3. 확률변수와 확률분포함수 (2)

주요 이산형 확률분포함수

- **베르누이 분포(Bernoulli distribution)**
  - **베르누이 시행**

    매 시행 마다,

    1) '성공' 또는 '실패'의 오직 두 가지 가능한 결과만 가짐
    2) '성공'의 확률이 p로 일정함.

    의 조건을 만족하는 실험.

  - **베르누이 확률변수와 확률질량함수**
    - $S = \{success, failure\}$
    - $X = \begin{cases} 1 \ , & if\ success \\ 0 \ , & if\ failure \end{cases}$
    - $p(x) = P[X = x] = \begin{cases} p \ , & if\ x = 1 \\ 1 - p \ , & if\ x = 0 \end{cases}$
    - 이 경우, $X \sim Ber(p)$라고 함.

주요 이산형 확률분포함수

- **베르누이 분포의 평균과 분산**

$X \sim Ber(p)$인 경우,

- $E[X] = p$
- $V[X] = p(1-p)$
- $S[X] = \sqrt{p(1-p)}$

주요 이산형 확률분포함수

- **이항분포(binomial distribution)**
  - **이항확률변수와 확률질량함수**
    - 베르누이 시행을 독립적으로 n번 반복 시행할 때,

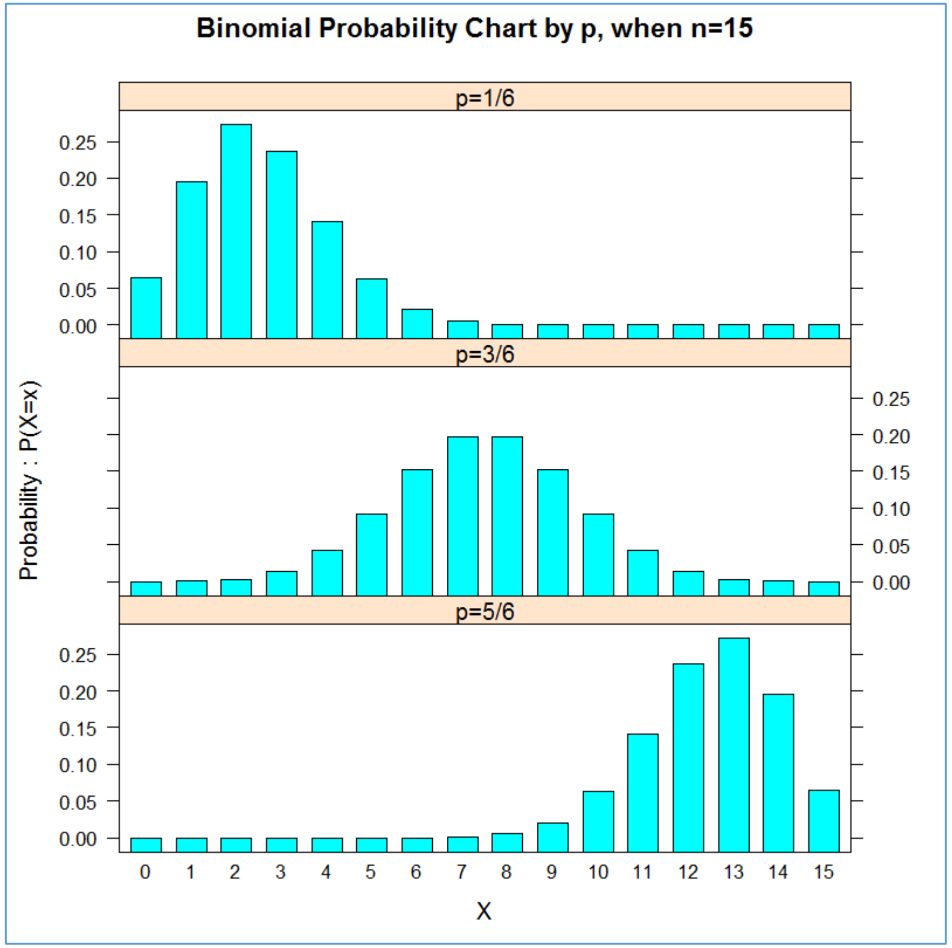
$$X = n\text{번 베르누이 시행에서 '성공'의 횟수}$$

로 정의하면,

- $p(x) = P[X = x] = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$, $x = 0,1,2,\dots,n$
- 이 경우, $X \sim Bin(n, p)$라고 함.

주요 이산형 확률분포함수

- 이항분포의 그래프 개형



주요 이산형 확률분포함수

- **이항분포의 평균과 분산**

$X \sim Bin(n, p)$인 경우,

- $E[X] = np$
- $V[X] = np(1-p)$
- $S[X] = \sqrt{np(1-p)}$

주요 이산형 확률분포함수

- 예제

주사위 6개를 던졌을 때, 각 주사위의 눈이 1이 나오는 경우가 어느정도 인지에 관심이 있다고 하자.

  - X를 6개 중 1이 나온 경우의 수로 정의했을 때, X가 가질 수 있는 값들은 무엇인가?
  - X의 확률분포함수는 무엇인가?
  - 6개의 주사위 중 1이 나오는 경우는 몇 개로 기대되는가?
  - 6개의 주사위의 눈이 모두 1이 나올 확률은 무엇인가?

```
> dbinom(6, size=6, prob=1/6)
[1] 2.143347e-05
```

주요 이산형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 기업의 연간 수익이 증가할 가능성은 63%로 알려져 있으며, 이 회사는 연간 수익이 증가하거나 떨어지거나 두 가지 상황만 존재한다고 가정하자. 또한 매년 연간 수익이 증가하는지 떨어지는지 여부는 독립적이라고 하자. 이 경우에,
    - 5년 동안 이 회사의 성장 횟수에 대한 확률분포는 무엇인가?
    - 5년 동안 이 회사가 적어도 두 번 성장할 확률을 구하여라.
    - 5년 동안 이 회사의 성장 횟수에 대한 기대값과 표준편차를 구하여라.

주요 이산형 확률분포함수

```
> 1-pbinom(1, size=5, prob=0.63)
[1] 0.9340295
>
> Ex <- 5*0.63
> Ex
[1] 3.15
>
> Sx <- sqrt( 5*0.63*(1-0.63) )
> Sx
[1] 1.079583
```

주요 이산형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 금융서비스를 제공하는 회사의 고객 중 30%는 서비스에 만족하지 못한다고 한다. 이 주장이 사실인 경우, 이 회사 고객 중 15명을 무작위로 선택하였을 때, 그 중 서비스에 만족하지 못한다고 고객의 수가 3명 이하일 확률은 얼마인가?

```
> pbinom(3, size=15, prob=0.3)
[1] 0.2968679
```

주요 이산형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 회사에서 생산 한 디스크는 서로 독립적으로 0.1의 확률로 결함이 있는 것으로 알려져 있다. 이 회사는 디스크를 4개씩 묶어서 패키지로 판매하고 있으며 한 패키지에 디스크가 하나라도 결함이 있을 경우 환불을 보증한다고 한다. 반품되는 패키지의 비율은 얼마인가?

```
> 1 - dbinom(0, size=4, prob=0.1)
[1] 0.3439
```

주요 연속형 확률분포함수

- **정규분포 (normal distribution)**
  - **정규확률변수와 확률밀도함수**
    - 확률변수 X 가 평균이 μ, 분산이 σ^2이고, 다음의 확률밀도함수를 가질 때, X는 정규분포를 따른다고 하며, 이 경우, $X \sim N\ (\mu, \sigma^2)$라고 함.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , -\infty < x < \infty$$

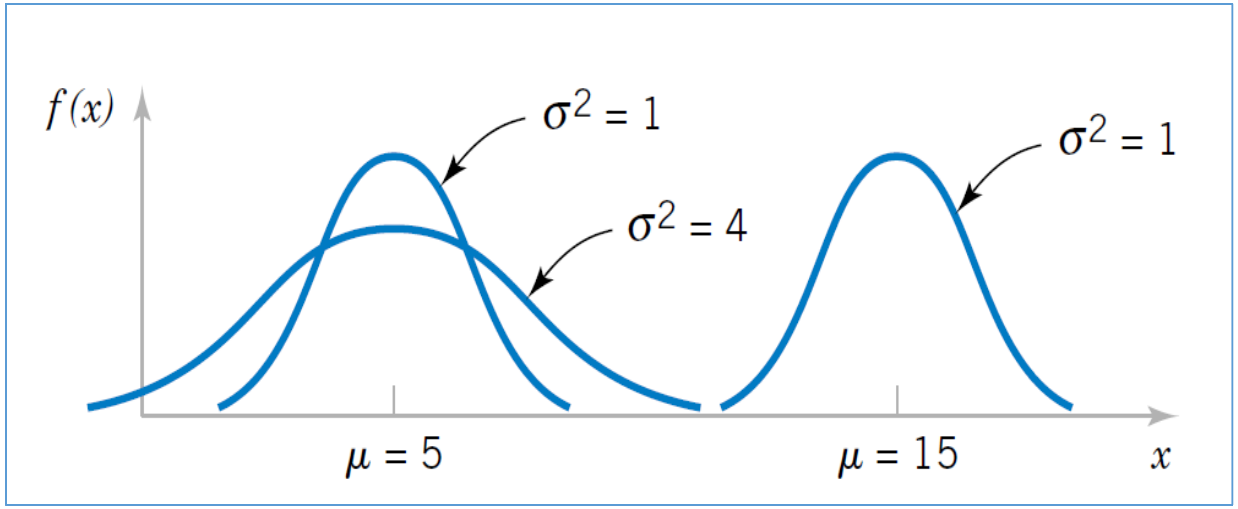
  - **정규분포의 평균과 분산**

    $X \sim N(\mu, \sigma^2)$인 경우,
    - $E[X] = \mu$
    - $V[X] = \sigma^2$

주요 연속형 확률분포함수

- **정규분포 확률밀도함수의 개형**

  - μ를 중심으로 대칭이며, μ에서 가장 큰 값을 가지는 종 모양의 분포임.
    → μ보다 클 확률과 작을 확률 모두 1/2임.
  - σ^2이 크면 분포의 산포가 커지고, σ^2이 작으면 분포의 산포가 작아짐.



주요 연속형 확률분포함수

- **정규분포의 성질(선형성1)**
  - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$일 때, $Y(= aX + b) \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$임. (단, a, b는 상수)

- 예. $X \sim N(0, 1^2)$일 때, $Y(= 2X + 1)$의 분포는?

주요 연속형 확률분포함수

- **정규분포의 성질(선형성2)**
  - $X_1, \ldots, X_n$이 서로 독립인 정규 확률변수로 $X_i \sim N(\mu_i,\ \sigma_i^2), i = 1,2,\ldots,n$이라고 할 때, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\sum_{i=1}^{n} \mu_i\ ,\ \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2)$.

- 예. $X_1 \sim N(20,\ 3^2), X_2 \sim N(40,\ 4^2)$이고, X_1과 X_2는 서로 독립일 때, $(X_1 + X_2)$의 분포는?

주요 연속형 확률분포함수

- **표준정규분포 (standard normal distribution)**

  - **표준정규 확률변수와 확률밀도함수**
    - $X \sim N(\mu, \sigma^2)$일 때, 정규분포의 선형성 성질에 의해

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

      이 되므로, Z를 평균(μ)이 0 분산(σ^2)이 1인 정규분포를 따르는 확률변수로 볼 수 있음.
    - 이 확률변수의 분포를 표준정규분포라 정의.

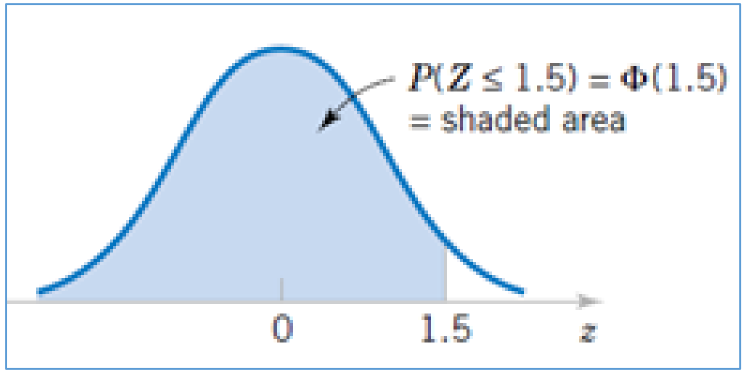
    - 표준정규분포의 확률밀도함수는 다음과 같음.

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad , -\infty < z < \infty$$

주요 연속형 확률분포함수

- **표준정규 누적분포함수**
  - 일반적으로 표준정규분포의 누적분포함수를 $\Phi(\cdot)$로 표기함.

$$\Phi(a) = P(Z \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-z^2/2} dz \quad , -\infty < a < \infty$$

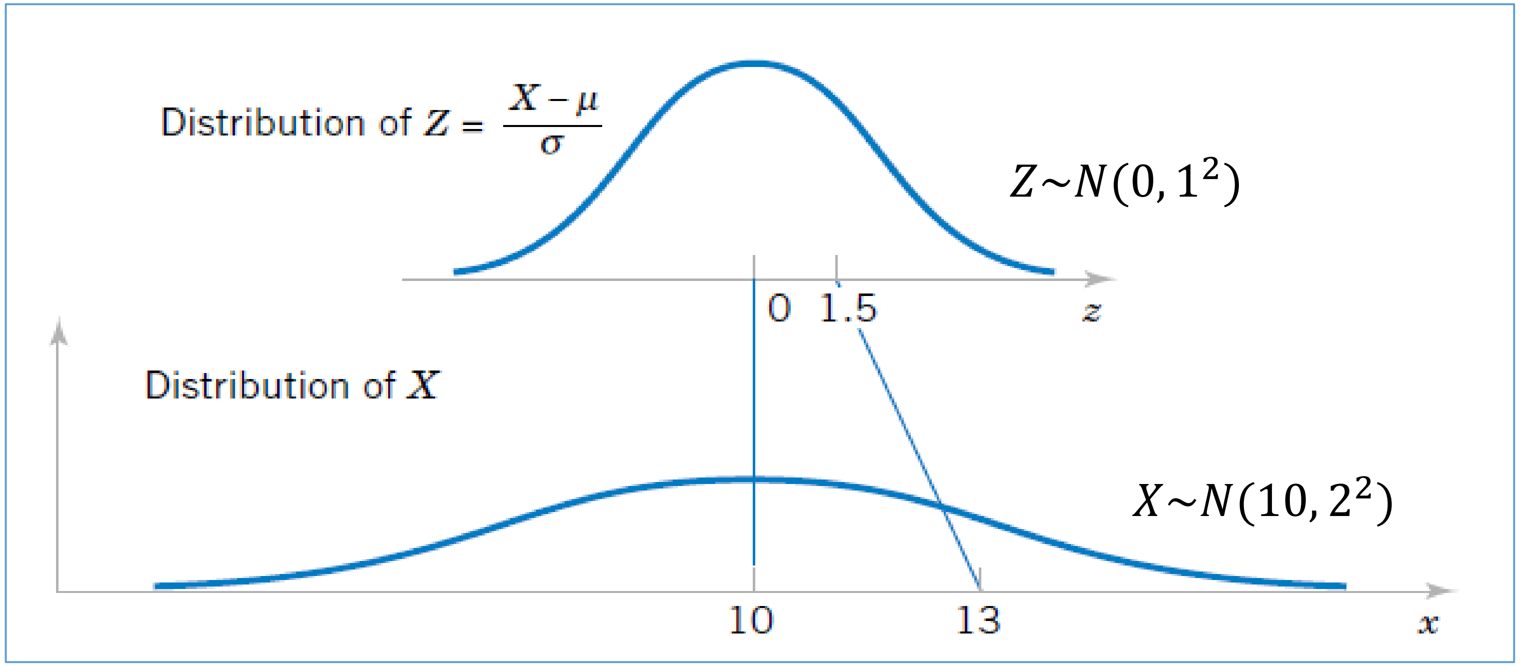


- $P(Z < 0) = P(Z > 0) = \Phi(0) = 0.5$
- $P(Z > a) = 1 - \Phi(a)$
- $P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(\mathrm{a})$

주요 연속형 확률분포함수

- 임의의 정규 확률변수 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$가 어느 구간에 속할 확률은 모두 표준정규분포의 누적 확률분포함수 $\Phi(\cdot)$를 이용하여 표현할 수 있음.

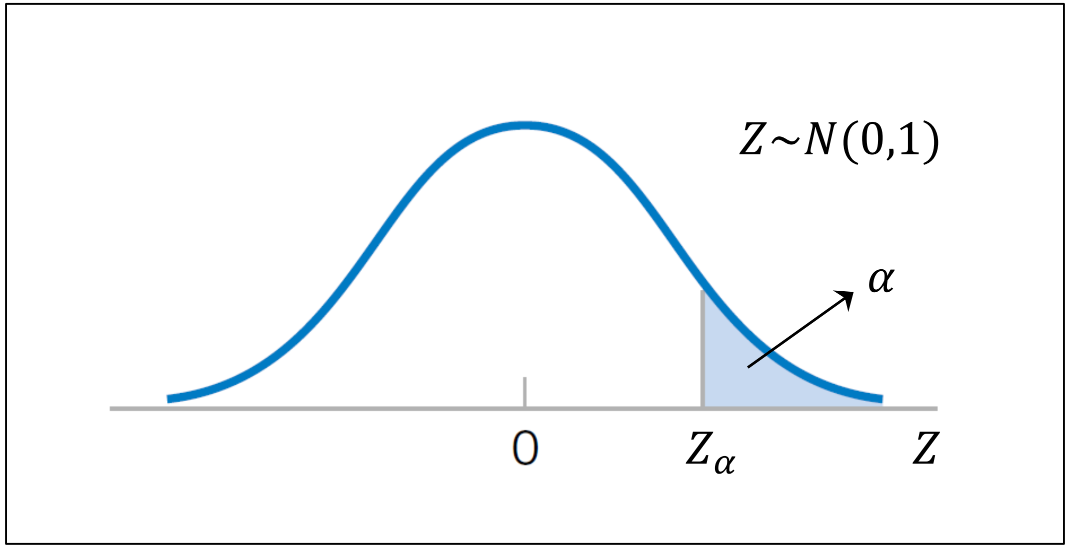
  - $P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$



주요 연속형 확률분포함수

- **표준정규 확률변수의 $(1-\alpha)$분위수 : Z_α**

$Z \sim N(0,1)$일 때, $\mathrm{P}[Z > c] = \alpha$를 만족하는 Z의 $(1-\alpha)$분위수 c를 Z_α으로 표기함.



주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - $Z \sim Normal(0, 1)$일 때, 다음을 구하여라.
    - $P[Z < -1.645] + P[Z > 1.645]$
    - $P[-1.645 < Z < 1.96]$
    - $P[|Z| < a] = 0.9$를 만족하는 a.

  - 다음의 Z_α값을 구하여라.
    - $Z_{0.025}$
    - $Z_{0.95}$

주요 연속형 확률분포함수

```
> pnorm(-1.645)*2
[1] 0.09996981
>
> pnorm(1.96)- pnorm(-1.645)
[1] 0.9250172
>
> qnorm(0.95)
[1] 1.644854
>
> qnorm(0.975)
[1] 1.959964
>
> qnorm(0.05)
[1] -1.644854
```

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 포트폴리오의 연 수익률에 대한 분포는 평균이 45이고, 표준편차가 39인 정규분포를 따른다. 1년 후에 포트폴리오의 가치가 39와 43 사이에 있을 확률을 구하여라. (단위: 천만 달러)

```
> pnorm( 43, mean=45, sd=39)-pnorm( 39, mean=45, sd=39)
[1] 0.04068486
```

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 투자의 수익률은 평균이 10%이고 표준 편차가 4% 인 정규 분포를 따른다고 할 때, 이 투자로 인해 돈을 잃을 확률은 얼마인가?
  - 만일 이 투자 수익률의 표준편차가 7%였다면, 돈을 잃을 확률은 얼마인가?

```
> pnorm( 0, mean=10, sd=4)
[1] 0.006209665
> pnorm( 0, mean=10, sd=7)
[1] 0.07656373
```

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 한 대학에서 새로운 Executive MBA 프로그램을 승인하였다. 이 프로그램의 협의회는 입학 요건 중 하나로 지원자가 GMAT 점수의 상위 1% 이내여야 한다고 결정하였다. GMAT 점수가 평균 490, 표준 편차 61인 정규분포를 가진다고 할 때, 이 프로그램 입학을 위한 최소 GMAT 점수는 얼마인가?

```
> qnorm(0.99, mean=490, sd=61)
[1] 631.9072
```

주요 연속형 확률분포함수

- 예제
  - 어느 은행의 카드 소지자가 매월 지불하는 이자 금액을 분석한 결과 해당 금액은 평균 $27, 표준 편차 $7로 정규 분포를 따르는 것으로 나타났다. 이 은행 카드 소지자 가운데 지불하는 이자 금액이 하위 20%에 해당하는 사람이 있다면, 그 사람이 지불하는 이자 금액은 얼마인가?

```
> qnorm(0.20, mean=27, sd=7)
[1] 21.10865
```