주요 연속형 확률분포함수

- **카이제곱(χ^2) 분포 (chi-squared distribution)**
  - **카이제곱 확률변수와 확률밀도함수**
    - $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$가 k개의 서로 독립인 표준정규 확률변수 ($Z_i \sim^{iid} N(0,1),\ i = 1,2,\ldots,k$)일 때,
      ► 확률변수 $X = {Z_1}^2 + {Z_2}^2 + \cdots + {Z_k}^2$는 자유도가 k인 카이제곱 분포를 따르는 것으로 정의.

    - 자유도 k인 카이제곱분포의 확률밀도함수는 다음과 같고, 이 경우, $X \sim \chi^2(k)$라고 함.

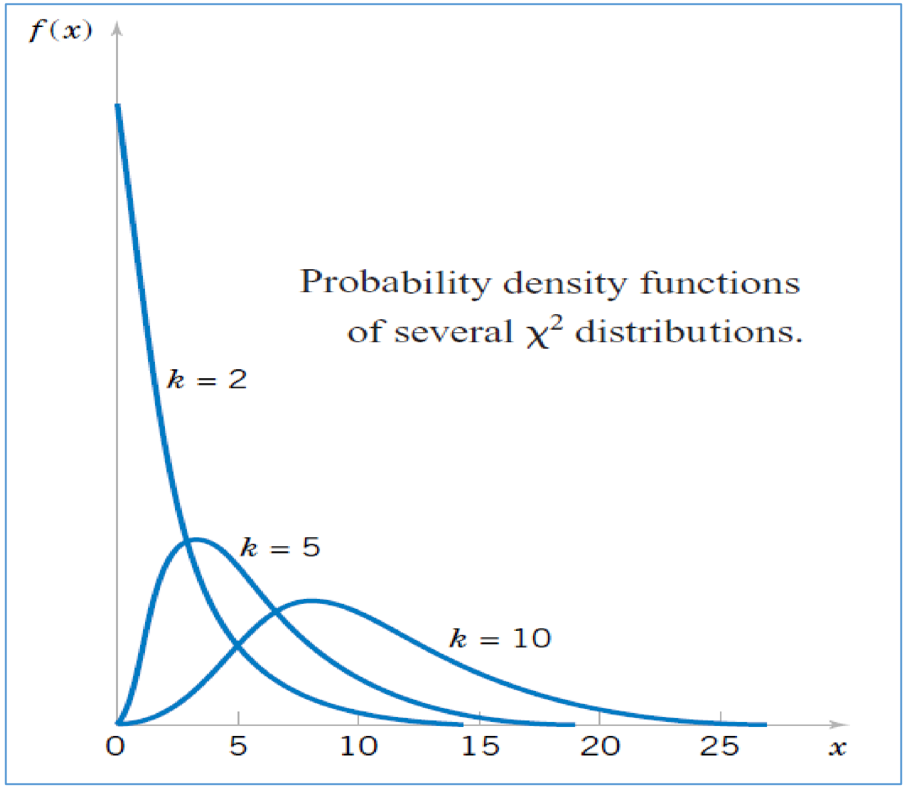
$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad 0 \le x < \infty$$

  - **카이제곱 분포의 평균과 분산**

    $X \sim \chi^2(k)$인 경우,
    - $E[X] = k$
    - $V[X] = 2k$

주요 연속형 확률분포함수

- **카이제곱 분포 확률밀도함수 개형**
  - 오른쪽으로 치우친 비대칭 구조이지만 자유도 k가 커질수록 정규분포와 비슷하게 평균에 대칭인 모양이 됨.



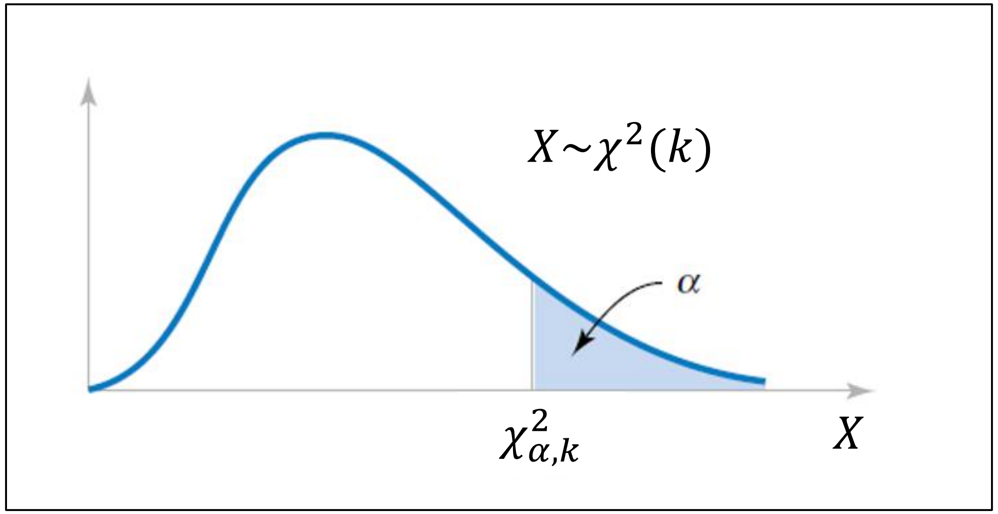
주요 연속형 확률분포함수

- **카이제곱 분포의 가법성**
  - 확률변수 U는 자유도가 k_1인 카이제곱 분포를,
    확률변수 V는 자유도가 k_2인 카이제곱 분포를 따르며,
    U와 V는 서로 독립이라고 할 때,

  ► $U + V$ 는 자유도가 $k_1 + k_2$인 카이제곱 분포를 따른다.

주요 연속형 확률분포함수

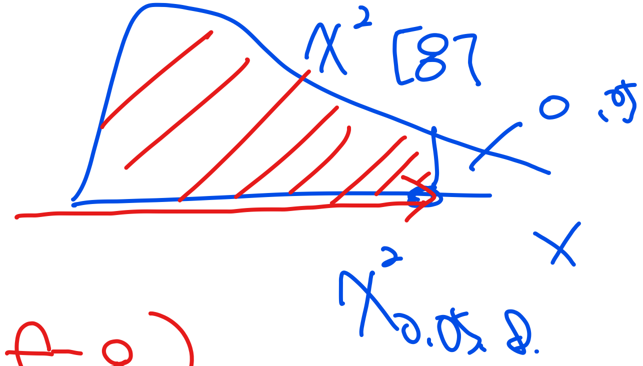
- **카이제곱 확률변수의 $(\mathbf{1}-\boldsymbol{\alpha})$분위수 : $\boldsymbol{\chi^2_{\alpha,k}}$**
    - $X \sim \chi^2(k)$일 때, $P[X > c] = \alpha$를 만족하는 X의 $(1-\alpha)$분위수 c를 $\chi^2_{\alpha,k}$으로 표기함.



주요 연속형 확률분포함수

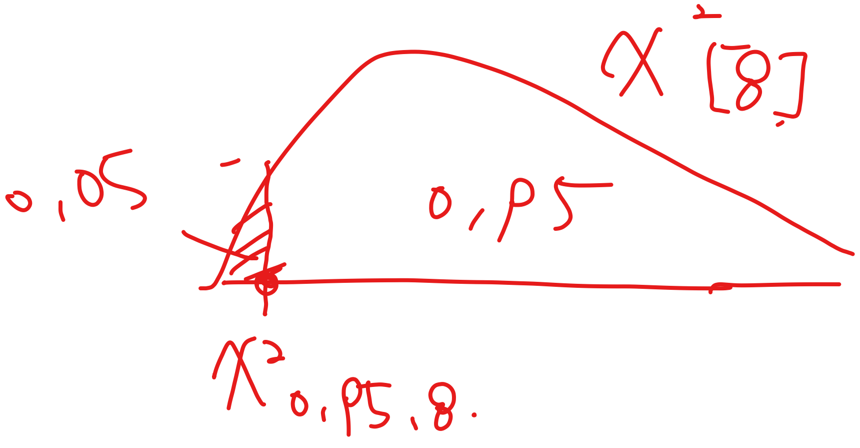
- 예제
  - 다음의 $\chi^2_{\alpha,k}$를 구하여라.
    - $\chi^2_{0.05,8}$
    - $\chi^2_{0.95,8}$

$X \sim \chi^2[8]$

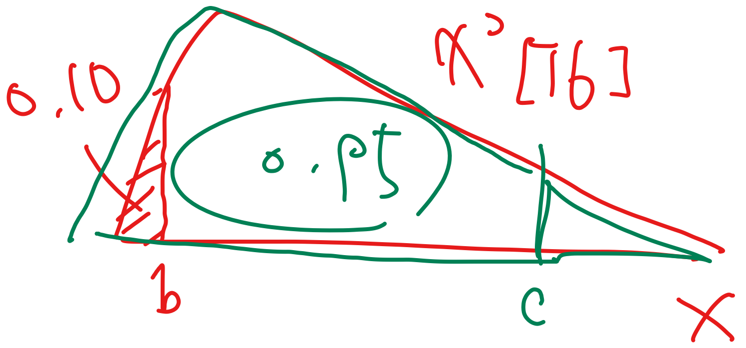


qchisq (0.95, df=8)

0.05



  - $X \sim \chi^2(16)$이라고 할 때, 다음을 만족하는 b, c를 구하여라..
    - $P(X < b) = 0.10.$
    - $P(X < c) = 0.95.$



$b = \chi^2_{0.9,16}$

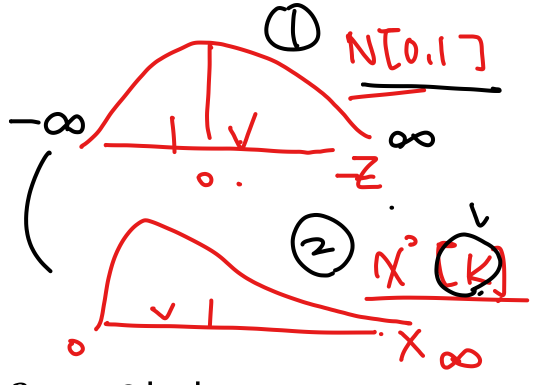
qchisq (0.10, df = 16)

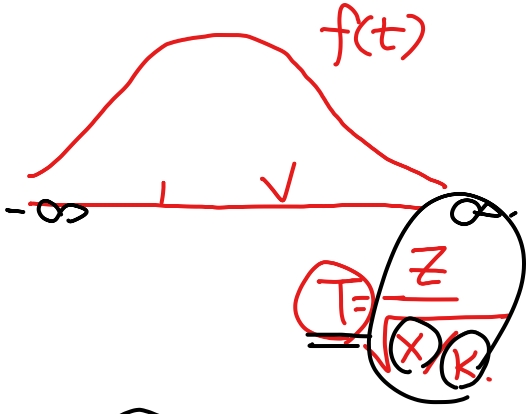
$c = \chi^2_{0.05,16}$ qchisq(0.95, 16)

주요 연속형 확률분포함수

```
> qchisq(0.95, df=8 )
[1] 15.50731
> qchisq(0.05, df=8 )
[1] 2.732637
>
> qchisq(0.10, df=16)
[1] 9.312236
> qchisq(0.95, df=16)
[1] 26.29623
```

주요 연속형 확률분포함수





$T \sim t[k]$

- t 분포 (t-distribution)
  - **t 확률변수와 확률밀도함수**
    - Z가 표준정규 확률변수 $Z \sim N(0,1)$이며,
      X가 자유도가 k인 카이제곱 확률변수 $X \sim \chi^2(k)$ 이며,
      Z와 X는 서로 독립이라고 할 때,
      - ► 확률변수 $T = \dfrac{Z}{\sqrt{X/k}}$는 자유도가 k인 t 분포를 따르는 것으로 정의.
    - 자유도가 k인 t 분포의 확률밀도함수는 다음과 같고, 이 경우 $T \sim t\,(k)$라고 함.

k

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{\left(1+\frac{t^2}{k}\right)^{\frac{k+1}{2}}}, \quad -\infty < t < \infty$$

  - **t 분포의 평균과 분산**
    $X \sim t\,(k)$인 경우
    - $E[X] = 0$
    - $V[X] = \dfrac{k}{k-2}$ (단, $k > 2$)

$> 1.$

$k \to \infty$

$V[X] \to 1.$

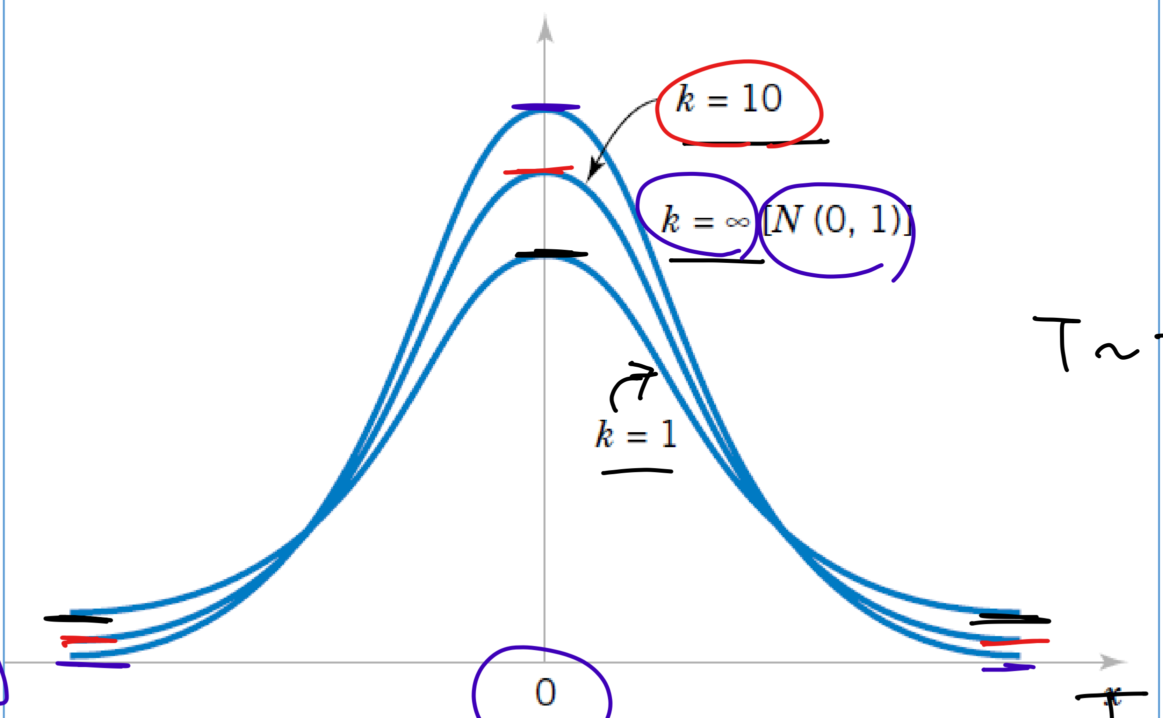
주요 연속형 확률분포함수

- **t 분포 확률밀도함수 개형**
  - 표준정규분포처럼 0을 중심으로 대칭이지만 표준정규분포보다 꼬리가 더 두꺼움. 자유도 k 가 커질수록 표준정규분포의 밀도함수에 근사하게 됨.

$k \to \infty$

$t[k] \quad N[0,1]$

$t[k] \approx N[0,1]$

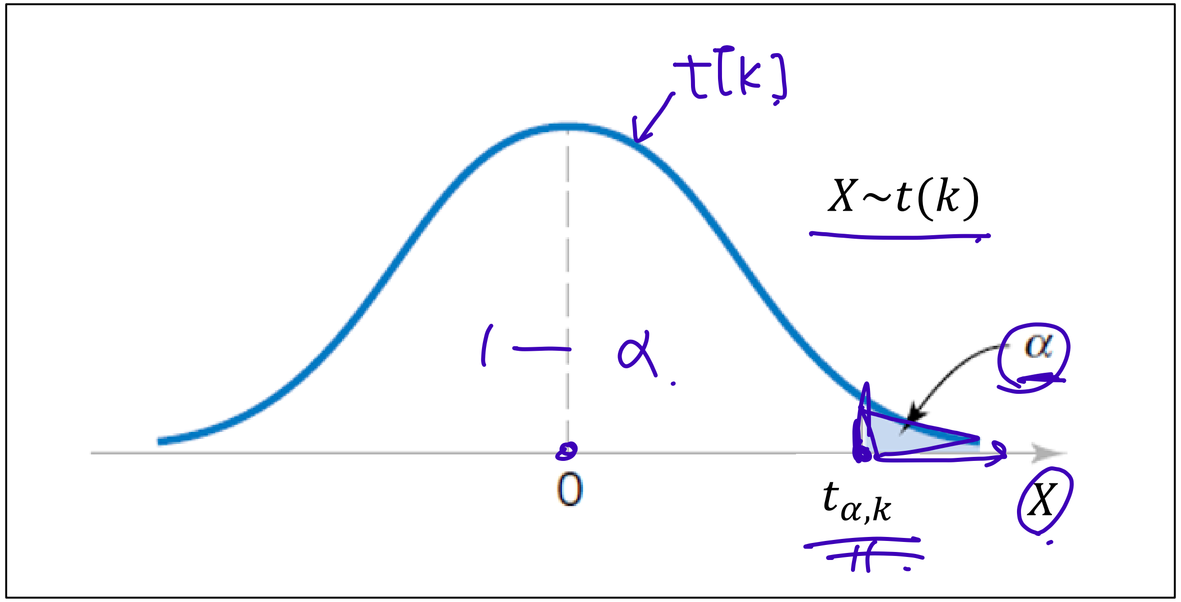


Probability density functions of several t distributions.

$T \sim t[k]$

주요 연속형 확률분포함수

- **t 확률변수의 $(1-\alpha)$분위수 : $t_{\alpha,k}$**
  - $X \sim t\ (k)$일 때, $P[X > c] = \alpha$를 만족하는 X의 $(1-\alpha)$분위수 c를 $t_{\alpha,k}$으로 표기함.



$t_{\alpha,k}$

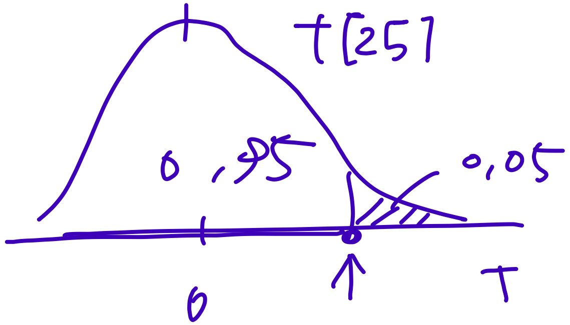
c

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 다음의 $t_{\alpha,k}$를 구하여라.
    - $t_{0.05,25}$
    - $t_{0.025,15}$
    - $t_{0.95,10}$ $= -t_{0.05,10}$
    - $t_{0.975,8}$ $= -2.306$

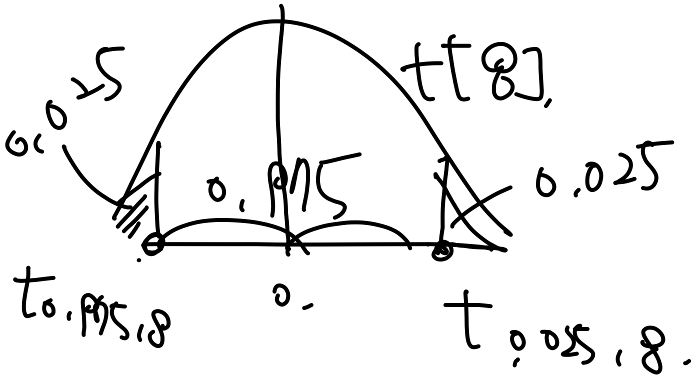
$t_{0.05,10}$

qt(0.95, df=25)

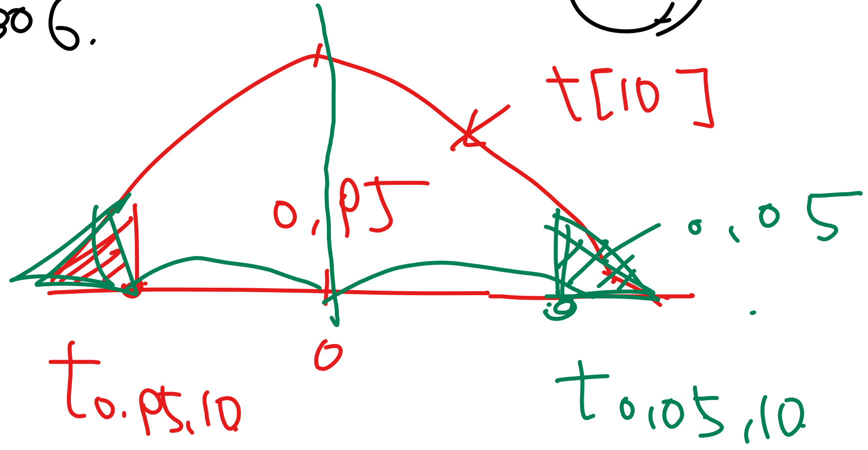


$t_{0.025,8} = 2.306$

$t_{1-\alpha,k} = -t_{\alpha,k}$



qt(0.025, 8)



||

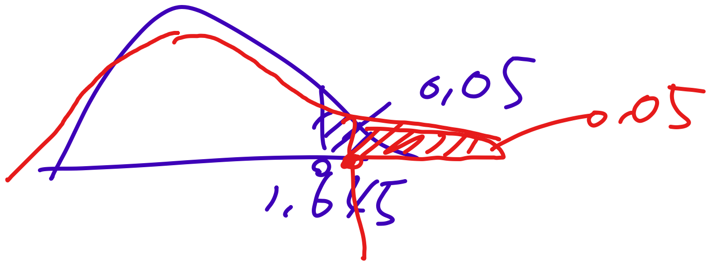
qt(0.05, 10)

주요 연속형 확률분포함수

$t_{0.05}(25) = 1.708$

$Z_{0.05} = 1.645$

```
> qt(0.95, df=25 )
[1] 1.708141
> qt(0.975, df=15 )
[1] 2.13145
> qt(0.05, df=10)
[1] -1.812461
> qt(0.025, df=8)
[1] -2.306004
```



$X \sim F[3, 5]$

$U \sim \chi^2[3]$

$V \sim \chi^2[5]$

독립

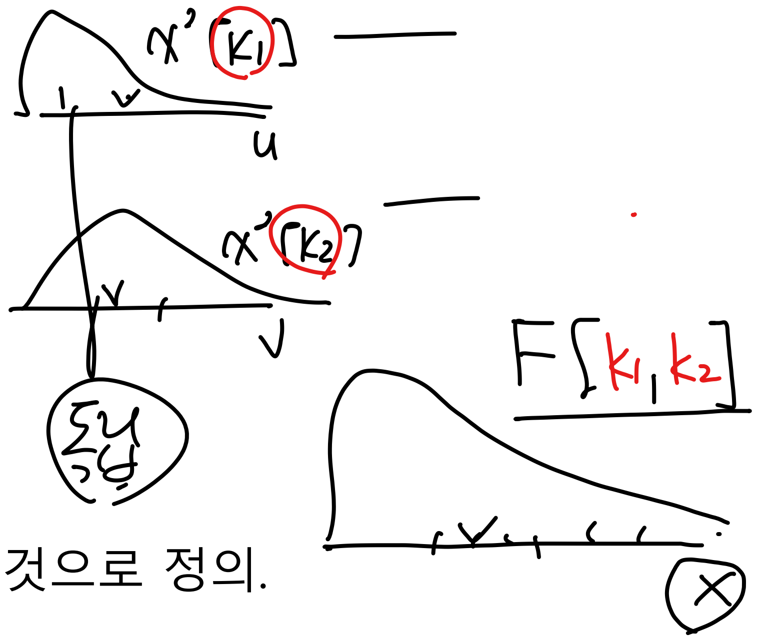
$X = \frac{U/3}{V/5}$

$\frac{1}{X} \sim F[5, 3]$

$\frac{1}{X} = \frac{V/5}{U/3}$

주요 연속형 확률분포함수

$X = \frac{U/k_1}{V/k_2}$



- F 분포 (F distribution)
  - F 확률변수와 확률밀도함수
    - U가 자유도가 k_1인 카이제곱 확률변수($U \sim \chi^2(k_1)$)이며,
      V가 자유도가 k_2 인 카이제곱 확률변수($V \sim \chi^2(k_2)$) 이고,
      U와 V는 서로 독립이라고 할 때,

      ► 확률변수 $X = \frac{U/k_1}{V/k_2}$ 는 자유도 k_1, k_2 인 F 분포를 따르는 것으로 정의.

      분자 분모

    - 자유도 k_1, k_2 인 F 분포의 확률밀도함수는 다음과 같고, 이 경우, $X \sim F(k_1, k_2)$ 라고 함.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_2}{2}\right)}\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1}\left(1+\frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{1}{2}(k_1+k_2)}, \quad 0 \le x < \infty$$

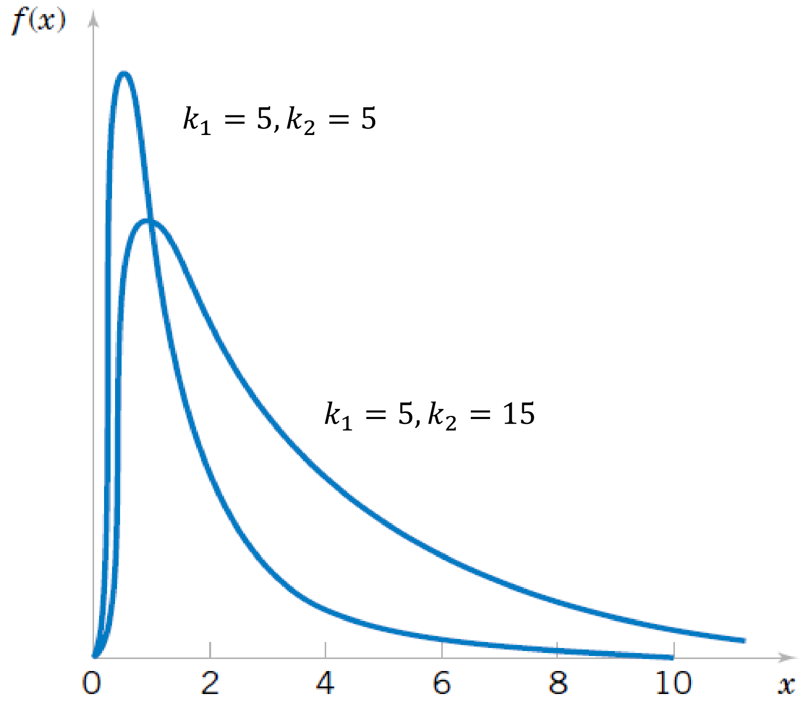
k_1, k_2

주요 연속형 확률분포함수

- **F분포 확률밀도함수 개형**
  - 오른쪽으로 치우친 비대칭 구조임.

- **F분포의 평균과 분산**

  $X \sim F(k_1, k_2)$ 인 경우
  - $E[X] = \frac{k_2}{k_2 - 2}$
  - $V[X] = \frac{2k_2^2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1(k_2 - 2)^2(k_2 - 4)}$

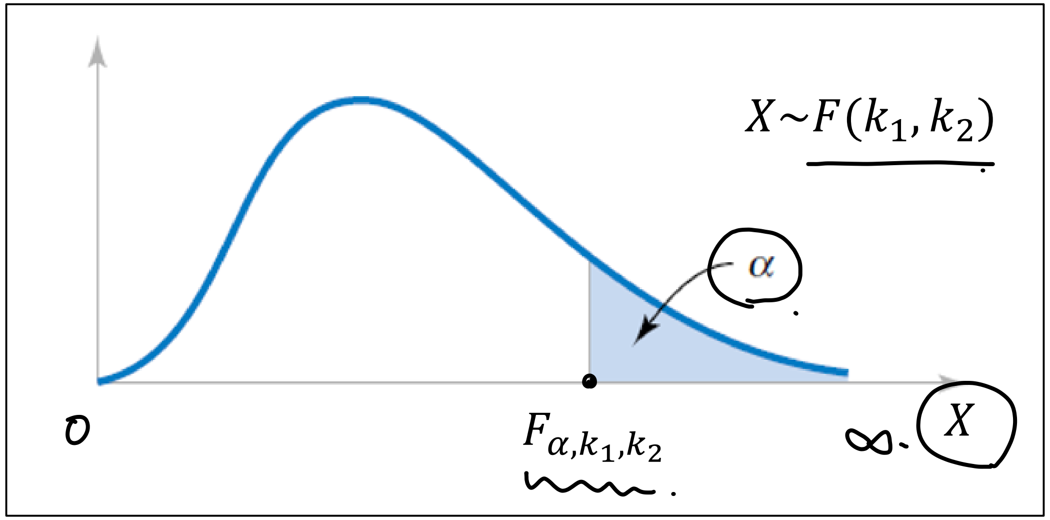


Probability density functions of two *F* distributions.

주요 연속형 확률분포함수

- **F 확률변수의 $(1-\alpha)$분위수 : F_{α,k_1,k_2}**
  - $X \sim F(k_1, k_2)$ 일 때, $P[X > c] = \alpha$를 만족하는 X의 $(1-\alpha)$분위수 c를 F_{α,k_1,k_2}으로 표기한다.

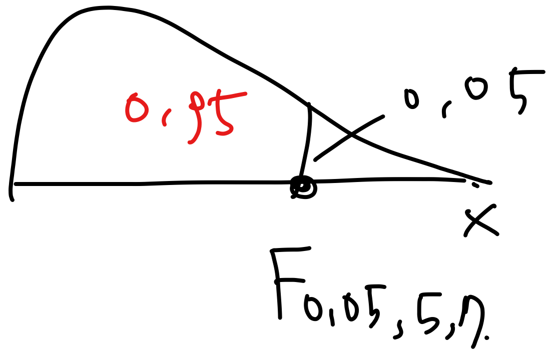
F_{α,k_1,k_2}



주요 연속형 확률분포함수

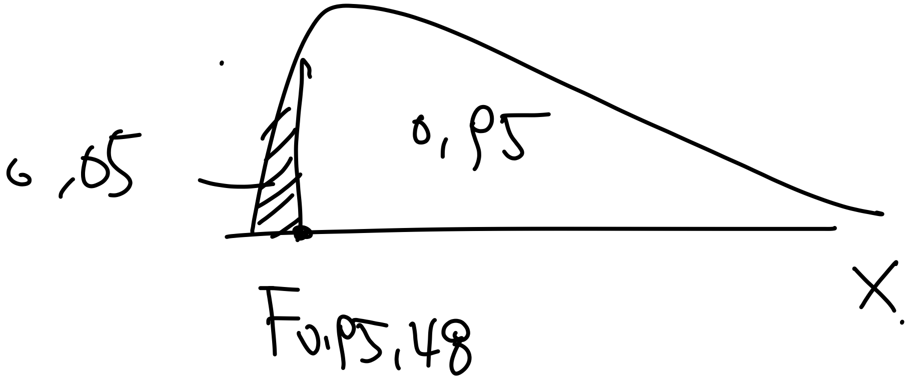
- 예제
  - 다음의 F_{α,k_1,k_2}를 구하여라.
    - $F_{0.05,5,7}$
    - $F_{0.95,4,8}$

$X \sim F[5, 7]$



qf(0.95, df1= 5, df2=7)

$X \sim F[4, 8]$



qf(0.05, df1=4, df2= 8)

주요 연속형 확률분포함수

```
> qf(0.95, df1=5, df2=7 )
[1] 3.971523
> qf(0.05, df1=4, df2=8 )
[1] 0.1655343
```

$N[0,1] \rightarrow \begin{cases} \chi^2[k] \\ t[k] \\ F[k_1, k_2] \end{cases}$

분산.

평균

분산비교.

Normal

$\mu \quad \sigma^2$

$x_1 \; . \; . \; . \; . \; x_n$

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

S^2

$P[\bar{x}-1 < \mu < \bar{x}+1] = 0.99$

$\bar{x} = 10$

주요 연속형 확률분포함수

- **균일분포 (uniform distribution)**
  - 균일확률변수와 확률밀도함수
    - 확률변수 X가 실구간 (a, b)에서 균일하게 분포되어 있을 때, 그 확률밀도함수와 분포함수는 아래와 같이 주어짐.

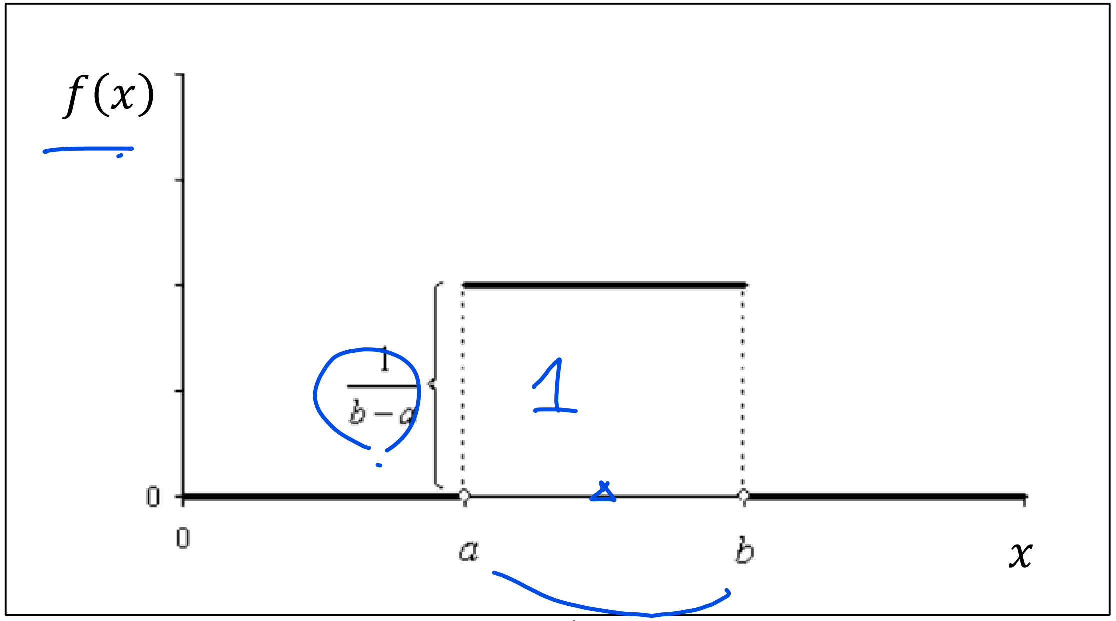
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \text{ 인경우} \\ 0, & \text{그외의 경우} \end{cases}$$

    - 이 경우 $X \sim U(a, b)$라고 함.

Unif

주요 연속형 확률분포함수

- **균일분포의 확률밀도함수 개형**



- 균일분포의 특성치

  $X \sim U(a, b)$인 경우

  - $E[X] = \frac{a+b}{2}$
  - $V[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$

$$E[X] = \int_a^b x f(x)\, dx = \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}$$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

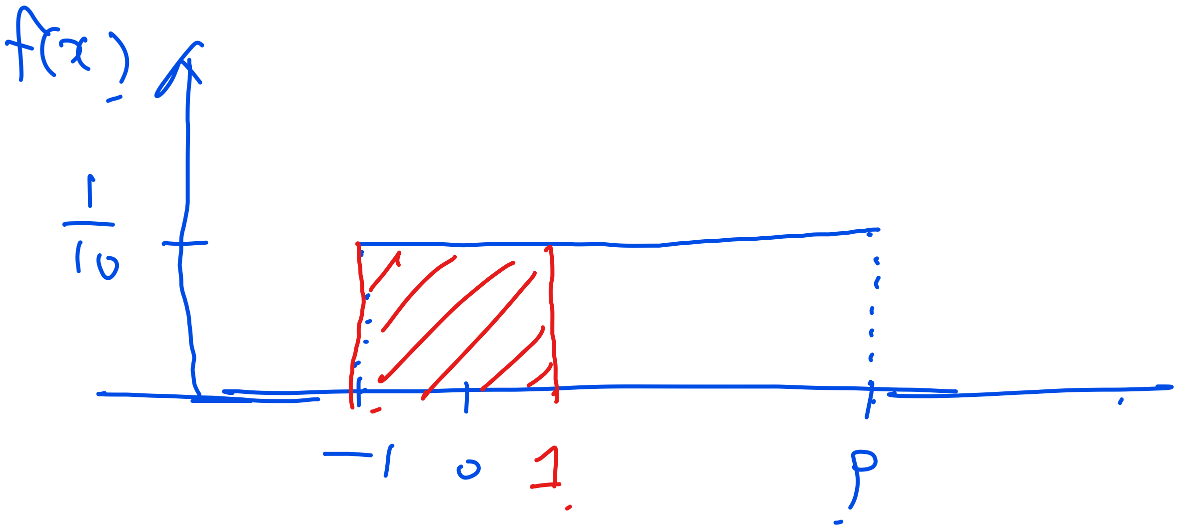
$$\int_a^b x^2 f(x)\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a \leq x \leq b.$$

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 기업의 주식의 수익률이 하루 동안 -1%~9%까지 변할 수 있고 이 수익률의 변화는 연속형 균일분포를 따른다고 한다. 하루동안 이 주식의 수익률의 변화가 -1%~1% 사이에 있을 확률은 얼마인가?

$$X \sim \mathrm{Unif}[-1, 9]$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & -1 \le x \le 9 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P[-1 < X < 1] = 2 \times \frac{1}{10} = 0.2$$