Ch5. 확률표본과 표본분포 Appendix

- **$\bar{X}$의 성질 : $E[\bar{X}] = \mu,\ V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$은 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터의 확률표본이라고 가정함.

→ 각 X_i에 대해 $E[X_i] = \mu,\ V[X_i] = \sigma^2$임.

→ $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 서로 독립임.

$$E[\bar{X}] = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \left(\frac{1}{n}\right) E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \left(\frac{1}{n}\right) n\mu = \mu$$

$$V[\bar{X}] = V\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \left(\frac{1}{n^2}\right) V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \left(\frac{1}{n^2}\right) \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \left(\frac{1}{n^2}\right) n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

- **S^2의 성질 : $E[S^2] = \sigma^2$**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$은 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터의 확률표본이라고 가정함.

iid

→ 각 X_i에 대해 $E[X_i] = \mu,\ V[X_i] = \sigma^2$임. ✓

→ $X_1, X_2, \ldots, X_n$은 서로 독립임.

$\bar{X}$의 성질. → $X_1, X_2, \ldots, X_n$에 대한 표본평균 $\bar{X}$는 $E[\bar{X}] = \mu,\ V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$를 만족함. ✓

$X_1, X_2, \ldots, X_n$에 대한 표본분산 $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$의 기대값은 아래와 같이 도출됨.

$$
\begin{aligned}
& E[S^2] \\
&= E\left[\left(\frac{1}{n-1}\right) \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot E\left[\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 - n\bar{X}^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(E\left[\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2\right] - E[n\bar{X}^2]\right) \\
&= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E[{X_i}^2]\right) - n \cdot E[\bar{X}^2]\right) \leftarrow (a)
\end{aligned}
$$

$$E[\bigcirc^2] = V[\bigcirc] + E[\bigcirc]^2$$

(a)에서, $E[X_i{}^2]$ 과 $E[\bar{X}^2]$는 아래와 같이 표현될 수 있음.

① $E[X_i{}^2] = V[X_i] + E[X_i]^2 = \sigma^2 + \mu^2$

② $E[\bar{X}^2] = V[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$

$E[S^2]$

$= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i{}^2]\right) - n \cdot E[\bar{X}^2]\right)$

$= \left(\frac{1}{n-1}\right) \cdot \left(n(\sigma^2 + \mu^2) - n \cdot \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)\right)$

$= \left(\frac{1}{\cancel{n-1}}\right) \cdot \cancel{(n-}1)\sigma^2$

$= \sigma^2$

$E\left[\frac{1}{n-1} \Sigma(X_i - \bar{X})^2\right]$

$= \frac{1}{\cancel{n-1}} \underbrace{E\left[\Sigma(X_i - \bar{X})^2\right]}_{= \cancel{(n-1)}\sigma^2}$.

- **S^2의 표본분포**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 정규분포 $N[\mu, \sigma^2]$로부터의 확률 표본이라면, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2[n-1]$을 만족함.

1. $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \sim N[0,1]$, $i = 1,2,\ldots,n$ 이고 $\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)$는 서로 독립임.

   $\rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2[n]$

2. $\bar{X}\left(= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)$의 표본분포 : $\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \sim N[0,1]$.

   $\rightarrow B = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \sim \chi^2[1]$

3. $A = B + C$, $\left(C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$

   $A = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$

   $= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(X_i - \bar{X}) + (\bar{X} - \mu)}{\sigma}\right)^2$

   $= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)$

   $= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + n \cdot \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right)^2 \left(\because \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}\right)\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})\right) = 0\right)$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$

$= \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} + \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)^2$

$= C + B$

4. 정규 모집단에서 추출된 확률표본의 표본평균 $\bar{X}\left(=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right)$ 과 표본분산 $S^2\left(=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}\right)$ 은 서로 독립 (by Basu의 정리).

   → $B\left(=\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right)$와 $C\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)$ 도 서로 독립임.

5. $A(=B+C)\sim\chi^2[n]$, $B\sim\chi^2[1]$ 이고, B와 C 는 서로 독립이므로, χ^2분포의 가법성에 의해 $C = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2[n-1]$ 임..

- **$\bar{X}$의 표본분포 (모집단이 정규이고 모분산 σ^2을 모르는 경우)**

$X_1, X_2, \ldots, X_n$이 모평균이 μ이고, 모분산이 σ^2인 정규분포 $N[\mu,\sigma^2]$로부터의 확률표본이라면, $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$을 만족함.

1. $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ 의 표본분포: $A = \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\sim N[0,1]$

2. $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$ 의 표본분포 : $B = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2[n-1]$

3. $\bar{X}$ 와 S^2 은 서로 독립이므로 (by Basu의 정리), $A = \left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$ 와 $B = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 도 서로 독립임.

   → t-분포의 정의에 의해, $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$가 됨.

$$\frac{A}{\sqrt{\frac{B}{d.f.(B)}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right)}{(n-1)}}} = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t[n-1]$$