《微分方程数值解实验报告》

2022 年 6 月 27 日

学　　校:	华中科技大学
学　　院:	数学与统计学院
成　　员:	何嘉怡
学　　号：	U201916521
专　　业:	信息与计算数学
指导教师:	高华东

评　　分: ________________

目录

1 实验介绍

题目1.

使用MAC格式计算方腔流（Lid-driven cavity model），要求网格h< $\frac{1}{128}$

$$
\begin{cases}
-\Delta \mathbf{u} + \bigtriangledown p = 0 \\
div \mathbf{u} = 0
\end{cases}
$$

这里$\Omega = (0,1)^2$，在上边界，$\mathbf{u} = (1,0)^T$，在剩余边界$\mathbf{u} = \mathbf{0}$

2 实验方法

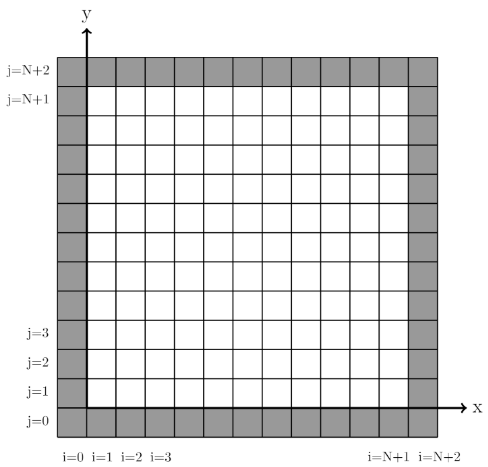
解答. 令$\mathbf{u} = \binom{u}{v}$

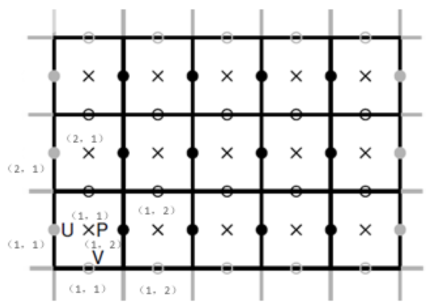
则方程化成

$$
\begin{cases}
-\Delta u + P_x = 0 \\
-\Delta v + P_y = 0 \\
u_x + v_y = 0
\end{cases}
$$

目标是将问题转化成

$$
\begin{bmatrix} K_1 & O & B_1 \\ O & K_2 & B_2 \\ A & B & O \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} U \\ V \\ P \end{bmatrix} = \beta
$$

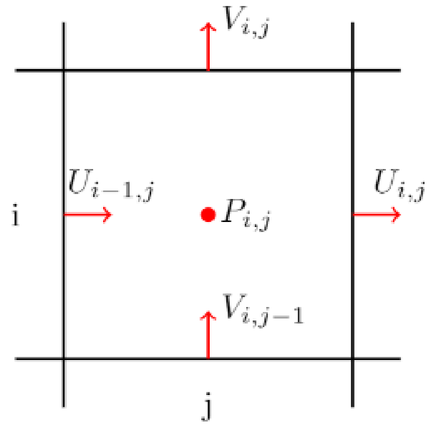


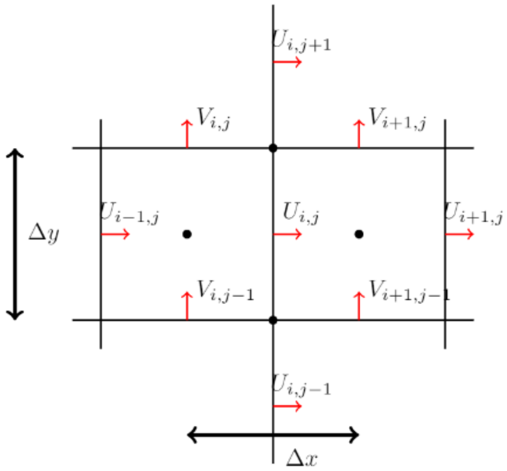


其中灰色的为虚拟网格，利用双侧差分格式处理本质边界条件。

交错网格上，×表示p所取格点，•表示u所取格点，∘表示v所取格点。最后求解出所有格点后，我们还需将u和v的相邻格点值作平均，来和p格点的坐标对齐。

具体的细节格点如下图:





因此

$$U = (u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1N}, \cdots, u_{N-1,1}, \cdots, u_{N-1,N})^T$$
$$V = (v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1,N-1}, \cdots, v_{N,1}, \cdots, v_{N,N-1})^T$$
$$P = (p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1N}, \cdots, p_{N,1}, \cdots, p_{N,N})^T$$

内部点（中心差分格式）

$$\begin{cases} \frac{p_{i+1,j}-p_{i,j}}{h} - \frac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}}{h^2} = 0 \\ \frac{p_{i,j+1}-p_{i,j}}{h} - \frac{v_{i+1,j}+v_{i-1,j}+v_{i,j+1}+v_{i,j-1}-4v_{i,j}}{h^2} = 0 \end{cases}$$

处理边界条件

$$\begin{cases} \frac{u_{i,N}+u_{i,N+1}}{2} = 1 \\ \frac{p_{i+1,N}-p_{i,N}}{h} - \frac{u_{i+1,N}+u_{i-1,N}+u_{i,N+1}+u_{i,N-1}-4u_{i,N}}{h^2} = 0 \end{cases}$$

得

$$\frac{p_{i+1,N}-p_{i,N}}{h} - \frac{u_{i+1,N}+u_{i-1,N}+u_{i,N-1}-5u_{i,N}}{h^2} = \frac{2}{h^2}$$

同理得

$$\frac{p_{N,j+1}-p_{N,j}}{h} - \frac{v_{N-1,j}+v_{N,j+1}+u_{N,j-1}-5u_{N,j}}{h^2} = 0$$

从而得矩阵

$$K_1 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} S & Q & & \\ Q & S & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & Q \\ & & Q & S \end{bmatrix}_{(N-1)N\times(N-1)N}$$

其中

$$S=\begin{bmatrix} 5 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 5 \end{bmatrix}_{N\times N} \quad Q=\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

同理

$$K_2=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} S_1 & Q_1 & & \\ Q_1 & S_1 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & Q_1 \\ & & Q_1 & S_1 \end{bmatrix}_{(N-1)N\times(N-1)N}$$

其中

$$S_1=\begin{bmatrix} 5 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 5 \end{bmatrix}_{N-1\times N-1} \quad Q1=\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{N-1\times N-1}$$

同时

$$A=\frac{1}{h}\begin{bmatrix} S_2 & & \\ Q_2 & S_2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & S_2 \\ & & & Q_2 \end{bmatrix}_{N^2\times(N-1)N}$$

其中

$$S_2=-\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{N\times N} \quad Q_2=\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

$$B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} S_3 & & & \\ & S_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_3 \end{bmatrix}_{N^2\times(N-1)N}$$

其中

$$S_3 = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ 1 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}_{N\times N-1}$$

同时

$$B_1 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} S_2 & S_2 & & & \\ & S_2 & S_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & S_2 & S_2 \end{bmatrix}_{(N-1)N\times N^2}$$

$$B_2 = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} S_3^T & & & \\ & S_3^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & S_3^T \end{bmatrix}_{(N-1)N\times N^2}$$

同时，我们需要进行压力矫正，即赋予压力一个初值，把A和B矩阵第一行变为0，且

$$K(2*(N-1)*N+1, 2*(N-1)*N+1) = 1$$

最后在计算得到了U、V、P之后，为了画图，我们需要把列矩阵转化成$N\times N$的矩阵，先把U和V的相邻格点作平均，以此来和P的格点坐标对应。

3 实验结果

以下为速度u、v、压力p的一些图像，其中压力的图像不太明显，左上角和右上角颜色较深一些。

在实验过程中，想到矩阵的大概形式不难，但是要弄清楚各个分块矩阵的阶数比较不容易。一开始跑出来的结果不正确，是因为我把K_2的矩阵写错了，A和B矩阵的阶数弄错，导致方程求解过程中出现了奇异值。

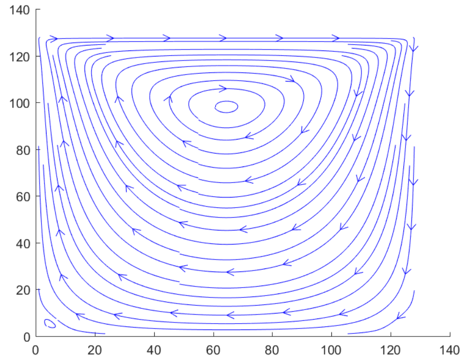


图 1: 流线图

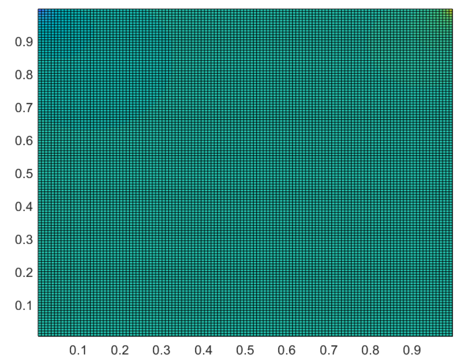


图 2: 压力的棋盘图

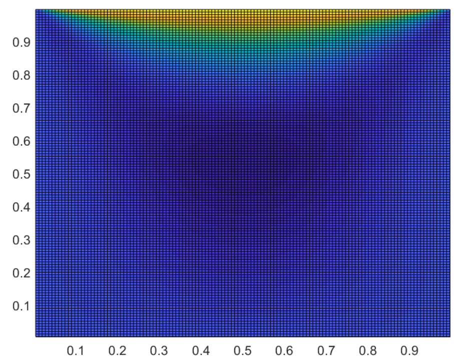


图 3: u的棋盘图

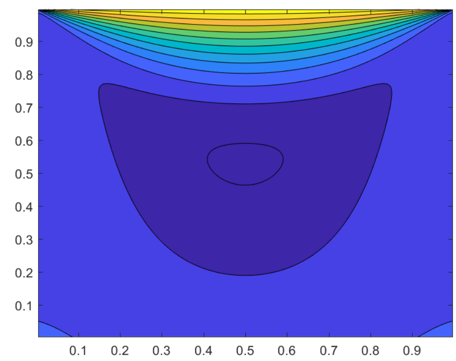


图 4: 速度u的等值线

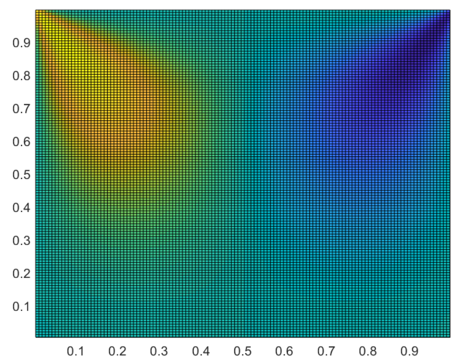


图 5: v的棋盘图

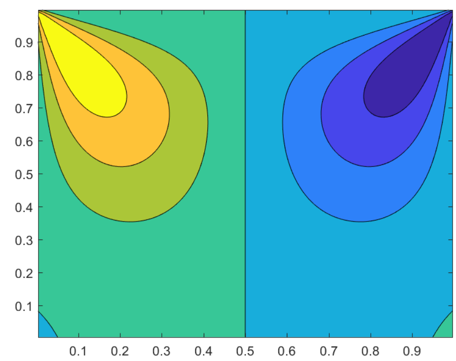


图 6: 速度v的等值线

4 实验代码

```
clc; clear; format longE;

h  =                  1/128; % mesh size in [0,1]
xh =               (0:h:1)'; % nodes in [0,1]
N  =           length(xh)-1; % mesh number in [0,1]


Ahv  = gallery('tridiag', N-1,-1,2,-1);%v
Ahu  = gallery('tridiag', N ,-1,2,-1);%u

I1    = speye(N   ); % some identity matrix
I2   = speye(N-1  ); % some identity matrix
I3=sparse(N-1,N);
I4=sparse(N-1,N-1);

K=sparse(2*(N-1)*N+N^2,2*(N-1)*N+N^2);

u1=sparse(2*(N-1)*N+N^2,1);%处理右端项
for i =1:N-1
ul(i*N)=2/(h^2);
end


ul(2*(N-1)*N+1,1)=0.005;%压力矫正，为%赋一个初值p0.005

for i=1:N-1
I3(i,i)=-1;
I3(i,i+1)=1;
end

for i=1:N-2
I4(i,i)=-1;
I4(i,i+1)=1;
end
I4(N-1,N-1)=-1;

K1 = kron(I2, Ahu) + kron(Ahv, I1); % difference matrix for u
K2 = kron(I1 ,Ahv) + kron(Ahu, I2); % difference matrix for v

for i =1:N-1
K1(i*N,i*N)=5;
```

```
K1((i-1)*N+1,(i-1)*N+1)=5;
K2(i*(N-1),i*(N-1))=5;
K2((i-1)*(N-1)+1,(i-1)*(N-1)+1)=5;
end


B1=kron(I3,I1);
B2=kron(I1,I3);


P1=gallery('tridiag',N,-1,1,0);
A=kron(P1,I1);
A=A(:,1:(N-1)*N);


P2=gallery('tridiag',N,0,-1,1);
P2=P2(1:end-1,:);
P3=-P2';
B=kron(I1,P3);

K(1:(N-1)*N,1:(N-1)*N)=K1./(h^2);
K((N-1)*N+1:2*(N-1)*N,(N-1)*N+1:2*(N-1)*N)=K2./(h^2);
K(1:(N-1)*N,2*(N-1)*N+1:end)=B1./h;
K((N-1)*N+1:2*(N-1)*N,2*(N-1)*N+1:end)=B2./h;
K(2*(N-1)*N+1:end,1:(N-1)*N)=A./h;
K(2*(N-1)*N+1:end,(N-1)*N+1:2*(N-1)*N)=B./h;

K(2*(N-1)*N+1,:)=0;
K(2*(N-1)*N+1,2*(N-1)*N+1)=1;%给压力赋一个初值P

%用自带的求解方程matlab
uh = K\ul;

uhu=uh(1:(N-1)*N);%值u
uhv=uh(N*(N-1)+1:2*N*(N-1));%值v
uhp=uh(2*(N-1)*N+1:2*(N-1)*N+N^2);%值p

uu=zeros(N,N+1);%存储网格值u包括左右边界,
uu(:,2:N)=reshape(uhu,N,N-1);
uv=zeros(N+1,N);%存储网格值，包括上下边界v
uv(2:N,:)=reshape(uhv,N-1,N);
up=reshape(uhp,N,N);%存储网格值p

```

```
%利用平均，把u,的点和点对齐vp
uu1=zeros(N);
uv1=zeros(N);
for i=1:N
uu1(:,i)=(uu(:,i)+uu(:,i+1))./2;
uv1(i,:)=(uv(i,:)+uv(i+1,:))./2;
end

%画图
x=[h/2:h:1-h/2];
y=[h/2:h:1-h/2];
[X,Y]=meshgrid(x,y);

figure(1)
pcolor(X,Y,up);
figure(2)
pcolor(X,Y,uu1);
figure(3)
pcolor(X,Y,uv1);
figure(4)
contourf(X,Y,uu1);
figure(5)
contourf(X,Y,uv1);
figure(6)
streamslice(uu1,uv1);
```