7. 통계적 추론 – 가설검정 (1)

가설검정 개요

- **가설검정**
  - 통계적 가설검정이란
    - 표본으로부터 주어지는 정보를 이용하여, 모수에 대한 예상, 주장 또는 추측 등의 옳고 그름을 판정하는 과정

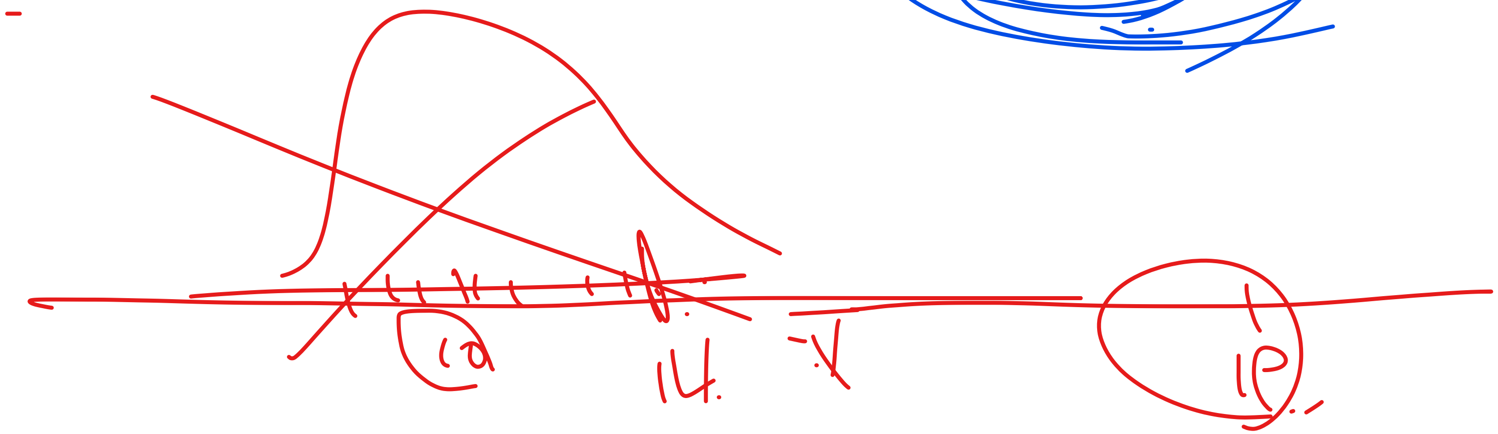
$\mu = 10$

$\mu > 10$

$x_1 \; . \; . \; . \; x_{30}$

$\bar{x} = 14$

$\bar{x} = 19$



가설검정의 기본원리

- **가설검정을 위한 기본 개념**
  - **가설**
    - 통계적 가설은 모수에 대한 예상, 주장 또는 추측을 표현한 것.
      - **귀무가설**(H_0) : 지금까지 사실로 알려져 있는 가설로, 대립가설이 참이라는 확실한 근거가 없을 때 받아들이는 가설.
      - **대립가설**(H_1) : 표본자료로부터의 강력한 증거에 의해 입증하고자 하는 가설. 연구자가 밝히고자 하는 주장 또는 새로운 이론에 해당함.

    - 가설검정의 결론
      - 가설검정은 표본의 정보가 귀무가설과 대립가설 중 어느것에 대해 더 강한 근거가 되는가를 판단하는 과정으로, "**귀무가설 $\boldsymbol{H_0}$ 을 기각**" 또는 "**귀무가설 $\boldsymbol{H_0}$ 을 기각하지 못함**" 둘 중 하나를 결론으로 선택해야 함.

가설검정의 기본원리

◆ 가설 유형

- 관심 모수가 θ이고 검정하고자 하는 모수의 경계값이 θ_0라고 할 때,

<table>
<tr><th colspan="2">단측(한쪽 꼬리)검정</th><th rowspan="2">양측(양쪽 꼬리) 검정</th></tr>
<tr><th>왼 꼬리 검정</th><th>오른 꼬리 검정</th></tr>
<tr><td>$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta < \theta_0$</td><td>$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta > \theta_0$</td><td>$H_0: \theta = \theta_0$
$H_1: \theta \neq \theta_0$</td></tr>
</table>

- 예제) 상황에 맞게 적절한 귀무가설 H_0 과 대립가설 H_1 을 설정하여라.
  - 어느 보험 상품의 평균 청구액은 100달러로 알려져 있는데, 최근 이보다 감소했을 것이라는 주장이 제기되어 이를 검토하고자 함.
  - 전자제품을 생산하는 어느 회사의 시장점유율은 50%로 알려져 있는데, 최근 마케팅 전략이 효과를 발휘하여 이 회사의 시장점유율이 높아졌는지 여부를 검토하고자 함.

가설검정의 기본원리

- 예제
  - 다음 중 가장 적절하게 정의된 가설은?
    - $H_0: \bar{x} = 30$, $H_1: \bar{x} < 30$
    - $H_0: \mu = 270$, $H_1: \mu \neq 270$
    - $H_0: p > 0.7$, $H_1: p = 0.7$
    - $H_0: \sigma = 70$, $H_1: \sigma > 65$

가설검정의 기본원리

- **검정통계량**
  - 귀무가설 H_0 과 대립가설 H_1 중 어느 하나를 택하는 기준을 결정하는 통계량
  - 검정통계량을 정의하는 방법 : Most Powerful test, Likelihood Ratio test 등
    - μ에 관한 검정의 검정통계량 : $\bar{X}$
    - p에 관한 검정의 검정통계량 : $\hat{p}$
    - σ^2에 관한 검정의 검정통계량 : S^2

- **귀무가설 H_0의 기각여부의 판단기준을 정의하는 2가지 접근 방식**
  - 기각역에 의한 검정
  - 유의확률에 의한 검정

► 두 접근방식의 결론은 항상 동일함.

가설검정의 기본원리

- **기각역에 의한 가설 검정 방법**
  - **기각역**
    - 귀무가설 H_0 을 기각하게 하는 검정통계량 관찰값의 영역
    - 검정통계량의 관찰값이 주어진 기각역에 포함되는 경우는 귀무가설 H_0 을 기각하며, 그렇지 않은 경우는 귀무가설 H_0 을 기각하지 않는 것이 결론이 됨.

    - 예제 (계속). 검정통계량을 정의하고, 기각역이 어떤 형태여야 할지를 결정해라.
      - 보험 평균 청구액은 100달러보다 감소했는지 여부에 관한 사례

      - 어느 회사의 시장점유율은 50%보다 높은지 여부에 관한 사례

  - **임계치**
    - 기각역에서 경계가 되는 값

가설검정의 기본원리

- 적절한 기각역을 찾는 원리

  검정에서 필연적으로 발생하는 **검정의 오류를 감안**하여 최선의 기각역을 찾는 것이 기본적인 접근 원리임.

가설검정의 기본원리

- 검정의 오류

  가설검정에서의 의사결정에서 발생할 수 있는 오류

		실제 현상	
		귀무가설 H_0가 참	**대립가설 H_1이 참**
검정결과	**귀무가설 H_0를 기각하지 못함**	올바른 의사결정	**제2종 오류**
	귀무가설 H_0를 기각	**제1종 오류**	올바른 의사결정

- **제 1종 오류 (Type I error)** : 실제로는 귀무가설 H_0가 사실인데, 표본으로부터의 검정통계량 관찰값이 우연히 기각역에 포함되어, 귀무가설 H_0을 기각하게 되는 오류
  - 제 1종 오류의 확률을 α로 표기함.

- **제 2종 오류 (Type II error)** : 실제로는 대립가설 H_1이 사실인데, 표본으로부터의 검정통계량 관찰값이 우연히 기각역에 포함되지 못하여, 귀무가설 H_0을 기각하지 못하게 되는 오류
  - 제 2종 오류의 확률을 β로 표기함.

가설검정의 기본원리

- 예제
  - 어느 가설검정에서 귀무가설이 기각되는 결론이 났다면,
    - 제2종 오류가 발생한 것임.
    - 제2종 오류가 발생한 것일 수도 있음.
    - 제1종 오류가 발생한 것임.
    - 제1종 오류가 발생한 것일 수도 있음.

가설검정의 기본원리

- 예제 (계속). 보험 평균 청구액은 100달러보다 감소했는지 여부에 관한 사례. 해당 상품의 보험청구액은 정규분포를 따르며 모표준편차 σ = 5로 알려져 있다고 가정하고, 검정을 위해 64개의 표본 사례 추출하였더니 표본의 평균청구액이 98달러였다고 하자.

  · 가설 : $H_0: \mu = 100$
  $H_1: \mu < 100$

  · 검정통계량 : 표본평균 $\bar{X}$

  · 검정통계량의 분포 :

  보험청구액을 X로 두면 $X \sim N[\mu, 5^2]$이므로,

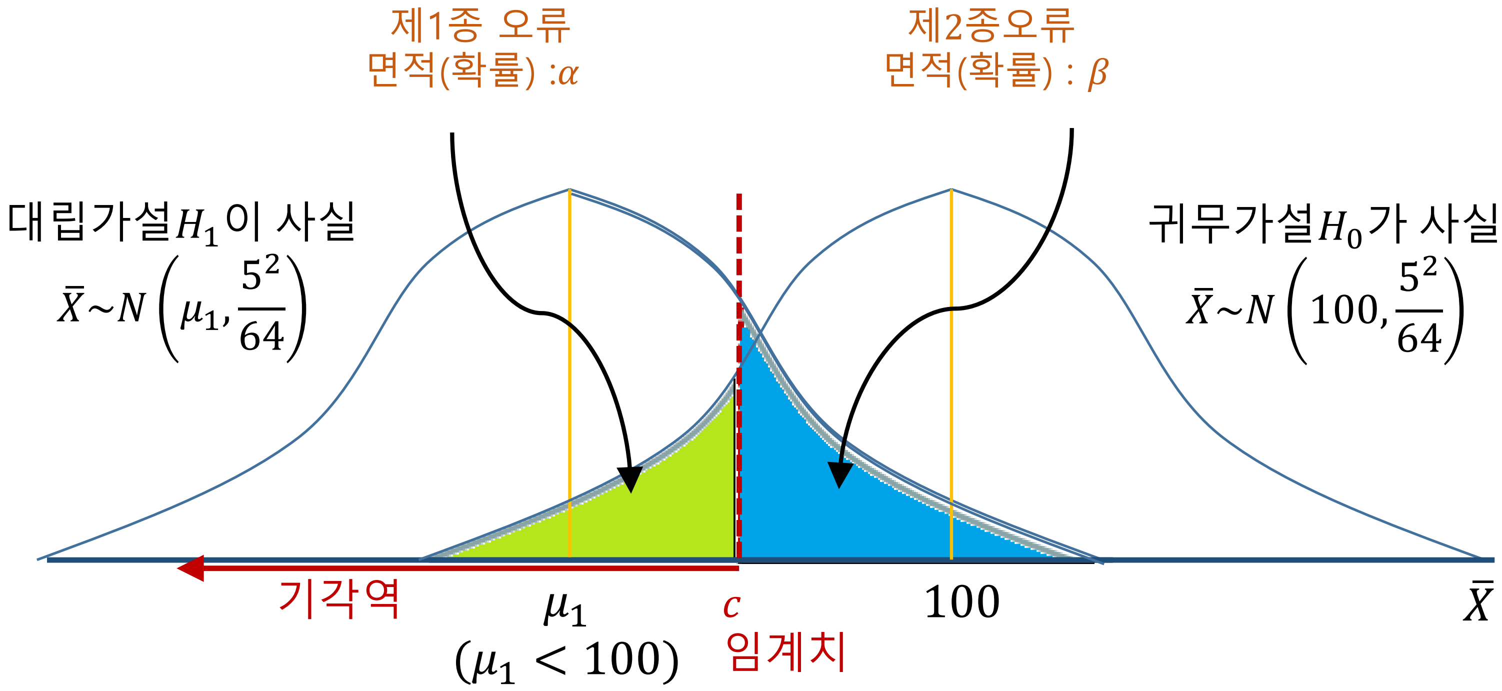
  64개의 표본에 대한 검정통계량(표본평균 $\bar{X}$)의 분포는 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{5^2}{64}\right)$가 됨.

  귀무가설 H_0가 사실인 경우 $\bar{X} \sim N\left(100, \frac{5^2}{64}\right)$

  대립가설 H_1이 사실인 경우 $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{5^2}{64}\right)$ $(\mu_1 < 100)$

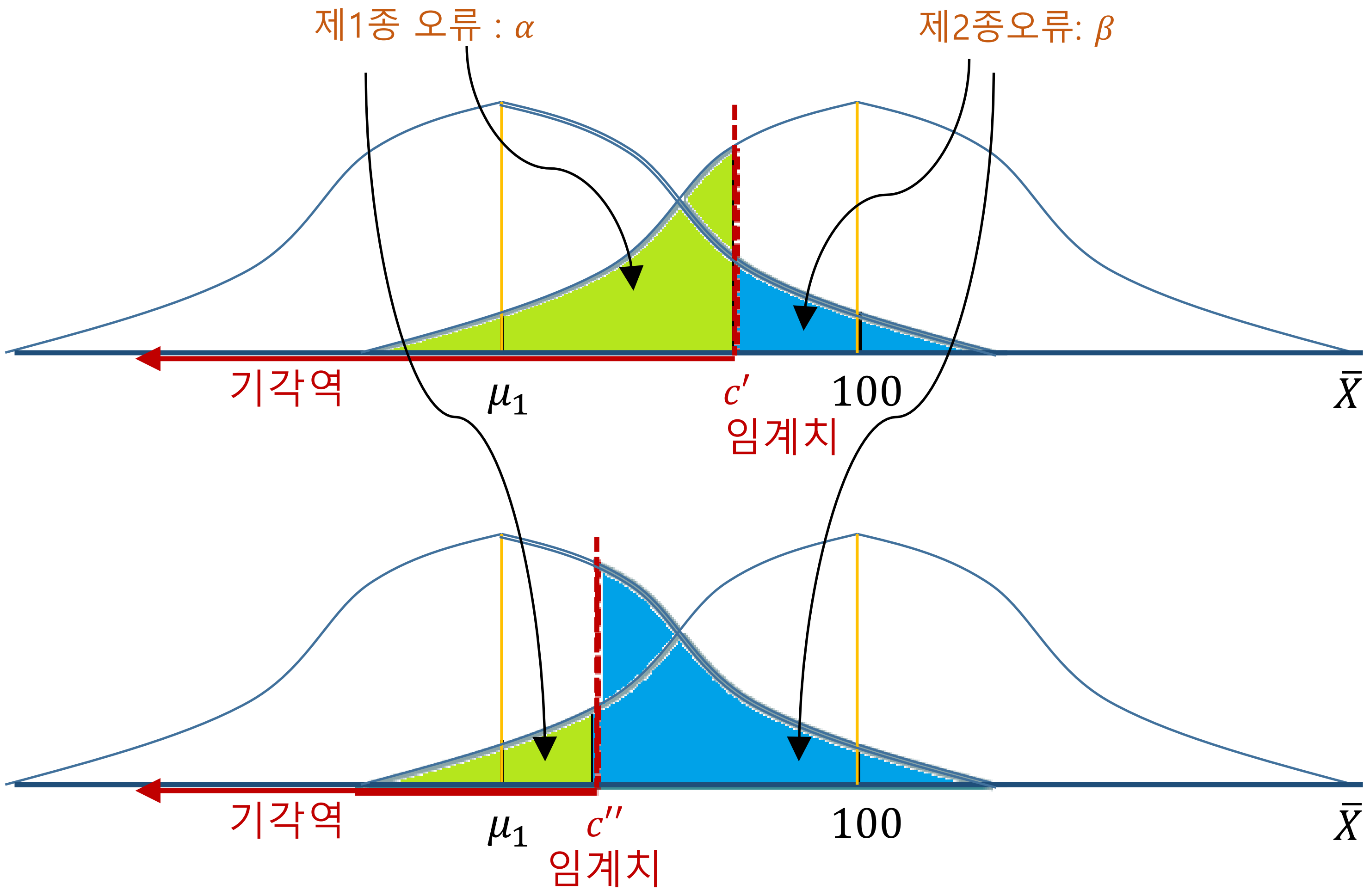
가설검정의 기본원리

- 만일 $\bar{X} < c$면 **귀무가설을 기각**한다고 할 때,
  제1종 & 제2종 오류의 확률을 그림으로 표현하면 다음과 같음



가설검정의 기본원리

- 가설검정에서 2가지 종류의 검정 오류는 서로 **상충관계**임.
  - 제1종/제2종 오류의 확률을 줄이면, 제2종/제1종 오류의 확률 늘어남.



가설검정의 기본원리

- 검정 오류를 감안한 최선의 기각역의 설정

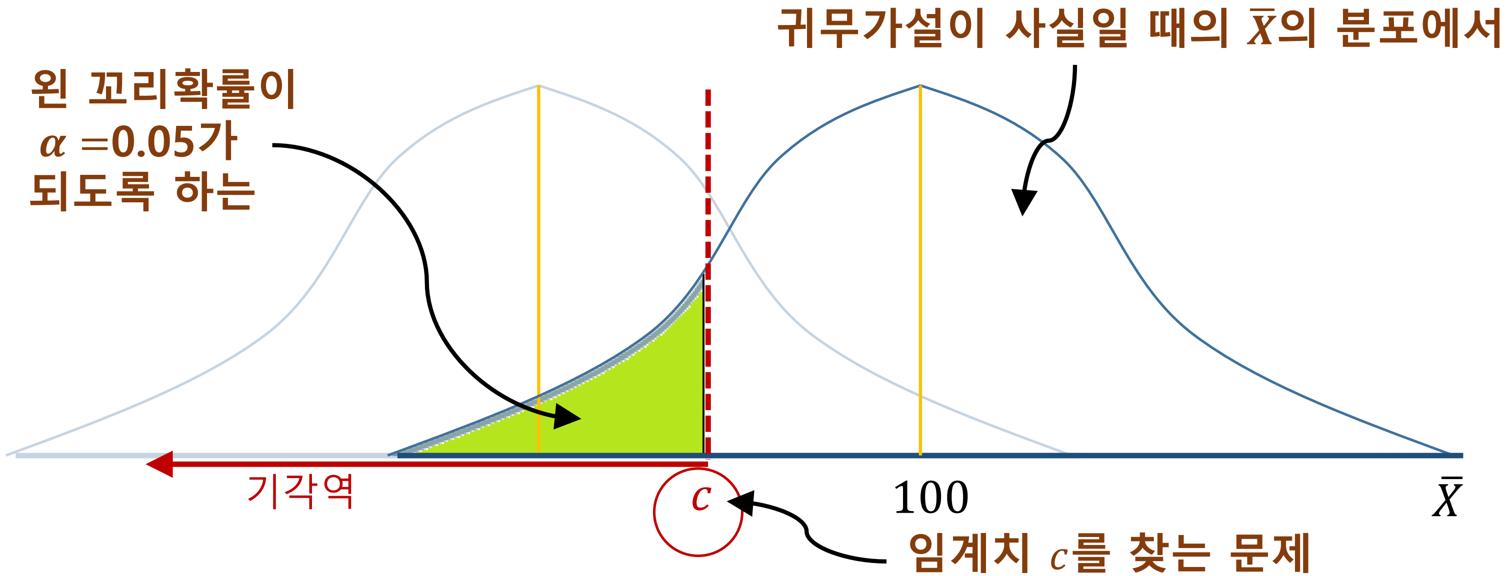
  · 제1종 오류와 제2종 오류를 동시에 최소로 할 수 있는 기각역은 존재하지 않음.
  ► 제1종 오류의 확률을 일정 수준을 넘지 못하도록 고정하고,
  그 조건을 만족하는 기각역 중 제2종 오류의 확률을 최소로 할 수 있는 기각역을 찾음.

  · 귀무가설 H_0 는 현재 보편적으로 받아들여지는 보수적이고 관습적인 내용을 담고 있으므로, 표본 자료가 대립가설에 대한 강력한 증거가 되지 않는다면 귀무가설 H_0 를 기각하지 않도록 하기 위함.

- **유의수준(Significance Level)**
  · 제1종 오류를 범할 확률의 최대 허용 한계를 유의수준이라고 함.
  · 귀무가설 H_0가 사실일 때, 귀무가설 H_0를 잘못 기각하는 오류의 확률에 대한 허용한계
  · 검정에 앞서 사전에 결정하거나 주어지며, 주로 0.01, 0.05, 0.1 등의 작은 값을 사용함.

가설검정의 기본원리

- 예제 (계속) 유의수준 $\alpha = 0.05$로 검정하기 위한 기각역을 결정하여라.
  - **제1종 오류의 확률이 $\alpha = 0.05$ 를 넘지 않아야 함.**
    - 귀무가설이 사실일 때, 검정통계량이 기각역에 들어갈 확률 (제1종오류의 확률) 이 α=0.05가 되는 기각역을 찾아주어야 함.
  - **제2종 오류의 확률이 최소가 되어야 함**
    - 기각역의 방향은 귀무가설이 사실일 때 검정통계량의 분포에서 대립가설의 방향(주어진 문제의 경우 **<u>왼쪽 꼬리 방향</u>**)이 되어야 함.



가설검정의 기본원리

· 즉 귀무가설 H_0 가 사실일 때 $\left(\bar{X} \sim N\left(100, \frac{5^2}{64}\right)\right)$,

$P[\bar{X} < c] = 0.05$를 만족하는 임계치 c 를 찾는 문제임.

$P\left[\frac{\bar{X}-100}{5/8} < \frac{c-100}{5/8}\right] = 0.05$이므로 임계치 $c = 100 - z_{0.05}\left(\frac{5}{8}\right) = 98.972$

· 기각역

$\bar{X} < 98.972$면 귀무가설을 기각.

· 결론

자료로부터 계산된 64개 표본의 평균청구액이 98달러라고 했으므로,

$\bar{x}(= 98) < 98.972$ → 검정통계량의 관찰값이 기각역에 포함됨.

따라서 귀무가설 H_0를 기각함.

가설검정의 기본원리

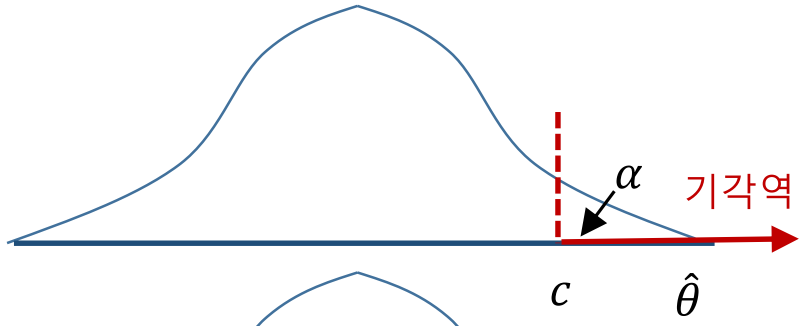
- 유의수준 α로 검정할 때의 기각역의 형태

<u>귀무가설 H_0 가 사실일 때</u> 검정통계량 <u>$\hat{\theta}$</u>의 분포를 구한 뒤,

1. 단측검정 (오른꼬리 검정)

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta > \theta_0$

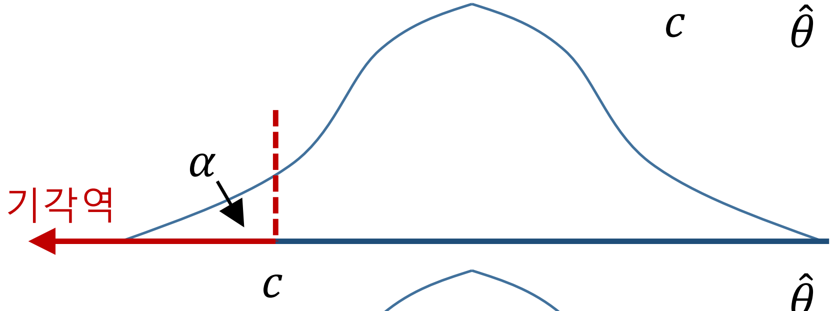


$\boldsymbol{\hat{\theta} > c}$

2. 단측검정 (왼꼬리 검정)

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta < \theta_0$

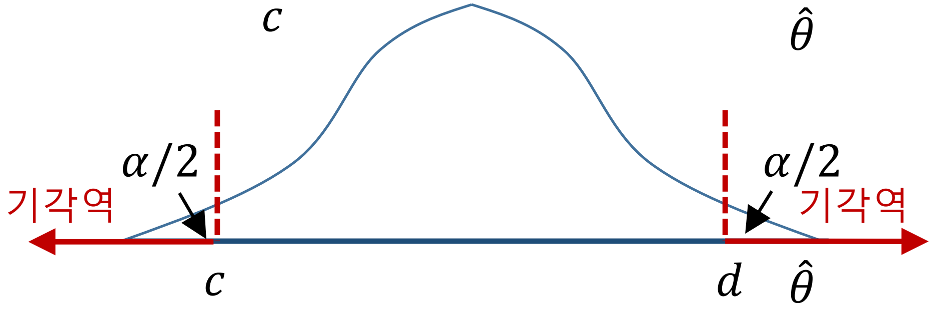


$\boldsymbol{\hat{\theta} < c}$

3. 양측검정 (양쪽꼬리 검정)

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta \neq \theta_0$



$\boldsymbol{\hat{\theta} < c}$ 또는 $\boldsymbol{\hat{\theta} > d}$

가설검정의 기본원리

- 예제
  - 어느 표본자료에 기초하여 가설검정을 수행하였는데 5%의 유의수준에서 귀무가설을 기각하지 못하는 것으로 결론이 났다면,
    - 1% 의 유의수준에서도 귀무가설은 기각되지 못할 것이다.
    - 1% 의 유의수준에서는 귀무가설은 기각된다.
    - 1% 의 유의수준에서는 귀무가설이 기각될 수도 있다.

가설검정의 기본원리

- 대기시간 예제
  - 어느 금융회사에서는 한 대리점을 방문한 고객 중 100명을 무작위로 추출하여, 창구에서 호출되기까지의 대기 시간을 측정해 보았더니 평균 3.1분이었다. 창구 대기시간은 표준편차가 0.5분인 정규 분포를 따르는 것으로 알려져 있다고 하자. 모든 고객에 대해 평균 대기시간이 3분을 넘는지 여부를 5%의 유의수준으로 판단하여라.

가설검정의 기본원리

- 계정 잔액 예제
  - 어느 신용회사의 81개 고객의 계정을 표본으로 추출하여 잔액을 기록한 결과 표본 계정 잔액의 평균은 1,200달러였다. 계정 잔액은 표준편차가 $126 인 정규 분포를 갖는 것으로 알려져 있다고 하자. 모든 고객의 계정 잔액의 평균이 $1,150와 유의하게 다른지 여부를 유의수준 5%에서 검정하여라.

가설검정의 기본원리

- 유의확률에 의한 검정 방법
  - 유의확률 (p-value)
    - 검정통계량 $\hat{\theta}$의 관찰값 $\hat{\theta}_0$에 대하여 귀무가설 H_0를 기각할 수 있는 최소한의 유의수준으로 정의.

    - 예제 (계속). 유의확률 (p-value)는 다음에 관한 답을 얻기 위한 것임.

      · 보험상품의 평균청구액이 100보다 작은가에 관한 문제
      · 정규모집단, 모분산은 5^2, 64개의 표본추출인 경우, 5%의 유의수준 기각역은 $\bar{X} < 98.972$.
      · 만일 64개 표본의 평균이 98인 경우 귀무가설을 기각함.

      · 만일 유의수준이 5%가 아니라 2%나 1%로 줄어든다고 해도, 주어진 표본(평균 98인 64개의 표본)는 여전히 귀무가설 H_0 을 기각할만큼 충분히 유의한가?

      · 다른 조건은 모두 동일하다고 할 때, 유의수준이 최소한 얼마로 주어진다면 주어진 표본의 정보로 귀무가설 H_0 를 기각하는 결론에 도달하겠는가?

가설검정의 기본원리

- 유의확률 (p value)의 계산

  검정통계량 $\hat{\theta}$에 대해 표본으로부터 계산된 관찰값이 $\hat{\theta}_0$라고 할 때,

  ① 기각역에 의한 검정 방법과 동일한 형태의 기각역에서 임계치만 $\hat{\theta}_0$ 로 바꿔 기각역을 수정한 뒤,

  ② 수정된 기각역에 대한 제1종오류의 확률 (귀무가설 H_0가 사실인 분포에서 검정통계량 $\hat{\theta}$가 기각역에 포함될 확률)을 계산해야 함.

  ▶ **유의확률 (p value)의 산출**

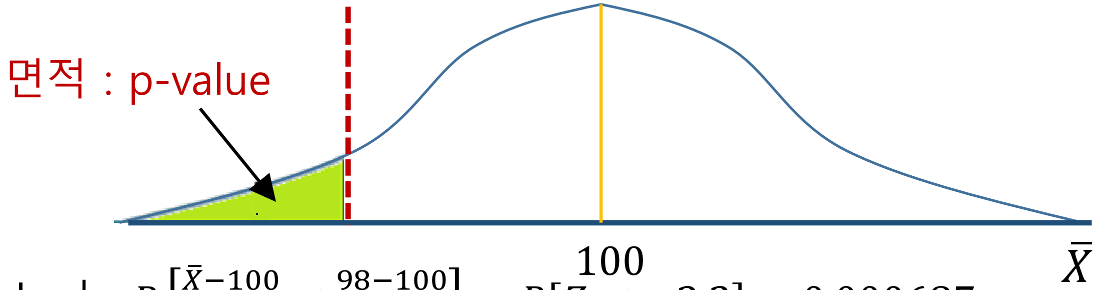
  귀무가설이 사실일 때 검정통계량 $\hat{\theta}$*의 분포에서*
  검정통계량 관찰값 $\hat{\theta}_0$*보다*
  대립가설 방향으로 더 극단적인 값이 나올 확률을 구함.

가설검정의 기본원리

- 예제 (계속)

귀무가설 H_0 가 사실일 때 $\left(\bar{X} \sim N\left(100, \frac{5^2}{64}\right)\right)$이고, $\bar{x} = 98$이므로,

$\bar{X} \sim N\left(100, \frac{5^2}{64}\right)$ 의 분포에서 $P[\bar{X} < 98]$ 를 구한 값이 p-value가 됨.



p-value는 $P\left[\frac{\bar{X}-100}{5/\sqrt{64}} < \frac{98-100}{5/8}\right] = P[Z < -3.2] \approx 0.000687$

가설검정의 기본원리

◆ 검정의 종류에 따른 p-value 도출식

1. 단측검정 (오른꼬리 검정)

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta > \theta_0$$

► p-value = $P[\hat{\theta} > \hat{\theta}_0]$

2. 단측검정 (왼꼬리 검정)

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta < \theta_0$$

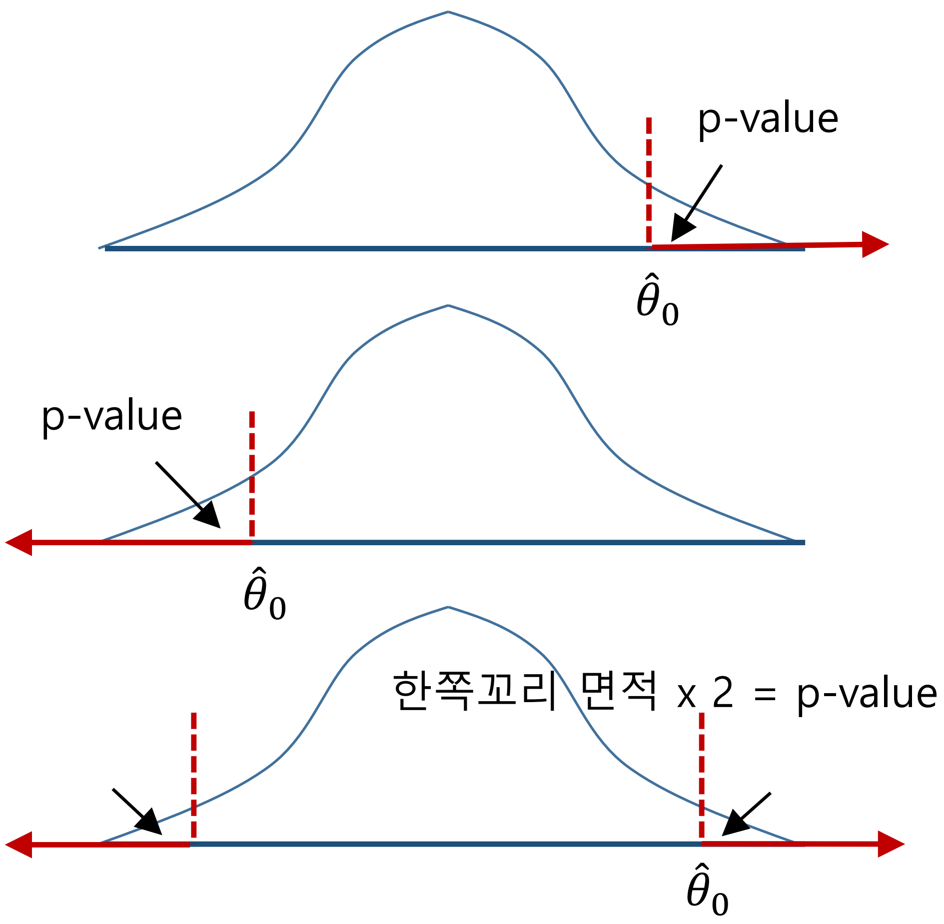
► p-value = $P[\hat{\theta} < \hat{\theta}_0]$

3. 양측검정 (양쪽꼬리 검정)

$$H_0: \theta = \theta_0$$
$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

► p-value =Min $\left(P[\hat{\theta} > \hat{\theta}_0], P[\hat{\theta} < \hat{\theta}_0]\right) \times 2$

귀무가설 H_0 가 사실일 때 검정통계량 $\hat{\theta}$ 의 분포를 구한 뒤,



가설검정의 기본원리

- 유의확률 (p-value)의 해석
  - 유의확률은 값이 작을수록 해당하는 표본의 정보는 귀무가설 H_0가 사실인 경우의 표본으로 보기 어렵다는 것을 의미함.
  - ► **유의확률이 작을수록 귀무가설 H_0에 대한 더욱 강한 반증이 됨.**

- 유의확률 (p-value)를 활용한 판단기준
  - 자료로부터 계산된 유의확률 (p-value)가 주어진 유의수준 α 보다 작은 경우에는 귀무가설 H_0를 기각한다면, 동일한 유의수준을 이용하여 기각역에 의한 검정했을 때와 항상 동일한 결론을 가지게 됨.
  - ► **P-value $\leq$ α 면, H_0를 기각.**

가설검정의 기본원리

- 예제
  - 어느 오른꼬리 검정에서의 유의확률(p-value)는 0.034였다고 하자. 5%의 유의수준으로 검정하는 경우 주어진 검정의 귀무가설은 기각될 수 있는가?
    - 표본 수에 따라 기각될 수도 있고 안될 수도 있다.
    - 표본 평균에 따라 기각될 수도 있고 안될 수도 있다.
    - 기각되지 않는다.
    - 기각된다.

가설검정의 기본원리

- 대기시간 예제(계속)
  - 대기시간 예제를 p-value를 이용하여 5%의 유의수준으로 검정하여라.

가설검정의 기본원리

- 계정 잔액 예제(계속)
  - 계정 잔액 예제를 p-value를 이용하여 5%의 유의수준으로 검정하여라.