t=0} = r\varphi(r)，\ w_t|_{t=0} = r\psi(r) \end{cases}$$

将φ, ψ奇延拓至$(-\infty, 0)$，在$-\infty < r < +\infty$，$t > 0$上考虑上述问题，由 d'Alembert 公式得：

$$u(r,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(r-at)] + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at} \tau\psi(\tau)\,d\tau，\ r \geq at \geq 0 \\ \dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at) + (r-at)\varphi(at-r)] + \dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{-r+at}^{r+at} \tau\psi(\tau)\,d\tau，\ at \geq r \geq 0 \end{cases}$$

球面平均法

任意固定$x \in R^3$，S_r表示以x为球心，$r = |y - x|$为半径的球面，其中y是球面S_r上的变点，引进u的球面平均函数：

$$Mu(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y,t)\, dS_y$$

其中，dS_y是球面的面积元，令：

$$\omega = \frac{y - x}{r}$$

则$|\omega| = 1$，它表示单位球面S_1，ω就是球面S_r的单位外法向，容易得到：$\mathrm{d}S_y = r^2 \mathrm{d}S_\omega$，且：

$$Mu = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x + \omega r, t)\, dS_\omega$$

利用两式，得到：

$$\int_{S_r} u(y,t)\,dS_y = r^2 \int_{S_\omega} u(x+\omega r,t)\,dS_\omega$$

对原方程在$|y-x| \le r$上积分，利用散度定理将体积分换为面积分，得到：

$$\int_{|y-x|\le r} u_{tt}\,dy = \int_{|y-x|\le r} a^2 \Delta u(y,t)\,dy = a^2 \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \omega}(y,t)\,dS_y = a^2 \sum_{i=1}^{3} \int_{S_r} \omega_i u_{y_i}(y,t)\,dS_y$$

$$\int_{|y-x|\le r} u_{tt}\,dy = a^2 r^2 \sum_{i=1}^{3} \int_{|\omega|=1} \omega_i u_{y_i}(x+\omega r,t)\,dS_\omega = a^2 r^2 \sum_{i=1}^{3} \int_{|\omega|=1} \frac{\partial u}{\partial r}(x+\omega r,t)\,dS_\omega$$

$$\int_{|y-x|\le r} u_{tt}\,dy = 4\pi a^2 r^2 \frac{\partial}{\partial r}(Mu)$$

$$4\pi a^2 r^2 (Mu)_r = \int_{|y-x|\le r} u_{tt}\,dy = \int_0^r d\rho \int_{S_r} u_{tt}(y,t)\,dS_y$$

上式关于r求偏微商，注意$y = x+\omega r$和$S_r = r^2 S_\omega$，得到：

$$4\pi a^2 [r^2 (Mu)_r]_r = \int_{S_r} u_{tt}(y,t)\,dS_y = \left[r^2 \int_{S_\omega} u(x+\omega r,t)\,dS_\omega\right]_{tt} = 4\pi [r^2 (Mu)]_{tt}$$

两边约去常数，得到方程：

$$[r(Mu)]_{tt} - a^2 [r(Mu)]_{rr} = 0$$

由 d’Alembert 公式可知，$r(Mu)$具有形式解：

$$r(Mu) = w_1(r+at) + w_2(r-at)$$

令$r \to 0$，得到$w_1(at) = -w_2(-at)$，上式改写为：

$$r(Mu) = w_1(r+at) - w_1(at-r)$$

上式对r求偏导，再令$r \to 0$，得到：

$$\lim_{r\to 0} Mu = 2w_1'(at)$$

又有：

$$Mu = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x+\omega r,t)\,dS_\omega$$

得到：

$$\lim_{r\to 0} Mu = \frac{1}{4\pi} \int_{|\omega|=1} u(x,t)\,dS_\omega = u(x,t)$$

联立解得：

$$u(x,t) = 2w_1'(at)$$

Kirchhoff 公式

从球面平均法中可以看出，只要从初中条件确定w_1便可求得解$u(x,t)$

从上述推导有：

$$r(Mu) = w_1(r+at) - w_1(at-r)$$

分别对r和t求偏微商，得到：

$$(rMu)_r = w_1'(r+at) + w_1'(at-r)$$
$$\frac{1}{a}(rMu)_t = w_1'(r+at) - w_1'(at-r)$$

令$t \to 0$，两式相加，得到：

$$2w_1'(at) = (rMu)_r|_{t=0} + \frac{1}{a}(rMu)_t|_{t=0}$$

$$(rMu)_r|_{t=0} = \left(\frac{r}{4\pi}\int_{S_1} \varphi(x+\omega r)\, dS_\omega\right)_r = (rM\varphi)_r$$

$$\frac{1}{a}(rMu)_t|_{t=0} = \frac{r}{4\pi a}\int_{S_1} \psi(x+\omega r)\, dS_\omega = \frac{r}{a}(M\psi)$$

因此：

$$u(x,t) = 2w_1'(at) = (atM\varphi)_{at} + t(M\psi) = (tM\varphi)_t + t(M\psi)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}} \psi(y)\, dS + \left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}} \varphi(y)\, dS\right)_t$$

上式称为波动方程初值问题的 Kirchhoff 公式，在球面坐标系中，上式可写为：

$$u(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(x_1+\alpha at, x_2+\beta at, x_3+\gamma at)\, dS +$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varphi(x_1+\alpha at, x_2+\beta at, x_3+\gamma at)\, dS\right)$$

其中，$\alpha = \sin\theta\cos\phi$，$\beta = \sin\theta\sin\phi$，$\gamma = \cos\theta$，$dS = \sin\theta\, d\theta d\phi$

注：类似一维波动方程的推导，可以得到：

Thm. （适定性）若$\varphi \in C^3$，$\psi \in C^2$，则三维波动方程的初值问题在$x \in R^3$，$t \geq 0$中存在唯一的古典解，且古典解由 Kirchhoff 公式表示，且在有限时间内，解对初值是一致稳定的。

降维法 Poisson 公式

考虑二维波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\left(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}\right) = 0，(x_1, x_2) \in R^2，t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x_1, x_2)，u_t|_{t=0} = \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

将上面的未知函数u，初值函数φ, ψ看作是三维空间的函数，只是与x_3无关，则有 Kirchhoff 公式可以知道问题的解不含变量x_3，这种由高维问题直接求低维问题的解的方法称为降维法

Poisson 公式

现在通过 Kirchhoff 公式写出问题的解，这需要计算一个第一型曲面积分，因为初始数据与x_3无关，所以在S_{at}上的积分可由在圆域：

$$\Sigma_{at}^M: (\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 \le (at)^2$$

上的积分得到，圆域的圆心为(x_1, x_2)，半径为at，而S_{at}的方程：

$$S_{at}: (\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 + (\zeta - x_3)^2 \le (at)^2$$

知S_{at}的上半球面S_{at}^+的方程为：

$$\zeta = \sqrt{(at)^2 - (\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2} + x_3$$

计算可得：

$$\iint_{S_{at}^+} \frac{\psi}{4\pi a^2 t} dS = \frac{1}{4\pi a} \iint_{S_{at}^+} \frac{\psi}{at} dS = \frac{1}{4\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi}{at} \sqrt{1 + \left(\zeta_\xi\right)^2 + \left(\zeta_\eta\right)^2}\, d\xi d\eta$$

$$\iint_{S_{at}^+} \frac{\psi}{4\pi a^2 t} dS = \frac{1}{4\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - (\xi - x_1)^2 - (\eta - x_2)^2}} d\xi d\eta$$

因为被积函数ψ与x_3无关，因此在下半球面S_{at}^-上的积分值与上半球面的结果相同：

$$\iint_{S_{at}} \frac{\psi}{4\pi a^2 t} dS = \frac{1}{2\pi a} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} d\xi d\eta$$

其中$r^2 = (\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2$，类似可计算 Kirchhoff 公式中关于$\varphi$的积分，得到：

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\psi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} d\xi d\eta + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma_{at}^M} \frac{\varphi(\xi, \eta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} d\xi d\eta\right]$$

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi a}\left[\int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\psi(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\, d\theta dr\right] +$$

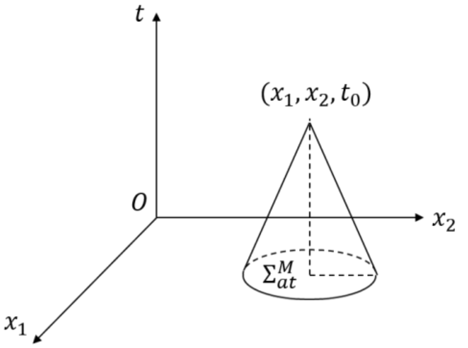
$$\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^{at} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}} r\, d\theta dr\right]$$

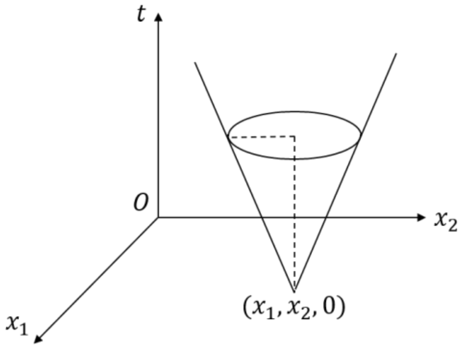
上式称为二维波动方程初值问题解的 Poisson 公式，类似可以从 Kirchhoff 公式降低到一维波动方程，得到 d'Alembert 公式

注：由三维波动方程 Kirchhoff 解的适定性，立刻可以得到低纬度方程解的适定性

二维波动方程的依赖区域 决定区域 影响区域

类似一维波动方程中的结果，我们有：





依赖区域：对于空间一点(x_1, x_2, t_0)，它的依赖区域为Σ_{at}^M

$$\Sigma_{at}^M\text{：}(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 \leq (at_0)^2$$

决定区域：以Σ_{at}^M为底，向上，特征曲面为at的圆锥体称为圆域的决定区域：

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 \leq a^2(t - t_0)^2$$

影响区域：以$(x_1, x_2, 0)$为顶点，特征曲面为at，开口向上的无界圆锥体称为该点的影响区域：

$$(\xi - x_1)^2 + (\eta - x_2)^2 \leq (at)^2\text{，}t > 0$$

以上锥面均称为波动方程的特征锥面

注：上述特征面的概念可以同理推广到更高维的情况

非齐次方程 Duhamel 原理

Duhamel 方法是 ODE 中常数变易法在线性偏微分方程中的推广，它能将非齐次方程化为齐次方程，所以也称为齐次化原理。

考虑三维非齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2\Delta u = f(x,t)\text{，}x \in R^3\text{，}t > 0 \\ \quad u|_{t=0} = 0\text{，}u_t|_{t=0} = 0\text{，}x \in R^3 \end{cases}$$

若$w(x,t;\tau)$是方程：

$$\begin{cases} w_{tt}-a^2\Delta_x w(x,t;\tau)=0,\ x\in R^3,\ t>\tau \\ w|_{t=\tau}=0,\ w_t|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ x\in R^3 \end{cases}$$

的解，则函数：

$$u(x,t)=\int_0^t w(x,t;\tau)\,d\tau$$

是原方程的解，因此，仅需求解$w(x,t;\tau)$即可

令$v(x,t;\tau)=w(x,t+\tau;\tau)$，则$v$满足：

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2\Delta_x v(x,t;\tau)=0,\ x\in R^3,\ t>0 \\ v|_{t=0}=0,\ v_t|_{t=0}=f(x,\tau),\ x\in R^3 \end{cases}$$

由 Kirchhoff 公式得到：

$$v(x,t;\tau)=\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{|y-x|=at} f(y,\tau)\,dS_y$$

只要$f(x,t)\in C^2$，则上式表示的v就是方程的解，将它代入到u，得到：

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t-\tau;\tau)\,d\tau=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t\frac{d\tau}{t-\tau}\int_{|y-x|=a(t-\tau)} f(y,\tau)\,dS_y$$

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}dr\int_{|y-x|=r}\frac{f\left(y,t-\frac{r}{a}\right)}{r}dS_y$$

其中$r=a(t-\tau)$，因此非齐次问题的解为：

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\int_{|y-x|\le at}\frac{f\left(y,t-\frac{|y-x|}{a}\right)}{|y-x|}dy$$

例题：求解R^3中上半空间上三维波动方程的初边值问题

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=f(x,t),\ x\in\overline{R_+^3},\ t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x) \\ u|_{x_1=0}=\mu(x_2,x_3,t) \end{cases}$$

衔接条件为：

$$\varphi(0,x_2,x_3)=\mu(x_2,x_3,0),\ \psi(0,x_2,x_3)=\mu_t(x_2,x_3,0)$$

各条件函数的微商存在且连续

解：设$u(x,t)$是问题的解，记：

$$\Delta_2\mu=\mu_{x_2x_2}+\mu_{x_3x_3}$$

则有：

$$u_{x_1x_1}(0,x_2,x_3,t)=-\frac{f(0,x_2,x_3,t)}{a^2}+\frac{\mu_{tt}(x_2,x_3,t)}{a^2}-\Delta_2\mu\equiv h(x_2,x_3,t)$$

令：

$$u(x,t)=v(x,t)+\mu(x_2,x_3,t)+\frac{1}{2}x_1^2h(x_2,x_3,t)$$

则$v(0,x_2,x_3,t)=0$，并且v满足问题：

$$v_{tt}-a^2\Delta v=f-f(0,x_2,x_3,t)-\frac{1}{2}x_1^2(h_{tt}-a^2\Delta_2h)\equiv G(x,t)$$

$$v(x,0)=\varphi(x)-\mu(x_2,x_3,0)-\frac{1}{2}x_1^2h(x_2,x_3,0)\equiv\phi(x)$$

$$v_t(x,0)=\psi(x)-\mu_t(x_2,x_3,0)-\frac{1}{2}x_1^2h_t(x_2,x_3,0)\equiv\Psi(x)$$

且易验证：

$$G(0,x_2,x_3,t)=\phi(0,x_2,x_3)=\Psi(0,x_2,x_3)=0$$

其中，$-\infty<x_2,x_3<+\infty$，$x_1\geq 0$，$t>0$

将G,ϕ,Ψ奇延拓到$-\infty<x_1<+\infty$，记延拓后的函数为G^*,ϕ^*,Ψ^*，得到方程：

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2\Delta v=G^*,\ x\in R^3,\ t>0\\ \quad v(x,0)=\phi^*,\ v_t(x,0)=\Psi^*\end{cases}$$

利用叠加原理，上述问题可分解为齐次的任意初值问题和非齐次的零初值问题进行求解，两个解的和就是上述问题v的解，将得到的v代入u，便可得到原方程u的解$u(x,t)$

2.5 能量法 解的唯一性与稳定性

受物理学启发，利用波传递过程中的能量守恒和能量衰减建立能量等式或能量不等式，分别证明高维波动方程定解问题的唯一性和稳定性

以二维薄膜的振动为例，设平面区域Ω有界且边界逐段光滑，考虑Ω上的薄膜振动，设薄膜均匀，密度为ρ，张力系数为T，$u(x,y,t)$表示薄膜在点(x,y)处的位移，设有垂直于(x,y)平面的外力$F(x,y,t)$，沿边界$\partial\Omega$的线密度为$p(s,t)$，s是自然参数。则t时刻的动能和势能为：

$$K(t)=\iint_{\Omega}\frac{\rho}{2}u_t^2(x,y,t)\,dxdy$$

$$P(t)=\iint_{\Omega}\left(\frac{T}{2}\left(u_x^2+u_y^2\right)-Fu\right)dxdy+\int_{\partial\Omega}\left(-pu+\frac{\sigma}{2}u^2\right)ds$$

其中，常数$\sigma > 0$是边界弹性支撑的弹性系数，因此，薄膜在t时刻具有的总能量为：

$$E(t) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\rho}{2}u_t^2(x,y,t) + \frac{T}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right) - Fu\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} \left(-pu + \frac{\sigma}{2}u^2\right) ds$$

能量等式 初边值问题解的唯一性

当薄膜系统不受外力，即$F = p \equiv 0$时，系统中能量守恒，即$E(t)$是常数，等价于：

$$\frac{dE(t)}{dt} = 0$$

在无外力的条件下，薄膜振动的位移函数$u(x,y,t)$应该满足：

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right), \; a^2 = \dfrac{T}{\rho} \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v} + \sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

这是带有齐次边界条件的齐次波动方程，其中v表示$\partial\Omega$的单位外法向，此时能量$E(t)$满足：

$$E(t) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\rho}{2}u_t^2 + \frac{T}{2}\left(u_x^2 + u_y^2\right)\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\sigma}{2}u^2\right) ds$$

计算$E(t)$的导数：

$$\frac{dE(t)}{dt} = \iint_{\Omega} \left(\rho u_t u_{tt} + T\left(u_x u_{xt} + u_y u_{yt}\right)\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} (\sigma u u_t)\, ds$$

由 Green 公式，得到：

$$\iint_{\Omega} u_x u_{xt}\, dxdy = \iint_{\Omega} (u_x u_t)_x\, dxdy - \iint_{\Omega} u_{xx} u_t\, dxdy$$

$$\iint_{\Omega} u_x u_{xt}\, dxdy = \int_{\partial\Omega} u_x u_t \cos(v,x)\, ds - \iint_{\Omega} u_{xx} u_t\, dxdy$$

类似地，有：

$$\iint_{\Omega} u_y u_{yt}\, dxdy = \int_{\partial\Omega} u_y u_t \cos(v,y)\, ds - \iint_{\Omega} u_{yy} u_t\, dxdy$$

代入到导数的计算中，得到：

$$\frac{dE(t)}{dt} = \rho \iint_{\Omega} u_t \left(u_{tt} - a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right)\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} u_t \left(T\frac{\partial u}{\partial v} + \sigma u\right) ds = 0$$

因此，$E(t)$是常数，有：

$$E(t) = E(0)$$

上式称为能量等式，下面用它证明解的唯一性

设有二维非齐次波动方程的初边值问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t)，(x,y)\in\Omega，t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y)，u_t(x,y,t)=\psi(x,y)，(x,y)\in\Omega \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega}=p(s,t)，t\geq 0 \end{cases}$$

其中，f不恒为 0 表示系统所受的外力，v是$\partial\Omega$的单位外法向，$\sigma\geq 0$

Thm. （唯一性）上述非齐次波动方程的初边值问题最多一个解

Proof：设有两个解u_1,u_2，令$u=u_1-u_2$，由叠加原理，u满足方程：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})，a^2=\dfrac{T}{\rho} \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega}=0 \end{cases}$$

从而对u成立能量等式，$E(t)$是常数，注意到：

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0$$

从而$E(0)=0$，于是$E(t)=E(0)=0$，即：

$$E(t)=\iint_{\Omega}\left(\frac{\rho}{2}u_t^2+\frac{T}{2}(u_x^2+u_y^2)\right)dxdy+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\sigma}{2}u^2\right)ds=0$$

由各被积函数非负连续可知，在$\partial\Omega$上$u=0$，在Ω上$u_x=u_y=u_t=0$，因此u等于常数

$$u=u|_{t=0}=0$$

综上，有$u_1=u_2$，唯一性证毕

能量不等式 初边值问题解的稳定性

设$u(x,y,t)$是满足非齐次波动方程：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t)，(x,y)\in\Omega，t>0 \\ u(x,y,0)=\varphi(x,y)，u_t(x,y,t)=\psi(x,y)，(x,y)\in\Omega \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v}+\sigma u\right)|_{\partial\Omega}=p(s,t)，t\geq 0 \end{cases}$$

的任意一个解，记$E_0(t)$：

$$E_0(t)=\iint_{\Omega}u^2(x,y,t)\,dxdy$$

上式对t求导，得到：

$$\frac{dE_0(t)}{dt}=2\iint_\Omega uu_t\,dxdy\le 2\left(\iint_\Omega u^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_\Omega u_t^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\big(E_0(t)\big)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\rho}E(t)\right)^{\frac{1}{2}}$$

解这个不等式，并注意到$E(t)=E(0)$，得到：

$$\sqrt{E_0(t)}-\sqrt{E_0(0)}\le\sqrt{\frac{2}{\rho}}\int_0^t\sqrt{E(\tau)}\,d\tau=\sqrt{\frac{2}{\rho}}\sqrt{E(0)}t$$

由上，得到能量不等式：

$$E_0(t)\le 2E_0(0)+\frac{4t^2}{\rho}E(0)$$

经过变形，还能证明另一形式的能量不等式：

$$E_0(t)\le e^tE_0(0)+\frac{2}{\rho}(e^t-1)E(0)$$

下面用能量不等式证明解的稳定性

对初值的稳定性

考虑证明二维波动方程的解关于初值的稳定性：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2\big(u_{xx}+u_{yy}\big)=f(x,y,t),\ (x,y)\in\Omega,\ t>0\\ u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\ (x,y)\in\Omega\\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v}+\sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega}=p(s,t),\ t\ge 0\end{cases}$$

问题的解是u，初值发生扰动$\varphi(x,y)+\varepsilon_1(x,y)$和$\psi(x,y)+\varepsilon_2(x,y)$时，解变为$u+\eta(x,y,t)$，则由叠加原理，可知$\eta(x,y,t)$满足：

$$\begin{cases}\eta_{tt}-a^2\big(\eta_{xx}+\eta_{yy}\big)=0,\ (x,y)\in\Omega,\ t>0\\ \eta(x,y,0)=\varepsilon_1,\ \eta_t(x,y,0)=\varepsilon_2,\ (x,y)\in\Omega\\ \left(T\dfrac{\partial\eta}{\partial v}+\sigma\eta\right)\Big|_{\partial\Omega}=0,\ t\ge 0\end{cases}$$

于是，η在初始值$t=0$时刻的各能量为：

$$E_0(0)=\iint_\Omega\varepsilon_1^2\,dxdy$$

$$E(0)=\frac{\rho}{2}\left(\iint_\Omega\left[\varepsilon_2^2+a^2\big(\varepsilon_{1,x}^2+\varepsilon_{1,y}^2\big)\right]dxdy+\frac{\sigma}{\rho}\int_{\partial\Omega}\varepsilon_1^2\,ds\right)$$

对固定的$t_0>0$，当$t\in[0,t_0]$时，由能量不等式得到：

$$\iint_\Omega\eta^2(x,y,t)\,dxdy\le 2\iint_\Omega\varepsilon_1^2\,dxdy+2t_0^2\left(\iint_\Omega\left[\varepsilon_2^2+a^2\big(\varepsilon_{1,x}^2+\varepsilon_{1,y}^2\big)\right]dxdy+\frac{\sigma}{\rho}\int_{\partial\Omega}\varepsilon_1^2\,ds\right)$$

从上式得到：

Thm. （初值稳定性）二维波动方程初边值问题的解在下述意义下关于初值是稳定的

只要下面的初始变化量：

$$||\varepsilon_1||_{L_2(\Omega)}，||\varepsilon_{1,x}||_{L_2(\Omega)}，||\varepsilon_{1,y}||_{L_2(\Omega)}，||\varepsilon_2||_{L_2(\Omega)}，||\varepsilon_1||_{L_2(\partial\Omega)}$$

都微小，则解对应的变化量$||\eta||_{L_2(\Omega)}$及$||\eta||_{L_2(Q)}$也微小，其中$Q = \Omega \times [0, t_0]$

对非齐次项$f(x,y,t)$的稳定性

非齐次项$f(x,y,t)$表示薄膜系统在Ω内受到的外力，采用前文的思想，先建立有外力时的能量不等式，设$u(x,y,t)$满足问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) = f(x,y,t)，(x,y) \in \Omega，t > 0 \\ u(x,y,0) = 0，u_t(x,y,t) = 0，(x,y) \in \Omega \\ \left(T\dfrac{\partial u}{\partial v} + \sigma u\right)|_{\partial\Omega} = 0，t \geq 0 \end{cases}$$

记$F(t)$：

$$F(t) = \iint_\Omega f^2(x,y,t)\, dxdy$$

取$E(t)$：

$$E(t) = \iint_\Omega \left(\frac{\rho}{2}u_t^2 + \frac{T}{2}(u_x^2 + u_y^2)\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\sigma}{2}u^2\right) ds$$

对$E(t)$求导，用 Green 公式整理得到：

$$\frac{dE(t)}{dt} = \rho \iint_\Omega u_t\left(u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy})\right) dxdy + \int_{\partial\Omega} u_t\left(T\frac{\partial u}{\partial v} + \sigma u\right) ds$$

注意方程条件，得到：

$$\frac{dE(t)}{dt} = \rho \iint_\Omega u_t f\, dxdy \leq \rho\left(\iint_\Omega u_t^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\iint_\Omega f^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leq \rho\left(\frac{2}{\rho}E(t)\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{F(t)}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq \sqrt{2\rho E(t)F(t)}$$

解上面的微分不等式，得到：

$$\sqrt{E(t)} - \sqrt{E(0)} \leq \sqrt{\frac{\rho}{2}}\int_0^t \sqrt{F(\tau)}\, d\tau \leq \sqrt{\frac{\rho t}{2}}\left(\int_0^t F(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

由上式得到：

$$E(t) \le 2E(0) + \rho t \int_0^t F(\tau)\, d\tau$$

注意在推导能量不等式时，有：

$$\sqrt{E_0(t)} - \sqrt{E_0(0)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho}} \int_0^t \sqrt{E(\tau)}\, d\tau$$

这是因为有外力$f(x,y,t)$，故$E(t)$不守恒，但有估计：

$$\sqrt{E_0(t)} - \sqrt{E_0(0)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho}} \int_0^t \sqrt{E(\tau)}\, d\tau \le \sqrt{\frac{2t}{\rho}} \left(\int_0^t E(\tau)\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

从而得到：

$$E_0(t) \le 2E_0(0) + \frac{4t}{\rho} \int_0^t E(\tau)\, d\tau$$

将$F(t)$的估计代入上式，得到：

$$E_0(t) \le 2E_0(0) + \frac{4t}{\rho} \int_0^t \left[2E(0) + \rho t \int_0^t F(s)\, ds \right] d\tau \le 2E_0(0) + \frac{8t^2}{\rho} E(0) + 2t^3 \int_0^t F(\tau)\, d\tau$$

上式即为所需的能量不等式，下面证明波动方程对非齐次项$f(x,y,t)$的稳定性

设问题的解是u，当非齐次项发生扰动变为$f(x,y,t) + \varepsilon(x,y,t)$时，设此时的解为$u + \eta(x,y,t)$，则由叠加原理，可知$\eta(x,y,t)$应满足方程：

$$\begin{cases} \eta_{tt} - a^2(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = \varepsilon(x,y,t)，(x,y) \in \Omega，t > 0 \\ \eta(x,y,0) = 0，\eta_t(x,y,t) = 0，(x,y) \in \Omega \\ \left(T\dfrac{\partial \eta}{\partial v} + \sigma \eta \right)|_{\partial\Omega} = 0，t \ge 0 \end{cases}$$

于是，关于η在$t = 0$时的各能量为：

$$E_0(0) = 0，\ E(0) = 0$$

对任意固定的$t_0 > 0$，当$t \in [0, t_0]$时候，由能量不等式得到：

$$\iint_\Omega \eta^2(x,y,t)\, dxdy \le 2t_0^3 \int_0^t F(\tau)\, d\tau = 2t_0^3 \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau$$

由上得到：

Thm. （非齐次项稳定性）二维波动方程的解在下述意义下关于非齐次项是稳定的，只要

$$||\varepsilon||_{L_2(\partial\Omega)}$$

微小，则解对应的变化量$||\eta||_{L_2(\Omega)}$及$||\eta||_{L_2(Q)}$也微小，其中$Q = \Omega \times [0, t_0]$

初值问题解的唯一性

现在用能量法证明初值问题（无边界条件）的解是唯一的，为此仅需证明齐次问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-\left(u_{xx}+u_{yy}\right)=0，(x,y)\in \mathrm{R}^2，t>0 \\ u(x,y,0)=0，u_t(x,y,0)=0 \end{cases}$$

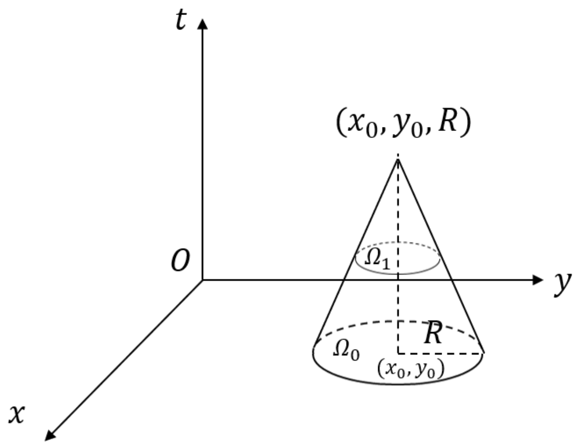
只有平凡解$u\equiv 0$（这里不失一般性，可设系数$a=1$）

注：由于此时积分：

$$E(t)=\iint_{R^2}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dxdy$$

可能发散，因此不能从此式出发证明解的唯一性

取坐标平面上一点$M_0(x_0,y_0)$及实数$R>0$，做特征椎如下：



易得椎体K：

$$K:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le (R-t)^2，0\le t\le R$$

椎体K是圆域Ω_0的决定区域，故在t时刻，区域：

$$\Omega_t:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le (R-t)^2，0<t<R$$

内各处的值全部由圆域Ω_0内的初始条件完全决定，则意味着Ω_t中的能量不应该超过Ω_0中的能量，特别地，若Ω_0的能量为0，则Ω_0的决定区域内的能量恒为0，下面证实这个猜想。

记$E(t)$：

$$E(t)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega_t}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dxdy-\frac{1}{2}\int_0^{R-t}dr\int_{C(M_0,r)}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dl$$

其中，$C(M_0,r)$是与Ω_t处在同一平面，以M_0为圆心，r为半径的圆，则：

$$\frac{dE(t)}{dt}=\iint_{\Omega_t}\left(u_tu_{tt}+\left(u_xu_{xt}+u_yu_{yt}\right)\right)dxdy-\frac{1}{2}\int_{C(M_0,R-t)}(u_t^2+u_x^2+u_y^2)\,dl$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \iint_{\Omega_t} u_t\left(u_{tt} - \left(u_{xx} + u_{yy}\right)\right)dxdy + \int_{C(M_0,R-t)} u_t\frac{\partial u}{\partial v}dl - \frac{1}{2}\int_{C(M_0,R-t)}(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2)\,dl$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_{C(M_0,R-t)} u_t\frac{\partial u}{\partial v}dl - \frac{1}{2}\int_{C(M_0,R-t)}(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2)\,dl$$

因为：

$$u_t\frac{\partial u}{\partial v} \leq |u_t||Du| \leq \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2 + u_y^2)$$

将此式代入，立刻得到：

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq 0$$

所以$E(t) \leq E(0) = 0$，从而$E(t) \equiv 0$，即由$0 < t < R$的任意性，知在整个椎体K中，有：

$$u_t = u_x = u_y = 0$$

因此在K中，u等于常数，$u \equiv u(x,y,0) = 0$，又由点M_0和R的任意性，知在全空间$R^2 \times R^+$中：

Thm. （唯一性）二维波动方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(u_{xx} + u_{yy}\right) = f(x,y,t)，(x,y) \in \mathrm{R}^2，t > 0 \\ u(x,y,0) = \varphi(x,y)，u_t(x,y,0) = \psi(x,y) \end{cases}$$

的解是唯一的

3. 热传导方程

设Ω是$R^n(n \geq 2)$中开集，则n维齐次热传导方程为：

$$u_t - a^2 \Delta u = 0，x \in \Omega，t > 0$$

其中，$a > 0$是常数，不失一般性，之后讨论的方程均设系数$a = 1$

3.1 初值问题

注：对于一维齐次热传导方程的具有齐次边界条件的初边值问题，或在规则区域内的二维，三维齐次热传导方程带有齐次边界条件的初边值问题可采用分离变量法求解。

考虑高维齐次热传导方程的初值问题：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0，x \in R^n，0 < t \leq T \\ u(x,0) = \varphi(x)，x \in R^n \end{cases}$$

下文中注意以下记号的含义：

$$u = u(x,t) = u(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)，\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

容易验证以y为参数的函数：

$$E(x-y,t) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

满足方程，它称为热传导方程的基本解，我们将用 Fourier 变换方法求解方程的初值问题

Fourier 变换及其性质

设函数$f(x)$在$x \in R^n$上连续可微且绝对可积，则有它的 Fourier 变换：

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} \mathrm{d}x$$

以及的 $\hat{f}(\xi)$ Fourie 逆变换：

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} \mathrm{d}\xi$$

其中，内积$x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$，在不强调自变量的情况下，一个函数的 Fourier 变换和逆变换可以记为$F[f]$和$F^{-1}[f]$，显然 Fourier 变换是线性变换，这个变换有下面的性质：

（1） 微分性质

若f和f'_{x_i}的 Fourier 变换都存在，且当$|x| \to \infty$时，$f(x) \to 0$，则有：

$$F\left[f'_{x_i}\right] = i\xi_i F[f]$$

一般地，有：

$$F[D^a f] = (i\xi)^a F[f]$$

其中，$a = (a_1, a_2. \cdots, a_n)$是多重指标，规定：

$$|a| = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$D^a = \frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \cdots \partial x_n^{a_n}}$$

$$x^a = (x_1)^{a_1}(x_2)^{a_2} \cdots (x_n)^{a_n}$$

这里要求f适当光滑，式中出现的f的各阶微商都要可进行 Fourier 变换，且$|x| \to \infty$，它的各阶微商也应该都趋于 0

（2） 幂乘性质

若$f(x)$和$x_i f(x)$都可进行 Fourier 变换，则有：

$$F[-ix_i f] = \frac{\partial}{\partial \xi_i} F[f]$$

一般地有：

$$F\left[(-i)^{|a|} x^a f\right] = D^a F[f]$$

（3） 卷积性质

(a) 若函数f, g都可进行 Fourier 变换，则它们的卷积：

$$f * g(x) \equiv \int_{R^n} f(y) g(x-y)\, dy$$

也可以进行 Fourier 变换，且有：

$$F[f * g] = F[f]F[g]$$

(b) 若f, g和它们的乘积fg都可以进行 Fourier 逆变换，那么有：

$$F^{-1}[fg] = F^{-1}[f] * F^{-1}[g]$$

仅证明(a)，(b)类似可证：

由f, g在R上绝对可积，利用 Fubini 定理，可交换积分顺序，得到：

$$F[f * g] = F\left[\int_{R^n} f(y) g(x-y)\, dy\right] = \int_{R^n} e^{-ix\xi}\, dx \int_{R^n} f(y) g(x-y)\, dy$$

$$F[f * g] = \int_{R^n} f(y)\, dy \int_{R^n} g(z) e^{-i(z+y)\xi}\, dz = \int_{R^n} f(y) e^{-iy\xi}\, dy \int_{R^n} g(z) e^{-iz\xi}\, dz$$

$$F[f * g] = F[f]F[g]$$

QED，(b)同理可证

例题： 求函数$f(x)=e^{-a|x|}$的 Fourier 变换，其中$x\in R$，$a>0$

解： 直接计算得：

$$\bar{f}(\xi)=\int_R e^{-a|x|}e^{-ix\xi}\,dx=\int_R e^{-a|x|}(\cos x\xi-i\sin x\xi)\,dx=2\int_0^{\infty}e^{-ax}\cos x\xi\,dx$$

利用两次分部积分，得：

$$\bar{f}(\xi)=\frac{2a}{\xi^2+a^2}$$

例题： 求函数$f(\xi)=e^{-|\xi|^2t}$的 Fourier 逆变换，其中，$\xi\in R^n$，$t>0$

解： 直接计算可得：

$$F^{-1}[f]=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}e^{-|\xi|^2t}e^{ix\xi}\,d\xi=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t\xi_k^2+ix_k\xi_k}\,d\xi_k\right)^n=\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t\xi_k^2}\cos x_k\xi_k\,d\xi_k\right)^n$$

记$I(x_k)$：

$$I(x_k)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-t\xi_k^2}\cos x_k\xi_k\,d\xi_k$$

由 Euler 积分公式：

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

对$I(x_k)$求导一次后用分部积分，得到：

$$\frac{dI(x_k)}{dx_k}+\frac{x_k}{2t}I(x_k)=0$$

解上述微分方程，并注意$I(0)$的值，得到：

$$I(x_k)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi t}}e^{-\frac{x_k^2}{4t}}$$

代入到逆变换$F^{-1}[f]$得到：

$$F^{-1}[f]=\prod_{k=1}^{n}I(x_k)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

初值问题的解

现在回到方程：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0，x \in R^n，0 < t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x)，x \in R^n \end{cases}$$

设方程的解$u(x,t)$和初值$\varphi(x)$都可以关于变量x进行 Fourier 变换，并记：

$$\overline{u}(\xi,t) = \int_{R^n} u(x,t) e^{-ix\xi}\, dx$$

$$\overline{\varphi}(\xi) = \int_{R^n} \varphi(x) e^{-ix\xi}\, dx$$

于是对方程和初始数据进行 Fourier 变换，得到关于$\overline{u}(\xi,t)$的常微分方程初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{u}(\xi,t)}{dt} + |\xi|^2 \overline{u}(\xi,t) = 0 \\ \overline{u}(\xi,0) = \overline{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

由 ODE 知识，易得它的解为：

$$\overline{u}(\xi,t) = \overline{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}$$

再对解$\overline{u}(\xi,t)$进行 Fourier 逆变换，得到：

$$u(x,t) = F^{-1}[\overline{u}(\xi,t)] = F^{-1}\left[\overline{\varphi}(\xi) e^{-|\xi|^2 t}\right] = F^{-1}[\overline{\varphi}(\xi)] * F^{-1}\left[e^{-|\xi|^2 t}\right]$$

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{R^n} \varphi(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy = (4\pi)^{-n/2} \int_{R^n} E(x-y,t)\varphi(y)\, dy$$

其中，$E(x-y,t)$：

$$E(x-y,t) = t^{-n/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

是热传导方程的基本解，而$K(x-y,t)$：

$$K(x-y,t) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} E(x-y,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

称为热传导方程问题的解核（热核），因此方程的形式解为：

$$u(x,t) = \int_{R^n} K(x-y,t)\varphi(y)\, dy$$

热核的性质

注意热核$K(x-y,t)$具有下面的性质：

（1） 性质 1：

$$K(x-y,t)>0，K(x-y,t)\in C^{\infty}，\forall x\in R^n，y\in R^n，t>0$$

（2） 性质 2：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)K(x-y,t)=0，\forall x\in R^n，y\in R^n，t>0$$

这里的Δ是Δ_x或Δ_y

（3） 性质 3：

$$\int_{R^n}K(x-y,t)\,dy=1，\forall x\in R^n，t>0$$

（4） 性质 4：

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{|y-x|>\delta}K(x-y,t)\,dy=0，\forall\delta>0，\forall x\in R^n$$

Proof：

（1） 由$K(x-y,t)$的表达式，易得：

$$(4\pi t)^{-n/2}>0，e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}>0$$

从而$K(x-y,t)>0$显然，上面两式均是初等函数，都具备无穷可微性，因此$K(x-y,t)\in C^{\infty}$

（2） 先计算对t的偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x-y,t)=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left[\left(-\frac{n}{2}t^{-\frac{n}{2}-1}\right)+t^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{|x-y|^2}{4t^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left[\frac{|x-y|^2}{4t^2}-\frac{n}{2t}\right]$$

在计算对x的二阶偏微商，得到：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}{4t}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\frac{(y_i-x_i)}{2t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\frac{(y_i-x_i)}{2t}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\frac{(y_i-x_i)}{2t}\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\right]\frac{(y_i-x_i)}{2t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{(y_i-x_i)}{2t}\right]e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left[e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\frac{(y_i-x_i)}{2t}\right]=\frac{(x_i-y_i)^2}{4t^2}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}-\frac{1}{2t}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left[\frac{(x_i-y_i)^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right]$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)K(x-y,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\left[\frac{|x-y|^2}{4t^2}-\frac{n}{2t}\right]-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}K(x-y,t)=0$$

Δ_y同理可证，QED

（3） 做变量替换：

$$y=x+(4t)^{1/2}\eta$$

得到：

$$\int_{R^n}K(x-y,t)\,dy=(\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}(4t)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\left|(4t)^{\frac{1}{2}}\eta\right|^2}{4t}}(4t)^{1/2}d\eta=\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}e^{-|\eta|^2}\,d\eta$$

再由 Euler 积分，得到：

$$\int_{R^n}e^{-|\eta|^2}\,d\eta=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}\,ds\right)^n=\pi^{\frac{n}{2}}$$

代入上式，得到：

$$\int_{R^n}K(x-y,t)\,dy=\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{R^n}e^{-|\eta|^2}\,d\eta=\pi^{-\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}=1$$

（4） 做变量替换：

$$y=x+(4t)^{1/2}\eta$$

与（3）中的变换结果相同，得到：

$$\lim_{t\to0^+}\int_{|y-x|>\delta}K(x-y,t)\,dy=\lim_{t\to0^+}\pi^{-\frac{n}{2}}\int_{|\eta|>\frac{\delta}{\sqrt{4t}}}e^{-|\eta|^2}\,d\eta$$

因为 Euler 积分是收敛的，因此对$\forall\varepsilon>0$，存在$M>0$，使得：

$$\int_{|\eta|>M}e^{-|\eta|^2}\,d\eta<\varepsilon$$

又因为$t\to0^+$，因此$\delta/\sqrt{4t}\to+\infty$，故上面的极限式趋于0

解的存在性

在通过 Fourier 变换得到热传导方程的形式解时，要求初值函数$\varphi(x)$的 Fourier 变换存在，并且用到还原公式$F^{-1}[\overline{\varphi}]=\varphi$，这通常要求$\varphi$绝对可积且有连续的一阶微商。这个要求可以降低，而方程解的表达式不发生改变

Thm. （存在性）若初值函数$\varphi(x)\in C(R^n)$，且存在$M>0$和$A>0$使得：

$$|\varphi(x)|\le Me^{A|x|^2},\ \forall x\in R^n$$

则由 Fourier 变换得到的解$u(x,t)$就是问题在区域$\Omega=\{(x,t)|x\in R^n,0<t\le T\}$上的古典解并且$u(x,t)$在$\Omega$上无穷次可微，其中$T<1/4A$

Proof：

（1） 首先证明$u(x,t)$连续，任取常数$a>0$，$0<t_0<T$，记：

$$L=\{(x,t)||x|\le a,t_0\le t\le T\}$$

于是，若$(x,t)\in L$，则由$u(x,t)$的形式解，知：

$$|u(x,t)|\le M\int_{R^n}K(x-y,t)e^{A|y|^2}\,dy\le cM\int_{R^n}\exp\left\{A|y|^2-\frac{|x-y|^2}{4T}\right\}dy$$

其中，$c=(4\pi t_0)^{-n/2}$，若记：

$$\overline{A}=-\frac{1}{4T}$$

对上式的指数配方，得到：

$$A|y|^2+\overline{A}|x-y|^2=\left(A+\overline{A}\right)\left|y-\frac{\overline{A}}{A+\overline{A}}x\right|^2+\frac{A\overline{A}}{A+\overline{A}}|x|^2$$

将上式代入，若$A+\overline{A}<0$（即$T<1/4A$），则得估计：

$$|u(x,t)|\le cMe^{\frac{A\overline{A}}{A+\overline{A}}|x|^2}\int_{R^n}\exp\left\{\left(A+\overline{A}\right)\left|y-\frac{\overline{A}}{A+\overline{A}}x\right|^2\right\}dy=cM\left(\frac{-\pi}{A+\overline{A}}\right)^{\frac{n}{2}}e^{\frac{A\overline{A}}{A+\overline{A}}|x|^2}$$

由上可知形式解中的积分在L上绝对且一致收敛，从而，次积分确定的函数连续

又由a,t_0选取的任意性，可知形式解在空间Ω上连续

（2） 下证$u(x,t)\in C^\infty(R^n\times(0,T])$，且满足方程

对任意多重指标a，$K(x-y,t)$关于变量(t,x)求微商得：

$$D^aK(x-y,t)=\psi\left(x_i-y_i,\frac{1}{\sqrt{t}}\right)e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}$$

ψ表示多项式，类似（1）中的积分估计，可得

$$\int_{R^n}\varphi(y)D^aK\,dy$$

也在L上绝对且一致收敛，进而在Ω上，$u(x,t)$可在积分号内微分任意多次，即：

$$D^a u(x,t)=\int_{R^n}\varphi(y)D^a K\,dy$$

所以$u(x,t)\in C^\infty(\Omega)$，由热核的性质（2），立刻得到：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u(x,t)=\int_{R^n}\varphi(y)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)K(x-y,t)\,dy=0$$

从而$u(x,t)$满足方程

（3） 下面证明形式解$u(x,t)$满足初始条件，即对$\forall x_0\in R^n$，都有：

$$\lim_{x\to x_0,t\to 0^+}u(x,t)=\varphi(x_0)$$

不失一般性，设$x_0=0$，记$v_0(x)=\varphi(x)-\varphi(0)$，则$\varphi(x)=\varphi(0)+v_0(x)$

由形式解及热核的形式（3），得到：

$$u(x,t)=\int_{R^n}\varphi(0)K(x-y,t)\,dy+\int_{R^n}v_0(x)K(x-y,t)\,dy$$

$$u(x,t)=\varphi(0)+\int_{R^n}v_0(x)K(x-y,t)\,dy$$

因为v_0连续，且$v_0(0)=0$，故对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$|x|<\delta$时：

$$|v_0(x)|<\varepsilon$$

由定理条件，可得$|v_0(x)|\le 2Me^{A|x|^2}$，故存在$B(\varepsilon)$足够大，使得$|x|>\delta$时：

$$|v_0(x)|\le \varepsilon e^{B(\varepsilon)|x|^2}$$

从而，对$\forall x\in R^n$，有：

$$\left|\int_{R^n}v_0(x)K(x-y,t)\,dy\right|\le\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{R^n}\exp\left\{B(\varepsilon)|y|^2-\frac{|x-y|^2}{4t}\right\}dy$$

与A和$\overline{A}$采用相同的配方，可得：

$$\left|\int_{R^n}v_0(x)K(x-y,t)\,dy\right|\le\frac{\varepsilon}{(1-4Bt)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{B|x|^2}{1-4Bt}}$$

从而：

$$|u(x,t)-\varphi(0)|\le\frac{\varepsilon}{(1-4Bt)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{B|x|^2}{1-4Bt}}$$

其中，$t>0$足够小，使得$B-1/4t<0$，上式取极限$t\to 0^+$，$x\to 0$，即得：

$$\lim_{x\to 0, t\to 0^+} |u(x,t)-\varphi(0)| \le \varepsilon$$

由ε的任意性，得到：

$$\lim_{x\to 0, t\to 0^+} u(x,t) = \varphi(0)$$

注：

（1） 由热核的性质（1）和（3），对有界的$\varphi(x)$，成立：

$$\inf_{y\in R^n} \varphi(y) \le u(x,t) \le \operatorname{suo}_{y\in R^n} \varphi(y)\text{，} x\in R^n\text{，} t>0$$

（2） 由定理可见，$A>0$越小，t的解的存在区间就越大，当$\varphi(x)$只是有界连续函数时，则A可任意小，从而解$u(x,t)$是问题在$R^n\times(0,\infty)$上的解

（3） 当$t>0$时，$u(x,t)$依赖于$\varphi(x)$在所有点上的值，这与波动方程明显不同（联系决定区域和影响区域）

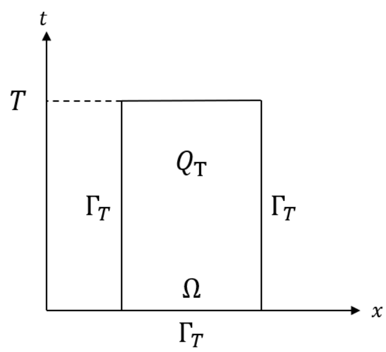
3.2 最大值原理及其应用

最大值原理（极值原理）

设有R^{n+1}中的有界柱体：

$$Q_T = \{(x,t) | x\in\Omega, 0<t\le T\}$$

其中，Ω是R^n中有界开集，T是取定的正常数，记柱体的侧面和底面组成的边界部分为Γ_T，它是柱体Q_T的抛物边界，即：$\Gamma_T = \overline{Q_T} - Q_T$，如下图所示：



若函数$u(x,t)$在Q_T上关于x的所有二阶连续偏微商及关于t的一阶连续偏微商都存在，则记：

$$u\in C^{2,1}(Q_T)$$

若$u\in C^{2,1}(Q_T)$且满足$u_t - \Delta u \le (\ge) 0$，则称$u$是热传导方程$u_t - \Delta u = 0$在$Q_T$上的下（上）解关于下（上）解，有下面的极值原理

Thm.（下解的最大值原理）设$u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)$在$\overline{Q_T}$上连续，且是热传导方程在Q_T上的下解，则它在$\overline{Q_T}$上的最大值必在抛物边界上取到，即：

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t)$$

特别地，若在Q_T上成立严格不等式$u_t - \Delta u < 0$，则u的最大值只能在抛物边界上取到

Proof:（1）先设$u_t - \Delta u < 0$，因$u \in C(\overline{Q_T})$，故存在点$(x,t) \in \overline{Q_T}$，使得：

$$u(x,t) = \max_{\overline{Q_T}} u$$

若$(x,t) \in Q_T$，则在该点有$u_t \geq 0$，$\Delta u \leq 0$，于是$u_t - \Delta u \geq 0$，这与假设矛盾，所以：

$$(x,t) \in \Gamma_T$$

即有：

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t)$$

（2）在Q_T内$u_t - \Delta u \leq 0$，对任意正数t，令：

$$v(x,t) = u(x,t) - kt$$

则v满足$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0$，于是由（1），可得：

$$\max_{\overline{Q_T}} v(x,t) = \max_{\Gamma_T} v(x,t)$$

注意到：

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{\overline{Q_T}} (v(x,t) + kt) \leq \max_{\overline{Q_T}} v(x,t) + kT = \max_{\Gamma_T} v(x,t) + kT \leq \max_{\Gamma_T} u(x,t) + kT$$

上式令$k \to 0$，得到：

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) \leq \max_{\Gamma_T} u(x,t)$$

相反的不等式显然成立，综上，即证：

$$\max_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \max_{\Gamma_T} u(x,t)$$

注：若$u(x,t)$是上解，则$-u(x,t)$必是下解，由定理立刻得到关于上解的最小值原理：

$$\min_{\overline{Q_T}} u(x,t) = \min_{\Gamma_T} u(x,t)$$

由极值原理，容易得到下面的两个推论：

Thm. （解的最大值原理）设$u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)$在$\overline{Q_T}$上连续，且是热传导方程$u_t-\Delta u=0$在Q_T上的解，则$|u|$在$\overline{Q_T}$上的最大值必定在抛物边界上取到，即：

$$\max_{\overline{Q_T}}|u(x,t)|=\max_{\Gamma_T}|u(x,t)|$$

Thm. （比较原理）

(a) 设$u^{(1)}$和$u^{(2)}$都是满足最大值原理的条件，若在Γ_T上有$u^{(1)}\le u^{(2)}$，则在$\overline{Q_T}$上仍有$u^{(1)}\le u^{(2)}$

(b) 设u,v都满足最大值原理的条件且$v\ge 0$，若在Γ_T上有$|u|\le v$，则在$\overline{Q_T}$上仍有$|u|\le v$

初边值问题解的唯一性和稳定性

Thm. （唯一性与稳定性）初边值问题：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T \\ u|_{\Gamma_T}=\varphi(x,t) \end{cases}$$

的解是唯一的且关于初边值是稳定的

Proof：设问题有两个解u_1和u_2，则由叠加原理，它们的差$u=u_1-u_2$满足问题：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,t)\in Q_T \\ u|_{\Gamma_T}=0 \end{cases}$$

由解的最大值原理，得：

$$\max_{\overline{Q_T}}|u|=\max_{\Gamma_T}|u|=0$$

于是在$\overline{Q_T}$上$u\equiv 0$，即$u_1=u_2$，唯一性得证，下证稳定性，设$u^{(i)}(i=1,2)$满足问题：

$$\begin{cases} u_t^{(i)}-\Delta u^{(i)}=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T \\ u^{(i)}|_{\Gamma_T}=\varphi^{(i)}(x,t) \end{cases}$$

则$u=u^{(1)}-u^{(2)}$满足问题：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u=0,\ (x,t)\in Q_T \\ u|_{\Gamma_T}=\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)} \end{cases}$$

由解的最大值原理得到：

$$\max_{\overline{Q_T}}|u|=\max_{\Gamma_T}\left|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right|$$

对任意$\varepsilon>0$，若$\max|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}|<\varepsilon$，立刻得到：

$$\max_{Q_T}|u| = \max_{Q_T}\left|u^{(1)} - u^{(2)}\right| < \varepsilon$$

即解关于初边值在连续函数空间范数下是稳定的

初值问题解的唯一性和稳定性

在存在性的证明时，若φ满足增长条件：

$$|\varphi(x)| \le Me^{A|x|^2}，\ \forall x \in R^n$$

则由 Fourier 变换得到的函数：

$$u(x,t) = \int_{R^n} K(x-y,t)\varphi(y)\,dy$$

就是方程在$x \in R^n$，$0 \le t \le T(T < 1/4A)$上的解，下面证明：

若解满足增长条件：

$$|u(x,t)| \le M_1 e^{A_1|x|^2}，\ \forall x \in R^n，\ 0 \le t \le T$$

则这类解必定唯一

Thm. （唯一性）若初值问题的解u满足上述增长条件，则这类解必定唯一

Proof:（1）设$u^{(1)}$，$u^{(2)}$是问题的解，则函数$u = u^{(1)} - u^{(2)}$满足：

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0，\ x \in R^n，\ 0 < t \le T \\ u(x,0) = 0，\ x \in R^n \end{cases}$$

只需证明上述问题在区域$\{x \in R^n, 0 \le t \le T\}$上仅有平凡解$u \equiv 0$

（2）任意取定R^n中的闭球$|x| \le b$，选取ε使得$0 < \varepsilon < M_1$，并设常数$A' > A_1$

取常数$a > 0$充分大，使得$M_1 e^{A_1 a^2} < \varepsilon e^{A' a^2}$，不妨设$a > b$，于是由增长条件得：

$$|u(x,t)| \le \varepsilon e^{A' a^2}，\ |x| = a$$

在闭域$D = \{(x,t)||x| \le a，\ 0 \le t \le 1/8A\}$上作辅助函数：

$$v(x,t) = \frac{\varepsilon}{\left(\sqrt{1-4A't}\right)^n}\exp\left\{\frac{A'|x|^2}{1-4A't}\right\}$$

易得它满足u满足的方程，且在闭域D的边界部分$|x| = a$满足：

$$v(x,t) = \frac{\varepsilon}{\left(\sqrt{1-4A't}\right)^n}\exp\left\{\frac{A'|a|^2}{1-4A't}\right\} \ge \varepsilon e^{A' a^2}$$

而在D的底面$t=0$有：

$$v(x,t)\geq \varepsilon>0$$

用初值条件：

$$|u(x,t)|\leq \varepsilon e^{A'a^2}，|x|=a$$

比较u,v，在抛物边界上有：

$$|u(x,t)|<v(x,t)$$

由比较原理，在D内此式仍然成立，特别地，当$|x|\leq b$，$0\leq t\leq 1/8A'$时，有：

$$|u(x,t)|\leq \varepsilon\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{n}{2}}e^{2A'b^2}$$

令$\varepsilon\to 0$，得到u在闭域$\{(x,t)||x|\leq b，0\leq t\leq 1/8A'\}$上恒等于 0，由$b$的任意性，可知$u$在闭域$\{(x,t)|x\in R^n，0\leq t\leq 1/8A'\}$上恒等于 0

（3）在区域$\{(x,t)|x\in R^n，1/8A'\leq t\leq 1/4A'\}$中，重复利用（2）中的论证，可得在该域内$u=0$，因为$T$有限，如此延拓有限次后，便可证得唯一性

注：若设$u^{(i)}(i=1,2)$满足问题：

$$\begin{cases}u_t^{(i)}-\Delta u^{(i)}=0，x\in R^n，0<t\leq T\\ \quad u^{(i)}(x,0)=\varphi^{(i)}(x,t)，x\in R^n\end{cases}$$

对任意的正数$\delta>0$，设：

$$\max_{R^n}\left|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right|<\delta$$

则由解的 Fourier 表达式，以及热核的性质（3），得到：

$$\max_{x\in R^n,0\leq t\leq T}\left|u^{(1)}-u^{(2)}\right|\leq \max_{R^n}\left|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right|\int_{R^n}K(x-y,t)\,dy<\delta$$

从上可得：

Thm. （稳定性）初值问题的解在连续函数空间范数下对初始数据是稳定的

4. 位势方程

本节讨论形如：

$$-\Delta u = f(x)$$

的位势方程，它是椭圆型方程的代表，当$f(x)$不恒为 0 时它称为 Poisson 方程，当$f(x) \equiv 0$时，他称为调和方程，调和方程的具体形式为：

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

其中，$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega \subseteq R^n$，上述方程的解$u$称为调和函数

特别地，若u在Ω内满足$-\Delta u \leq 0 (\geq 0)$，则称$u$在$\Omega$中是下调和（上调和）函数

平面中的调和函数已在复变函数中做过介绍，本节主要讨论$n \geq 3$时的情况

4.1 基本解

基本解

记R^n中两个点x, y之间的距离为：

$$r = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

下面先求调和方程的径向对称解，令$u = u(r)$，代入方程得到：

$$\Delta u = u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) = 0$$

Proof：直接计算可得

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = u'(r) \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ u'(r) \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right] \right\} = \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \{ u'(r) \} + u'(r) \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{ u'(r) \} = u''(r) \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right] \right\} = \frac{r - (x_i - y_i) \left[\frac{x_i - y_i}{r} \right]}{r^2} = \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) \frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + u'(r) \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2}{r^3}$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = u''(r) \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - y_i)^2}{r^2} + u'(r) \sum_{i=1}^{n} \frac{r^2 - (x_i - y_i)^2}{r^3} = u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r)$$

QED.

从方程：

$$\Delta u = u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) = 0$$

可以解得：

$$u' = cr^{1-n}$$

因此有：

$$u = \begin{cases} \dfrac{c}{2-n}r^{2-n}，n > 2 \\ c \cdot \ln r，n = 2 \end{cases}$$

在Ω中取定一点y，并取常数$c = 1/n\omega_n$，得到调和方程的基本解$k(x-y)$（或$k(|x-y|)$）：

$$k(x-y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}，n > 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\ln|x-y|，n = 2 \end{cases}$$

其中：

$$\omega_n = \frac{2\Gamma^n\left(\frac{1}{2}\right)}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

它表示R^n中单位球的体积，特别地：

$$\omega_2 = \pi，\omega_3 = \frac{4}{3}\pi$$

易得单位球面的表面积为$n\omega_n$，半径为r的n维球面的表面积为$nr^{n-1}\omega_n$，体积为$r^n\omega_n$

易得，基本解在$x \neq y$时关于x, y都是调和函数并且无穷次可微，并有下面的估计：

$$|D_x k(x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-1}}$$

$$|D_x^2 k(x-y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n}}$$

其中，C是与x, y无关的常数

Green 公式

设$\Omega \subseteq \mathrm{R}^n$是边界光滑的有界区域，并设$n$是$\partial\Omega$的单位外法向，在 Gauss 公式：

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} w\, dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n\, dS$$

中取w为函数$u(x) \in C^2(\overline{\Omega})$的梯度函数$Du$，得到：

$$\int_{\Omega} \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} Du \cdot n\, dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

若$u,v\in C^2(\overline{\Omega})$，则在 Gauss 公式中分别取$w$为$uDv$和$vDu$，分别得到：

$$\int_{\Omega} u\Delta v\,dx=\int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\int_{\Omega} Du\cdot Dv\,dx$$

$$\int_{\Omega} v\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\int_{\Omega} Dv\cdot Du\,dx$$

上面两式均称为 Green 第一公式，两式相减，得到：

$$\int_{\Omega} (u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

上式称为 Green 第二公式

调和函数的基本积分公式

设$u\in C^2(\overline{\Omega})$，对任意的$y\in\Omega$，作以$y$为中心，以$\rho$为半径的球体$B_\rho(y)\subseteq\subseteq\Omega$，在区域$\Omega\backslash\overline{B}_\rho(y)$中用调和方程的基本解代替 Green 第二公式中的v，得到：

$$\int_{\Omega-B_\rho} k(x-y)\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\left(k\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial k}{\partial n}\right)dS+\int_{\partial B_\rho}\left(k\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial k}{\partial n}\right)dS$$

计算上式右边第二个积分，得到：

$$\int_{\partial B_\rho}\left(k\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=k(\rho)\int_{\partial B_\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=-k(\rho)\int_{\partial B_\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)dS=-k(\rho)\int_{B_\rho}\Delta u\,dx\to 0(\rho\to 0)$$

$$\int_{\partial B_\rho}\left(u\frac{\partial k}{\partial n}\right)dS=-k'(\rho)\int_{\partial B_\rho}(u)\,dS=\frac{-1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}(u)\,dS\to -u(y)(\rho\to 0)$$

由上知，在 Green 公式中令$\rho\to 0$，得到：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial k(x-y)}{\partial n}-k(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{\Omega} k(x-y)\Delta u\,dx,\quad y\in\Omega$$

上式称为$u(y)$的 Green 表示，特别地，若在Ω中，$\Delta u=f$，则：

$$\int_{\Omega} k(x-y)\Delta u\,dx=\int_{\Omega} k(x-y)f(x)\,dx$$

叫做具有密度f的 Newton 位势，若u在Ω上具有紧支集，则由 Green 表式，可得：

$$u(y)=\int_{\Omega} k(x-y)\Delta u\,dx$$

若u在Ω上调和，则得到调和函数的基本积分公式：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial k(x-y)}{\partial n}-k(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS$$

平均值等式

Thm. （平均值性质）设$u\in C^2(\overline{\Omega})$，在$\Omega$中满足：

$$-\Delta u=0(\leq 0,\geq 0)$$

则对任何一个球$B_R(y)$成立：

$$u(y)=(\leq,\geq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R}u\,dS$$

$$u(y)=(\leq,\geq)\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R}u\,dx$$

Proof：在解$u(y)$的 Green 的表示中，令Ω为$B_\rho(y)(\rho<R)$，得到：

$$u(y)=\int_{\partial B_\rho}\left(u\frac{\partial k(x-y)}{\partial n}-k(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{B_\rho}k(x-y)\Delta u\,dx$$

$$u(y)=k'(\rho)\int_{\partial B_\rho}u\,dS-k(\rho)\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}dS+\int_{B_\rho}k(x-y)\Delta u\,dx$$

$$u(y)=\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u\,dS+\int_{B_\rho}[k(x-y)-k(\rho)]\Delta u\,dx=(\leq,\geq)\frac{1}{n\omega_n\rho^{n-1}}\int_{\partial B_\rho}u\,dS$$

最后是因为在B_ρ中恒有$k(x-y)-k(\rho)\leq 0$，而$\Delta u=(\geq,\leq)0$

令$\rho\to R$，可得：

$$u(y)=(\leq,\geq)\frac{1}{n\omega_n R^{n-1}}\int_{\partial B_R}u\,dS$$

上式两边乘以ρ^{n-1}，再关于ρ从0到R积分，得到：

$$u(y)=(\leq,\geq)\frac{1}{\omega_n R^n}\int_{B_R}u\,dx$$

最大值最小值原理及其应该用

本节将证明：一个调和函数不可能在区域内取到最大值或最小值，除非它为常数

Thm. （下（上）调和函数的强最大（小）值原理）

设u是Ω（Ω可以无界）内的下（上）调和函数，且存在$y\in\Omega$，使得：

$$u(y)=\sup_{\Omega}u\ (u(y)=\inf_{\Omega}u)$$

则u必定为常数

Proof：设$-\Delta u\le 0$，$M=\sup\limits_{\Omega}u$，定义：

$$\Omega_M=\{x\in\Omega|u(x)\in M\}$$

由于$y\in\Omega_M$，因此Ω_M非空，由u的连续性知Ω_M相对于Ω是闭集，设$z\in\Omega_M$

在$B=B_R(z)\subseteq\subseteq\Omega$中对下调和函数$u-M$用次平均值等式：

$$0=u(x)-M\le\frac{1}{\omega_n R^n}\int_B\ (u-M)\,dx\le 0$$

由此及u的连续性，在$B_R(z)$中$u(z)\equiv M$，故Ω_M相对于Ω也是开集，从而$\Omega_M=\Omega$，即$u\equiv M$在全空间Ω中都成立，以$-u$代替u即得到最小值原理

由上立刻得到弱最大最小值原理：

Thm. （下（上）调和函数的弱最大（小）值原理）

设Ω有界，$u\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$，$-\Delta u\le(\ge)0$，则成立：

$$\max_{\overline{\Omega}}u=\max_{\partial\Omega}u\ (\min_{\overline{\Omega}}u=\min_{\partial\Omega}u)$$

由上面两个定理可直接得到：

Thm. （调和函数的强最值原理）

设u是Ω（Ω可以无界）内的调和函数，则u不可能在Ω内取到最值，除非它是常值函数

Thm. （调和函数的弱最值原理）

设Ω有界，$u\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$，$-\Delta u=0$，则成立：

$$\max_{\overline{\Omega}}|u(x)|=\max_{\partial\Omega}|u(x)|$$

Cor. （比较原理 1）设$u,v\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^2(\Omega)$，在$\Omega$中满足$\Delta u=\Delta v$，在$\partial\Omega$上$u=v$，则：

$$u\equiv v,\ x\in\Omega$$

Cor, （比较原理 2）设u,v分别是调和和下调和函数，在$\partial\Omega$上$u=v$，则：

$$v\le u,\ x\in\Omega$$

Dirichlet 问题解的唯一性和稳定性

Thm.（内问题的唯一性与稳定性）设Ω是R^n中有界区域，则 Poisson 方程的 Dirichlet 内问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in \Omega \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

至多一个解，且连续依赖于边值$\varphi(x)$

Proof：由比较原理 1，唯一性显然，下证稳定性，设u和u^{ε}是Ω中分别具有边值φ和$\varphi - \varepsilon$的问题的解，则调和函数$u - u^{\varepsilon}$具有边值$\varepsilon(x)$，由调和函数的弱最值原理：

$$\max_{\overline{\Omega}}|u - u^{\varepsilon}| = \max_{\partial\Omega}|\varphi - \varphi + \varepsilon(x)| = \max_{\partial\Omega}|\varepsilon(x)|$$

因此：

$$|u - u^{\varepsilon}| \le \max_{\overline{\Omega}}|u - u^{\varepsilon}| < \varepsilon, \ \forall x \in \overline{\Omega}$$

即 Dirichlet 内问题的解连续依赖于边值条件

Thm.（外问题的唯一性与稳定性）设Ω是R^n中有界区域，则 Poisson 方程的 Dirichlet 外问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & x \in R^n \backslash \Omega \\ u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} u = 0 \end{cases}$$

至多一个解，且连续依赖于边值$\varphi(x)$

Proof：设u_1, u_2是问题的两个解，令$v = u_1 - u_2$，则v在$R^n \backslash \Omega$调和，且满足边界条件：

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \ \lim_{|x|\to\infty} v = 0$$

若$v(x)$不恒为 0，则有一点x_0使得$v(x_0) \neq 0$，不妨设$v(x_0) > 0$，作开球$B_R(0)$，取R足够大，使得点x_0位于由$\partial\Omega$即∂B_R围成的区域Ω_R内，且使$v|_{\partial B_R} < v(x_0)$（这由$\lim\limits_{|x|\to\infty} v = 0$保证）

如此看来，调和函数v在有界区域Ω_R内部取到它在$\overline{\Omega}_R$上的最大值，由强最值原理，v必定是常数，因此$v = v|_{\partial\Omega} = 0$，这与$v(x_0) > 0$矛盾，所以$u_1 \equiv u_2$，唯一性证毕，稳定性类似可证

设u和u^{ε}是Ω中分别具有边值φ和$\varphi - \varepsilon$的问题的解，则函数$u - u^{\varepsilon}$具有边值$\varepsilon(x)$，在$R^n \backslash \Omega$调和且满足：

$$|u - u^{\varepsilon}| = |\varepsilon(x)|, \ x \in \partial\Omega, \ \lim_{|x|\to\infty}|u - u^{\varepsilon}| = 0$$

由调和函数的强最值原理，调和函数$u - u^{\varepsilon}$不能在调和区域$R^n \backslash \Omega$内部取到最值，因此：

$$|u - u^{\varepsilon}| \le \max_{R^n \backslash \Omega}|u - u^{\varepsilon}| = \max_{\partial\Omega}|\varphi - \varphi + \varepsilon(x)| = \max_{\partial\Omega}|\varepsilon(x)| < \varepsilon$$

因此外 Dirichlet 问题关于边值的稳定性得证

4.2 Green 函数

已知调和函数的基本积分公式：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial k(x-y)}{\partial n}-k(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS，\ y\in\Omega$$

可用于求解 Dirichlet 问题：

$$(H)\begin{cases}-\Delta u=0，\ x\in\Omega\\ \quad u|_{\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}$$

及利用 Green 表示式：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial k(x-y)}{\partial n}-k(x-y)\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{\Omega}k(x-y)\Delta u\,dx，\ y\in\Omega$$

可用于求解 Poisson 方程的 Dirichlet 问题：

$$(P)\begin{cases}-\Delta u=f(x)，\ x\in\Omega\\ \quad u|_{\partial\Omega}=\varphi(x)\end{cases}$$

但时求解公式中，$\partial u/\partial n$一项是未知的，为此引入 Green 函数及其性质

设函数$h(x,y)$关于x属于$C^2(\overline{\Omega})$，在Ω中满足$-\Delta_x h=0$，其中$y\in\Omega$是参数，对满足同样光滑条件的函数$u(x)$，利用 Green 第二公式，得到：

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+\int_{\Omega}h\Delta u\,dx=0$$

若u在Ω中是调和的，则：

$$\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial \mathrm{h}}{\partial n}-h\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0$$

此式与 Green 基本积分公式相加，并记$G(x,y)=k(x-y)+h(x,y)$，且要求在$\partial\Omega$上$G=0$，于是得到问题(H)的形式解：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS=\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial G}{\partial n}dS$$

若Δu不恒等于 0，则将上式与基本积分公式相加，得到问题(P)的形式解：

$$u(y)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G}{\partial n}\right)dS+\int_{\Omega}k(x-y)\Delta u\,dx=\int_{\partial\Omega}\varphi(x)\frac{\partial G}{\partial n}dS-\int_{\Omega}k(x-y)f(x)\,dx$$

函数$G(x,y)$叫做区域Ω（关于 Laplace 算子 Dirichlet 问题）的 Green 函数

分析可得，为了得到位势方程的解，必须求出函数h，即解一个特殊的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta_x h = 0, & x \in \Omega \\ h|_{\partial\Omega} = -k(x-y) \end{cases}$$

求解得到h，进而得到 Green 函数，得到 Dirichlet 问题的解

Green 函数的重要性质

（1） 性质 1：

$$k(x-y) < G(x,y) < 0, \ \forall x \in \Omega, \ x \neq y$$

Proof：已知$k(x-y)$的表达式有：

$$k(x-y) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, \ n > 2$$

因此易得$k(x-y) < 0$，而h满足方程：

$$\begin{cases} -\Delta_x h = 0, & x \in \Omega \\ h|_{\partial\Omega} = -k(x-y) > 0 \end{cases}$$

因为h在Ω内关于x调和，由调和函数的强最大最小值原理，知h不可能在Ω内取到最大值或最小值，因此在Ω内必定有$h > 0$，若否，则最小值将在Ω内取到

因此$G(x,y) = k(x-y) + h(x,y) > k(x,y)$，又因为在$\Omega$中：

$$h < h|_{\partial\Omega} = -k(x-y)$$

因此$G(x,y) = k(x-y) + h(x,y) < k(x-y) - k(x-y) = 0$

综上，即证：

$$k(x-y) < G(x,y) < 0, \ \forall x \in \Omega, \ x \neq y$$

（2） 性质 2：

在区域Ω内，当$x \neq y$时，$G(x,y)$关于x处处满足调和方程，并且当$x \to y$时，$G(x,y) \to \infty$且阶数与$1/|x-y|^{n-2}$同阶（$n > 2$）

Proof：$k(x-y)$是调和方程的基本解，显然成立$\Delta_x k(x-y) = 0$

而$h(x,y)$满足方程：

$$\begin{cases} -\Delta_x h = 0, & x \in \Omega \\ h|_{\partial\Omega} = -k(x-y) > 0 \end{cases}$$

因此$\Delta_x[k(x-y) + h] = 0$，即 Green 函数$G(x,y)$关于x处处满足调和方程

又因为$0 < h(x,y) < -k(x-y)$，即$|h(x,y)| < |k(x,y)|$

因此，由$G(x,y) = k(x-y) + h(x,y)$，当$x \to y$时有：

$$G(x,y) \sim O\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}}\right)$$

因此，当$x \to y$时，$G(x,y) \to \infty$，且速度与$1/|x-y|^{n-2}$同阶

（3） 性质 3：

$$G(x,y) = G(y,x)\text{，}\forall x,y \in \Omega\text{，}x \neq y$$

Proof：由位势方程基本解$k(x-y)$的表达式，易得$k(x-y) = k(y-x)$

对于$h(y,x)$，应该满足方程：

$$\begin{cases} -\Delta_y h = 0\text{，}y \in \Omega \\ h|_{\partial\Omega} = -k(y-x) \end{cases}$$

因为$k(x-y) = k(y-x)$，则上面的方程与：

$$\begin{cases} -\Delta_x h = 0\text{，}x \in \Omega \\ h|_{\partial\Omega} = -k(x-y) \end{cases}$$

本质上是同一个方程，因而同解，即得$h(x,y) = h(y,x)$

综上，即得$G(x,y) = k(x-y) + h(x,y) = k(y-x) + h(y,x) = G(y,x)$

（4） 性质 4：

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n} dS = 1$$

Proof：因为h在Ω内关于x调和，因此：

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathrm{h}}{\partial n} dS = \int_{\Omega} \Delta h\, dx = 0$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial n} dS = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial k(x-y)}{\partial n} dS = k'(|x-y|) \int_{\partial\Omega} 1\, dS = \frac{1}{n\omega_n |x-y|^{n-1}} \int_{\partial\Omega} 1\, dS = 1$$

球上的 Green 函数 Poisson 积分公式

已知在用 Green 函数法求解位势方程时，关键在于求解特殊函数h，当区域Ω具有特殊的对称性时，可以通过镜像法求 Green 函数，下面以球域上的 Green 函数为例。设B_R是以原点为中心，半径为R的R^3中的球，取定球内一点$y \neq 0$，放置单位负电荷，它在x处的电位应该是：

$$-\frac{1}{4\pi|x-y|}$$

为实现物理意义上的接地，在y点关于球面的对称点（又叫反演点）$y' = yR^2/|y|^2$处放置具有q电荷量的点电荷，q值待求，此电荷的作用相当于物理意义中的感应电荷，他所产生的静电场在x处的电位是：

$$h(x,y) = \frac{q}{4\pi|x-y'|}，\ x \in R^3，\ x \neq y'$$

当$x \in \partial B_R$，应要求：

$$h(x,y) - \frac{1}{4\pi|x-y|} = 0$$

代入h的表达式，得到：

$$q = \frac{|x-y'|}{|x-y|}，\ x \in \partial\Omega$$

由反演变化的空间相似性：

$$\frac{|x-y'|}{|x-y|} = \frac{R}{|y|}，\ x \in \partial B_R$$

从而得到$h(x,y)$的解为：

$$h(x,y) = \frac{R/|y|}{4\pi|x-y'|} = -k\left(\frac{|y|}{R}|x-y'|\right)$$

于是，当$y \neq 0$时：

$$G(x,y) = k(x-y) + h(x,y) = k(|x-y|) - k\left(\frac{|y|}{R}|x-y'|\right)$$

当$y = 0$时，直接由：

$$\begin{cases} -\Delta_x h = 0，\ x \in B_R \\ h|_{\partial B_R} = -k(x) \end{cases}$$

解得$h = -k(R)$，因此，球上的 Green 函数是：

$$G(x,y) = \begin{cases} k(|x-y|) - k\left(\frac{|y|}{R}|x-y'|\right)，\ x \neq y \\ k(|x|) - k(R)，\ x = y \end{cases}$$

事实上，在$n > 3$时，上式也是n维球$B_R(0)$上的 Green 函数

现在利用上面的 Green 函数求$B_R = B_R(0)$上调和方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = 0，x \in B_R \\ u(x) = \varphi(x)，x \in \partial B_R \end{cases}$$

根据形式解：

$$u(y) = \int_{\partial B_R} \varphi(x) \frac{\partial G}{\partial n} dS_x$$

需要计算$\partial G / \partial n$在球面∂B_R上的值，当$x \in \partial B_R$时，G的外法向微商为：

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r}|_{r=R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{R} D_i G = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} |x - y|^{-n}$$

其中r是球的半径向量，于是，由形式解：

$$u(y) = \frac{R^2 - |y|^2}{n\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{\varphi(x)}{|x - y|^n} dS_x$$

上式称为球上调和方程 Dirichlet 问题的 Poisson 积分公式，当$y = 0$时，就得到了调和函数的平均值定理，当$n = 3$时，利用球坐标，上式可以写为：

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R(R^2 - \rho_0^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\varphi(\theta, \varphi) \sin\theta}{(R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0 \cos\gamma)^{3/2}} d\theta d\varphi$$

其中，$(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$是球$B_R$内一点$y$的求坐标，$\gamma$是向量$x, y$的夹角，满足：

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_0 + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_0)$$

注：对于二维圆域，相应的 Poisson 积分公式为：

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(\varphi)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi$$

其中，(r, θ)是圆内一点的极坐标，(R, φ)是圆周上点的极坐标

上半空间上的 Green 函数

考虑$R^n(n \geq 3)$中上半空间$R_+^n = \{x \in R^n | x_n > 0\}$上调和方程的 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, \ x \in R_+^n \\ u(x) = \varphi(x'), \ x \in \{x_n = 0\} \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

其中$x = (x', x_n)$，$x' = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})$

设$x, y \in R^n$，$y = (y', y_n)$的对称点是$y^* = (y', -y_n)$

所以 Green 函数中$h(x, y)$可取为$-k(x - y^*)$，因为$y^* \notin R_+^n$，故h关于$x \in R_+^n$是调和的

当x位于超平面$x_n = 0$时，有：

$$G(x, y) = k(x - y) - k(x - y^*) = 0$$

于是，由形式解，对任意的$y \in R_+^n$，有：

$$u(y) = \int_{x_n = 0} \varphi(x') \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

注：为使得对无界区域Ω成立：

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial k(x - y)}{\partial n} - k(x - y) \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

要求调和函数u在无穷远处满足：

$$|u(x)| \leq \frac{C}{|x|}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right| \leq \frac{C}{|x|^2}, \quad |\varphi(x')| \leq \frac{C}{\delta^n} (\delta = |x'|, \delta\text{充分大})$$

为写出积分表达式，下面计算$\partial G / \partial n$：

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{x_n = 0} = -\frac{\partial G(x, y)}{\partial x_n}\Big|_{x_n = 0} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) y_n}{\pi^{\frac{n}{2}} (|x' - y'|^2 + y_n^2)^{\frac{n}{2}}}$$

从而得到：

$$u(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) y_n}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{x_n = 0} \frac{\varphi(x')}{(|x' - y'|^2 + y_n^2)^{\frac{n}{2}}} dx'$$

上式称为调和方程的 Dirichlet 问题在半空间上的 Poisson 积分公式

Poisson 核

记$P(x,y)$：

$$P(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}，\ x\in B_R，\ y\in\partial B_R$$

称它是 Poisson 核，则球面上 Dirichlet 问题的 Poisson 积分公式就可写为：

$$u(x)=\int_{\partial B_R}P(x,y)\varphi(y)\,dS_y$$

Poisson 核具有下面的性质：

（1） 性质 1：$P(x,y)$是关于x的调和函数

Proof：记$r=|x-y|$，注意到：

$$\frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{x_i-y_i}{r}$$

忽略无关常数，直接计算：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2-|x|^2}{r^n}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2}{r^n}-\frac{|x|^2}{r^n}\right)=R^2\frac{\partial r^{-n}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{|x|^2}{r^n}$$

$$\frac{\partial r^{-n}}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}=-n\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}},\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{|x|^2}{r^n}=\frac{2x_i}{r^n}-n|x|^2\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2-|x|^2}{r^n}\right)=n|x|^2\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}-nR^2\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}-\frac{2x_i}{r^n}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{r^n}\right)=n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}\right)-nR^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}\right)-2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^n}\right)$$

将上面的计算结果代入：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{|x|^2(x_i-y_i)}{r^{n+2}}\right)=\frac{2x_i(x_i-y_i)+|x|^2}{r^{n+2}}-(n+2)\frac{|x|^2(x_i-y_i)^2}{r^{n+4}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}\right)=\frac{1}{r^{n+2}}-(n+2)\frac{(x_i-y_i)^2}{r^{n+4}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^n}\right)=\frac{1}{r^n}-n\frac{x_i(x_i-y_i)}{r^{n+2}}$$

配方化简，得到：

$$n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}\right)=n\frac{x_i^2-y_i^2+(x_i^2-2x_iy_i+y_i^2)+|x|^2}{r^{n+2}}-(n^2+2n)\frac{|x|^2(x_i-y_i)^2}{r^{n+4}}$$

$$nR^2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i-y_i}{r^{n+2}}\right)=\frac{nR^2}{r^{n+2}}-(n^2+2n)R^2\frac{(x_i-y_i)^2}{r^{n+4}}$$

$$2\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r^n}\right)=\frac{2}{r^n}-n\frac{x_i^2-y_i^2+(x_i-y_i)^2}{r^{n+2}}$$

将上面三个式子让i从 1 到n求和，得到：

$$n\frac{|x|^2-|y|^2+r^2+n|x|^2}{r^{n+2}}-\frac{(n^2+2n)|x|^2}{r^{n+2}}-\frac{n^2R^2}{r^{n+2}}+\frac{(n^2+2n)R^2}{r^{n+2}}-\frac{2nr^2}{r^{n+2}}+n\frac{|x|^2-|y|^2+r^2}{r^{n+2}}$$

合并同类项，得到：

$$\Delta_x P(x,y)=\frac{2n|x|^2-2n|y|^2+2nr^2+n^2|x|^2-(n^2+2n)|x|^2-n^2R^2+(n^2+2n)R^2-2nr^2}{r^{n+2}}$$

$$\Delta_x P(x,y)=\frac{2n|x|^2-2n|y|^2-(2n)|x|^2+(2n)R^2}{r^{n+2}}$$

$$\Delta_x P(x,y)=\frac{2n[R^2-|y|^2]}{r^{n+2}}$$

因为$y\in\partial B_R$，因此$|y|^2=R^2$，从而$\Delta_x P(x,y)=0$，因此 Poisson 核在B_R内调和

（2） 性质 2：$P(x,y)$满足：

$$\int_{\partial B_R} P(x,y)\,dS=1，x\in B_R$$

Proof：因为$P(x,y)$关于$x\in B_R$是调和的，若记$x=ry'$，$y'\in\partial B_R$，则由平均值定理得：

$$1=P(0,y)n\omega_n R^{n-1}=\int_{\partial B_R} P(ry',y)\,dS$$

由球的对称性及$P(x,y)$的定义可知：

$$P(x,y)=\frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-y|^n}，x\in B_R，y\in\partial B_R$$

$$P(ry',y)=\frac{R^2-|ry'|^2}{n\omega_n R|ry'-y|^n}，P(ry,y')=\frac{R^2-|ry|^2}{n\omega_n R|ry-y'|^n}$$

对$y,y'\in\partial B_R$，显然成立$|ry'|^2=|ry|^2=rR$，用内积计算的性质，容易得到：

$$|ry'-y|=(ry'-y,ry'-y)=(ry-y',ry-y')=|ry-y'|$$

将上面两式代入，立刻得到：

$$P(ry',y)=P(ry,y')$$

于是，记$x=ry$，得到：

$$1=\int_{\partial B_R} P(ry',y)\,dS=\int_{\partial B_R} P(ry,y')\,dS=\int_{\partial B_R} P(x,y')\,dS$$

由$0<r<1$知$x\in B_R$,

4.3 调和函数的基本性质

逆平均值性质

Thm. （逆平均值定理）设函数$u(x)$在Ω内连续，且对任意一个球$B = B_R(y) \subseteq\subseteq \Omega$，满足：

$$u(y) = \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B} u \, dS$$

则$u(x)$在Ω内调和

Proof：由球上的 Poisson 公式：

$$h(x) = \int_{\partial B_R} P(x,y)\varphi(y) \, dS$$

以及解的存在性定理，对任何一个球$B \subseteq\subseteq \Omega$，存在一个$B$内的调和函数$h$，在$\partial B$上$h = u$

令$w = u - h$，则w在$\overline{B}$上连续且在∂B上等于 0，由已知及h在B中的调和性质

知w在B中任一球上满足平均值不等式，由最值原理，$|w|$的最大值在∂B上达到

于是在B上，$w \equiv 0$，从而在B内$u \equiv h$，故$u(x)$在B内是调和的

又由$B \subseteq\subseteq \Omega$的任意性，可得$u$在$\Omega$中是调和的

下面是这个定理的直接应用

Thm. （调和函数的极限）设$\{u_n\}$是Ω内的调和函数列，且u_n一致收敛到极限函数u

则u也是调和函数

Harnack 不等式

Harnack 不等式指出：一个非负调和函数在其调和区域内一个紧子域上的最大值可以被其最小值乘以一个与函数无关的常数所界定

Thm. （Harnack 不等式）设u是$\Omega \subseteq R^n$内的非负调和函数，则对任一有界子域$\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$，存在一个只依赖于$n, \Omega', \Omega$的正常数，使得：

$$\sup_{\Omega'} u \le c \inf_{\Omega'} u$$

Proof：设u不恒为常数，否则结论显然成立

（1） 取$y \in \Omega$，选取正数R使得球$B_{4R}(y) \subseteq\subseteq \Omega$，则对任意两点$x_1, x_2 \in B_R(y)$，有平均值等式：

$$u(x_1) = \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_R(x_1)} u \, dx \le \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{B_{2R}(x_1)} u \, dx$$

$$u(x_2) = \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{3R}(x_2)} u \, dx \ge \frac{1}{\omega_n (3R)^n} \int_{B_{2R}(x_2)} u \, dx$$

因此，$u(x_1) \leq 3^n u(x_2)$，由此得到：

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u$$

（2） 现在设$\Omega' \subseteq\subseteq \Omega$，则存在$x_1, x_2 \in \partial\Omega'$，使得：

$$u(x_1) = \sup_{\Omega'} u \text{，} u(x_2) = \inf_{\Omega'} u$$

令$\Gamma \subseteq \overline{\Omega'}$是连接$x_1, x_2$的弧，选$R$使得$4R < dist(\partial\Omega', \partial\Omega)$，由有限覆盖定理，$\overline{\Omega'}$被$N$个半径为$R$（$R$仅和$\Omega', \Omega$有关）的球所覆盖，于是$\Gamma$被$M(M \leq N)$个球覆盖

从第一个球开始，依次在每个球中利用估计式：

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^n \inf_{B_R(y)} u$$

通过相邻二球的公共点过渡到下一个球，直到第M个球，最后得到：

$$\sup_{B_R(y)} u \leq 3^{nN} \inf_{B_R(y)} u$$

证毕，下面是 Harnack 不等式的一个应用

Thm. （一致收敛性）若u_n是$\Omega \subseteq R^n$内的单调增加的调和函数列，在Ω内一点$y \in \Omega' \subseteq\subseteq \Omega$（$\Omega'$有界），数列$\{u_n(y)\}$收敛，则$u_n$在$\Omega'$中一致收敛到一个调和函数

Proof：任意$\varepsilon > 0$，存在正数K，当$m \geq n > K$时，有：

$$0 \leq u_m(y) - u_n(y) < \varepsilon$$

有 Harnack 不等式得到：

$$\sup_{\Omega'} u_m - u_n \leq c \inf_{\Omega'} u \leq c[u_m(y) - u_n(y)] < c\varepsilon$$

$m, n > K$，c仅与N, Ω, Ω'有关，$\therefore u_n$在Ω'中一致收敛，再由调和函数的极限定理，极限u调和

奇点可去性定理

奇点可去性的证明显示了 Poisson 积分公式在处理困难问题时候的作用

Thm. （奇点可去性）设$u(x)$在$\Omega\backslash\{x_0\}$中调和，在x_0处有：

$$\lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{n-2} u(x) = 0\text{，} n > 2$$

则可以重新定义u在x_0处的值，使得u在Ω中调和

Proof：证明分为 3 步：

（1） 为方便起见，取x_0为原点，设$B_R(0) \subseteq\subseteq \Omega$，于是在$\partial B_R$上，$u$是连续函数，可用 Poisson 积分公式制作一个在∂B_R上等于u且在B_R内调和的函数$v(x)$，下面仅需证明在$\Omega\backslash\{0\}$中$v = u$即可，因为这时可以定义$u(0) = v(0)$，于是u在Ω中是调和的

（2） 对任意给定的$\varepsilon > 0$以及某δ，$0 < \delta < R$，考虑函数：

$$w_\varepsilon = \varepsilon(|x|^{2-n} - R^{2-n})$$

此函数在$B_R \backslash \overline{B_\delta}$中是调和的，在$\partial B_R$上等于 0，由已知条件，存在足够小的正数$\delta$，使得：

$$|u - v| \leq w_\varepsilon，x \in \partial B_\delta$$

由最大最小值原理，得到在$B_R \backslash \overline{B_\delta}$中：

$$|u - v| \leq w_\varepsilon$$

（3） 固定ε，令$\delta \to 0$，使得$|u - v| \leq w_\varepsilon$在$B_R \backslash \{0\}$中成立，由$\varepsilon$的任意性，可知$u = v$在$B_R \backslash \{0\}$中恒成立，证毕

（2） 对任意给定的$\varepsilon > 0$以及某δ，$0 < \delta < R$

由极限条件和 Poisson 积分公式得到的函数v，取δ足够小，使得在$x \in \partial B_\delta$上有：

$$u, v < \varepsilon \frac{\delta^{2-n}}{2}$$

由比较原理，得到$|u - v| \leq \varepsilon |x|^{2-n}$，$x \in B_R \backslash \overline{B_\delta}$

令$\delta \to 0$，得到在$x \in B_R \backslash \{0\}$中，成立$|u - v| \leq \varepsilon |x|^{2-n}$

（3） 对任意一点$y \in B_R \backslash \{0\}$，取$\delta_2$充分小，使得$y \in B_R \backslash \overline{B_{\delta_2}}$，则：

$$|u - v|(y) < \varepsilon \delta_2^{2-n}$$

δ_2是与ε无关的量，由ε的任意性，可得$u(y) = v(y)$，$y \in B_R \backslash \{0\}$，证毕

正则性

Thm. （正则性）若函数$u(x)$在区域Ω内调和，则它在该域内无穷次可微

Proof：显然$u(x)$在Ω内局部可积，由光滑化函数的性质，知$u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

下面证明在Ω_ε内$u \equiv u^\varepsilon$，事实上，若$x \in \Omega_\varepsilon$，则：

$$u^\varepsilon = \int_\Omega \eta_\varepsilon(x - y) u(y)\, dy = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{B_\varepsilon(x)} \eta\left(\frac{|x - y|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy$$

$$u^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u\, dS\right) dr = \frac{u(x)}{\varepsilon^n} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) n\omega_n r^{n-1}\, dr = u(x) \int_{B_\varepsilon(0)} \eta_\varepsilon\, dy = u(x)$$

从而$u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$，由$\varepsilon > 0$的任意性，可得$u \in C^\infty(\Omega)$