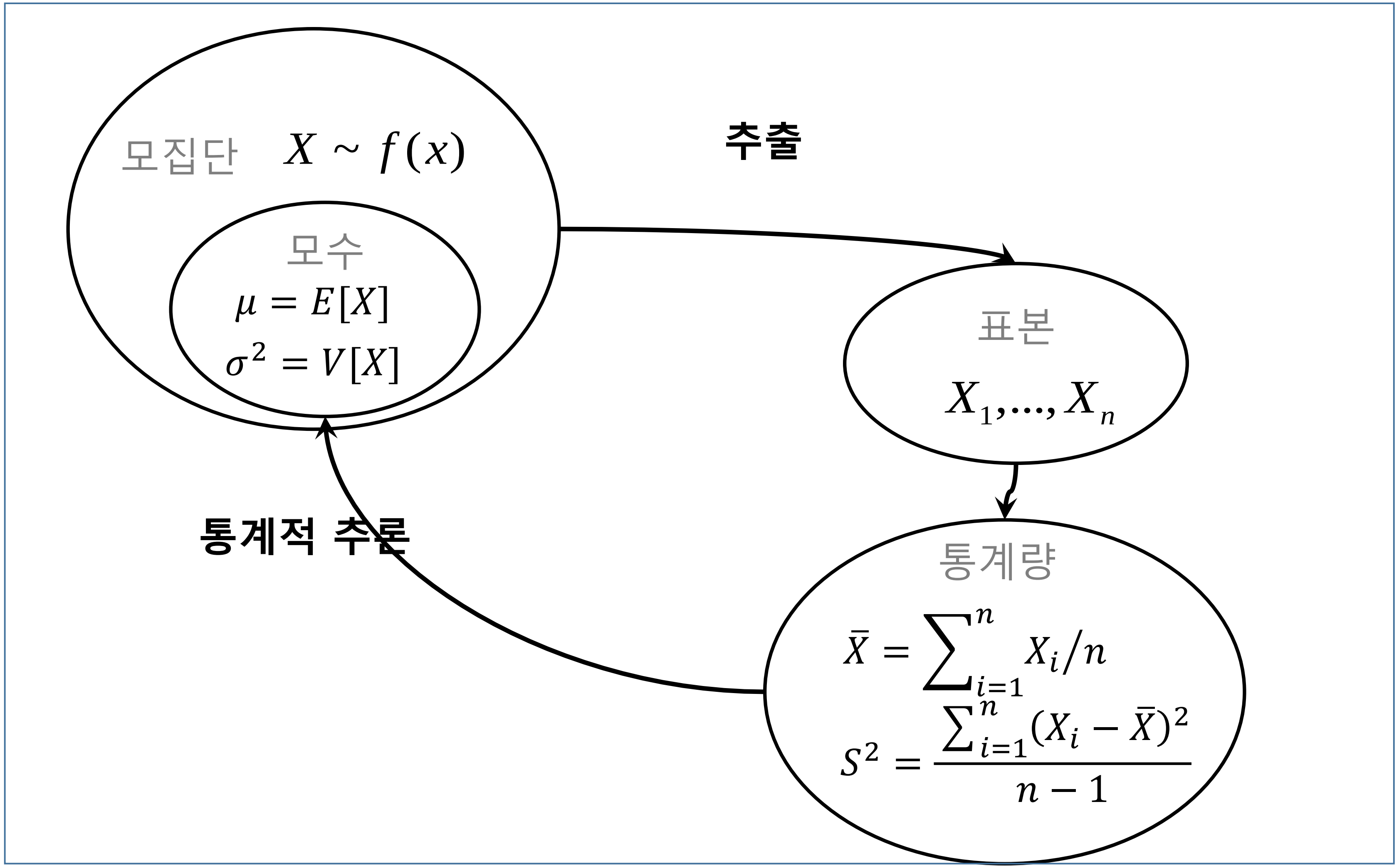
5. 확률표본과 표본분포

확률표본과 표본분포

- 통계적 추론 관련 기본 개념



확률표본과 표본분포

- **모집단의 분포와 확률표본**

미지인 모집단의 확률변수를 X로 그 분포를 $f(x)$로 나타낸다고 할 때,

- **확률표본** (**iid** 표본, Random Sample)

  모집단 $f(x)$로부터의 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 은 다음의 두가지 성질을 만족하는 모집단 $f(x)$로부터의 표본을 뜻함.

  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 서로 **독립**임
  - $X_1, X_2, \ldots, X_n$는 모두 **동일**하게 $f(x)$의 분포를 따름

확률표본과 표본분포

- **통계량과 표본분포**
  - **통계량** (Statistics) : 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 의 함수
    - 통계량의 예

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n \ , \qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}, \qquad \max(X_i)\ , \qquad median(X_i)$$

  - **표본분포** (표집분포, Sampling Distribution) : 통계량의 확률분포

주요 통계량과 그 성질

- **주요 통계량**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 기대값이 μ이고 분산이 σ^2인 모집단의 분포 $f(x)$로부터의 확률 표본이라고 가정할 때,

  - **표본평균** (Sample Mean)
    - 정의

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

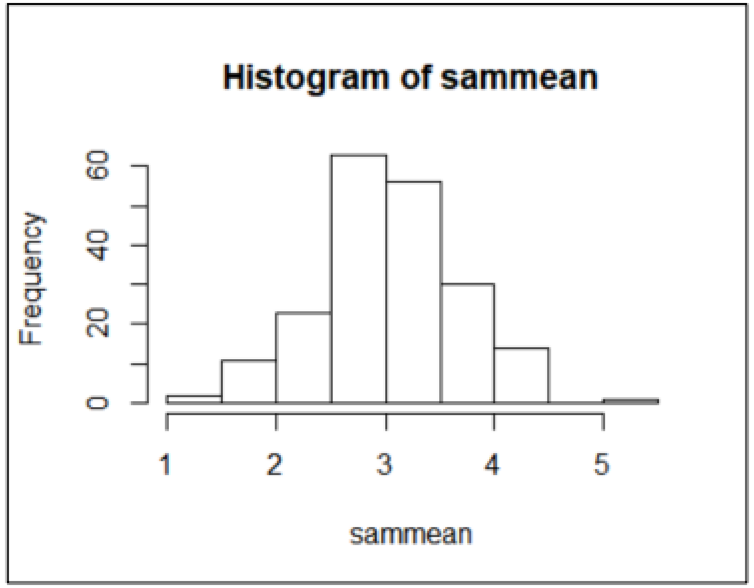
    - 성질

$$E[\bar{X}] = \mu \qquad and \qquad V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

► 표본평균 $\bar{X}$의 평균은 모집단의 평균 μ와 같으며,
표본의 크기 n이 클수록 그 분산이 0에 가까워져,
결국 표본의 크기가 클 때, $\bar{X}$는 μ 근처에 밀집되어 분포하게 됨을 알 수 있음.

주요 통계량과 그 성질

```
> sammean <- rep( 0, times=200 )
> for ( i in 1:200 ){
+ sam10 <- rnorm(10, mean=3, sd=2)
+ sammean[i] <- mean( sam10 )
+ }
> hist( sammean )
```



주요 통계량과 그 성질

```
> mean( sammean )
[1] 3.043031
> sd( sammean )
[1] 0.6408593
> sqrt( 2^2/10 )
[1] 0.6324555
```

주요 통계량과 그 성질

- **표본분산** (Sample Variance)
  - 정의

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

  - 성질

$$E[S^2] = \sigma^2$$

주요 통계량과 그 성질

- **표본비율** (Sample Proportion)

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$이 모성공확률이 p 인 베르누이 분포 $f(x)$로부터의 확률 표본이라고 가정할 때,

  - 정의

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

  - 성질

$$E[\hat{p}] = p \qquad and \qquad V[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n}$$

중심극한의 정리

- **중심극한의 정리** (Central Limit Theorem)

  평균이 μ이고 분산이 σ^2인 임의의 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 추출하면, 그 표본의 평균 $\bar{X}$는 n이 충분히 클 때 $(n > 30)$,

$$\bar{X} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

  따라서

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

  이 성립한다.

중심극한의 정리

- **중심극한의 정리** (Central Limit Theorem)

  평균이 μ이고 분산이 σ^2인 임의의 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 추출하면, 그 표본의 평균 $\bar{X}$는 n이 충분히 클 때 ($n > 30$),

$$\bar{X} \dot{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

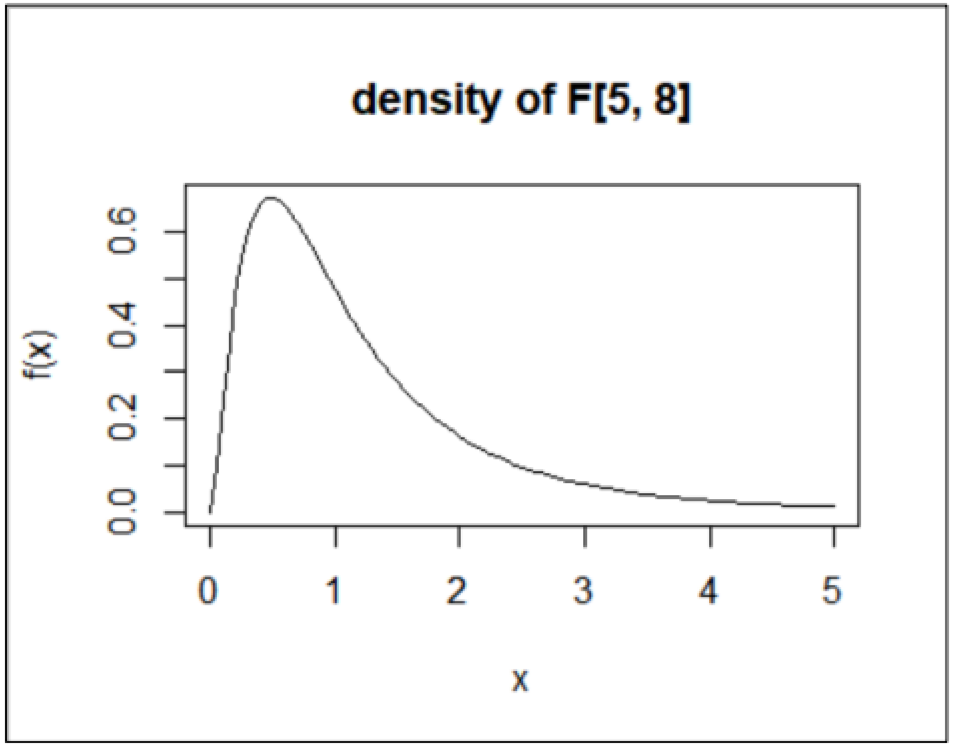
  따라서

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1)$$

  이 성립한다.

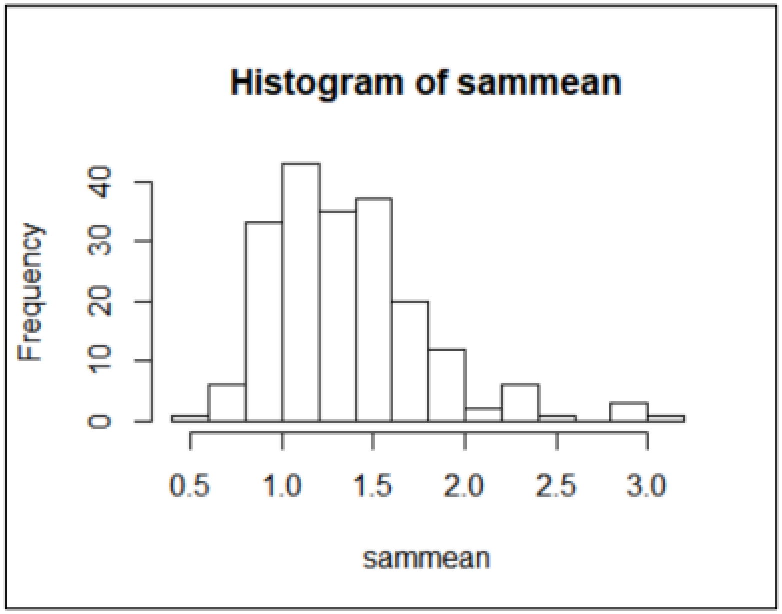
중심극한의 정리

```
> curve( df(x, df1=5, df2=8), from=0, to=5, ylab="f(x)",
+ main="density of F[5, 8]")
```



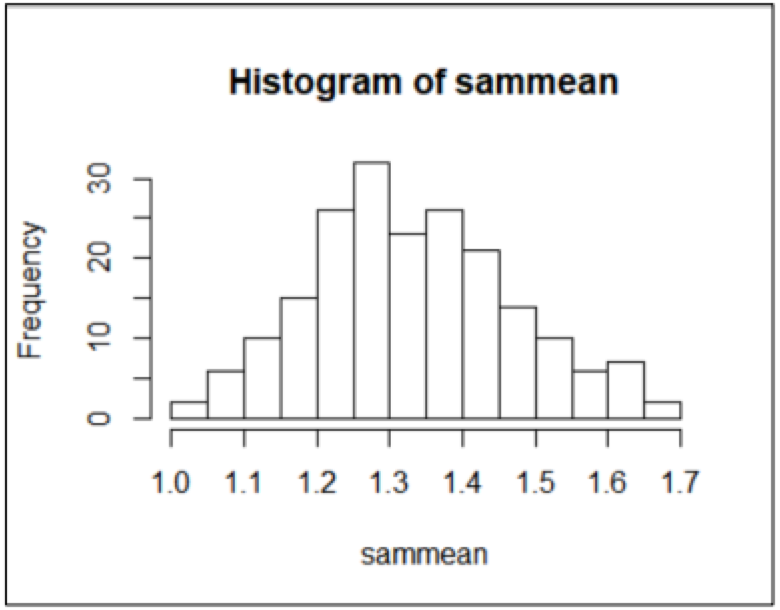
중심극한의 정리

```
> sammean <- rep( 0, times=200 )
> for ( i in 1:200 ){
+ sam10 <- rf(10, df1=5, df2=8)
+ sammean[i] <- mean( sam10 )
+ }
> hist( sammean, breaks=10 )
```



중심극한의 정리

```
> sammean <- rep( 0, times=200 )
> for ( i in 1:200 ){
+ sam100 <- rf(100, df1=5, df2=8)
+ sammean[i] <- mean( sam100 )
+ }
> hist( sammean, breaks=10 )
```



중심극한의 정리

- **예제**
  - 모평균이 10이고 모표준편차가 5인 어느 모집단 분포에서 크기 50의 무작위 표본을 추출한다고 가정하면, 표본평균의 분포는 무엇인가?

중심극한의 정리

- **예제**
  - 어느 지역 가구주의 월 평균소득은 300만원, 표준편차는 25만원이라고 한다. 이 지역에서 25명의 가구주를 임의로 뽑았을 때, 이들의 월 소득 평균이 290만원에서 310만원 사이에 있을 확률을 구하여라.

주요 통계량의 표본분포

- **표본평균 $\bar{X}$의 분포**
  - 모평균이 μ이고 모분산이 σ^2인 **<u>정규</u>** 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \dots, X_n$을 추출한 경우

$$\bar{X} \sim N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \ \rightarrow \ Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

  - 모평균이 μ이고 모분산이 σ^2인 **<u>임의의</u>** 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \dots, X_n$을 추출하였으며, **<u>표본의 크기 $\boldsymbol{n}$이 충분히 큰 경우</u>** $(n \geq 30)$,

$$\bar{X} \dot{\sim} N\left(\mu,\ \frac{\sigma^2}{n}\right) \rightarrow \ Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \dot{\sim} N(0,1) \quad \text{(중심극한정리)}$$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 모분포인 $Normal[\mu, 3^2]$ 로부터 9개의 확률표본 $X_1, \ldots, X_9$을 추출하였다고 하자. 이 경우 표본평균 $\bar{X}$ 가 모평균 μ 와의 차이의 절대값이 1보다 작을 확률 $(P[-1 < \bar{X} - \mu < 1])$은 얼마인가?

※: 이항 분포의 정규 근사.

$Y \sim Bin[n, p]$ $\quad E[Y] = np \quad V[Y] = np(1-p)$

$np \geq 5$ & $n(1-p) \geq 5$.

$\left(Y \overset{\circ}{\sim} N[np, np(1-p)] \text{ by CLT} \right)$

$\overset{\circ}{\sim} N[30, 27]$

ex) $Y \sim Bin[300, 0.1]$ $\quad f(y) = {}_{300}C_y \, 0.1^y \, 0.9^{300-y} \quad y = 0, \ldots, 300.$

$P[Y \leq 150] =$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 어느 해 인도에 투자하는 펀드들의 연 수익률의 평균은 7.98 %이며 표준 편차는 10.1 %로 알려져 있다고 가정하자. 이들 펀드 중 64개의 표본을 랜덤하게 추출하였을 때, 다음 물음에 답하여라.
    - 64개 표본의 연 수익률의 평균의 기대값은 얼마인가?
    - 64개 표본의 연 수익률의 평균의 분산은 얼마인가?
    - 64개 표본의 연 수익률의 평균이 10%를 넘을 확률은 얼마인가?

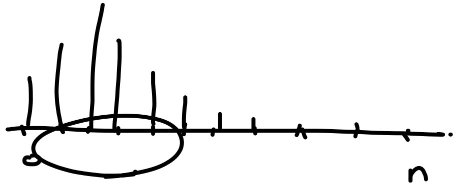
$Y \sim Bin(n, p)$

$np \approx 0$

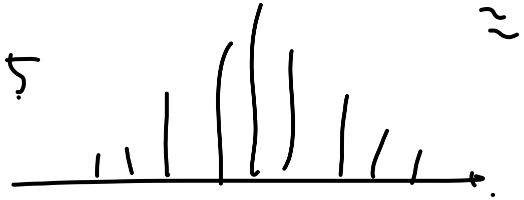
$n(1-p) \approx 0$

≥ 5

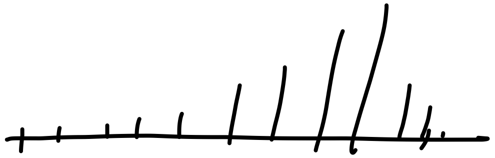
$p \approx 0$



$p \approx 0.5$



$p \approx 1$



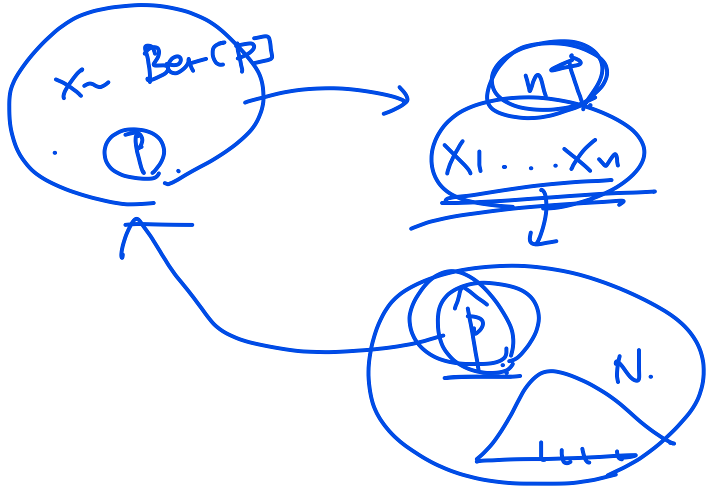
주요 통계량의 표본분포

- **표본비율 $\hat{p}$의 분포**
  - 모성공비율이 p 인 베르누이 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \dots, X_n$을 추출하였으며, **표본의 크기 $\boldsymbol{n}$이 충분히 큰 경우** ($np \ge 5$ 이고 $n(1-p) \ge 5$),

$$\hat{p} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right) \;\rightarrow\; Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \sim N(0,1)$$ (중심극한정리)

$(X_1 \dots X_n \overset{iid}{\sim} Ber[p]$ & $n \uparrow)$

$$\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\circ}{\sim} N\left[p, \frac{p(1-p)}{n}\right] \text{ by CLT}$$



$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin[n, p]$$

$$\overset{\cdot}{\sim} N[\qquad]$$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 역사적으로 매년 NYSE 상장 주식 중 61%가 가격이 상승한다고 가정하자. NYSE의 종목 중 100개를 임의로 추출하였을 때, 100개의 표본 종목 중 어느 한 해 동안 주가가 오른 경우의 비율이 55 %에서 65 %사이일 확률은 얼마인가?

$X_1 \dots X_{100} \overset{iid}{\sim} Ber[0.61]$ & $\left.\begin{matrix} 100 \times 0.61 \\ 100 \times 0.39 \end{matrix}\right] \geq 5.$

$\hat{p} \sim N\left[0.61, \boxed{\frac{0.61 \times 0.39}{100}}\right]$ by CLT.

$(0.0488)^2$

$Z = \frac{\hat{p} - 0.61}{0.0488} \sim N[0, 1]$

$P[0.55 \leq \hat{p} \leq 0.65] = P\left[\frac{0.55 - 0.61}{0.0488} \leq Z \leq \frac{0.65 - 0.61}{0.0488}\right]$

$= P[-1.23 \leq Z \leq 0.82] = 0.6845.$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 어느 금융회사의 고객 중 첫 해에 이탈하는 고객의 비율은 3%라고 한다. 이 주장이 사실이라면, 이 금융회사 고객 중 400명을 무작위로 선택하여 조사하였을 때, 이 중 첫 해에 이탈하는 고객이 20명이 넘을 확률은 얼마인가?

$Y = \sum X_i \sim N\left[12, \frac{0.03\times 0.97}{400}\right]$

$\hat{p} \geq \frac{20}{400}$

$P\left[\sum X_i > 20\right]$

$X_1 \ldots X_{400} \overset{iid}{\sim} Ber[0.03]$

400×0.03
$400\times 0.97 \Big] \geq 5$

$\frac{\sum X_i}{n} = \hat{p} \sim N\left[0.03, \frac{0.03\times 0.97}{400}\right]$ by CLT

$Z = \frac{\hat{p} - 0.03}{\sqrt{\frac{0.03\times 0.97}{400}}} \sim N[0, 1]$

$P[\hat{p} > 0.05] = P\left[\frac{\hat{p} - 0.03}{\sqrt{\frac{0.03\times 0.97}{400}}} > \frac{0.05 - 0.03}{\sqrt{\frac{0.03\times 0.97}{400}}}\right] = P[Z > 2.3448]$

$= 0.0095$

주요 통계량의 표본분포

- **표본분산 S^2의 분포**
  - 모평균이 μ이고 모분산이 σ^2인 **정규** 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 추출한 경우

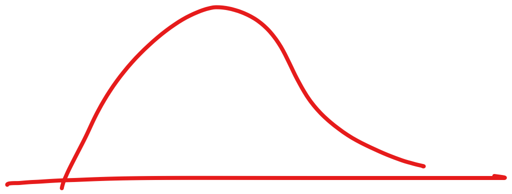
$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

r.v.

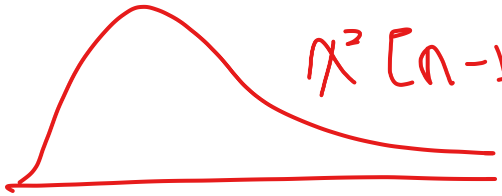
$X_1 \ldots X_n$

$$\frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

S^2



S^2



$\chi^2[n-1]$

$$\chi = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

$$X_1 \ldots X_n \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$$

$$U = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2[n-1]$$

σ^2

S^2

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 모분포인 $Normal[10, 3^2]$ 로부터 20개의 확률표본 $X_1, \dots, X_{20}$을 추출하였다고 할 때, 표본분산 S^2 이 12.799보다 클 확률을 구하여라.

$X_1 \dots X_{20} \overset{iid}{\sim} N[10, 3^2]$

$U = \dfrac{19 \cdot S^2}{3^2} \sim \chi^2[19]$

$P[S^2 > 12.799]$

$= P\left[\dfrac{19}{9} S^2 > \dfrac{19}{9} \cdot 12.799\right]$ 27.02

$= P[U > 27.02] = 0.104.$

$U \sim \chi^2[19]$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 2000년~2020년 사이의 어느 회사 고수익률 펀드의 월수익률에 대한 표준편차는 4%였으며, 최근까지 이 수준은 잘 유지되고 있다고 주장하고 있다. 이 주장이 사실이라고 할 때, 최근 2년 간 월수익률에 대한 표준편차가 4.4%를 넘길 확률은 얼마인가? 단, 월 수익률은 독립적이며, 정규분포를 따르는 것으로 가정할 것.

$$X_1 \ldots X_{24} \overset{iid}{\sim} N[\mu, 4^2]$$

$$P[S^2 > 4.4^2] = P\left[\frac{23}{16} S^2 > \frac{23}{16} 4.4^2\right]$$

$$= P[U > 27.83] = 0.2223$$

$$U \sim \chi^2[23]$$

$$U = \frac{23 \cdot S^2}{4^2} \sim \chi^2[23]$$

주요 통계량의 표본분포

- **표본평균 $\bar{X}$와 표본분산 S^2의 분포**
  - 모평균이 μ이고 모분산이 σ^2인 **정규** 모집단으로부터 크기가 n인 확률표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$을 추출한 경우

Normal μ σ

iid $X_1 \ldots X_n$

$\bar{X}$

$\bar{X} \sim N\left[\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right]$

$$\star \quad \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

r.v.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N[0,1]$$

unknown

$x_1 \ldots x_n$ $\quad \bar{x}$

$S = \sqrt{S^2}$

주요 통계량의 표본분포

- 예제
  - 모분포인 $Normal[3, \cancel{2^2}]$ σ^2 로부터 9개의 확률표본 $X_1, \ldots, X_9$을 추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$, 표본표준편차를 S라고 할 때, $Y\left(=\frac{\bar{X}-3}{S}\right)$가 0.5보다 클 확률을 구하여라.

$$X_1 \ldots X_9 \overset{iid}{\sim} N[3, \sigma^2]$$

$\bar{X}$ S

$$T = \frac{\bar{X}-3}{S/\sqrt{9}} \sim t[8]$$

$$P\left[\frac{\bar{X}-3}{S} > 0.5\right] = P\left[\underbrace{3\left(\frac{\bar{X}-3}{S}\right)}_{=T} > 1.5\right] = 0.086$$