Ch5. 확률표본과 표본분포 Appendix

- **$\bar{X}$의 성질 : $E[\bar{X}] = \mu$, $V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$**

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터의 확률표본이라고 가정함.

  → 각 X_i에 대해 $E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$임.

  → $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 서로 독립임.

  $$E[\bar{X}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \left(\frac{1}{n}\right) E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right) n\mu = \mu$$

  $$V[\bar{X}] = V\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \left(\frac{1}{n^2}\right) V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \left(\frac{1}{n^2}\right) n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- **S^2의 성질 : $E[S^2] = \sigma^2$**

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터의 확률표본이라고 가정함.

  → 각 X_i에 대해 $E[X_i] = \mu$, $V[X_i] = \sigma^2$임.

  → $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 서로 독립임.

  → $X_1, X_2, \ldots, X_n$에 대한 표본평균 $\bar{X}$는 $E[\bar{X}] = \mu$, $V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$를 만족함.

  $X_1, X_2, \ldots, X_n$에 대한 표본분산 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$의 기대값은 아래와 같이 도출됨.

  $$\begin{aligned}
  &E[S^2] \\
  &= E\left[\left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
  &= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
  &= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2\right] \\
  &= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(E\left[\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2\right] - E[n\bar{X}^2]\right) \\
  &= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E[{X_i}^2]\right) - n \cdot E[\bar{X}^2]\right) \leftarrow (a)
  \end{aligned}$$

(a)에서, $E[{X_i}^2]$ 과 $E[\bar{X}^2]$는 아래와 같이 표현될 수 있음.

① $E[{X_i}^2] = V[X_i] + E[X_i]^2 = \underline{\sigma^2 + \mu^2}$

② $E[\bar{X}^2] = V[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2 = \underline{\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2}$

$$
\begin{aligned}
&E[S^2] \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E[{X_i}^2] \right) - n \cdot E[\bar{X}^2] \right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot (n-1)\sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

- **S^2의 표본분포**

독립

$i=1 .. n$

$X_i \sim N[\mu, \sigma^2]$

iid

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 정규분포 $N[\mu, \sigma^2]$로부터의 확률 표본이라면, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2[n-1]$을 만족함.

1. $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \sim N[0,1]$, $i = 1,2,\ldots,n$이고 $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)$는 서로 독립임.

   $\rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2[n]$

2. $\bar{X} \left(= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \right)$의 표본분포 : $\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \sim N[0,1]$.

   $\rightarrow B = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2[1]$

$X_1 \ldots X_n$ iid $N[\mu, \sigma^2]$

$\bar{X} \sim N[\mu, \frac{\sigma^2}{n}]$

3. $A = B + C$, $\left(C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

$A = B + C$

$\sim \chi^2[n]$ $\quad \sim \chi^2[1]$

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)}{\sigma}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + n \cdot \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 \left(\because \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}) \right) = 0 \right)
\end{aligned}
$$

$N[\mu, \sigma^2]$

$X_1 \ldots X_n$

$\bar{X}$ — S^2 indep.

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$$

$$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$$

$$= C + B$$

4. 정규 모집단에서 추출된 확률표본의 표본평균 $\bar{X}\left(=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)$ 과 표본분산 $S^2\left(=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right)$ 은 서로 독립 (by Basu의 정리).

   독립

   → $B\left(=\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right)$와 $C\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$ 도 서로 독립임.

○ = △ + □

5. $A(=B+C)\sim\chi^2[n]$, $B\sim\chi^2[1]$ 이고, B와 C 는 서로 독립이므로, χ^2분포의 가법성에 의해 $C=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2[n-1]$ 임..

$A \sim \chi^2[n]$

$A = B + C$

독립

- **$\bar{X}$의 표본분포 (모집단이 정규이고 모분산 σ^2을 모르는 경우)**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 정규분포 $N[\mu, \sigma^2]$로부터의 확률표본이라면, $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$을 만족함.

$B \sim \chi^2[1]$

$\therefore C \sim \chi^2[n-1]$

$X_1 \ldots X_n \overset{iid}{\sim} N[\mu, \sigma^2]$

$\bar{X} \sim N[\mu, \frac{\sigma^2}{n}]$

$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2[n-1]$

독립

1. $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ 의 표본분포 $A=\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\sim N[0,1]$

2. $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ 의 표본분포 $B=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2[n-1]$

3. $\bar{X}$ 와 S^2 은 서로 독립이므로 (by Basu의 정리), $A=\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ 와 $B=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 도 서로 독립임.

   → t-분포의 정의에 의해, $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$가 됨.

$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim ?$

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{B}{d.f.(B)}}} = \frac{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{\frac{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)}{(n-1)}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$$

$A \sim N[0,1]$

$B \sim \chi^2[n-1]$

A & B indep

$$T = \frac{A}{\sqrt{B/n-1}} \sim t[n-1]$$