Problème n°1 - Algèbre

Sadoun Titouan

June 2, 2023

Cherchons par analyse-synthèse, les polynômes p de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-16)p(2x) = 16(x-1)p(x) \ (E)$$

Analyse : Soit $p \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant l'égalité (E) pour tout réel x.

Il est évident que p peut être le polynôme nul.

Dans la suite on supposera que p n'est pas $0_{\mathbb{R}[X]}$ et on notera n le degré de p.

$$\exists (c, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / p(X) = c(X-\lambda_1)...(X-\lambda_n) \text{ et } c \neq 0$$

On pose : $Q(X) = 16(X-1)p(X)$

On peut calculer le coefficient dominant de Q et on trouve qu'il est égal à $16c$, or, par hypothèse, on a aussi :

$$Q(X) = (X-16)p(2X)$$

Si on recalcule le coefficient dominant de Q à partir de cette nouvelle égalité on obtient $2^n c$, ainsi, on a l'égalité :

$$2^n = 16 \text{ car } c \neq 0$$

et donc, $n = 4$ ie. p est de degré 4

Ensuite, remarquons que 1 est une racine de Q, or 1 n'est pas une racine du polynôme $X-16$ donc c'en est une du polynôme $p(2X)$ et donc 2 est une racine de p. On a alors, une nouvelle racine de Q et réitérant le procédé, on trouve que 4, 8 et 16 sont également des racines de p et

16, la dernière racine obtenue ainsi, est racine de $X-16$ donc cette dernière racine ne permet pas d'en obtenir une nouvelle. p étant de degré 4, on a trouvé toutes ses racines et donc :

$$p(X) = c(X-2)(X-4)(X-8)(X-16)$$

Synthèse : Soit p un polynôme de la forme :

$$p(X) = c(X-2)(X-4)(X-8)(X-16) \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Premièrement, il est évident que p est un polynôme à coefficient réels.

Ensuite, si c est nul alors p est le polynôme nul et il est alors évident que p satisfait (E) pour tout réel x.

Si $c \neq 0$

Montrons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-16)p(2x) = 16(x-1)p(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 16(x-1)p(x) &= 2^4(x-1)c(x-2)(x-4)(x-8)(x-16) \\ &= c(2x-2)(2x-4)(2x-8)(2x-16)(x-16) \qquad (0.1) \\ 16(x-1)p(x) &= (x-16)p(2x) \end{aligned}$$

Ainsi, p satisfait bien (E) pour tout réel x.

Conclusion : Les polynômes p de $\mathbb{R}[X]$ satisfaisant (E) pour tout réel x sont les polynômes de la forme :

$$p(X) = c(X-2)(X-4)(X-8)(X-16) \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$