DFMBA 경영통계 – 3rd assignment

20224071

오태건

1. 어느 신용카드 회사는 월말 미결제 잔금 때문에 이자를 지불해야 하는 신용카드 보유자의 비율을 추정하고자 한다. 특정 달에 고객 중 120명을 무작위로 선택하여 조사한 결과 이 중 월말 미결제 잔금이 남아있는 경우는 78명이었다고 한다. 이를 이용하여 구간추정을 한다면, 신뢰수준 98%에서 요구되는 오차한계가 얼마인지 구하여라. (10점)

$X_1, \cdots X_{120}$ iid $Ber[p]$ & $n\hat{p} \ge 5$, $n(1-\hat{p}) \ge 5$

p에 관한 C.I. $1-\alpha = 0.98$

$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ $\hat{p} = \frac{78}{120} = 0.65$

$Z_{0.01}\sqrt{\frac{0.65(0.35)}{120}} = 0.1013$

2. 코스피200지수에 편입되어 있는 상장사 중 7개의 회사를 임의로 추출하였다. 추출된 7개 회사의 순이익의 평균은 17%, 표준편차는 8.5%였다고 하자. 코스피200지수에 편입된 상장사 전체에 대해 순이익은 정규분포를 따른다고 할 때, 전체 상장사의 순이익의 평균에 대한 95%의 신뢰구간을 구하고 이를 해석하여라. (10점)

$X_1 \cdots X_7 \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$

μ에 관한 C.I. 0.95

$\hat{x} \pm t_{\alpha/2, n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}$

$0.17 \pm t_{0.025,6}\frac{0.085}{\sqrt{7}}$

$\rightarrow (0.0914, 0.2486)$

모평균 신뢰수준 95%의 신뢰구간은 9.1% ~ 24.9%인데,
구간이 너무 넓어 표본을 늘릴 필요가 있다

3. 현재 주식시장에서 거래되고 있는 소형주에 대한 3월만기 옵션가격의 평균을 알아보고자 한다. 이를 위해 49개의 옵션을 무작위로 선택하여 가격을 조사한 결과 그 평균은 29.5, 표준편차는 6.39였다고 한다. 소형주 전체에 대한 평균 옵션가격의 99% 신뢰구간을 구하고 이를 해석하여라. (10점)

$X_1 \cdots X_{49} \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$

μ C.I. 0.99

$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

$29.5 \pm Z_{0.005}\frac{6.39}{\sqrt{49}}$

$\rightarrow (27.15, 31.85)$

모평균 신뢰수준 99%의 신뢰구간은 27.15 ~ 31.85 이다

4. ‘assign3data.csv’ 파일에는 무작위로 추출한 40개 회사채에 대한 만기년수와 수익률이 기록되어 있다. 만기년수와 수익률의 모분포가 정규분포라고 할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 만기년수의 모평균에 대한 95% 신뢰구간을 구하여라. (10점)

$X_1 \cdots X_{40} \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$

Mean 대한 C.I 0.95

$\bar{x} \pm t_{\alpha/2, n-1} \frac{S}{\sqrt{n}}$

$\bar{x} \pm t_{0.025, 39} \frac{S}{\sqrt{40}}$

$9.71 \pm t_{0.025, 39} \frac{7.88}{\sqrt{40}}$

$\rightarrow (7.19, 12.23)$

(2) 회사채 수익률의 모표준편차에 대한 99% 신뢰구간을 구하여라. (10점)

$X_1 \cdots X_{40} \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$

σ^2 0.99 C.I

$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right)$

$\left(\frac{39(1.6)^2}{\chi^2_{0.005, 39}}, \frac{39(1.6)^2}{\chi^2_{0.995, 39}} \right)$

$\sigma^2 \rightarrow (1.525, 4.993)$

$\sigma \rightarrow (1.23, 2.23)$

5. $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 모평균이 μ 이고 모분산이 σ^2인 어느 모집단으로부터의 확률 표본이라고 하자. 다음 중 중심극한의 정리(Central Limit Theorem)가 적용된 사실은 무엇인가? (3) (5점)

① 표본 수 n 이 많아질 수록, 표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$는 정규 분포에 근사한다.

② 표본 수 n 이 많아질 수록, 표본 평균 $\bar{X}$의 분산은 작아진다.

③ 표본 수 n 이 많아질 수록, 표본 평균 $\bar{X}$는 정규 분포에 근사한다.

④ 표본 수 n 에 관계없이, 표본 평균 $\bar{X}$의 기대값은 모평균 μ가 된다.

6. $N[\mu, \sigma^2]$으로부터의 i.i.d. 표본 $X_1, X_2, \ldots, X_n$의 표본평균이 $\bar{X}$, 표본분산이 S^2이라고 하자. 표본의 개수 n 이 12인 경우에 대하여, 아래 물음에 답하여라. (15점)

(1) $P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/12}} < c\right) = 0.99$를 만족하는 c 값을 구하여라.

2.33

$P(\bar{X} < x) = 0.99$

$P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S^2/12}} < \frac{x-\mu}{\sqrt{S^2/12}}\right) = 0.99$

$C = Z_{0.99}$

(2) $P\left(\frac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/12} < c\right) = 0.99$를 만족하는 c 값을 구하여라.

$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N[0,1]$

6.63

$\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2[1]$

(3) $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} > c\right) = 0.95$를 만족하는 c 값을 구하여라.

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2[n-1]$

$C = \frac{\chi^2_{0.95,11}}{11}$

$P\left(\frac{11 S^2}{\sigma^2} > x\right) = 0.95$

$= 1.789$

7. 어느 은행 고객 중 62명을 랜덤하게 뽑아 예금액을 조사한 뒤 이를 이용하여 전체 예금액에 대한 모평균에 대한 신뢰구간을 신뢰수준 95%를 적용하여 구하였더니 (112.62 129.38) 였다고 하자. 다음 중 올바른 설명은 T, 잘못된 설명은 F로 답하여라. (20점)

(1) 모평균이 (112.62 129.38)의 범위에 속하는지 여부는 정확히 알 수 없다. ___T___

(2) 신뢰수준 95%의 의미는 62개의 표본자료 중 약 95%가 (112.62 129.38)의 범위에 속함을 말한다. ___F___

(3) 동일한 자료를 이용하여 신뢰수준 99%로 신뢰구간을 구해 보면 구간의 크기는 더 커질 것이다. ___T___

(4) 다시 62명의 고객을 랜덤으로 뽑았을 때, 새로 계산된 표본 평균은 (112.62 129.38)의 범위에 속할 것이다. ___F___

8. 모집단의 분포 $Normal[\mu, \sigma^2]$에서 추출된 확률표본 $X_1, \ldots, X_n$의 평균 $\bar{X}$을 이용하여 μ에 관한 95%의 신뢰구간을 $(\bar{X} - a,\ \bar{X} + a)$의 형태로 표현하였다. 다음 중 올바른 설명은 T, 잘못된 설명은 F로 답하여라. 단, 모분산 σ^2은 알려지지 않았음. (10점)

(1) 다른 조건은 모두 동일할 때 표본의 수 n이 증가하면 신뢰구간의 길이는 짧아진다. T

(2) 표본을 n개 추출해서 신뢰구간 추정치를 구하는 과정을 반복하는 경우, $\bar{X}$는 랜덤하게 바뀌지만 a는 변하지 않는다. T