

Contrôle actif d'une enceinte acoustique.

Produit par

Victor BIGAND
Master SPI spécialité Acoustique
Sorbonne Université

Sous la supervision de
David ROZE, Henri BOUTIN
Chercheurs en acoustique musicale
IRCAM - Laboratoire STMS - Equipe S3AM

Recherche en acoustique musicale
IRCAM
1 Place Igor Stravinsky, 75004 Paris
27/02/23 - 31/07/23



Résumé

Ce rapport de stage de master ATIAM traite du contrôle actif d'une enceinte acoustique pour limiter les vibrations transmises par l'enceinte au socle sur lequel elle se trouve. Ce travail développe un modèle physique linéaire du haut-parleur et de l'enceinte réduite en première approche à une plaque. Ce modèle physique de la structure vibrante sert à prédire les vibrations aux points de transmission pour effectuer un contrôle feed-forward. Pour pallier aux différences entre le modèle et la réalité, le modèle est finalement utilisé comme initialisation d'un contrôleur de type feed-forward adaptatif (moindres carrés récursifs : LMS). Les modélisations sont conduites dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports, formalisme modulaire respectant le bilan de puissance et garantissant la passivité des simulations. Les contributions de ce stage sont : une méthode pour ajouter un amortissement de Rayleigh aux Systèmes Hamiltoniens à Ports linéaires discrétisés en éléments finis, une optimisation des temps de résolution numérique tirant profit des matrices creuses ainsi que la comparaison des performances de contrôle de l'approche proposée par rapport à un contrôle sans modélisation de la structure vibrante.

Mots-clefs : Enceinte acoustique - Haut-parleur - Vibration des plaques - Contrôle actif - Contrôle adaptatif - Modèle physique - Systèmes Hamiltoniens à Ports - Simulation numérique - Méthode des éléments finis

Abstract

This ATIAM Master's internship report deals with the active control of a loudspeaker enclosure to limit the vibrations transmitted by the loudspeaker to the base on which it stands. This work develops a linear physical model of the loudspeaker and the enclosure represented as a plate for simplification purposes. This physical model is used to predict vibrations at transmission points for feed-forward control. To compensate for the lack of realism of the model, it is finally used as an initialization of an adaptive feed-forward controller (Least Mean Squares). The modeling is carried out in the formalism of Port Hamiltonian Systems, a modular formalism that respects the power balance and guarantees the passivity of the simulations. The contributions of this internship are : a method for adding Rayleigh damping in finite element-discretized linear Port Hamiltonian Systems, an optimization of numerical resolutions taking advantage of sparse matrices, and a comparison of control performances between the proposed approach and one without modeling the vibrating structure.

Keywords : Acoustic enclosure - Loudspeaker - Plate vibration - Active control - Adaptive control - Physical model - Port Hamiltonian Systems - Numerical simulation - Finite element method

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Notations mathématiques	2
1.2	Contexte d'étude et objectifs	2
1.3	Etat de l'art	3
1.4	Plan du rapport	5
2	Modélisations à passivité garantie	6
2.1	Modèles continus en Systèmes Hamiltoniens à Ports	6
2.1.1	Haut-parleur : modèle de Thiele & Small	6
2.1.2	Vibration des plaques : Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin	8
2.2	Discrétisation numérique des SHP	12
2.2.1	Discrétisation spatiale : éléments finis mixtes sur une plaque de Mindlin	12
2.2.2	Discrétisation temporelle : méthode du gradient discret	16
2.2.3	Optimisation des résolutions numériques	17
2.2.4	Amortissement de Rayleigh dans les SHP linéaires discrets	18
3	Contrôle actif	20
3.1	Contrôle feed-forward optimal	20
3.1.1	Structure de contrôle	20
3.1.2	Filtre de contrôle : modélisation du chemin primaire	21
3.1.3	Limites du feed-forward optimal par modèle	27
3.2	Contrôle adaptatif	28
3.2.1	Algorithme d'adaptation LMS	28
4	Expériences et résultats	31
4.1	Validation des modèles	31
4.1.1	Haut-parleur	31
4.1.2	Modèle de plaque	33
4.2	Caractéristiques du filtre de contrôle	38
4.2.1	Force appliquée à la plaque par un haut-parleur	38
4.2.2	Force à appliquer par les actionneurs	39
4.3	Simulations de contrôle	41
4.3.1	Analyse du chemin primaire	41
4.3.2	Etude de l'impact de l'initialisation du LMS	42
5	Conclusion et perspectives	45

Chapitre 1

Introduction

Structure d'accueil

Ce stage a été effectué à l'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique/-Musique) au sein du laboratoire STMS (Sciences et Technologies de la Musique et du Son). Ce laboratoire créé en 1977 est devenu par la suite une unité mixte de recherche entre le CNRS, Sorbonne Université, le ministère de la culture et l'IRCAM. Ses travaux s'appliquent au domaine de la musique et du son, dans un contexte de création contemporaine et de recherche scientifique et technologique. Le laboratoire est divisé en plusieurs équipes et ce stage a pris place dans l'équipe S3AM (Systèmes et Signaux Sonores : Audio/Acoustique, instruMents).

Equipe S3AM

Les travaux de l'équipe portent sur les systèmes multiphysiques (instruments de musique, voix, haut-parleurs) et visent à reproduire les signaux sonores qu'ils produisent par modélisation physique de leur comportement. L'équipe étudie également les possibilités de modification des comportements naturels de ces systèmes par contrôle actif (instruments augmentés, contrôle d'instruments et d'objets du patrimoine).

Lors de ce stage, l'équipe S3AM était composée de six chercheurs/ingénieurs, cinq doctorants et deux stagiaires. Parmi eux, David Roze (chercheur, encadrant de ce stage) travail sur la modélisation physique de systèmes, notamment sur les non-linéarités et les structures à passivité garantie (Systèmes Hamiltoniens à Ports). Henri Boutin (chercheur, encadrant de ce stage) est spécialisé en automatique et contrôle actif, il collabore avec l'équipe de conservation de la Philharmonie de Paris sur les problématiques de conservation des objets du patrimoine par contrôle des structures. Quelques exemples de problématiques de recherche actuelles dans l'équipe sont le contrôle actif des supports pour protéger les œuvres du patrimoine, la modélisation du conduit vocal, la création d'un trombone augmenté par contrôle actif...

1.1 Notations mathématiques

- Dérivée temporelle : $\dot{Y}(x, t)$
- Dérivées spatiales : $\partial_x Y(x, t)$, $\partial_{xx}^2 Y(x, t)$, $\partial_{xxx}^3 Y(x, t)$, ...
- Vecteurs : \underline{Y}
- Matrices et tenseurs d'ordre 2 : $\underline{\underline{Y}}$
- Gradient : ∇Y
- Transposition d'une matrice $\underline{\underline{M}}$: $\underline{\underline{M}}^T$
- Inverse d'une matrice $\underline{\underline{M}}$: $\underline{\underline{M}}^{-1}$
- Transposition de l'inverse d'une matrice $\underline{\underline{M}}$: $\underline{\underline{\underline{M}}}^{-T}$

1.2 Contexte d'étude et objectifs

Contexte L'évolution actuelle des enceintes acoustiques tend à accroître leur rendement, notamment à basse fréquence. L'augmentation de la puissance acoustique à basse fréquence s'accompagne d'une amplification des vibrations soladiennes transmises par l'enceinte à son support puis à la structure du bâtiment où elle se trouve. Pour des systèmes sonorisés à grande échelle (salles de concerts, studios de musique, installations sonores dans des lieux culturels) ces vibrations peuvent devenir problématiques : dégradation des structures, mauvaise isolation (voisinage)... Des solutions passives ont été développées pour atténuer ce type de vibrations et sont typiquement utilisées par les musées pour protéger les objets du patrimoine [1]. Elles consistent à placer différents types de mousse (polyuréthane, étafoam, plastazote) sur les supports d'œuvres. Une autre approche, par contrôle actif, consiste à atténuer une vibration non souhaitée en lui ajoutant la même vibration en opposition de phase. Ces solutions actives s'avèrent plus efficaces que les solutions passives en dessous de 500 Hz [2] et feront l'objet de l'étude proposée dans ce rapport. Nous cherchons ainsi à limiter les vibrations transmises par une enceinte acoustique au socle sur lequel elle est posée en utilisant des méthodes de contrôle actif des structures.

Approche Le système étudié {haut-parleur + enceinte} donne un accès simple et précis au signal à l'origine des vibrations : la tension envoyée au haut-parleur. La démarche de contrôle envisagée est donc la suivante : nous allons modéliser les vibrations générées par le système {haut-parleur + enceinte} aux points de contact avec le socle pour une tension d'entrée, et la sortie de ce modèle constituera une loi de commande à envoyer à des actionneurs pour annuler la vibration en ces points (résumé figure 1.2.1).

Limites et hypothèses Ce travail s'inscrit comme une première étape dans le contexte présenté ci-dessus et certaines hypothèses simplificatrices seront effectuées. Cependant, il est important que ces simplifications laissent la possibilité à de futurs travaux de raffiner les modèles pour se rapprocher de la situation réelle.

La première hypothèse effectuée consiste à réduire le système de l'enceinte à celui d'une plaque sur laquelle le haut-parleur est fixé (la face avant d'un haut-parleur). Cela permet de limiter le problème étudié à un problème 2D pour simplifier la modélisation. Les travaux seront cohérents avec une futur modélisation 3D grâce à l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cette hypothèse permet également de conserver les objectifs de contrôle actif et la stratégie restera applicable à une structure vibrante 3D reposant sur un bâti.

Les modèles étudiés dans ce rapport resteront linéaires mais exprimés dans un formalisme adaptable aux non-linéarités et modulaire : les systèmes Hamiltoniens à Ports (on utilisera l'abréviation SHP dans la suite du rapport).

Objectifs

- Modélisation de la dynamique d'un haut-parleur et des vibrations d'une plaque.
- Elaboration d'une solution de contrôle tirant profit des modélisations.
- Validation expérimentale des approches et des modèles proposés.

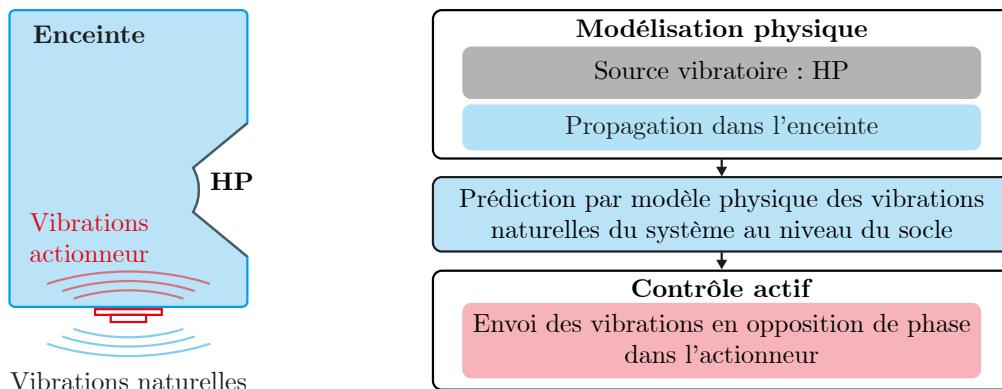


FIGURE 1.2.1 – Schéma de principe de l'objectif du stage.

1.3 Etat de l'art

Systèmes Hamiltoniens à Ports Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports, introduit dans les années 90 [3] permet de représenter un système dans un espace d'état qui satisfait le bilan de puissance en faisant apparaître explicitement les différents échanges d'énergies dans le système : internes, externes et dissipation. Les systèmes obtenus sont multiphysiques dans le sens où ils peuvent représenter un système constitué de plusieurs sous-systèmes mécaniques, électroniques ou thermiques. Ils sont également modulaires : l'interconnexion de plusieurs SHP reste un SHP.

Il existe plusieurs formulations de tels systèmes et des présentations détaillées de SHP sont données dans [4, 5]. La formulation algébro-différentielle représente un système physique par des composants de stockage, de dissipation et de source. Les composants de stockage sont représentés par la variable d'état \underline{X} et la fonction $x \rightarrow H(x)$ représentant l'énergie stockée par le système (le Hamiltonien). Les composants dissipatifs sont représentés par une variable

w et une loi de dissipation associée $w \rightarrow z(w)$. Les sources sont représentées par les entrées \underline{u} et les sorties associées \underline{y} de sorte que $\underline{u}^T \underline{y}$ représente la puissance extérieure en convention récepteur. La dynamique du système s'écrit sous la forme d'une relation entre les flux \underline{f} et les efforts \underline{e} reliés par une matrice d'interconnexion antisymétrique $\underline{\underline{S}}$ telle que :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\underline{X}} \\ \underline{w} \\ -\underline{y} \end{pmatrix}}_{\underline{f}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\underline{S}}_{xx} & \underline{\underline{S}}_{xw} & \underline{\underline{S}}_{xy} \\ -\underline{\underline{S}}_{xw}^T & \underline{\underline{S}}_{ww} & \underline{\underline{S}}_{wy} \\ -\underline{\underline{S}}_{xy}^T & -\underline{\underline{S}}_{wy}^T & \underline{\underline{S}}_{yy} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{S}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla H(\underline{X}) \\ z(\underline{w}) \\ \underline{u} \end{pmatrix}}_{\underline{e}}. \quad (1.3.1)$$

La propriété d'antisymétrie de la matrice $\underline{\underline{S}}$ permet de garantir la passivité du système (pas de création d'énergie). En effet, le produit scalaire $\underline{f}^T \underline{e}$ fait apparaître d'une part le bilan de puissance :

$$\underline{f}^T \underline{e} = \underbrace{\dot{\underline{H}}}_{\text{Puissance stockée}} + \underbrace{\underline{w}^T z(\underline{w})}_{\text{Puissance dissipée}} - \underbrace{\underline{y}^T \underline{u}}_{\text{Puissance extérieure}}. \quad (1.3.2)$$

Et d'autre part,

$$\underline{f}^T \underline{e} = \underline{e}^T \underline{\underline{S}} \underline{e} = (\underline{e}^T \underline{\underline{S}} \underline{e})^T = -\underline{e}^T \underline{\underline{S}} \underline{e} = -\underline{f}^T \underline{e}, \quad (1.3.3)$$

donc $\underline{f}^T \underline{e}$ est nécessairement nul i.e la somme des puissances échangées et stockées vaut zéro i.e la passivité du système est garantie.

Une autre formulation pratique pour les simulations numériques est la formulation algébrique réduite. En conservant les notations, le système (1.3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = (\underline{\underline{S}}_{xx} - \underline{\underline{R}}_{xx}) \nabla H + \underline{\underline{S}}_{xy} \underline{u} \\ -\underline{y} = -\underline{\underline{S}}_{xy}^T \nabla H \end{cases} \quad (1.3.4)$$

où $\underline{\underline{R}}_{xx}$ est une matrice symétrique définie positive traduisant les dissipations du système. Le bilan de puissance s'écrit :

$$\underbrace{\dot{\underline{X}}^T \nabla H}_{\text{Puissance stockée}} - \underbrace{\underline{y}^T \underline{u}}_{\text{Puissance extérieure}} = \underbrace{\nabla H^T \underline{\underline{S}}_{xx} \nabla H}_{=0} - \underbrace{\nabla H^T \underline{\underline{R}}_{xx} \nabla H}_{\geq 0} = \underbrace{\nabla H^T \underline{\underline{R}}_{xx} \nabla H}_{\text{Puissance dissipée}}. \quad (1.3.5)$$

Dynamique d'un haut-parleur Le modèle le plus répandu pour représenter simplement la dynamique d'un haut-parleur est le modèle de Thiele et Small [6, 7, 8, 9]. Ce modèle linéaire approche le haut-parleur par un piston plan à basse fréquence ($ka \ll 1$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde, a le rayon du haut-parleur, ω la pulsation et c la célérité du son dans l'air). Ce modèle a fait l'objet d'une formalisation en SHP par Falaize et Hélie [5] qui ont également proposés des raffinements non linéaires (déformation des suspensions, ressorts non linéaires, modulation du flux électromagnétique).

Vibration des enceintes acoustiques La vibration des enceintes acoustiques a fait l'objet d'études dès les années 70, suite à l'observation d'une signature acoustique provenant des vibrations de l'enceinte. Les premières études ont porté sur des analyses modales expérimentales du système [10, 11]. Plus tard, le développement des méthodes numériques par

éléments finis et éléments de frontières [12] a permis d'analyser le comportement modal de ces systèmes par simulations [13]. On peut citer Cobianchi et Rousseau [14] pour une étude des efforts transmis par le haut-parleur à la structure et Nisula et Zhong [15, 16] pour des modèles vibro-acoustique couplés prenant en compte la dynamique de l'air dans l'enceinte.

Vibrations des plaques Pour modéliser la vibration des plaques, les modèles les plus connus sont le modèle de Kirchhoff-Love [17] qui est une adaptation 2D du modèle de vibration d'une poutre d'Euler-Bernouilli et le modèle de Reissner-Mindlin [18]. Ces modèles linéaires sont des approximations au premier ordre mais ont permis de mieux comprendre la dynamique des plaques et d'aboutir à des solutions analytiques approchées dépendant des conditions aux limites [19]. Pour des modèles plus raffinés, on peut citer entre autres la plaque non linéaire de Von Karman [20]. Récemment, les modèles de Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin ont été formalisés en SHP par Brugnoli et al. [21, 22]. Des simulations numériques ont été proposées en discrétisant les SHP à l'aide de la méthode des éléments finis mixtes.

Méthode des éléments finis Cette méthode est très réputée pour l'analyse vibratoire des structures. Elle permet de discréteriser un problème continu sur un maillage en utilisant des fonctions de projections spatiales faisant apparaître des systèmes matriciels. Cette méthode permet de trouver des solutions faibles en s'appuyant sur la méthode de Galerkin [23]. Parmi les nombreux logiciels permettant d'utiliser cette méthode, on citera *Fenics* [24] et *Firedrake* [25] pour leur intégration dans le langage de programmation Python.

Contrôle actif Le contrôle de structures par solutions actives existe sous plusieurs formes [26]. On citera la méthode de contrôle "feed-forward" qui consiste à prédire le comportement du système pour annuler l'effet non désiré à priori ([27], section 2.1). Pour améliorer ces systèmes, les méthodes par "feed-back" consistent à observer le comportement avec un capteur d'erreur et à le corriger à postériori en respectant des critères définis par l'utilisateur (par exemple, le contrôle LMS s'adapte pour minimiser l'erreur par une optimisation "Least Mean Squares" ou moindres carrés récursifs [28]). Récemment, ce type de contrôleur adaptatif a été utilisé pour contrôler les socles d'œuvres pour limiter leur dégradation [1]. Les SHP sont également très adaptés pour effectuer du contrôle car ils assurent la passivité du système et possèdent des propriétés de stabilité [29, 30].

1.4 Plan du rapport

Ce rapport s'organise de la façon suivante : dans le deuxième chapitre, on développe les modèles nécessaires pour modéliser la source vibratoire du haut-parleur et la propagation des efforts dans la plaque. Dans le troisième chapitre, on présente la stratégie de contrôle proposée et le modèle de la loi de commande. Enfin, on regroupe les travaux expérimentaux et les résultats obtenus sur les modèles développés et sur la structure de contrôle proposée dans le chapitre quatre.

Chapitre 2

Modélisations à passivité garantie

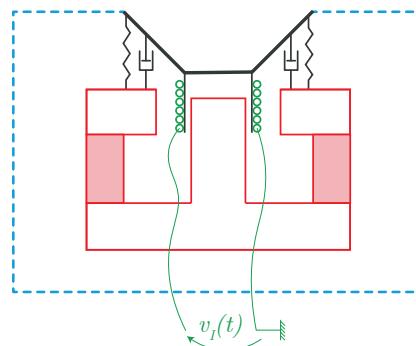
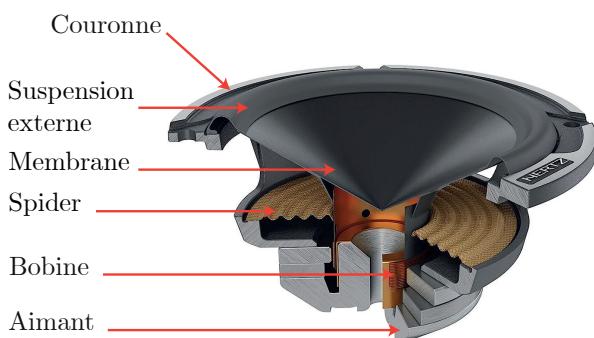
Ce chapitre a pour objectif d'expliciter les modélisations physiques nécessaires à la stratégie de contrôle proposée dans le chapitre trois. Les modèles sont décrits dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP) afin d'obtenir des simulations numériques temporelles à passivité garantie, d'être adaptables à des raffinements non linéaires et de pouvoir tirer profit de l'interconnexion de tels systèmes dans d'éventuels travaux futurs.

Nous présenterons dans un premier temps un modèle de haut-parleur relativement simple puis un modèle de plaque et sa discrétisation en éléments finis. Nous présenterons également quelques outils permettant de manipuler les SHP : description de la méthode du gradient discret pour conserver la passivité lors des simulations temporelles, proposition d'une méthode générale pour ajouter un amortissement de Rayleigh sur les SHP discrétisés en éléments finis et proposition d'une factorisation pour optimiser les temps de résolutions numériques en conservant des matrices creuses.

2.1 Modèles continus en Systèmes Hamiltoniens à Ports

2.1.1 Haut-parleur : modèle de Thiele & Small

L'objectif de ce paragraphe est d'exprimer la vitesse de la membrane d'un haut-parleur en fonction de sa tension d'entrée. Pour cela, on utilise le modèle de Thiele et Small. Dans ce qui suit, on reprend les travaux de [5] et nous présentons le modèle linéaire en guise d'exemple introductif à la mise en forme d'un SHP.



Modèle physique Les éléments constitutifs d'un haut-parleur sont illustrés figures 2.1.1 et 2.1.2. La membrane est attachée d'un côté à un bâti et de l'autre à un électroaimant. Elle est également reliée à une bobine qui repose dans le champ électromagnétique de l'aimant. Le principe de fonctionnement est le suivant : lorsqu'on impose une tension aux bornes de la bobine, un courant alternatif la traverse et la présence du champ magnétique fait osciller la bobine, entraînant la vibration de la membrane.

La partie mécanique du haut-parleur est modélisée par un système masse ressort amortisseur. On note $x(t)$ le déplacement de la membrane :

$$M_m \ddot{x}(t) + R_m \dot{x}(t) + K_m x(t) = f_l(t). \quad (2.1.1)$$

La masse M_m correspond à l'ensemble {bobine + diaphragme + masse acoustique}. La masse acoustique est la masse de l'air réparti sur la surface de la membrane. La raideur K_m est associée au spider, à la suspension externe et quand le haut-parleur est monté dans une enceinte, elle comprend également une raideur due à l'air dans la cavité. L'amortissement R_m traduit les amortissements dus aux frottements dans le dispositif et au rayonnement acoustique. La force de Lorentz $f_l(t)$ provient du couplage électromécanique avec la partie électrique.

La partie électrique du haut-parleur est modélisée par un simple circuit R-L série (résistance et bobine en série). On note $i_e(t)$ le courant dans la bobine et $v_I(t)$ la tension d'entrée du haut-parleur :

$$v_I(t) = v_l(t) + R_e i_e(t) + L_e \dot{i}_e(t). \quad (2.1.2)$$

R_e , L_e représentent respectivement la résistance et l'inductance de la bobine. $v_l(t)$ est la force contre électromotrice provenant du couplage électromécanique. Ce couplage se traduit par :

$$\begin{cases} v_l(t) = Bl\dot{x}(t) \\ f_l(t) = Bl i_e \end{cases}, \quad (2.1.3)$$

avec B_l un facteur de force supposé constant dû à l'électroaimant.

D'un point de vue énergétique, on écrit l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système :

$$E_c(t) = \frac{1}{2} M_m \dot{x}^2(t), \quad E_p(t) = \frac{1}{2} L_e i_e^2(t) + \frac{1}{2} K_m x^2(t). \quad (2.1.4)$$

Ecriture en Système Hamiltonien à Ports

Le Hamiltonien représente l'énergie stockée par le système soit :

$$H(t) = \frac{1}{2} M_m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} L_e i_e^2(t) + \frac{1}{2} K_m x^2(t). \quad (2.1.5)$$

On définit les variables d'état dans le vecteur d'état \underline{X} et le vecteur des efforts par le gradient du Hamiltonien en fonction de l'état. Le choix des variables de \underline{X} est arbitraire tant qu'il permet de traduire la dynamique du système. En pratique, on choisit les variables de sorte que le vecteur des efforts représente des efforts au sens mécanique du terme (force, vitesse...). On choisit :

$$\underline{X} = (L_e i_e(t), M_m \dot{x}(t), x(t))^T, \quad e = \frac{\partial H}{\partial \underline{X}} = (i_e(t), \dot{x}(t), K_m x(t))^T. \quad (2.1.6)$$

On relie \dot{X} à e et on ajoute une entrée u pour obtenir la structure différentielle réduite du SHP :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} L_e i_e \\ M_m \ddot{x} \\ \dot{x} \end{pmatrix}}_{\underline{X}} = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -B_l & 0 \\ B_l & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{J}} - \underbrace{\begin{pmatrix} R_e & 0 & 0 \\ 0 & R_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{R}} \right] \underbrace{\begin{pmatrix} i_e \\ \dot{x} \\ K_m x \end{pmatrix}}_{\underline{e}} + \underline{B} u \\ y = -\underline{B}^T \underline{e} \end{cases}. \quad (2.1.7)$$

Les deux premières équations de (2.1.7) représentent les équations électriques et mécaniques du système, la troisième est simplement une équation de compatibilité.

Nous avons désormais un modèle qui permet d'appliquer une tension aux bornes du haut-parleur et d'observer le courant au sens des entrées-sortie d'un SHP mais on peut également accéder à l'évolution de la vitesse dans le vecteur d'état. Ce modèle a fait l'objet d'une validation expérimentale dans le chapitre 4.

2.1.2 Vibration des plaques : Kirchhoff-Love et Reissner-Mindlin

L'objectif de ce paragraphe est de définir un modèle de plaque auquel on peut imposer un champ de force et observer la vibration résultante en un point quelconque en utilisant le formalisme des SHP. Soit une plaque de longueur L_x , de largeur L_y et d'épaisseur h représentée figure 2.1.3. On note $\xi(x, y, z, t) = (u, v, w)^T$ le vecteur déplacement. (u, v) représentent les déplacements longitudinaux (dans le plan de plaque) et w le déplacement transversal. On considère un matériau élastique linéaire isotrope de masse volumique ρ , de coefficient de poisson ν et de module d'Young E . On se place dans l'hypothèse des petites perturbations. On s'intéresse aux vibrations de la plaque suivant l'axe z soit à l'évolution de la quantité $w(x, y, z, t)$.

Modèle de Kirchhoff-Love et limitations

Parmi les modèles de vibration de plaques en flexion, un des plus utilisés est celui de Kirchhoff-Love correspondant à une adaptation 2D du modèle de vibration d'une poutre d'Euler-Bernoulli [17]. Ce modèle suppose que les fibres dans l'épaisseur restent normales à la surface de la plaque lors des déformations ce qui revient à négliger le cisaillement. Cela limite son application aux plaques fines (dont l'épaisseur h est très petite devant la longueur et la largeur : $h \ll L_x, L_y$). Ce modèle est très utilisé car il permet de réduire les équations de la dynamique à une seule équation du mouvement portant sur la composante transverse du déplacement $w(x, y, z, t)$. En effet, les hypothèses physiques de ce modèle se traduisent

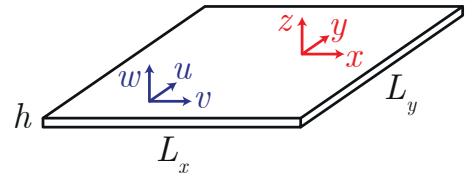


FIGURE 2.1.3 – Configuration de la plaque. (x, y, z) en rouge représente la paramétrisation des axes. (u, v, w) représente les composantes du déplacement.

par un champ de déplacement de la forme suivante :

$$u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x}(x, y, t), \quad v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y}(x, y, t), \quad w(x, y, z, t) = w(x, y, t). \quad (2.1.8)$$

On en déduit le tenseur des déformations linéarisé à partir du gradient de déplacement :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2} [\nabla(\underline{\xi}) + \nabla(\underline{\xi})^T] = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -z \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{xx}^2 w & \partial_{xy}^2 w & 0 \\ \partial_{xy}^2 w & \partial_{yy}^2 w & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathcal{K}}}, \quad (2.1.9)$$

où $\underline{\mathcal{K}}$ est appelé tenseur des courbures. La forme du tenseur des déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ indique des déformations planes et l'absence de cisaillement transverse comme mentionné plus tôt. Pour la suite, on décide d'utiliser la notation de Voigt qui permet d'écrire les tenseurs d'ordre deux sous la forme de vecteurs. Par exemple, le tenseur $\underline{\mathcal{K}}$ devient un vecteur $\underline{\mathcal{K}}$. On rajoute un facteur deux devant la composante croisée pour traduire la symétrie des tenseurs.

$$\underline{\underline{\mathcal{K}}} \longrightarrow \underline{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_{xx} = \partial_{xx}^2 w \\ \mathcal{K}_{yy} = \partial_{yy}^2 w \\ \mathcal{K}_{xy} = 2\partial_{xy}^2 w \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\epsilon}} \longrightarrow \underline{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = -z \underline{\mathcal{K}}. \quad (2.1.10)$$

La loi de Hooke permet d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction des déformations :

$$\underline{\sigma} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{E}}} \underline{\epsilon} = -z \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\mathcal{K}}. \quad (2.1.11)$$

On définit les moments par la relation suivante :

$$\underline{\mathcal{M}} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \underline{\sigma} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\mathcal{K}} dz = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\mathcal{K}}. \quad (2.1.12)$$

Pour une plaque isotrope, la relation entre moments et courbures devient précisément :

$$\underline{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{xx} \\ \mathcal{M}_{yy} \\ \mathcal{M}_{xy} \end{pmatrix} = D_0 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{xx} \\ \mathcal{K}_{yy} \\ \mathcal{K}_{xy} \end{pmatrix}}_{\underline{\mathcal{K}}}, \quad (2.1.13)$$

avec $D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. L'équation du mouvement transverse s'écrit dans le cas général :

$$\mu\ddot{w}(x, y, t) + \partial_{xx}^2 \mathcal{M}_{xx}(x, y, t) + 2\partial_{xy}^2 \mathcal{M}_{xy}(x, y, t) + \partial_{yy}^2 \mathcal{M}_{yy}(x, y, t) = f_{ext}(x, y, t) \quad (2.1.14)$$

avec f_{ext} une force extérieure par unité de surface. Dans l'hypothèse d'un matériau isotrope, cette équation se réécrit en fonction de w uniquement en utilisant les équations (2.1.13) et la définition des courbures (2.1.9) :

$$\ddot{w}(x, y, t) + \Delta^2 w(x, y, t) = f_{ext}(x, y, t) \quad (2.1.15)$$

avec $\Delta^2 = \partial_{xxxx}^4 + \partial_{xxyy}^4 + \partial_{yyyy}^4$ le bilaplacien.

Ce modèle permet d'exprimer la vibration en un point pour un champ de force donné et répond à l'objectif du paragraphe. Cependant, cette équation fait apparaître des dérivées quatrièmes en espace du déplacement $w(x, y, t)$, ce qui complique son utilisation en éléments finis car les éléments doivent être dérивables deux fois pour assurer la continuité des moments. Des éléments spécifiques à ce problème ont été construits par Bell [32] et sont disponibles à l'utilisation dans la librairie éléments finis Firedrake [25] sur Python mais les opérations basiques comme l'interpolation dans l'espace de Bell ne sont pas implémentées ce qui rend ce modèle complexe à manipuler d'un point de vue numérique. La réécriture du modèle en SHP et sa discréétisation en éléments finis ont fait l'objet d'un article [21] que nous avons réimplémenté mais nous utiliserons dans ce rapport un modèle plus général et plus simple à manipuler numériquement : le modèle de Reissner-Mindlin.

Modèle de Reissner-Mindlin

Contrairement au modèle précédent, le modèle de Reissner-Mindlin [18] prend en compte les déformations dues au cisaillement transverse et permet aux fibres dans l'épaisseur de dévier d'un angle faible dans les directions du plan : $\theta_x(x, y, t), \theta_y(x, y, t)$. C'est donc un modèle plus général qui peut s'appliquer aux plaques épaisses comme aux plaques fines. Pour ce modèle, la forme du déplacement est la suivante :

$$u(x, y, z, t) = -z\theta_x(x, y, t), \quad v(x, y, z, t) = -z\theta_y(x, y, t), \quad w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (2.1.16)$$

et mène au tenseur des déformations linéarisé $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (-1) \times \begin{pmatrix} z\partial_x\theta_x & \frac{z}{2}(\partial_y\theta_x + \partial_x\theta_y) & \frac{1}{2}(\partial_x w - \theta_x) \\ \text{sym} & z\partial_y\theta_y & \frac{1}{2}(\partial_y w - \theta_y) \\ \text{sym} & \text{sym} & 0 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} \underline{\underline{\epsilon}}_b & \underline{\underline{\epsilon}}_s \\ \underline{\underline{\epsilon}}_s^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.17)$$

avec $\underline{\underline{\epsilon}}_b$ le tenseur traduisant les déformations en flexion, $\underline{\underline{\epsilon}}_s = (\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz})^T$ un vecteur traduisant les déformations dues au cisaillement. En analogie au travail fait précédemment, on peut identifier les courbures $\underline{\underline{\mathcal{K}}}$ avec la partie plane du tenseur $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}_b = z[\underline{\nabla}(\theta) + \underline{\nabla}(\theta)^T] = z\underline{\underline{\mathcal{K}}} \quad (2.1.18)$$

et pour une plaque isotrope la relation (2.1.13) entre moments et courbures est conservée.

Remarque : le tenseur des courbures $\underline{\mathcal{K}}$ est exactement le même que pour le modèle de Kirchhoff, dans lequel on fait l'hypothèse que $\theta_x = \partial_x w$, $\theta_y = \partial_y w$.

Pour le cisaillement, la loi de Hooke s'exprime $\underline{\sigma}_s = -G\underline{\epsilon}_s$ avec $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. On désigne les moments en cisaillement par le vecteur \underline{q} :

$$\underline{q} = \int_{-h/2}^{h/2} -zk\underline{\sigma}_s = kGh\underline{\epsilon}_s \quad (2.1.19)$$

pour une plaque isotrope, avec $k = 5/6$ un facteur permettant de prendre en compte la rigidité de la plaque [18]. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on obtient les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} \rho h \ddot{w} = \text{div}(\underline{q}) \\ \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\theta} = \underline{q} + \text{div}(\underline{\mathcal{M}}) \end{cases} \quad (2.1.20)$$

i.e

$$\begin{cases} \rho h \ddot{w} = kGh(\partial_x \epsilon_{xz} + \partial_y \epsilon_{yz}) \\ \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\theta}_x = kGh \epsilon_{xz} + \partial_x \mathcal{M}_{xx} + \partial_y \mathcal{M}_{xy} \\ \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\theta}_y = kGh \epsilon_{yz} + \partial_x \mathcal{M}_{xy} + \partial_y \mathcal{M}_{yy} \end{cases} \quad (2.1.21)$$

En terme d'énergie, on écrit l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle de déformation E_p :

$$\begin{cases} E_c(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \rho \left[h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \partial_t (\theta_x^2 + \theta_y^2) \right] \\ E_p(x, y, z, t) = \frac{1}{2} \left[\underline{\mathcal{M}}^T \cdot \underline{\mathcal{K}} + kGh(\epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{yz}^2) \right] \end{cases} \quad (2.1.22)$$

Reissner-Mindlin en Système Hamiltonien à Ports

L'écriture du modèle de Reissner-Mindlin en SHP a déjà été proposée dans la littérature [22] dans une formulation utilisant des vecteurs et des tenseurs. Nous proposons ici une réécriture scalaire, plus lourde mais facile à mettre en oeuvre numériquement. Comme pour le haut-parleur, le point de départ est l'écriture du Hamiltonien :

$$H(t) = \int_{\Omega} \left[E_c(x, y, z, t) + E_p(x, y, z, t) \right] d\Omega. \quad (2.1.23)$$

Ensuite, on définit les variables d'état dans un vecteur d'état \underline{X} :

$$\underline{X} = \left(\rho h \dot{w}, \rho \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x, \rho \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y, \mathcal{K}_{xx}, \mathcal{K}_{yy}, \mathcal{K}_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz} \right)^T. \quad (2.1.24)$$

Le vecteur de flux \underline{e} s'obtient en dérivant le Hamiltonien par rapport à l'état (dérivée variationnelle) :

$$\underline{e} = \frac{\delta H}{\delta \underline{X}} = \left(\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y, \mathcal{M}_{xx}, \mathcal{M}_{yy}, \mathcal{M}_{xy}, kGh \epsilon_{xz}, kGh \epsilon_{yz} \right)^T. \quad (2.1.25)$$

La matrice d'interconnexion $\underline{\underline{J}}_\infty$ reliant la dérivée temporelle du vecteur d'état au vecteur de flux s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \rho h \ddot{w} \\ \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\theta}_x \\ \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\theta}_y \\ \dot{\mathcal{K}}_{xx} \\ \dot{\mathcal{K}}_{yy} \\ \dot{\mathcal{K}}_{xy} \\ \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yz} \end{pmatrix}}_{\dot{\underline{\underline{X}}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_x & \partial_y \\ 0 & 0 & 0 & \partial_x & 0 & \partial_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_y & \partial_x & 0 & 1 \\ 0 & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & \partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_x & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_y & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{J}}_\infty} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \\ \mathcal{M}_{xx} \\ \mathcal{M}_{yy} \\ \mathcal{M}_{xy} \\ kGh\epsilon_{xz} \\ kGh\epsilon_{yz} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{e}}} . \quad (2.1.26)$$

Les trois premières lignes de ce système correspondent aux trois équations du mouvement (2.1.21), les trois lignes suivantes rappellent l'expression des courbures $\underline{\mathcal{K}}$ en fonction de $\underline{\theta}$ (2.1.18) et les deux dernières rappellent l'expression de $\underline{\epsilon}_s$ (2.1.17).

Pour finaliser l'écriture du Système Hamiltonien à Ports, il reste à définir un port d'entrée et la sortie associée. Pour notre problème, on propose d'appliquer sur la plaque une force extérieure de flexion par unité de surface $f_{ext}(x, y, t)$. Le système se complète alors en :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{X}}} = \underline{\underline{J}}_\infty \underline{\underline{e}} + \underline{B} f_{ext} \\ y = -\underline{B}^T \underline{\underline{e}} \end{cases} \quad (2.1.27)$$

avec $\underline{B} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Ce système nous permet ainsi d'observer la vitesse \dot{w} en un point quelconque associée à un champ de force f_{ext} .

2.2 Discrétisation numérique des SHP

2.2.1 Discrétisation spatiale : éléments finis mixtes sur une plaque de Mindlin

Le système obtenu à la section précédente (équations (2.1.26), (2.1.27)) est continu en espace et en temps. Pour effectuer des simulations, nous allons le discréteriser en espace sur un maillage d'éléments triangulaire (voir exemple au chapitre quatre, figure 4.1.6) en appliquant la méthode des éléments finis mixtes (formulation faible puis projection sur des bases d'éléments finis indépendantes pour chaque variable d'état). Cette discrétisation suit la même méthode que [22] en utilisant uniquement des bases d'éléments finis scalaires.

Formulation faible Soient v_i , $i \in [1, \dots, 8]$ des fonctions de test quelconques et indépendantes. On multiplie chaque équation du système (2.1.26) par sa fonction de test associée

et on intègre sur le domaine pour obtenir la formulation faible. Par exemple, la formulation faible de la première ligne s'écrit :

$$\int_{\Omega} v_1 \dot{X}_1 d\Omega = \int_{\Omega} v_1 \partial_x e_7 d\Omega + \int_{\Omega} v_1 \partial_y e_8 d\Omega + \int_{\Omega} v_1 f_{ext} d\Omega. \quad (2.2.1)$$

Conditions aux limites La prise en compte de conditions aux limites homogènes est réalisée par l'intégration par partie de certaines équations de la formulation faible. Selon le type de conditions aux limites souhaitées on cherchera par exemple à imposer le déplacement transverse ou certaines de ses dérivées sur les bords du domaine. Ses variables étant définies dans le vecteur des efforts $e_i, i \in [1, \dots, 8]$, on fait apparaître ces termes au bord par intégration par partie d'une ou plusieurs équations de la formulation faible. Ces termes peuvent être ensuite définis comme des entrées du système pour effectuer du contrôle de frontières [22]. Pour imposer des conditions aux limites homogènes, on peut aussi directement annuler ces termes après intégration. Par exemple pour une condition de bords libres d'effort, les moments sont nuls. On intègre alors une fois par partie les trois premières équations et on annule directement les termes de bords :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} v_1 \dot{X}_1 d\Omega = - \int_{\Omega} \partial_x v_1 e_7 d\Omega - \int_{\Omega} \partial_y v_1 e_8 d\Omega + \int_{\Omega} v_1 f_{ext} d\Omega \\ \int_{\Omega} v_2 \dot{X}_2 d\Omega = - \int_{\Omega} \partial_x v_2 e_4 d\Omega - \int_{\Omega} \partial_y v_2 e_6 d\Omega + \int_{\Omega} v_2 e_7 d\Omega \\ \int_{\Omega} v_3 \dot{X}_3 d\Omega = - \int_{\Omega} \partial_y v_3 e_5 d\Omega - \int_{\Omega} \partial_x v_3 e_6 d\Omega + \int_{\Omega} v_3 e_8 d\Omega \end{cases}. \quad (2.2.2)$$

Les autres équations restent inchangées.

Projections Une fois le problème continu exprimé sous sa forme faible avec les conditions aux limites prises en compte, on effectue une projection de chaque variable d'état et des fonctions de test sur une base d'éléments finis $\underline{\Phi}_i(x, y)$:

$$X_i(x, y, t) \approx \underline{\Phi}_i(x, y)^T \underline{X}_{id}(t), \quad i \in \{1, \dots, 8\}. \quad (2.2.3)$$

Par exemple, la première équation de 2.2.2 s'écrit après projections :

$$\begin{aligned} \underline{v}_{1d}^T \int_{\Omega} \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_1^T d\Omega \dot{\underline{X}}_{1d} &= - \underline{v}_{1d}^T \int_{\Omega} \partial_x \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_7^T d\Omega e_{7d} - \underline{v}_{1d}^T \int_{\Omega} \partial_y \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_8^T d\Omega e_{8d} + \underline{v}_{1d}^T \int_{\Omega} \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_1^T d\Omega \underline{f}_{extd} \\ \implies \int_{\Omega} \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_1^T d\Omega \dot{\underline{X}}_{1d} &= - \int_{\Omega} \partial_x \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_7^T d\Omega e_{7d} - \int_{\Omega} \partial_y \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_8^T d\Omega e_{8d} + \int_{\Omega} \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_1^T d\Omega \underline{f}_{extd}. \end{aligned}$$

Après avoir projeté chaque équation, on obtient un système sous la forme :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{X}}_d(t) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_d(t) + \hat{\underline{\underline{B}}} \cdot \underline{f}_{extd}, \quad (2.2.4)$$

avec

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\underline{M}}_8 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{M}}_i = \int_{\Omega} \underline{\Phi}_i \underline{\Phi}_i^T d\Omega, \quad (2.2.5)$$

$\underline{\underline{D}} =$

$$\int_{\Omega} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_x \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_7^T & -\partial_y \underline{\Phi}_1 \underline{\Phi}_8^T \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_x \underline{\Phi}_2 \underline{\Phi}_4^T & 0 & -\partial_y \underline{\Phi}_2 \underline{\Phi}_6^T & \underline{\Phi}_2 \underline{\Phi}_7^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_y \underline{\Phi}_3 \underline{\Phi}_5^T & -\partial_x \underline{\Phi}_3 \underline{\Phi}_6^T & 0 & \underline{\Phi}_3 \underline{\Phi}_8^T \\ 0 & \underline{\Phi}_4 \partial_x \underline{\Phi}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\Phi}_5 \partial_y \underline{\Phi}_3^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\Phi}_6 \partial_y \underline{\Phi}_2^T & \underline{\Phi}_6 \partial_x \underline{\Phi}_3^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\Phi}_7 \partial_x \underline{\Phi}_1^T & -\underline{\Phi}_7 \underline{\Phi}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\Phi}_8 \partial_y \underline{\Phi}_1^T & 0 & -\underline{\Phi}_8 \underline{\Phi}_3^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\Omega \quad (2.2.6)$$

et $\hat{\underline{\underline{B}}} = (\underline{\underline{M}}_1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$.

Remarques :

- $\underline{\underline{M}}$ est symétrique car chaque $\underline{\underline{M}}_i$ est symétrique.
- $\underline{\underline{D}}$ est antisymétrique par construction.
- Choix des éléments finis : les bases de projection $\underline{\Phi}_i$ apparaissent au maximum dérivées une fois dans les matrices. On pourra donc choisir d'utiliser les éléments finis classiques de Lagrange d'ordre un ou supérieur ce qui simplifie les calculs numériques par rapport aux éléments de Bell (ordre cinq) pour la plaque de Kirchhoff-Love.

Système Hamiltonien à Ports discréteisé Le système (2.2.4) n'a pas encore une structure de système Hamiltonien à ports. L'article de Brugnoli [21] utilise une version co-énergie du système (relation entre $\dot{\underline{e}}$ et \underline{e}) et ne remonte pas à la structure SHP au sens de la relation flux-efforts (relation entre $\dot{\underline{X}}$ et \underline{e}). Nous proposons de retrouver cette structure dans le travail qui suit. Pour cela, on doit identifier le gradient du Hamiltonien du système discret. On repart du système continu dont on écrit la dérivée temporelle du Hamiltonien :

$$\dot{H}(t) = \left(\frac{\delta H}{\delta \underline{X}} \right)^T \frac{\delta \underline{X}}{\delta t} = \int_{\Omega} e_i \dot{X}_i d\Omega. \quad (2.2.7)$$

En projetant les variables continues sur les bases d'éléments finis on obtient la dérivée temporelle de l'Hamiltonien du système discret :

$$\dot{H}_d(t) = \left(\underline{e}_d^T \underline{\underline{M}} \right) \frac{\partial \underline{X}_d}{\partial t}. \quad (2.2.8)$$

Or, $\dot{H}_d(t) = \left(\frac{\partial H_d}{\partial \underline{X}_d} \right)^T \dot{\underline{X}}_d$ donc on identifie le gradient du Hamiltonien discret par :

$$\begin{aligned} \nabla H_d &= \frac{\partial H_d}{\partial \underline{X}_d} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{e}_d \quad (\text{car } \underline{\underline{M}} \text{ symétrique}) \\ \iff \underline{e}_d &= \underline{\underline{M}}^{-1} \nabla H_d. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ainsi, le système (2.2.4) discret se réécrit sous la forme d'un système Hamiltonien à Ports :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}_d(t) = \left(\underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1}}_{\underline{\underline{J}}_d} \right) \nabla H_d + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \\ \underline{y}_d = -\underline{\underline{B}}^T \nabla H_d \end{cases} \quad (2.2.10)$$

avec $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \hat{\underline{\underline{B}}} = (\underline{I}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T$. Désormais nous pouvons donc appliquer des forces sur les points d'un maillage à travers la variable \underline{u} et observer les vitesses résultantes dans la variable \underline{y}_d . Numériquement, nous aurons aussi accès à l'évolution de chaque chaque variable d'état, soit l'évolution temporelle de toutes les grandeurs du problème aux noeuds du maillage.

Remarque sur les dimensions :

- $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{J}}_d$ sont des matrices de taille $N \times N$
- \underline{X}_d , ∇H_d sont des vecteurs de taille N
- \underline{u} , \underline{y}_d sont des vecteurs de taille N_u
- $\underline{\underline{B}}$ est une matrice de taille $N \times N_u$

Simplifications linéaire Dans le cas des systèmes linéaires, le Hamiltonien est quadratique et peut s'écrire d'une manière simplifiée. Pour cela, comme précédemment, on repart du système continu et on réécrit le Hamiltonien (2.1.23) sous forme quadratique à partir des variables d'état :

$$H(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{X_1^2}{\rho h} + \frac{12}{\rho h^3} (X_2^2 + X_3^2) + \underline{\underline{M}}^T \cdot \underline{\mathcal{K}} + kGh(X_7^2 + X_8^2) \right] d\Omega. \quad (2.2.11)$$

L'écriture quadratique est triviale pour les trois premières et les deux dernières variable d'état mais il faut travailler un peu pour ce qui est des courbures et des moments. Tout d'abord, en utilisant la relation (2.1.13) en notation de Voigt et la symétrie de $\underline{\underline{D}}$, on peut écrire :

$$\underline{\underline{M}}^T \cdot \underline{\mathcal{K}} = (\underline{\mathcal{K}}^T \underline{\underline{D}}^T) \underline{\mathcal{K}} = \underline{\mathcal{K}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\mathcal{K}}. \quad (2.2.12)$$

Désormais, on applique les projections sur les bases d'éléments finis :

$$\underline{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \Phi_4^T & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_5^T & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_6^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_{4d} \\ \underline{X}_{5d} \\ \underline{X}_{6d} \end{pmatrix}. \quad (2.2.13)$$

Alors,

$$\underline{\mathcal{M}}^T \cdot \underline{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \underline{X}_{4d}^T & \underline{X}_{5d}^T & \underline{X}_{6d}^T \end{pmatrix} D_0 \begin{pmatrix} \underline{\Phi}_4 \underline{\Phi}_4^T & \nu \underline{\Phi}_4 \underline{\Phi}_5^T & 0 \\ \nu \underline{\Phi}_5 \underline{\Phi}_4^T & \underline{\Phi}_5 \underline{\Phi}_5^T & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \underline{\Phi}_6 \underline{\Phi}_6^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_{4d} \\ \underline{X}_{5d} \\ \underline{X}_{5d} \end{pmatrix}. \quad (2.2.14)$$

Finalement, en projetant le reste des variables de (2.2.11) on obtient la factorisation suivante :

$$H_d(t) = \frac{1}{2} \underline{X}_d^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\rho h} \underline{\underline{M}}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{\rho h^3} \underline{\underline{M}}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{\rho h^3} \underline{\underline{M}}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_0 \begin{pmatrix} \underline{\underline{M}}_4 & \nu \underline{\underline{M}}_{45} & 0 \\ \nu \underline{\underline{M}}_{45}^T & \underline{\underline{M}}_5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \underline{\underline{M}}_6 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kGh \underline{\underline{M}}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & kGh \underline{\underline{M}}_8 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \underline{X}_d \quad (2.2.15)$$

avec $\underline{\underline{M}}_{45} = \int_{\Omega} \underline{\Phi}_4 \underline{\Phi}_5^T d\Omega$. En dérivant le Hamiltonien par rapport à \underline{X}_d on a alors :

$$\nabla H_d = \underline{\underline{W}} \cdot \underline{X}_d. \quad (2.2.16)$$

Représentation d'état Dans le cas d'un système linéaire, on peut facilement retrouver une représentation d'état à partir de (2.2.10), (2.2.15) et (2.2.16) :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}_d = \underbrace{\underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underline{X}_d + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \\ \underline{y}_d = \underbrace{-\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}}_{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{X}_d \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Ainsi, on dispose des outils d'analyse classique des systèmes en espace d'état, tel que l'analyse des modes propres du système via les pôles et vecteurs propres de la matrice $\underline{\underline{A}}$.

2.2.2 Discrétisation temporelle : méthode du gradient discret

Maintenant que nous avons obtenu un système discret en espace, nous allons le discréteriser en temps afin de faire des simulations numériques temporelles. La méthode présentée (méthode du gradient discret) est déjà bien connue de la littérature et s'applique aux Systèmes

Hamiltoniens à Ports linéaires. Cette méthode permet de préserver le bilan de puissance numériquement. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [33], section 2.3.1 ou [34, 35]. On définit un maillage temporel tel que :

$$\begin{cases} t(k) = k\delta t \\ \underline{X}_d(k+1) = \underline{X}_d(k) + \delta \underline{X}_d(k) \end{cases} \quad (2.2.18)$$

pour $k \in \mathbb{Z}$. En utilisant la factorisation du Hamiltonien pour les systèmes linéaires (2.2.15) on obtient le gradient discrétisé entre deux instants $k, k+1$:

$$\nabla_d H_d(k, k+1) = \underline{\underline{W}} \cdot \left(\underline{X}_d(k) + \frac{\delta \underline{X}_d(k)}{2} \right). \quad (2.2.19)$$

On intègre cette discrétisation temporelle dans le système Hamiltonien (2.2.10) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \underline{X}_d(k)}{\delta t} &= \underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \left(\underline{X}_d(k) + \frac{\delta \underline{X}_d(k)}{2} \right) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \\ \iff \delta \underline{X}_d(k) &= \left(\frac{1}{\delta t} \underline{\underline{I}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{W}} \right)^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{X}_d(k) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \right). \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

On peut ainsi résoudre le système (2.2.18) à chaque pas de temps à partir d'une condition initiale sur \underline{X}_d . Le schéma obtenue est équivalent à la méthode du point milieu.

2.2.3 Optimisation des résolutions numériques

En pratique, l'équation (2.2.20) n'est pas optimisée numériquement car elle fait intervenir une matrice inverse. De plus, la matrice $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{W}}$ est dense ce qui rend le produit matriciel $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}_d(k)$ long à calculer à chaque pas de temps. Dans cette section, on propose une factorisation de la matrice $\underline{\underline{W}}$ et l'utilisation de la décomposition LU [36] pour améliorer les performances de résolution.

Pour un système linéaire isotrope discrétisé en éléments finis, la forme de $\underline{\underline{W}}$ dans l'équation (2.2.15) est factorisable par la matrice masse $\underline{\underline{M}}$ si on utilise la même base d'éléments finis pour chaque variable d'état :

$$\underline{\underline{W}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{W}}_b \quad (2.2.21)$$

où $\underline{\underline{W}}_b$ est la matrice $\underline{\underline{W}}$ où on remplace chaque matrice masse $\underline{\underline{M}}_{ij}$ par l'identité. A partir de (2.2.10), (2.2.16) et (2.2.21), le système se réécrit :

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{X}}_d = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{W}}_b \cdot \underline{X}_d + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \\ \underline{y}_d = -\underline{\underline{B}}^T \nabla H_d \end{cases} \quad (2.2.22)$$

avec $\underline{\underline{D}}$, $\underline{\underline{W}}_b$, $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{B}}$ des matrices creuses par construction. L'équation (2.2.20) peut alors s'écrire :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\delta t} \underline{\underline{M}} - \frac{1}{2} \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{W}}_b \right)}_{\underline{\underline{\Delta}}} \delta \underline{X}_d(k) = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{W}}_b \cdot \underline{X}_d(k) + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u}. \quad (2.2.23)$$

Cette réécriture fait apparaître uniquement des matrices creuses ce qui permet de calculer rapidement le second membre $\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{W}}_b \cdot \underline{X}_d(k)$ et d'obtenir une factorisation LU creuse de la matrice $\underline{\underline{\Delta}}$.

2.2.4 Amortissement de Rayleigh dans les SHP linéaires discrets

Les méthodes classiques utilisées avec la méthode des éléments finis ne sont pas toujours applicables aux SHP qui ont une structure différente. Par exemple, une méthode très répandue en éléments finis pour rajouter de l'amortissement à un système est celle de l'amortissement de Rayleigh [37, 38].

Soit un système discrétilisé en éléments finis de matrices masse, raideur, amortissement respectivement $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{K}}$ et $\underline{\underline{C}}$. La dynamique du système (sans force extérieure) se réduit à :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{X}} + \underline{\underline{C}} \cdot \dot{\underline{X}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{X} = 0. \quad (2.2.24)$$

La méthode de l'amortissement de Rayleigh consiste à modéliser les pertes à partir du système non amorti par :

$$\underline{\underline{C}} = a\underline{\underline{M}} + b\underline{\underline{K}}. \quad (2.2.25)$$

Cette méthode permet d'assurer que la forme des déformées modales n'est pas affectée par l'amortissement. Le coefficient a permet d'ajuster un amortissement constant en fréquence (enveloppe temporelle exponentielle décroissante), tandis que b traduit un amortissement qui augmente avec la fréquence. Nous proposons ici une méthode pour appliquer un amortissement de Rayleigh aux SHP linéaires discrétilisés en éléments finis et de remonter à la matrice $\underline{\underline{R}}$ exprimant l'amortissement dans le formalisme des SHP.

Soit un SHP non amorti linéaire discrétilisé en éléments finis sous forme différentielle réduite, dont on a factorisé le Hamiltonien suivant $H(t) = 1/2 \underline{X}^T \underline{\underline{W}} \underline{X}$. Alors

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}} = \underbrace{\underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{W}}}_{\underline{\underline{A}}} \underline{X} + \underline{\underline{B}} \underline{u} \\ \underline{y} = -\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{W}} \underline{X} \end{cases}. \quad (2.2.26)$$

Ce système matriciel peut alors se séparer en un certain nombre d'équations traduisant la dynamique du système, et le reste sont des équations de compatibilité reliant les états aux flux. On note N la taille du vecteur d'état, N_m le nombre d'équations associées à la dynamique du système et $N_c = N - N_m$ le nombre d'équations de compatibilité présentes dans le SHP. Par exemple, dans le cas du haut-parleur présenté ci-dessus (équation (2.1.7)), on a $N_m = 2$ équations du mouvement et $N_c = 1$ équation de compatibilité. Dans le cas de la plaque (équation (2.1.26)), on a $N_m = 3$ équations du mouvement et $N_c = 5$ équations de compatibilité définissant les relations entre moments et courbures.

Dans le cas général, on note \underline{X}_m le vecteur d'état réduit aux N_m premières variables traduisant la dynamique du système et \underline{X}_c le reste. Alors, le système (2.2.26) s'écrit, en séparant les équations de la dynamique des équations de compatibilité :

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{X}}_m \\ \dot{\underline{X}}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_m} & \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_c} \\ \hline \underline{\underline{A}}_{N_c \times N_m} & \underline{\underline{A}}_{N_c \times N_c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X}_m \\ \underline{X}_c \end{pmatrix}. \quad (2.2.27)$$

La partie traduisant la dynamique du système s'écrit alors :

$$\dot{\underline{X}}_m = \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_m} \underline{X}_m + \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_c} \underline{X}_c. \quad (2.2.28)$$

On remarque alors une équation similaire à celle des éléments finis classiques (2.2.24) sauf qu'elle porte sur la dérivée première de \underline{X}_m et qu'il reste une variable \underline{X}_c .

En réalité, le vecteur $\dot{\underline{X}}_m$ est associé à des variables d'accélération (pour les systèmes mécaniques). On peut observer la deuxième ligne du SHP du haut-parleur (2.1.7) ou les trois premières lignes du SHP de la plaque (2.1.26) pour s'en convaincre. On peut donc réadapter l'écriture du système (2.2.28) en faisant apparaître un vecteur d'état $\tilde{\underline{X}}_m = \int_{\infty} \underline{X}_m dt$ associé naturellement à la position plutôt qu'à la vitesse. Le système devient alors :

$$\ddot{\underline{X}}_m = \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_m} \dot{\underline{X}}_m + \underline{\underline{A}}_{N_m \times N_c} \underline{X}_c. \quad (2.2.29)$$

Pour ce qui est du vecteur \underline{X}_c , si $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{M}}^{-1}$ comme défini plus haut (2.2.10), alors on observe dans la pratique qu'il existe $\underline{\underline{\gamma}}$ diagonale, dépendant uniquement des paramètres physiques structurels tel que :

$$\underline{X}_c = \underline{\underline{D}}_{N_c \times N_m} \underline{\underline{\gamma}} \tilde{\underline{X}}_m \quad (2.2.30)$$

où $\underline{\underline{D}}_{N_c \times N_m}$ correspond à la matrice $\underline{\underline{D}}$ réduite aux N_c dernières lignes et N_m premières colonnes. Pour $\underline{\underline{\gamma}}$, dans le cas de la plaque de Mindlin on a :

$$\underline{\underline{\gamma}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho h} \underline{\underline{I}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{\rho h^3} \underline{\underline{I}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{\rho h^3} \underline{\underline{I}} \end{pmatrix}. \quad (2.2.31)$$

On remarquera que $\underline{\underline{\gamma}}$ représente les trois premiers blocs ligne et colonne de $\underline{\underline{W}}_b$ (2.2.21). Dans ce cas, l'équation (2.2.29) devient :

$$\underbrace{\underline{\underline{M}}}_{\tilde{\underline{\underline{M}}}} \cdot \ddot{\underline{X}}_m + \underbrace{(-\underline{\underline{A}}_{N_m \times N_m})}_{\tilde{\underline{\underline{C}}}} \dot{\underline{X}}_m + \underbrace{(-\underline{\underline{A}}_{N_m \times N_c} \cdot \underline{\underline{D}}_{N_c \times N_m} \underline{\underline{\gamma}})}_{\tilde{\underline{\underline{K}}}} \tilde{\underline{X}}_m = 0. \quad (2.2.32)$$

On peut alors définir un amortissement de Rayleigh en imposant :

$$\tilde{\underline{\underline{A}}}_{N_m \times N_m} = -(a \tilde{\underline{\underline{M}}} + b \tilde{\underline{\underline{K}}}). \quad (2.2.33)$$

Et on peut remonter à la matrice $\underline{\underline{R}}$ du formalisme des SHP en supposant pour un système amorti :

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{J}}_{N_m \times N_m} - \underline{\underline{R}}_{N_m \times N_m}) \underline{\underline{W}}_{N_m \times N_m} &= \tilde{\underline{\underline{A}}}_{N_m \times N_m} \\ \iff \underline{\underline{R}}_{N_m \times N_m} &= \underline{\underline{J}}_{N_m \times N_m} - \tilde{\underline{\underline{A}}}_{N_m \times N_m} \underline{\underline{W}}_{N_m \times N_m}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Et le reste de la matrice $\underline{\underline{R}}$ est nul.

Chapitre 3

Contrôle actif

Dans cette partie, on présente les méthodes de contrôle actif proposées pour atténuer les vibrations transmises au bâti par le système {haut-parleur + plaque} (illustré figure 3.0.1). On fait l'hypothèse que la plaque est en contact avec un bâti au moyen de quatre supports mécaniquement représentés par des appuis simples ponctuels. On dispose quatre capteurs sur le bâti, juste à côté des pieds (là où l'on souhaiterait supprimer la vibration).

On se place dans le cadre de l'automatique linéaire (pas d'opération non linéaire sur les signaux, pas d'effet non linéaire dans les transducteurs...). La stratégie proposée, appelée feed-forward, se base sur la connaissance à priori de la source primaire : la tension envoyée au haut-parleur. On dispose quatre sources secondaires (actionneurs) au dessus des pieds sur la plaque, de façon à ce que chaque actionneur soit le plus proche possible du capteur associé (contrôle feed-forward colocalisé) (voir illustration figure 3.0.2).

Dans un premier temps, nous allons utiliser les modèles développés dans le chapitre précédent pour déterminer la loi de commande idéale à envoyer aux actionneurs (feed-forward optimal). Ensuite, nous présenterons une stratégie de contrôleur adaptatif ayant pour objectif de pallier aux limites de la modélisation pour un contrôle en situation réelle.

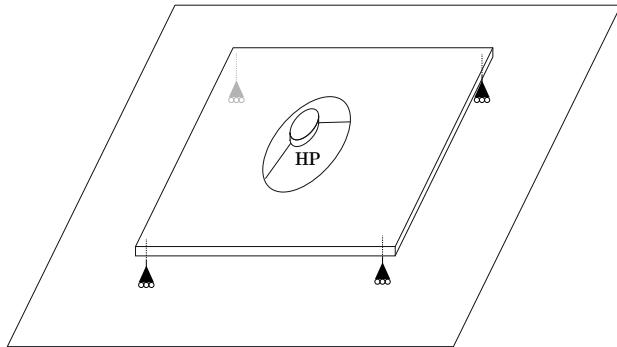


FIGURE 3.0.1 – Système à contrôler : haut-parleur connecté à une plaque simplement supportée en ses quatre coins.

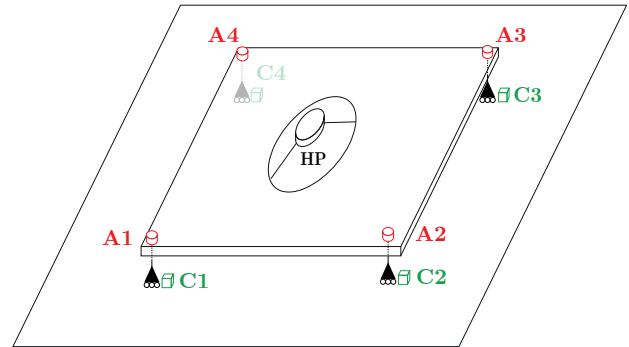


FIGURE 3.0.2 – Proposition de contrôle du système par quatre paires d'actionneurs (A_i)/capteurs (C_i).

3.1 Contrôle feed-forward optimal

3.1.1 Structure de contrôle

La source primaire (tension d'entrée du haut-parleur) pouvant être mesurée, nous choisissons une structure de contrôle actif feed-forward [39, 26, 27]. Le système de contrôle possède quatre entrées (mesure des capteurs) et quatre sorties (quatre actionneurs), ce qui en fait

un système MIMO (Multi Input Multi Output). En première approche, nous considérons que chaque couple actionneur/capteur est indépendant et on se limite à l'étude d'un seul couple (SISO). Cette hypothèse est faite en supposant le système parfaitement symétrique (plaqué rectangulaire, haut-parleur centré et actionneurs aux coins). On représente le schéma de contrôle feed-forward figure 3.1.1. La source primaire est convertie par le haut-parleur en une vibration qui se propage dans la plaque jusqu'au capteur d'erreur (chemin primaire P). La contribution de cette vibration dans le signal mesuré par les capteurs est appelée bruit primaire et notée $d(t)$. D'autre part, le filtre de contrôle W prend comme entrée la source primaire et calcule la commande à envoyer aux actionneurs pour minimiser la mesure des capteurs. Cette commande est appliquée par les actionneurs et se propage jusqu'au support (chemin secondaire H). La contribution de cette vibration dans le signal mesuré par le capteur est notée $y(t)$. Nous ferons en sorte que l'actionneur et le capteur soient le plus proches possible afin de limiter la propagation entre les deux et de réduire le chemin secondaire à la relation entrée-sortie de l'actionneur. Dans une première approche, on supposera que ce transducteur est transparent sur la bande de fréquence considérée.

Remarque En pratique, les transducteurs sont rarement transparents et leur réponse en phase peut perturber les performances du contrôle. Néanmoins, les méthodes utilisées dans la suite sont adaptables à un chemin secondaire non transparent et on ajoutera une remarque pour la prise en compte de cette fonction de transfert dans de futurs travaux.

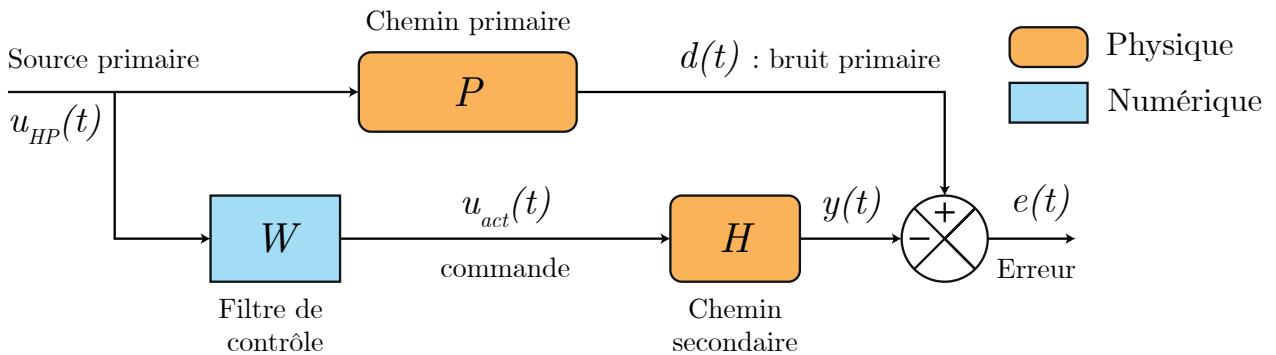


FIGURE 3.1.1 – Contrôle feed-forward pour un couple actionneur/capteur. Les blocs orange correspondent à un filtrage des signaux par un système physique réel. Le bloc en bleu correspond à un filtre numérique.

3.1.2 Filtre de contrôle : modélisation du chemin primaire

Pour réaliser le contrôle feed-forward, nous proposons de modéliser un filtre de contrôle W le plus proche possible du chemin primaire P . Le contrôle sera optimal si $W = P$ i.e si notre modèle traduit parfaitement la réalité.

Pour modéliser le chemin primaire P , on suppose que le bruit primaire représente la force de réaction au niveau de l'appui simple (supposé parfait). Un appui simple ponctuel parfait permet de bloquer le déplacement mais génère une force de réaction au niveau du contact. Cette force est ensuite transmise au bâti par l'intermédiaire du support. On supposera dans

un premier temps que les supports ont une réponse transparente sur la bande de fréquence considérée et qu'ils agissent simplement comme une adaptation d'impédance entre la force de réaction et l'accélération colocalisée au niveau du bâti.

Le système que l'on souhaite modéliser (W) peut se séparer en plusieurs sous systèmes (voir figure 3.1.2). Le premier sous système représente le modèle de haut-parleur développé dans le chapitre deux (2.1.7). Il prend comme entrée la tension du haut-parleur et renvoie la vitesse de la membrane. Le deuxième sous système est un modèle boîte noire et correspondrait à une mesure de la fonction de transfert entre la vitesse de la membrane et la force appliquée à la couronne du haut-parleur (cette mesure pourra éventuellement être remplacée par un modèle physique dans la suite des travaux). En pratique, cette mesure peut être délicate ou inaccessible et il peut être plus simple de réunir les deux premiers sous système en une seule mesure (pointillés bleus figure 3.1.2). Nous supposerons que la force obtenue est celle exercée uniformément par le haut-parleur sur les bords d'un maillage de plaque trouée (cela suppose le haut-parleur symétrique et un contact parfait) (exemple de maillage dans le chapitre quatre, figure 4.2.3). Le dernier sous-système prend en entrée les forces aux bords du trou exercées par la couronne du haut-parleur sur la plaque et doit renvoyer les forces de réactions aux niveau des supports. Pour cela, on utilise le modèle de vibration d'une plaque libre présenté dans le chapitre deux (2.2.10) auquel nous allons rajouter des multiplicateurs de Lagrange pour réaliser un appuis simple idéal aux quatre coins et extraire les forces de réactions d'une telle liaison.

Remarque Pour prendre en compte le chemin secondaire en pratique, cette approche nécessite d'inverser la mesure du chemin secondaire H . Cette inversion n'est pas triviale car elle doit respecter la causalité du système qui n'est en général pas à phase linéaire. Une solution est d'identifier la mesure à un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) à phase minimale [40] en introduisant une erreur d'identification qui peut limiter les performances de contrôle.

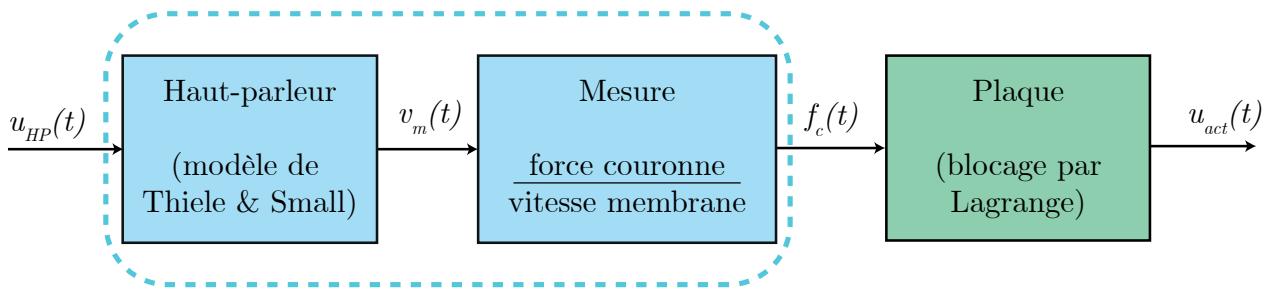


FIGURE 3.1.2 – Sous systèmes modélisés par le filtre de contrôle W . u_{HP} représente la tension d'entrée du haut-parleur, v_m la vitesse de la membrane, f_c la force appliquée à la couronne sur la plaque et u_{act} la tension d'entrée de l'actionneur idéal pour annuler les vibrations.

Loi de commande par multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange représentent les forces à appliquer à un système pour lui imposer des contraintes cinématiques. Pour notre problème, on cherche les forces à transmettre par les actionneurs (= multiplicateur de Lagrange) afin d'annuler la vitesse aux points

de contrôle (= contrainte cinématique). L'introduction de ces multiplicateurs dans des SHP a déjà fait l'objet d'études dans la littérature et nous nous appuierons sur les travaux de Van der Schaft et Cardoso-Ribeiro [41, 42].

A partir du système obtenu en (2.2.10), on décide d'imposer une vitesse nulle aux quatre points de contrôle de coordonnées $(x_i, y_i), i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\dot{w}(x_i, y_i, t) = e_1(x_i, y_i, t) = 0, \quad \forall t, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3.1.1)$$

On effectue les projections sur les bases d'éléments finis :

$$\underline{\Phi}_1^T(x_i, y_i) \underline{e}_{1d}(t) = 0, \quad \forall t, \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (3.1.2)$$

Et on obtient le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{\Phi}_1^T(x_1, y_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\Phi}_1^T(x_2, y_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\Phi}_1^T(x_3, y_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\Phi}_1^T(x_4, y_4) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{B}}_L} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{e}_{1d} \\ \vdots \\ \underline{e}_{8d} \\ \vdots \\ \underline{e}_d \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{e}}_d} = \underline{0} \iff \underline{\underline{B}}_L \cdot \underline{\underline{M}}^{-1} \nabla H_d = \underline{0}, \quad (3.1.3)$$

d'après (2.2.9). On ajoute une équation au système libre (2.2.10) pour imposer les contraintes cinématique selon (3.1.3) et on introduit les multiplicateurs de Lagrange λ [42] :

$$\begin{cases} \dot{\underline{X}}_d &= \underline{\underline{J}}_d \nabla H_d + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} + \underline{\underline{G}} \cdot \lambda \\ \underline{y} &= -\underline{\underline{B}}^T \nabla H_d \\ \underline{0} &= \underline{\underline{G}}^T \nabla H_d \end{cases}, \quad (3.1.4)$$

avec $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{M}}^{-T} \underline{\underline{B}}_L^T$ d'après (3.1.3). $\underline{\underline{G}}$ est de taille $N \times N_\lambda$, avec $N_\lambda = 4$ dans notre cas précis. Le vecteur λ (taille N_λ) contient alors les quatre forces nécessaires à appliquer aux points de contrôle pour que le système vérifie l'équation de contrainte (troisième ligne) i.e pour assurer que la vitesse est nulle à tout instant en ces points. λ est donc une inconnue dans ce problème et contient l'information à transmettre aux actionneurs idéals pour réaliser le contrôle feed-forward optimal. Nous allons désormais effectuer un changement de variable proposé par [41] (paragraphe 4.3.2.1) afin d'éliminer les multiplicateurs de Lagrange et de résoudre le système. On extraira dans un second temps la valeur de $\lambda(t)$.

Changement de variable On pose le changement de variable suivant :

$$\underline{z} = \underline{\underline{M}}_L \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{X}_d, \quad \underline{\underline{M}}_L = \begin{pmatrix} (\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp \\ (\underline{\underline{B}}_L \underline{\underline{B}}_L^T)^{-1} \underline{\underline{B}}_L \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

où $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ est une matrice dite "annihilatrice à gauche" de $\underline{\underline{B}}_L^T$, i.e $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp \cdot \underline{\underline{B}}_L^T = \underline{0}$, de taille $(N - N_\lambda) \times N$. Pour mener à bien le changement de variable, il est nécessaire que $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ soit

de rang plein car $\underline{\underline{M}}_L$ subira une inversion. On donne l'expression de $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ dans le cas de la plaque de Reissner-Mindlin à la fin du paragraphe pour faciliter la lecture. Après changement de variable (voir paragraphe 4.3.2.1 de [41] pour plus de détails), le système Hamiltonien à port se réécrit :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}} = \underbrace{\underline{\underline{M}}_L \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{M}}_L}_{\underline{\underline{J}}_z} \nabla_{\underline{z}} H_d + \underbrace{\underline{\underline{M}}_L \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{B}}_z} \cdot \underline{u} + \begin{pmatrix} \underline{0}_{N-N_\lambda \times N_\lambda} \\ \underline{I}_{N_\lambda \times N_\lambda} \end{pmatrix} \cdot \underline{\lambda} \\ \underline{y}_d = -(\underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{M}}_L^T \underline{\underline{M}}) \cdot \nabla_{\underline{z}} H_d \\ \underline{0} = \begin{pmatrix} \underline{0}_{N-N_\lambda \times N_\lambda} & \underline{I}_{N_\lambda \times N_\lambda} \end{pmatrix} \nabla_{\underline{z}} H_d \end{cases} \quad (3.1.6)$$

avec $\nabla_{\underline{z}} H_d = \underline{\underline{M}}_L^{-T} \underline{\underline{M}}^{-1} \nabla_x H_d$.

Remarques

- On peut simplifier l'écriture de $\underline{\underline{J}}_z$ en rappelant que $\underline{\underline{J}}_d = \underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{M}}^{-1}$ d'après (2.2.10), alors $\underline{\underline{J}}_z = \underline{\underline{M}}_L \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{M}}_L$.
- Ce changement de variable permet d'isoler les N_λ équations faisant apparaître l'inconnue $\underline{\lambda}$.

Pour éliminer les multiplicateurs de Lagrange, il reste à séparer la variable \underline{z} en deux : $\underline{z} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2)^T$, avec \underline{z}_1 de taille $(N - N_\lambda)$ et \underline{z}_2 de taille N_λ . Le système devient :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\underline{z}}_1 \\ \dot{\underline{z}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{J}}_{z_11} & \underline{\underline{J}}_{z_12} \\ -\underline{\underline{J}}_{z_12}^T & \underline{\underline{J}}_{z_22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{z_1} H_d \\ \nabla_{z_2} H_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_{z_1} \\ \underline{\underline{B}}_{z_2} \end{pmatrix} \underline{u} + \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{\lambda} \end{pmatrix} \\ \underline{y}_d = \begin{pmatrix} \underline{\underline{B}}_{z_1}^T & \underline{\underline{B}}_{z_2}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{z_1} H_d \\ \nabla_{z_2} H_d \end{pmatrix} \\ \underline{0} = \begin{pmatrix} \underline{0}_{N-N_\lambda \times N_\lambda} & \underline{I}_{N_\lambda \times N_\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{z_1} H_d \\ \nabla_{z_2} H_d \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

La troisième équation impose $\nabla_{z_2} H_d = \underline{0}$. En utilisant les simplifications linéaires habituelles et en suivant la démarche proposée par Cardoso-Ribeiro on aboutit à :

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}_1 = \underbrace{\underline{\underline{J}}_{z_11} \cdot (\underline{\underline{W}}_{z_11} - \underline{\underline{W}}_{z_12} \cdot \underline{\underline{W}}_{z_22}^{-1} \cdot \underline{\underline{W}}_{z_21})}_{\underline{\underline{A}}_z} \underline{z}_1 + \underline{\underline{B}}_{z_1} \underline{u} \\ \underline{y}_d = \underline{\underline{B}}_{z_1}^T \nabla_{z_1} H_d \\ \underline{0} = \nabla_{z_2} H_d \end{cases}, \quad (3.1.8)$$

avec $\underline{\underline{W}}_z = \underline{\underline{M}}_L^{-T} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{W}} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{M}}_L^{-1}$ et :

$$\underline{z}_2 = (-\underline{\underline{W}}_{z_22}^{-1} \cdot \underline{\underline{W}}_{z_21}) \cdot \underline{z}_1. \quad (3.1.9)$$

Le schéma numérique final pour résoudre le système avec les contraintes se résume ainsi aux étapes suivantes :

- Résolution du système (3.1.8) sur \underline{z}_1 par la méthode du gradient discret présentée section 2.2.2.
- Calcul de \underline{z}_2 à partir de \underline{z}_1 par (3.1.9).
- Concaténation pour recréer le vecteur $\underline{z} = (\underline{z}_1, \underline{z}_2)^T$.
- Calcul de \underline{X}_d à partir de \underline{z} par (3.1.5).

Matrice annihilatrice à gauche pour la plaque de Reissner-Mindlin On rappelle les conditions portant sur $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ dans l'équation (3.1.5) :

1. $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ doit être de taille $(N - N_\lambda) \times N$.
2. $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp \cdot \underline{\underline{B}}_L^T = \underline{\underline{0}}$.
3. $(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp$ doit être de rang plein soit de rang $(N - N_\lambda)$.

Dans le cas de la plaque de Mindlin, on utilise les éléments finis de Lagrange d'ordre un (interpolateur linéaire). Cela signifie que les fonctions de base $\Phi_1^T(x_i, y_i)$ sont simplement des vecteurs de la forme $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le "1" est positionné à l'indice du point de coordonnées (x_i, y_i) dans le maillage. On note N_{L1} la taille d'un vecteur de base de sorte que la taille totale du système comprenant huit variables d'état (chacune discrétisée sur un espace de Lagrange d'ordre un) soit $N = 8N_{L1}$. Ainsi, la matrice $\underline{\underline{B}}_L^T$ (3.1.5) que nous devons annuler s'écrit (la position des "1" traduisant la colonne associée au noeud contraint est donnée ici à titre illustratif mais montre qu'ils ne sont pas alignés sur la même colonne) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_L^T &= \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)^T \quad \underline{\underline{0}}_{N_\lambda \times 7N_{L1}} \\ &= \left(\begin{array}{c|c} Q_{N_\lambda \times N_{L1}}^T & \underline{\underline{0}}_{N_\lambda \times 7N_{L1}}^T \end{array} \right)^T. \end{aligned}$$

Après transposition, cette matrice est de taille $N \times N_\lambda$, le premier bloc Q est de taille $N_{L1} \times N_\lambda$ et l'autre contenant uniquement des zéros est de taille $7N_{L1} \times N_\lambda$. On propose la décomposition par bloc de la matrice annihilatrice à gauche suivante :

$$(\underline{\underline{B}}_L^T)^\perp = \left(\begin{array}{c|c} P_{(N_{L1}-N_\lambda) \times N_{L1}} & \underline{\underline{0}}_{(N_{L1}-N_\lambda) \times 7N_{L1}} \\ \hline \underline{\underline{0}}_{7N_{L1} \times N_\lambda} & I_{7N_{L1} \times 7N_{L1}} \end{array} \right). \quad (3.1.10)$$

En suivant cette décomposition, on valide le premier critère portant sur la taille de la matrice.

De plus, le produit matriciel $(\underline{B}_L^T)^\perp \cdot \underline{B}_L^T$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (\underline{B}_L^T)^\perp \cdot \underline{B}_L^T &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}_{(N_{L1}-N_\lambda) \times N_{L1}} \cdot \underline{\underline{Q}}_{N_{L1} \times N_\lambda} + \underline{\underline{0}}_{(N-N_\lambda) \times 7N_{L1}} \cdot \underline{\underline{0}}_{7N_{L1} \times N_\lambda} \\ \underline{\underline{0}}_{7N_{L1} \times N_{L1}} \cdot \underline{\underline{Q}}_{N_{L1} \times N_\lambda} + \underline{\underline{I}}_{7N_{L1} \times 7N_{L1}} \cdot \underline{\underline{0}}_{7N_{L1} \times N_\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \underline{\underline{P}}_{(N_{L1}-N_\lambda) \times N_{L1}} \cdot \underline{\underline{Q}}_{N_{L1} \times N_\lambda} \\ \underline{\underline{0}}_{7N_{L1} \times N_\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Ainsi, pour valider les deux derniers critères, il faut et il suffit que $\underline{\underline{P}}$ soit de rang plein et que $\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{Q}}$ soit nul. On propose $\underline{\underline{P}}$ de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ddots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & \vdots & 1 & & \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right). \quad (3.1.12)$$

Où chaque colonne de zéros est positionnée à l'indice du point bloqué dans le maillage (i.e l'indice où il y a un "1" dans le vecteur de base). De cette manière, le produit matriciel de $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{Q}}$ est nul. De plus, le rang de cette matrice est bien $(N - N_\lambda)$ car seulement les N_λ colonnes nulles peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires les unes des autres. La matrice $\underline{\underline{P}}$ étant de taille $(N - N_\lambda)$, $\underline{\underline{P}}$ est de rang plein.

Extraction de λ Une fois que le vecteur \underline{X}_d est calculé à chaque instant, on se réfère à la méthode présentée dans la thèse de Cardoso-Ribeiro [41] (paragraphe 4.3.2.2) pour extraire $\lambda(t)$ dans le cas où le système est linéaire :

$$\lambda = -(\underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{G}})^{-1} \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{W}} \left(\underline{\underline{J}}_d \cdot \underline{\underline{W}} \cdot \underline{X}_d + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{u} \right). \quad (3.1.13)$$

L'équation (3.1.13) clôture la première partie du travail d'obtention du filtre de contrôle. Nous avons désormais accès aux forces à appliquer par l'actionneur idéal pour annuler la vibration aux points de contrôle (bloc vert de la figure 3.1.2). Ceci finalise le travail du filtre de contrôle modélisé \underline{W} .

3.1.3 Limites du feed-forward optimal par modèle

L'approche proposée fonctionnerait dans le cas idéal où le chemin primaire est parfaitement identique au chemin passant par le filtre de contrôle puis l'actionneur idéal. Cependant, il existe de nombreuses sources d'erreurs n'ayant pas été prises en compte lors des modélisations qui risquent de rendre ces chemins différents et de limiter les performances du contrôle.

Imperfections géométriques Le filtre de contrôle construit suppose à plusieurs reprise une symétrie parfaite de la géométrie du système qui ne peut être satisfaite dans la réalité (force du haut-parleur sur la plaque symétrique, trou dans la plaque parfaitement rond et parfaitement centré, position des supports parfaitement symétrique). Une autre source d'erreur géométrique peut provenir de l'imperfection de la géométrie du bâti. Si le bâti est une table ou un sol pas parfaitement plat, le système n'est plus symétrique et des forces de réactions différentes devront s'appliquer aux points de supports. Tous les contacts mécaniques sont également supposés parfait ce qui ne peut être le cas en réalité.

Non-linéarités Il existe en réalité des sources de non-linéarités non prises en compte dans notre filtre de contrôle. Des modèles non linéaires plus raffinés pourraient être utilisés dans la suite comme le modèle de Von Karman pour la vibration des plaques [20]. Les zones de contact sont également sources de non linéarités en pratique. Notons cependant que la stratégie de contrôle proposée suppose des systèmes linéaires et qu'il faudrait également l'adapter pour prendre en compte les non-linéarités des systèmes (automatique non linéaire).

Le filtre de contrôle utilise une boîte noire obtenue par la mesure. Il est supposé que le système est linéaire et nous lui appliquons des opérations en conséquence (déconvolution dans le domaine fréquentiel par transformée de Fourier). Si le système est non linéaire en réalité, ces opérations et le système obtenu peuvent être sources d'erreurs.

Bruit et incertitude de mesure Pour ce qui est des mesures, nous utilisons du matériel professionnel précis (voir protocoles du chapitre 4). Cependant, il reste toujours une incertitude dans la mesure en raison de la précision de l'équipement utilisé. De plus, les mesures ne seront pas menées dans des conditions optimales (salle avec ventilation, nombreux appareils électriques...) et on observera nécessairement un bruit de mesure dans les capteurs d'erreur. Nous répéterons nos mesures pour tenter d'améliorer le rapport signal bruit par moyennage mais nous ne pouvons négliger cette source d'erreur.

Précision numérique Le modèle de plaque se base sur une discrétisation en éléments finis sur un maillage discret avec un nombre de noeuds finis. Si le nombre de points de ce maillage est très grand, la précision du système sera bonne mais il sera très lourd à résoudre numériquement. Nous devrons trouver un compromis afin d'avoir un système qui représente au mieux la réalité et qui reste manipulable numériquement. Ceci représente donc une nouvelle source d'erreur.

Acoustique L'approche proposée néglige l'acoustique du système et se concentre sur les vibrations générées par les interactions mécaniques entre sous systèmes. Cependant, dans

notre montage expérimental, le haut-parleur est dirigé vers le bâti. Les ondes acoustiques générées par le haut-parleur peuvent générer des vibrations solidiennes dans le bâti que l'on devrait mesurer dans les capteurs d'erreurs. Il se pourrait également que la première réflexion de ces ondes influent les vibrations transverse de la plaque.

Pour toutes ces raisons, un contrôle actif simplement basé sur la structure proposée jusqu'alors ne peut être robuste en pratique. Dans la suite, on propose d'ajuster en temps réel la commande envoyée à l'actionneur en fonction de l'erreur restante provenant des éléments indiqués ci-dessus.

3.2 Contrôle adaptatif

On ajoute une boucle prenant en considération l'erreur mesurée au bâti pour adapter les coefficients du filtre de contrôle W développé section 3.1.2 selon un Algorithme d'Adaptation des Paramètres (AAP) (figure 3.2.1). La procédure d'adaptation la plus répandue est la méthode des moindres carrés récursifs (Least Mean Squares : LMS en anglais) qui consiste à mettre à jour les coefficients du filtre en suivant une descente de gradient minimisant la moyenne quadratique de l'erreur. Depuis qu'elle a été introduite en 1971 par Widrow [43], cette procédure a connu plusieurs variations de la structure générale de contrôle, ayant pour objectifs de généraliser son utilisation et d'améliorer ses performances [44, 45, 46, 47]. Nous allons présenter dans la suite l'algorithme original du LMS [43].

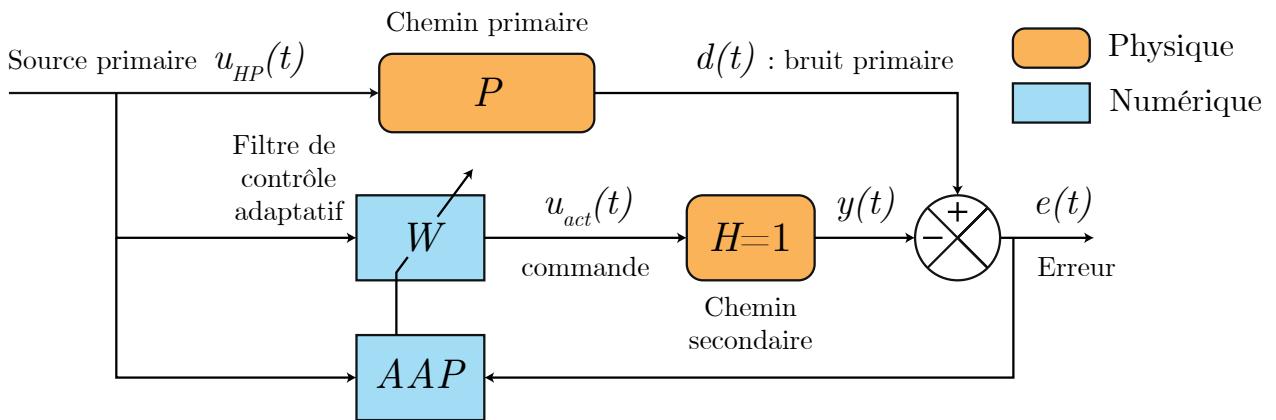


FIGURE 3.2.1 – Contrôle feed-forward pour un couple actionneur/capteur avec adaptation des paramètres du filtre W selon un Algorithme d'Adaptation des Paramètres de contrôle (AAP).

3.2.1 Algorithme d'adaptation LMS

En pratique, le filtre à adapter est représenté par un filtre RIF (à réponse impulsionale finie) car ce type de filtre est naturellement stable et causal. Ainsi, l'adaptation des coefficients n'altère pas la stabilité et la réalisabilité du système. On note $[w_0, \dots, w_{N-1}]$ les coefficients de ce filtre, $[u_{HP}(0), \dots, u_{HP}(n)]$ les valeurs discrètes traduisant l'évolution temporelle passée de l'entrée u_{HP} et $u_{act}(n)$ la valeur de la sortie à l'instant discret n . La relation entrée sortie

s'écrit dans le domaine temporel :

$$u_{act}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} w_k u_{HP}(n-k) = \underline{w}^T \underline{u}_{HP}, \quad \text{avec} \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{pmatrix}, \quad \underline{u}_{HP} = \begin{pmatrix} u_{HP}(n) \\ u_{HP}(n-1) \\ \vdots \\ u_{HP}(n-N+1) \end{pmatrix}. \quad (3.2.1)$$

L'algorithme LMS cherche alors à réduire la moyenne de l'erreur quadratique soit la quantité :

$$J = E(e^2) = E([d + y]^2) = E([d + H * (\underline{w}^T \underline{u}_{HP})]^2) \quad (3.2.2)$$

où E désigne l'espérance mathématique. Dans le cas où les signaux sont stationnaires, ce critère de minimisation est une forme quadratique en \underline{w} . En suivant une descente de gradient visant à minimiser ce critère, on peut alors mettre à jour les coefficients du filtre \underline{w} selon :

$$\underline{w}(n+1) = \underline{w}(n) - \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{w}(n)} \right). \quad (3.2.3)$$

La pente $\frac{\partial J}{\partial \underline{w}(n)}$ dépend de la fonction de transfert H de l'actionneur réel. En supposant cette fonction de transfert égale à un, on obtient :

$$\frac{\partial J}{\partial \underline{w}(n)} = E(2\underline{u}_{HP}e(n)). \quad (3.2.4)$$

En pratique, on utilise la valeur instantanée du gradient et la procédure d'adaptation devient :

$$\underline{w}(n+1) = \underline{w}(n) - \beta \underline{u}_{HP} e(n). \quad (3.2.5)$$

Cette procédure représente l'algorithme Least Mean Squares (LMS) et il est montré que pour un pas constant β petit cette procédure converge vers le filtre optimal [48]. Cependant, cet algorithme fait l'hypothèse d'un chemin secondaire transparent, ce qui n'est pas le cas dans la plupart des situations de contrôle.

Remarque : Pour prendre en compte le chemin secondaire en pratique, on peut utiliser la fonction de transfert inverse en sortie du filtre W mentionnée dans la remarque précédente ou une variante du LMS appelée FxLMS [27].

En pratique, on utilise aussi une version normalisée du LMS [46] :

$$\begin{cases} \underline{w}(n+1) = \underline{w}(n) - \beta(n) \underline{u}_{HP} e(n) \\ \text{avec } \beta(n) = \frac{\beta}{\|\underline{u}_{HP}\|_2^2 + \delta} \end{cases}, \quad (3.2.6)$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne et δ un nombre réel positif très petit servant de tolérance pour éviter une division par zéro. Cette version permet d'être plus stable dans le cas où le signal d'entrée possède une grande dynamique d'amplitude.

Robustesse et convergence

On rappelle quelques résultats énoncés par Friot [27] concernant la robustesse et la convergence du LMS :

- Temps de convergence : un temps de convergence long peut s'expliquer par un trop grand nombre de coefficients du filtre ou un coefficient d'adaptation β trop faible. Cela peut aussi être dû à la présence de retard dans la fonction de transfert secondaire retardant la minimisation de l'erreur observée. Cela peut également être dû à un contenu spectral très contrasté.
- Stabilité : un coefficient d'adaptation β trop élevé peut faire diverger le contrôleur.
- Précision : une mauvaise précision de convergence peut s'expliquer par un coefficient d'adaptation β trop élevé ou un nombre de coefficients du filtre trop faible.

Mise en application

On propose d'appliquer la structure de contrôle du schéma 3.2.1 à notre problème en utilisant le modèle de filtre de contrôle de la section 3.1.2 comme initialisation des coefficients de W . Une telle structure utilise la connaissance du modèle comme point de départ ce qui peut amener à une convergence rapide vers le contrôle optimal. En effet, la vitesse de convergence dépendra de la différence entre le modèle et la réalité : si ils sont très éloignés, de nombreuses itérations seront nécessaires pour converger et si ils sont très proches, quelques itérations suffiront.

Cette proposition de contrôle semble donc intéressante par rapport à un modèle boîte noire où on ne connaît rien sur la loi de commande et sera étudiée dans le chapitre suivant, section 4.3.2.

Chapitre 4

Expériences et résultats

Ce chapitre décrit l'ensemble des résultats obtenus sur les modèles développés au chapitre deux et sur des simulations de la structure de contrôle proposée au chapitre trois. Les modèles sont confrontés à la fois aux résultats de la littérature et à des résultats expérimentaux. Ce chapitre contient également la mesure de la boîte noire pour mener à bien le contrôle, à savoir la fonction de transfert reliant la force appliquée à la couronne du haut-parleur à la vitesse de la membrane.

4.1 Validation des modèles

4.1.1 Haut-parleur

Le haut-parleur utilisé pour les expériences est le woofer du modèle d'enceinte *AW650* de la marque *Klipsch* [49]. Ces paramètres de Thiele et Small ont été identifiés à l'aide d'une mesure effectuée sur un banc *Klippel* [50] et sont résumés dans le tableau 4.1. A partir de

M_m (g)	R_m (Ns/m)	K_m (N/m)	R_e (Ohm)	L_e (mH)	B_l (T.m)	a (cm)
13.654	0.792	1.68e3	3.5	0.26	4.559	7

TABLE 4.1 – Paramètres de Thiele et Small et rayon du haut-parleur correspondant au woofer de l'enceinte *Klipsch AW650* [49].

ces paramètres, une comparaison entre le modèle et l'expérience est proposée dans la suite. Nous allons mesurer la vitesse de la membrane pour une tension d'entrée donnée.

Protocole Le haut-parleur est placé à l'horizontale et bloqué au niveau de l'aimant. Un vibromètre laser (*Ometron VH300+*) est placé en face du haut-parleur, de sorte que le faisceau du laser pointe vers le centre de la membrane sur laquelle on positionne une gommette lisse blanche pour améliorer la réflexion de la surface (voir montage figure 4.1.1). Le haut-parleur est alimenté en tension par un amplificateur (*SONY TA-FE510R*). Le signal avant amplification est un sinus balayé logarithmique allant de 20 à 2000Hz en 30 secondes, échantillonné à 4000Hz. Ce signal a été choisi à l'origine pour appliquer une méthode de déconvolution particulièrement robuste dans le cadre de l'identification de systèmes linéaires et pratique pour extraire la réponse impulsionnelle du système [51]. On mesure la tension fournie par l'amplificateur au haut-parleur en entrée et la vitesse de vibration de la membrane captée par le laser en sortie à l'aide d'une carte *National Instruments (NI 9234)*. Cette mesure est

effectuée quatre fois pour vérifier la répétabilité de l'expérience et pour améliorer le rapport signal bruit par moyennage.

Pour ce qui est de la simulation, on récupère la tension mesurée en sortie de l'amplificateur comme entrée du modèle (2.1.7) et on observe la vitesse de la membrane en sortie.

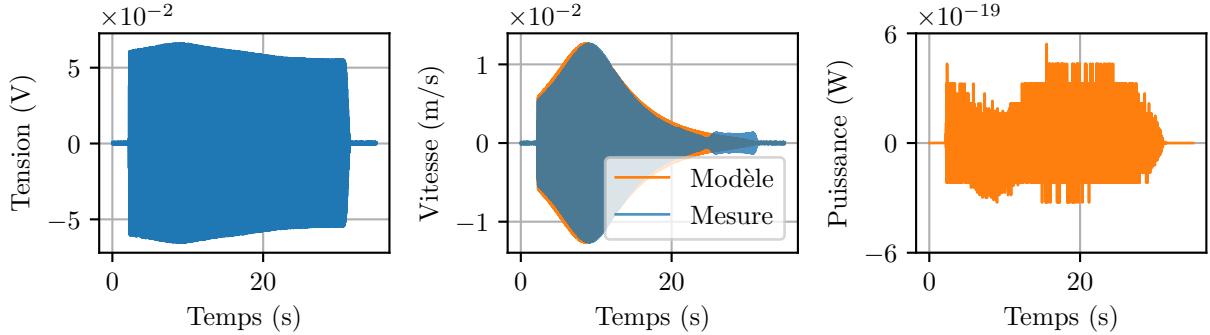


FIGURE 4.1.2 – De gauche à droite : mesure de la tension envoyée au haut-parleur après amplification, vitesses de la membrane associées à la mesure (en bleu) et au modèle (en orange) et bilan de puissance de la simulation temporelle.

Résultats temporels On trace figure 4.1.2 les résultats temporels obtenus pour une des quatre mesures effectuées. A gauche, on observe la mesure de la tension d'entrée du haut-parleur, au milieu les vitesses associées obtenues par mesure et par le modèle et à droite le bilan de puissance de la simulation temporelle.

La mesure de la tension d'entrée nous indique que l'amplificateur possède une relation entrée sortie non transparente sur la bande de fréquence considérée. En effet, le signal avant amplification possède une amplitude constante au cours du temps alors que l'amplitude de la tension mesurée évolue au cours du temps. Pour connaître la relation entrée sortie du haut-parleur on ne peut donc pas utiliser la méthode souhaitée nécessitant que l'entrée soit de la forme du signal avant amplification [51]. Nous utiliserons finalement la transformée de Fourier inverse de la fonction de transfert du haut-parleur pour extraire la réponse impulsionale. Cette méthode suppose le système parfaitement linéaire et nous veillerons à utiliser des petites amplitudes de tension ($U \ll U_{nom} = 25$ V, tension associée à la puissance continue admissible du haut-parleur).

Le tracé des vitesses montre que le modèle reproduit un comportement similaire au système mesuré, en se basant sur l'amplitude maximale et la forme générale des signaux.

Le bilan de puissance est respecté à 1e-19 près (précision numérique). La passivité du système est vérifiée numériquement.

Résultats fréquentiels On trace figure 4.1.3 la fonction de transfert du système mesuré et simulé. On trace également la différence entre les deux, la fréquence de résonance du haut-

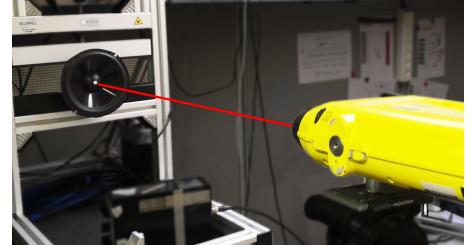


FIGURE 4.1.1 – Montage expérimental pour la validation du modèle de haut-parleur.

parleur ($f_r = 56.8\text{Hz}$) et la fréquence limite du modèle de Thiele et Small ($f_{lim} = 773\text{Hz}$ telle que $k_{lim}a = 1$, voir état de l'art).

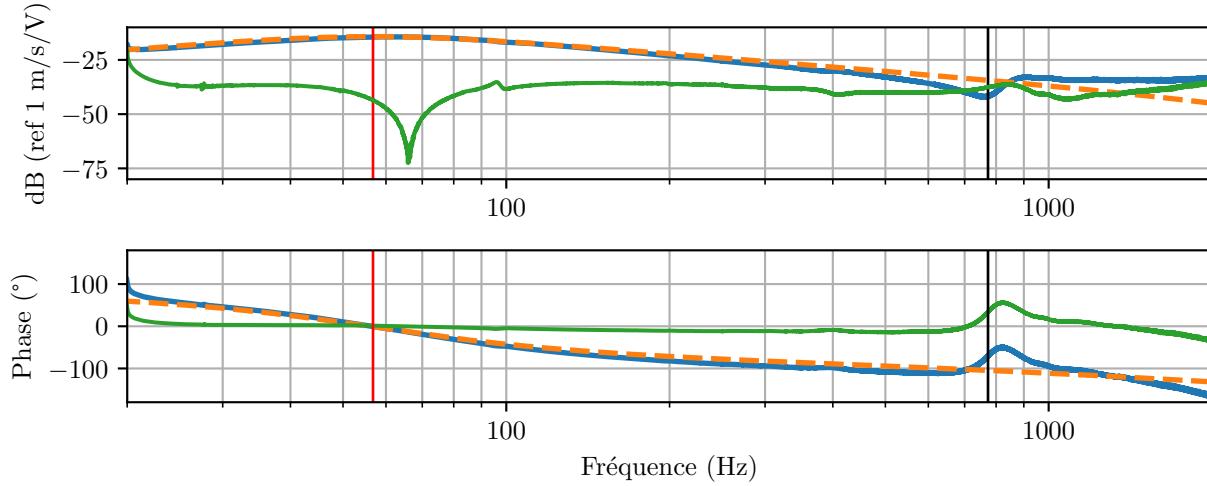


FIGURE 4.1.3 – Fonction de transfert vitesse de la membrane/tension d’entrée du haut-parleur (module et phase). Mesure (en bleu), simulation (en orange pointillé), différence d’amplitude (en vert), fréquence de résonance du haut-parleur (en rouge) et fréquence limite du modèle de Thiele et Small (en noir).

Cette figure montre que le modèle correspond bien à la réalité autour de la fréquence de résonance. Au delà, l’erreur augmente avec la fréquence ce qui est normal car le modèle de Thiele et Small est un modèle basse fréquence. En dessous de la résonance, l’erreur est aussi plus importante et cela peut s’expliquer par la simplicité du modèle qui ne prend pas en compte la déformation des suspensions ou des non linéarités qui ont déjà été étudiés dans le cadre des SHP [5] et pourraient être prises en compte dans de futurs travaux pour de meilleurs résultats. On retiendra que l’erreur relative en amplitude entre le modèle et la simulation dépasse 30% après 400Hz.

4.1.2 Modèle de plaque

La plaque utilisée pour les expériences est une plaque rectangulaire en bois aggloméré, d’une épaisseur $h = 19\text{ mm}$ comme on peut retrouver souvent dans les enceintes du marché (typiquement, les enceintes de monitoring). Nous avons choisi une plaque de grande dimension devant la taille du haut-parleur afin de simuler en 2D le comportement acoustique d’un haut-parleur monté dans une enceinte (hypothèse d’écran infini). La plaque est de taille $L_x = 100.9$, $L_y = 68.1$ centimètres et de masse volumique (mesurée) $\rho = 723.8\text{ kg/m}^3$. Nous ne connaissons pas son coefficient de poisson ni son module d’Young mais nous les identifierons par l’expérience. Le système étudié dans la suite est celui de la plaque appuyée simplement en ces quatre coins (voir section 3.1.2, équation (3.1.8)). On comparera les résultats obtenus à la littérature puis à une analyse modale expérimentale. Pour l’expérience, les supports utilisés pour poser la plaque sur le bâti sont quatre pointes provenant de La Maison du Haut-Parleur [52] dont le rôle supposé est de limiter la transmission des vibrations au sol.

Comparaison à la littérature

Le paragraphe 4.4.3 du livre de Leissa [19] est consacré à l'étude d'une plaque libre simplement supportée aux quatre coins pour des rapports L_x/L_y de 1, 1.5, 2, 2.5 et 3 et un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. Le rapport L_x/L_y de la plaque utilisée pour l'expérience étant 1.482, on s'intéresse aux résultats pour $L_x/L_y = 1.5$ en conservant la longueur de la plaque et en diminuant la largeur à $L_y = 67.27\text{cm}$. On choisit pour l'instant $E = 2.4\text{GPa}$ en se basant sur des données constructeur de panneaux en bois aggloméré de masse volumique similaire à celle mesurée [53]. Les caractéristiques de la plaque étudiée dans cette section sont résumées dans le tableau 4.2.

L_x (cm)	L_y (cm)	h (mm)	ρ (kg/m^3)	ν (ϕ)	E (GPa)	N_x	N_y	N
100.9	67.27	19	723.8	0.3	2.4	30	22	5280

TABLE 4.2 – Paramètres de la plaque étudiée lors de la comparaison aux résultats de la littérature. N_x , N_y désignent respectivement le nombre de points du maillage dans la longueur et la largeur de la plaque. N désigne la taille finale du système matriciel.

Les sept premiers modes du système ainsi que le maillage utilisé sont affichés figure 4.1.4. Les fréquences à gauche correspondent à celle du modèle et à droite à celles de Leissa [19]. La matrice de MAC (Modal Assurance Criterion) [54] représentée figure 4.1.5 montre la cohérence entre les déformées identifiées et celles de Leissa. On observe une très bonne concordance des fréquences propres (0.84% d'erreur relative sur les sept premiers modes) et des déformées (la moins bonne cohérence vaut 0.948 pour le sixième mode). Ces résultats montrent que le modèle développé est en accord avec les observations de la littérature et constituent une première étape de validation avant l'étude expérimentale.

Analyse modale d'une plaque appuyée en ses quatre coins

L'analyse modale de la plaque a été réalisée sur une grille de 5×5 points (voir figure 4.1.6). La plaque est excitée au marteau d'impact (*Brüel Kjær type 8202*) et la vibration est mesurée par un accéléromètre (*Brüel Kjær type 4367*). Les signaux sont acquis avec une carte *National Instruments (NI 9234)*. On étudie trois positions d'accéléromètre pour chacune desquelles tous les points du maillage sont excités au marteau. Ces positions ont été choisies suite à l'observation des modes simulés visibles sur la figure 4.1.4 afin d'obtenir des positions asymétriques pour observer la contribution de plusieurs modes. Chaque frappe a été reproduite cinq fois pour s'assurer de la répétabilité de l'expérience et pour améliorer le rapport signal bruit par moyennage, ce qui représente un total de 375 mesures. L'ensemble des fonctions de transfert accélération/force obtenues sont traitées par l'algorithme d'identification modale multi-référence Least-Squares Complex Frequency-domain (LSCF) [55]. Cette analyse permet d'obtenir les paramètres modaux de la plaque présentés figure 4.1.7 : fréquences propres, amortissements, déformées. La matrice de MAC représentée figure 4.1.8 montre la cohérence entre les déformées identifiées et celles obtenues par le modèle (avec la même grille de points que l'expérience). Cette matrice indique que nous n'avons pas réussi à identifier le cinquième mode observé sur le modèle (figure 4.1.4). Cela peut s'expliquer par

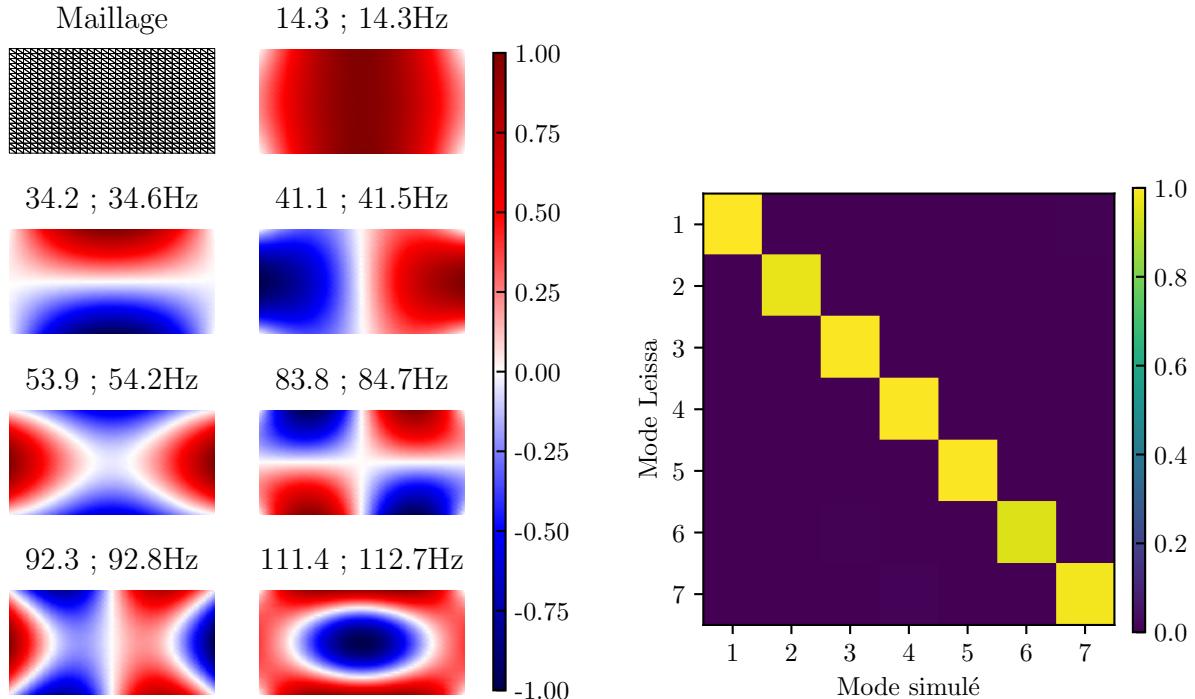


FIGURE 4.1.4 – Maillage et sept premiers modes de la plaque appuyée en ces quatre coins obtenues à partir du modèle (section 3.1.2). La fréquence à gauche est celle du modèle et à droite celle obtenue à partir de Leissa [19].

FIGURE 4.1.5 – Matrice MAC (Modal Assurance Criterion) comparant les déformées de Leissa [19] et celles obtenus avec le modèle. Une valeur proche de "1" indique une forte corrélation entre les déformées.

le fait que deux sur les trois accéléromètres ont été placés sur les lignes nodales de ce mode. Le sixième mode observé semble correspondre au septième mode du modèle mais la matrice nous indique qu'il ressemble plutôt au suivant. Cela peut être dû à la faible précision de la grille d'identification modale (figure 4.1.6). Nous n'avons que trois noeuds par côté donc il est impossible d'obtenir une corrélation significative sur des déformées avec plus de deux ventres par côté. On retiendra de ces figures que les modes un, deux, quatre et six (en comptant par rapport au système simulé) sont les plus cohérents et nous nous baserons sur ceux-ci pour l'identification des paramètres de la plaque. Dans la suite, la référence du numéro des modes est prise par rapport aux modes simulés de sorte que le mode 7 corresponde au dernier mode de la figure 4.1.4.

Identification des paramètres du matériau

Nous avons quatre paramètres à identifier pour pouvoir comparer plus en détail la cohérence du modèle par rapport à l'expérience : les coefficients d'élasticité (E , ν) influant la valeur des fréquences propres du système et (a , b) les coefficients d'amortissements (voir section 2.2.4).

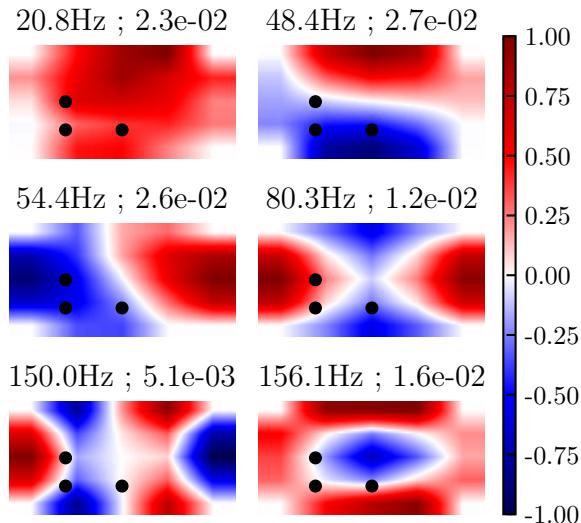


FIGURE 4.1.7 – Modes identifiés par expérience pour une plaque supportée en ces quatre coins. La fréquence propre est à gauche dans les titres et l'amortissement modal à droite. Les points noirs désignent les trois emplacements des accéléromètres.

On trace figures 4.1.9 et 4.1.10 l'influence de ces paramètres sur la valeur des fréquences propres du système. Pour chaque mode, on marque par une croix la fréquence mesurée expérimentalement, avec pour abscisse le coefficient d'élasticité donnant la plus proche valeur en simulation. Le mode 5 du modèle a été ommis car il n'a pas été identifié lors de la mesure (voir figure 4.1.8).

Pour ce qui est de l'influence du module d'Young, on retrouve un comportement proportionnel à \sqrt{E} comme c'est le cas pour le modèle analytique d'une plaque de Kirchhoff (fine) simplement supportée [56]. Ce résultat permettra d'accorder précisément la fréquence d'un mode du modèle à celle du mode mesuré par un simple produit en croix. En revanche, le module d'Young ne joue pas sur les rapports entre fréquences propres. Vu la position des fréquences mesurées, le module d'Young de la plaque semble se situer autour de 5 GPa.

Contrairement au module d'Young, on observe que le coefficient de Poisson permet de modifier légèrement les rapports entre fréquences propres. Dans la suite, on décide de fixer ν à 0.1. Cette valeur augmentera légèrement la fréquence du deuxième mode mais ne changera pas celle du premier et permettra de se rapprocher de la bonne valeur pour les autres modes.

Pour identifier les coefficients a et b , on test des valeurs et on compare la réponse en fréquence entre la mesure et la simulation. On choisit la réponse en fréquence mesurée et

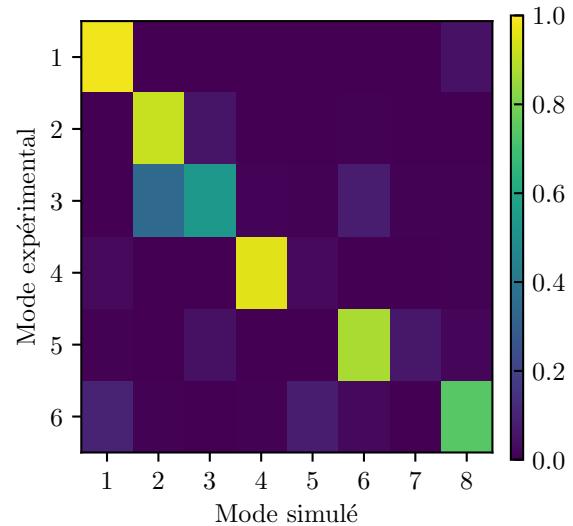


FIGURE 4.1.8 – Matrice MAC (Modal Assurance Criterion) [54] comparant les déformées expérimentales et celles obtenus avec le modèle. Une valeur proche de "1" indique une forte corrélation entre les déformées.

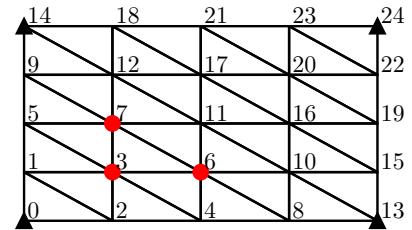


FIGURE 4.1.6 – Maillage utilisé pour l'analyse modale. Les trois points rouge indiquent les trois positions d'accéléromètre testées. Les triangles noires correspondent aux supports.

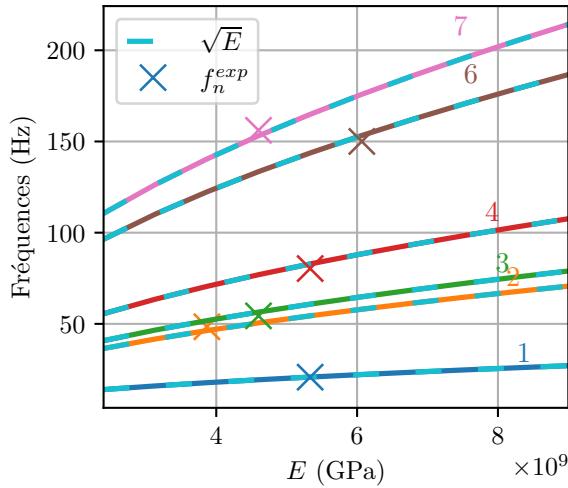


FIGURE 4.1.9 – Influence du module d’Young sur les sept premières fréquences propres pour $\nu = 0.3$. On omet le mode 5 qui n’a pas été identifié lors de l’expérience.

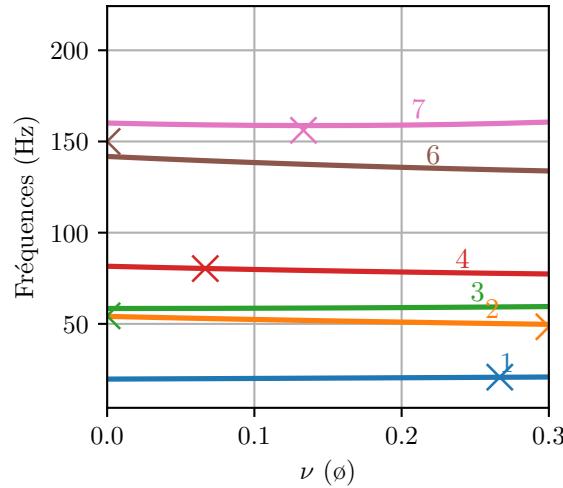


FIGURE 4.1.10 – Influence du coefficient de Poisson sur les sept premières fréquences propres pour $E = 4.95$ GPa. On omet le mode 5 qui n’a pas été identifié lors de l’expérience.

moyennée lorsque l’accéléromètre est positionné sur le noeud numéro 6 (voir maillage figure 4.1.6) et lorsqu’on excite au marteau au même point. On récupère la force appliquée sur la plaque par le marteau d’impact et on l’applique au modèle du tableau 4.3. Pour $(a, b) = (12, 0.03)$ on obtient la réponse en fréquence tracée figure 4.1.11.

On observe que les fréquences propres des six premiers modes sont proches de celles mesurées. La fréquence du deuxième mode est légèrement trop haute (4Hz) comme attendu mais les autres correspondent à 1Hz près. En revanche, le modèle s’éloigne de la mesure après 250Hz et cela risque de limiter notre approche en pratique. Pour ce qui est des amortissements, les valeurs choisies semblent être réalistes pour le premier modes et la bande de 100 à 300Hz. En revanche, le deuxième mode n’est pas suffisamment amorti et les modes après 600Hz sont trop amortis. Il semblerait que les deux coefficients a et b soient insuffisants pour obtenir une bonne précision mode par mode. En revanche, ils suffisent à donner une tendance générale réaliste et à l’écoute, ils permettent de passer d’une plaque qui sonne “métallique” (sans amortissement) à une plaque qui sonne comme du “bois”.

Dans toute la suite, le modèle de plaque étudié possède les paramètres présentés dans le tableau 4.3

L_x (cm)	L_y (cm)	h (mm)	ρ (kg/m ³)	ν (ϕ)	E (GPa)	a (ϕ)	b (ϕ)	N_{tot}	N
100.9	68.1	19	723.8	0.1	4.95	12	0.03	580	4640

TABLE 4.3 – Paramètres de la plaque étudiée pour les simulations de contrôle. N_{tot} désigne le nombre de points total du maillage. N désigne la taille finale du système matriciel.

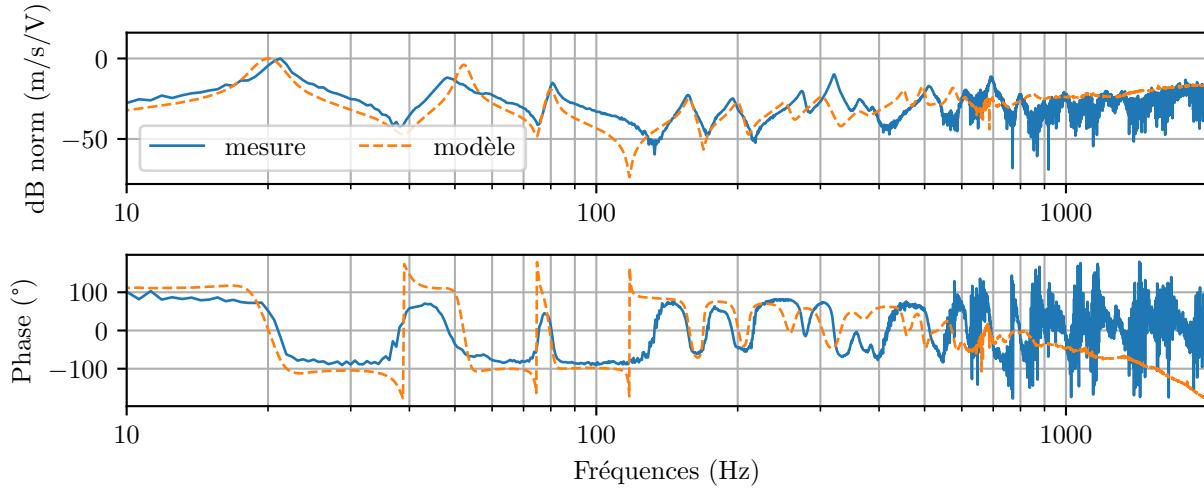


FIGURE 4.1.11 – Comparaison des réponses en fréquence mesurée (en bleu) et modélisée (en orange pointillé). Le point d'excitation et d'observation est le numéro 6 du maillage de la figure 4.1.6. Les réponses sont normalisées à 0dB au niveau du premier mode.

4.2 Caractéristiques du filtre de contrôle

Dans la section qui suit, on présente les détails du filtre de contrôle retenu pour les simulations proposées ensuite dans la section 4.3.2. On précise les caractéristiques du modèle ainsi que celles de la mesure effectuée pour le système non modélisé.

4.2.1 Force appliquée à la plaque par un haut-parleur

En pratique, mesurer la force appliquée à la couronne sur la plaque est une tâche délicate. Notamment, nous ne disposons pas de capteurs de force pour cette mesure. Deux approches sont discutées dans la suite puis les résultats pour l'approche retenue sont présentés.

La première méthode envisagée consiste à utiliser un marteau d'impact pour exciter la couronne du haut-parleur monté sur un banc puis observer la vitesse de la membrane avec un vibromètre laser. Après inversion du système, on obtiendrait la fonction de transfert souhaitée. Cependant, le système inverse sera anticausal et non utilisable en pratique. On pourrait identifier le système à un filtre RII à minimum de phase [40] mais cela introduirait des erreurs de phases pouvant compromettre la stabilité du contrôle LMS.

L'autre méthode (celle retenue) consiste à monter le haut-parleur sur la plaque et à mesurer l'accélération directement sur la plaque au niveau de la couronne. L'avantage de cette méthode est qu'elle représente mieux l'entrée du modèle (= la force de la plaque au niveau de la couronne) puisqu'elle est réalisée directement sur le système assemblé. Cependant, la mesure au laser de la vitesse de la membrane n'est plus accessible une fois la plaque posée sur les supports et le système entrée sortie mesuré est finalement l'accélération de la plaque autour de la couronne pour une tension de haut-parleur donnée.

Protocole On pose la plaque sur les quatre supports et on passe la même tension d'entrée que pour la validation du modèle de Thiele et Small (section 4.1.1). On mesure l'accélération de la plaque aux quatres points de vissage du haut-parleur à l'aide d'un accéléromètre (*Brüel Kjær type 4367*) positionné sur la face opposée à celle visible figure 4.2.2.

Résultats On trace figure 4.2.1 la fonction de transfert du système moyennée sur les quatre positions de mesure (on fait l'hypothèse que le système est symétrique en première approche). Le système possède un mode prédominant à 122Hz puis quelques autres modes entre 300 et 1000Hz.

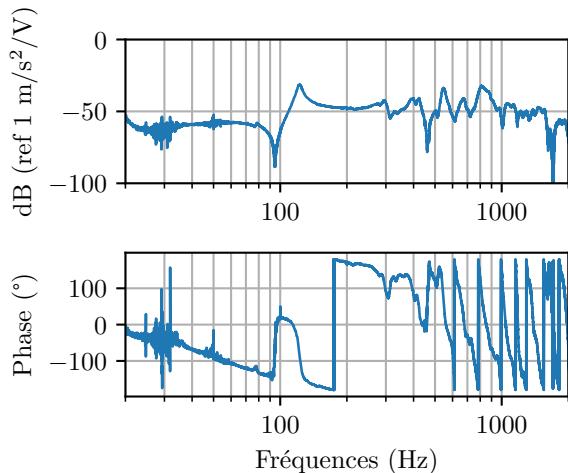


FIGURE 4.2.1 – Fonction de transfert entrée sortie traduisant l'accélération de la plaque au niveau de la couronne du haut-parleur pour une tension d'entrée.



FIGURE 4.2.2 – Haut-parleur monté sur la plaque. Les points rouges représentent les quatre positions d'accéléromètres mesurées. En réalité, les accéléromètres sont positionnés sur la face opposée

4.2.2 Force à appliquer par les actionneurs

La plaque du tableau 4.3 est trouée en son centre sur un rayon de 7.5cm pour représenter l'emplacement du haut-parleur. Le maillage obtenu est représenté figure 4.2.3. Ce trou est supposé en condition aux limites libres et on appliquera uniformément l'accélération sortant de la mesure présentée dans la section précédente en ces bords (points rouges de la figure 4.2.3).

On propose d'extraire les réponses impulsionales du système reliant les quatre forces $\lambda(t)$ à appliquer aux points de support pour une entrée de force aux bords du trou donnée. On utilise une simulation temporelle et la méthode de déconvolution de Farina [51] avec un signal d'entrée de type sinus glissant logarithmique (de 20 à 500Hz en 5s, échantillonné à 1300Hz pour limiter le nombre de coefficients du filtre). On affiche les forces de réactions obtenues figure 4.2.4, la vitesse résultante aux points de support figure 4.2.6 et le bilan de puissance de la simulation temporelle figure 4.2.5.

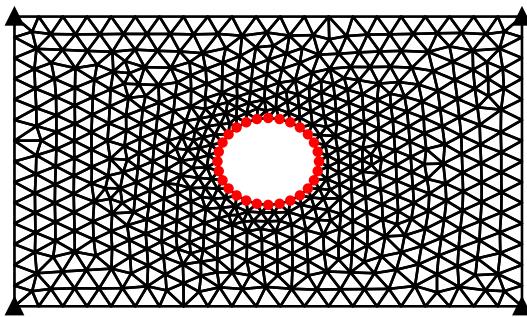


FIGURE 4.2.3 – Maillage de la plaque trouée pour accueillir le haut-parleur. Les points rouges désignent les points auxquels on applique uniformément l'accélération de sortie du modèle boîte noire mesuré section 4.2.1. Les triangles noirs désignent les points de support.

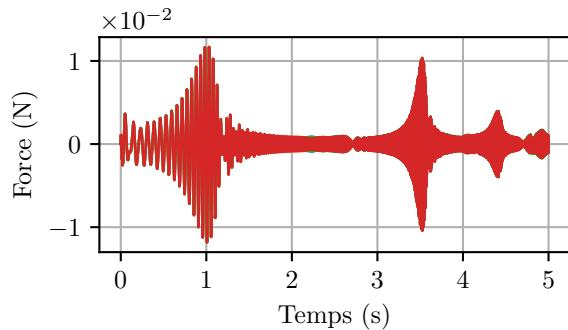


FIGURE 4.2.4 – Evolution temporelle des quatre forces $\lambda(t)$ à appliquer aux points de contrôle pour une entrée en force aux bords du trou de la plaque (sinus balayé logarithmique de 20 à 500Hz en 4s, $F_e=1.2\text{kHz}$).

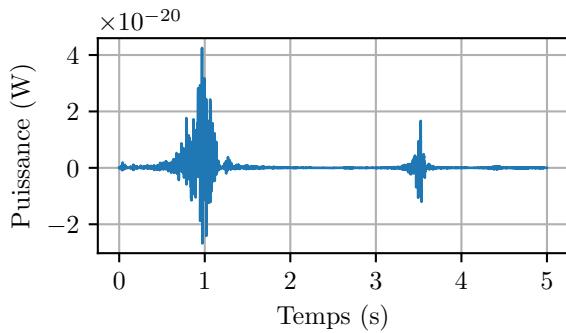


FIGURE 4.2.5 – Bilan de puissance de la simulation temporelle sur la plaque.

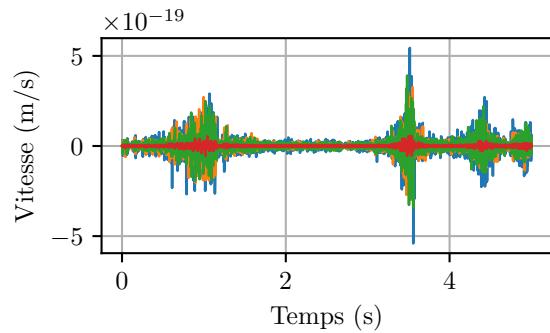


FIGURE 4.2.6 – Evolution temporelle de la vitesse des points de supports.

Les quatre forces de réactions étant superposées sur la figure 4.2.4, on vérifie que le système construit est symétrique. On vérifie également avec la figure 4.2.6 que la vitesse aux points de support a bien été bloquée pendant la simulation (à la précision numérique 10^{-19} près). Enfin, le modèle conserve bien la passivité du système car le bilan de puissance est nul à la précision numérique près.

Enfin, on trace figure 4.2.7 la fonction de transfert du système et figure 4.2.8 sa réponse impulsionale. On vérifie que les forces de réaction à donner aux actionneurs sont plus importantes autour des modes de plaque à 20 Hz (premier mode) et 156Hz (septième mode). Les autres modes sont moins visibles car l'excitation au centre de la plaque correspond à un noeud de vibration sur les déformées modales (voir figure 4.1.4).

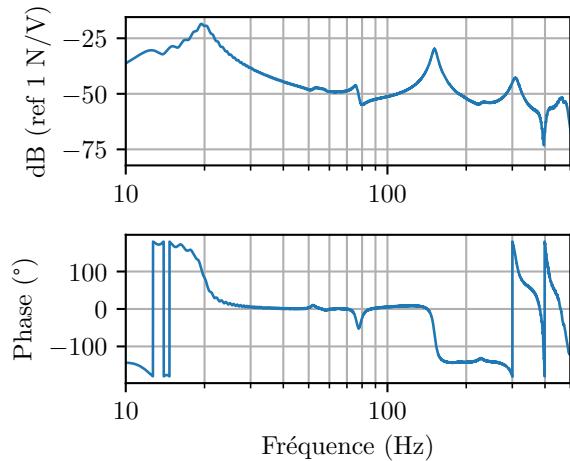


FIGURE 4.2.7 – Fonction de transfert du système "force à la couronne"/"force de réactions".

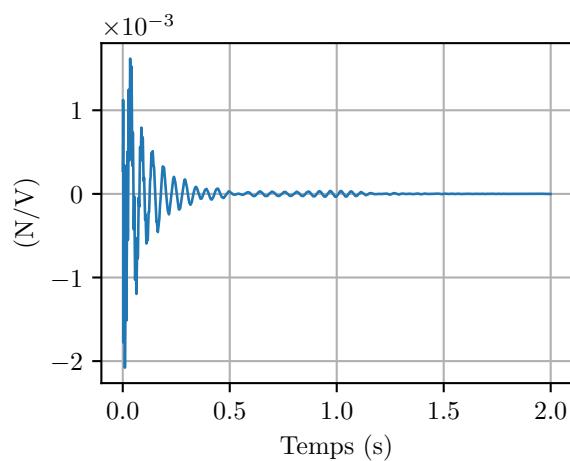


FIGURE 4.2.8 – Réponse impulsionnelle du système "force à la couronne"/"force de réactions".

4.3 Simulations de contrôle

Dans cette section, on simule le contrôle actif du système en utilisant nos mesures et notre modèle de plaque. Dans un premier temps, on mesure le chemin primaire pour observer les vibrations à contrôler en pratique et le comparer aux résultats du modèle. Ensuite, on utilise un jeu de mesures entrée sortie du système réel pour analyser la pertinence de notre approche en pratique.

4.3.1 Analyse du chemin primaire

Le chemin primaire représente le système physique complet ayant pour entrée la tension du haut-parleur et pour sortie l'accélération mesurée par le capteur au niveau du bâti. Le montage expérimental est présenté figure 4.3.2.

Protocole Le signal d'entrée n'est pas un sinus balayé comme précédemment mais un signal à séquence de longueur maximale (Maximum Length Sequence = MLS en anglais). Ce type de signal a pour intérêt d'exciter uniformément toutes les fréquences simultanément tout en conservant des propriétés de périodicité. Ce type de signal est également stationnaire ce qui permettra d'utiliser le jeu de mesures entrée sortie pour analyser les performances du contrôle dans la suite. Le signal est échantillonné à $F_e = 4000\text{Hz}$, d'une durée de 32.7s soit contenant $2^{17} - 1$ valeurs. La mesure est répétée cinq fois pour améliorer le rapport signal bruit en observant les résultats moyennés.

Résultats La fonction de transfert du chemin primaire est affichée figure 4.3.1. On remarque que les vibrations transmises au bâti par le système s'étendent sur toute la bande de 20 à 1000Hz. Cela pourrait remettre en question l'hypothèse basse fréquence effectuée

intuitivement au début de ce rapport et méritera d'être étudiée plus en profondeur dans de futurs travaux. On trace également la force attendue par le modèle (en orange pointillé) dans le cas où on aurait un appuis simple parfait.

Les différences entre la mesure et le modèle peuvent s'expliquer par les raisons citées précédemment en section 3.1.3 et justifient désormais l'utilisation d'un contrôle adaptatif en pratique. L'adaptation aura alors pour objectif de faire tendre le filtre orange modélisé vers le filtre bleu réel. Dans la suite, on étudie l'impact d'initialiser le filtre d'adaptation au filtre orange modélisé plutôt qu'à un filtre nul.

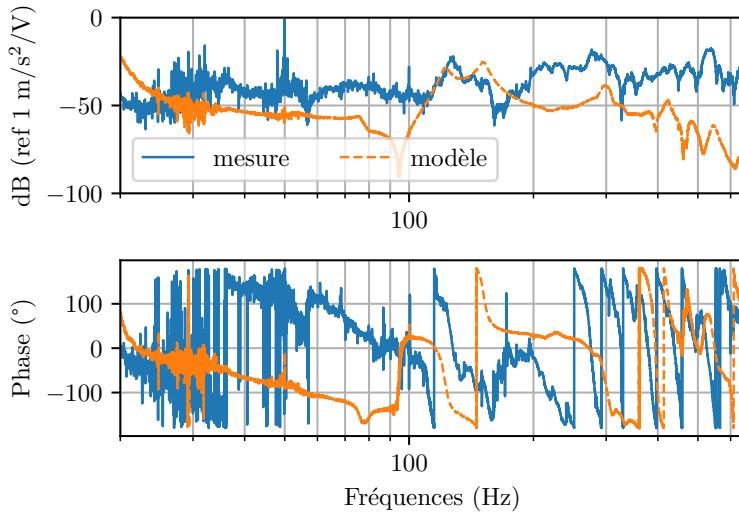


FIGURE 4.3.1 – Fonction de transfert du chemin primaire. L'entrée du système est la tension du haut-parleur. La sortie est l'accélération mesurée au bâti. Mesure en bleu, modèle en orange pointillé.



FIGURE 4.3.2 – Montage expérimental pour la mesure du chemin primaire. La croix rouge désigne l'emplacement de l'accéléromètre.

4.3.2 Etude de l'impact de l'initialisation du LMS

Dans cette section, on présente une comparaison des performances de contrôle entre un contrôleur où le filtre adaptatif est initialisé au modèle du chapitre 3 et un contrôleur où le filtre adaptatif est initialisé à zéro.

Le schéma de contrôle de l'étude est représenté sur la figure 4.3.3. W_0 représente le filtre du système modélisé (filtre non adaptatif). α est un coefficient entre 0 et 1 permettant d'ajuster la proportion d'erreur entre le système modélisé et le système réel. En effet, si on décompose le chemin primaire mesuré $d_{reel}(t)$ par rapport à celui modélisé $d_{mod}(t)$ en introduisant une erreur $e_r(t)$ soit $d_{reel}(t) = d_{mod}(t) + e_r(t)$, alors :

$$d(t) = (1 - \alpha)d_{mod}(t) + \alpha d_{reel}(t) = d_{mod}(t) + \alpha e_r(t). \quad (4.3.1)$$

Si $\alpha = 0$, le chemin primaire est l'appui simple parfait modélisé. Si $\alpha = 1$, le chemin primaire est celui mesuré en pratique. Le filtre W est un filtre adaptatif de type LMS, initialisé à W_0 .

ou à 0 pour comparer les performances. On active l'algorithme d'adaptation à $t = 3s$. Les signaux sont sous échantillonnés à $F_e = 1300$ Hz. Les réponses impulsionales sont tronquées à 1 seconde.

Pour évaluer le contrôle on propose deux indicateurs : l'énergie réduite relative E_{red} entre le chemin primaire et l'erreur observée et un temps de convergence à $X\%$. La référence du temps de convergence est la valeur RMS moyenne du chemin primaire. $t_{X\%}$ représente alors le premier instant à partir duquel l'erreur observée reste toujours inférieure à $X\%$ de la référence. Le signal d'entrée du système est le même que pour l'analyse du chemin primaire section 4.3.1.

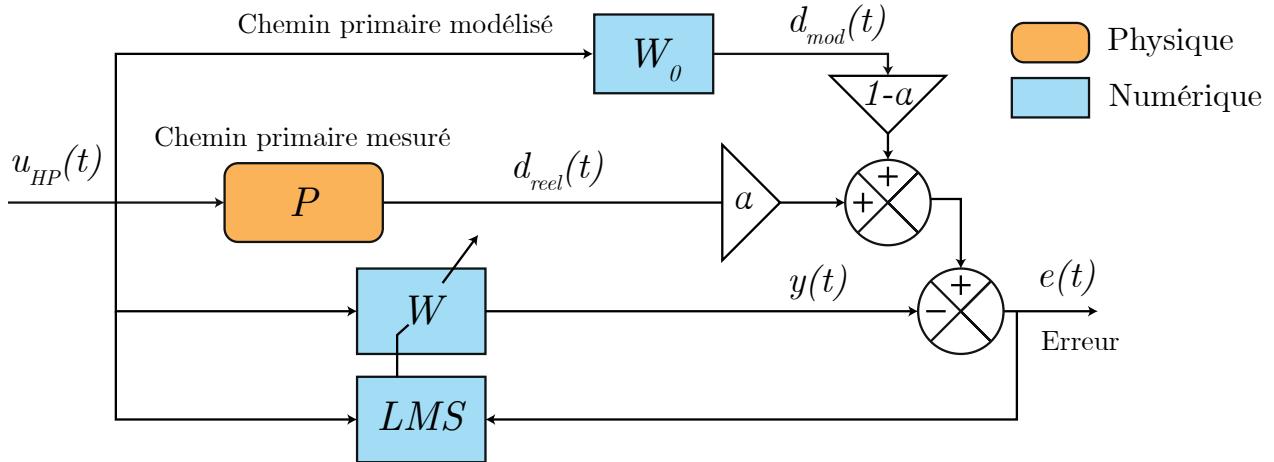


FIGURE 4.3.3 – Schéma de contrôle pour l'étude de l'impact d'une initialisation du LMS. W_0 représente le filtre modélisé. α représente la proportion d'erreur entre le modèle et la réalité.

Résultats On trace les résultats des simulations figure 4.3.4. On test les valeurs $\alpha = (0, 0.1, 0.5, 1)$. A gauche, le LMS a été initialisé par le modèle, à droite le LMS a été initialisé à 0. En bleu on trace l'enveloppe d'amplitude du chemin primaire et en orange celle de l'erreur observée. On marque en pointillés noirs l'instant où le LMS est activé. En rouge on trace la valeur du temps de convergence à 20 ou 30%.

Pour $\alpha = 0$, on retrouve le feed-forward optimal. Pour $\alpha = 0.1$, il est bénéfique d'initialiser le LMS avec le modèle (97% de réduction de l'énergie contre 81.1% et temps de convergence à 20% de 6.3 s contre 11.5 s). Cela montre que si le modèle se rapproche bien de la réalité, l'approche proposée dans ce rapport est pertinente. En revanche, pour $\alpha > 0.5$, la connaissance du modèle n'a plus d'intérêt (même temps de convergence à 30% et légèrement moins d'énergie réduite). Ces résultats mettent en défaut l'état actuel du modèle proposé qui est relativement simple et trop éloigné du système réel pour tirer profit de l'approche proposée dans un cas pratique. En plus de ces observations, on peut également souligner que les temps de convergence du LMS sont relativement lents. Cela vient du fait que l'initialisation par le modèle impose un filtre adaptatif avec 1300 coefficients ce qui limite les performances du contrôle LMS. Cela est dû au fait que l'amortissement du système donne une réponse impulsionnelle qui ne peut être réduite à moins d'une seconde. Cette observation limite également l'approche proposée par rapport à une initialisation à 0 où l'on pourrait choisir le nombre de coefficients du filtre adaptatif pour optimiser ses performances.

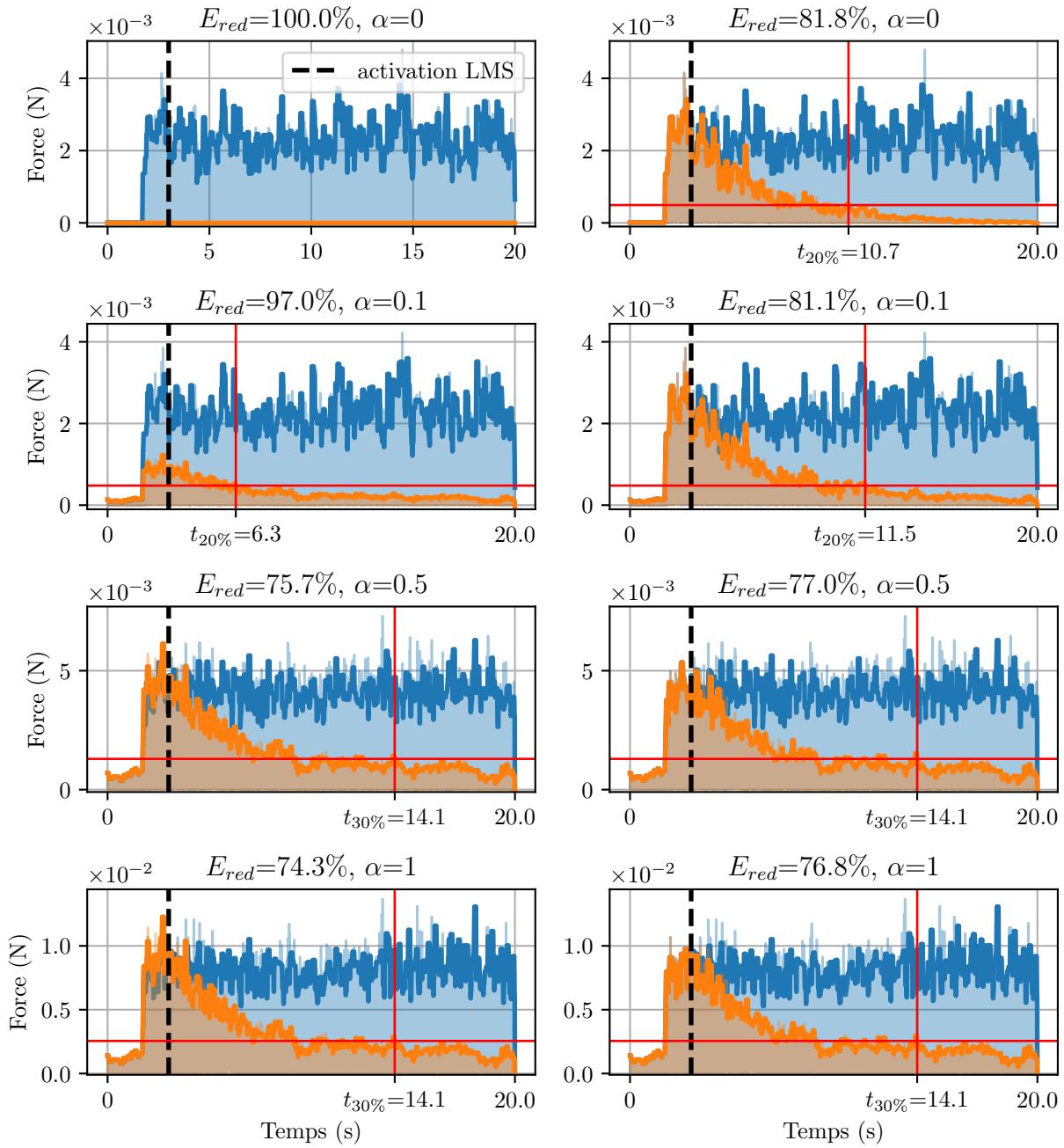


FIGURE 4.3.4 – Simulations du contrôle LMS de la figure 3.2.1 pour différentes valeurs de α . LMS initialisé par le modèle à gauche, LMS initialisé à 0 à droite. En bleu le chemin primaire, en orange l'erreur.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Apport général aux domaines

Modèles physiques Ce travail a consisté en la mise en oeuvre d'un modèle de vibrations transverses de plaque (modèle de Reissner-Mindlin) sous forme de système Hamiltonien à Ports linéaire discréétisé en éléments finis. Le modèle a été implémenté numériquement en utilisant la librairie d'éléments finis *Firedrake*. Une méthode générale pour ajouter de l'amortissement à ces systèmes a été proposée ainsi qu'une optimisation des temps de résolution numérique tirant profit des matrices creuses. Une méthode déjà connue de la littérature a été implémentée pour ajouter des multiplicateurs de Lagrange et obtenir une plaque simplement supportée en ces quatre coins. Le système obtenu a fait l'objet d'une comparaison à la littérature et d'une validation expérimentale au moyen d'une analyse modale.

Contrôle actif Le travail proposé tente de tirer profit d'une modélisation du système à contrôler afin d'améliorer les performances de contrôle. Pour cela, un contrôleur de type feed-forward adaptatif est initialisé à un filtre traduisant la réponse du modèle. Nous avons modélisé une loi de commande qui relie la tension d'entrée du haut-parleur à la force à envoyée par les actionneurs aux points de support du système pour annuler les vibrations. Les résultats montrent que si le modèle traduit bien la dynamique du système réel, les performances sont notablement améliorées. En revanche, l'état actuel du modèle proposé ne permet pas cette amélioration en pratique. Cette approche peut s'avérer utile dans des cas où la mesure du chemin primaire est impossible ou si celui ci est amené à changer lors de l'utilisation de l'enceinte (déplacement des points de support, socle asymétrique...)

Perspectives

Les extensions de ce travail consisteraient à améliorer la qualité du modèle physique pour se rapprocher de la situation réelle (du moins suffisamment pour voir une amélioration du contrôle en pratique). Pour cela, une première idée serait de diminuer les dimensions de la plaque afin que les premiers modes se retrouvent dans la zone à contrôler. En effet, nous avons vu que le modèle proposé est précis sur les premiers modes du système. Ainsi, une première validation de l'approche pourrait se faire sur une plaque plus petite dont les premiers sont entre 100 et 200 Hz. Une deuxième idée serait d'utiliser le modèle en l'état avec une géométrie plus proche de la géométrie réelle et sans les hypothèses de symétrie de la couronne du haut-parleur et de la réponse à chaque point de support. Un modèle SHP intermédiaire de vibration de la membrane pour obtenir la force appliquée par le haut-parleur sur la plaque permettrait d'obtenir un filtre de contrôle entièrement modélisé. De même, un modèle SHP d'actionneur inertiel permettrait de prendre en compte le chemin secondaire

par modélisation et mérirerait d'être étudié. Enfin, le système réduit à une plaque devra être adapté à une enceinte complète.

Les perspectives de contrôle consisteraient à définir un contrôle adaptatif MIMO, adapter la stratégie afin d'obtenir un filtre adaptatif avec moins de coefficients, prendre en compte la réponse des actionneurs et monter un banc expérimental pour observer les résultats en pratique.

Remerciements

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe S3AM pour leur accueil chaleureux et l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux. Un grand merci à mes encadrants David Roze et Henri Boutin pour leur disponibilité et leur pédagogie. Merci également à Arnaud Recher sans qui les expériences n'auraient pu être menées. Merci à Thomas Risse et Alexis Thibaut pour leurs interventions précieuses. Merci à Vincent Martos pour avoir été un manager musical hors norme et pour son aide sur les expérimentations. Merci à Emilie Stentz pour être la nouvelle graphiste de mon groupe de musique. Enfin, merci à tous les stagiaires et doctorants présents à l'IRCAM sur cette période d'avoir permis une ambiance de travail chaleureuse et d'avoir fait de ce stage un moment convivial et agréable.

Bibliographie

- [1] Loic FORMA et al. « Experimental design of an active vibration control device used to protect cultural heritage objects. » In : *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings*. T. 265. 6. Institute of Noise Control Engineering. 2023, p. 1729-1735.
- [2] Jean-Michel GÉNEVAUX et Bertrand LE DANTEC. « Optimized anti-vibratory system for stretched canvas artwork hanging in a museum ». In : *Journal of cultural heritage* 15.4 (2014), p. 382-390.
- [3] Bernhard M MASCHKE, Arjan J VAN DER SCHAFT et Pieter Cornelis BREEDVELD. « An intrinsic Hamiltonian formulation of network dynamics : Non-standard Poisson structures and gyrators ». In : *Journal of the Franklin institute* 329.5 (1992), p. 923-966.
- [4] Arjan VAN DER SCHAFT, Dimitri JELTSEMA et al. « Port-Hamiltonian systems theory : An introductory overview ». In : *Foundations and Trends® in Systems and Control* 1.2-3 (2014), p. 173-378.
- [5] Antoine FALAIZE et Thomas HÉLIE. « Passive guaranteed simulation of analog audio circuits : A port-Hamiltonian approach ». In : *Applied Sciences* 6.10 (2016), p. 273.
- [6] Neville THIELE. « Loudspeakers in vented boxes : Part 1 ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 19.5 (1971), p. 382-392.
- [7] Neville THIELE. « Loudspeakers in vented boxes : Part 2 ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 19.6 (1971), p. 471-483.
- [8] Richard H SMALL. « Closed-box loudspeaker systems-part 1 : Analysis ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 20.10 (1972), p. 798-808.
- [9] Richard H SMALL. « Closed-box loudspeaker systems-part 2 : Synthesis ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 21.1 (1973), p. 11-18.
- [10] James K IVERSON. « The theory of loudspeaker cabinet resonances ». In : *Journal of the Audio Engineering Society* 21.3 (1973), p. 177-180.
- [11] Brüel & KJÆR. *Development of a hi-fi loudspeaker enclosure by using modal analysis*. <https://www.bksv.com/media/doc/bo0243.pdf>. Accessed : 04-05-23.
- [12] Noureddine ATALLA et Franck SGARD. *Finite element and boundary methods in structural acoustics and vibration*. CRC Press, 2015.
- [13] Stephen Martin KIRKUP et MA JONES. « Computational methods for the acoustic modal analysis of an enclosed fluid with application to a loudspeaker cabinet ». In : *APPLIED ACOUSTICS-LONDON-* 48 (1996), p. 275-300.
- [14] Mattia COBIANCHI et Martial ROUSSEAU. « Modelling the Sound Radiation by Loudspeaker Cabinets ». In : Comsol Conference, Cambridge (UK). 2014, september.

- [15] Jaakko NISULA, Juha HOLM et Aki MÄKIVIRTA. « Calculating Sound Radiation from Loudspeaker Enclosures Using the Finite Element Analysis ». In : *Audio Engineering Society Conference : 51st International Conference : Loudspeakers and Headphones*. Audio Engineering Society. 2013.
- [16] Xuan ZHONG, Qunli WU et Xiaodong LI. « Influence of enclosure wall vibration on the frequency response of miniature loudspeakers ». In : *Applied Acoustics* 93 (2015), p. 9-14.
- [17] Augustus Edward Hough LOVE. « XVI. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)* 179 (1888), p. 491-546.
- [18] R. D. MINDLIN. « Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates ». In : *Journal of Applied Mechanics* 18.1 (1951), p. 31-38. ISSN : 0021-8936. DOI : [10.1115/1.4010217](https://doi.org/10.1115/1.4010217).
- [19] Arthur W. LEISSA. *Vibration of plates [by] Arthur W. Leissa*. English. Scientific, Technical Information Division, National Aeronautics et Space Administration ; [for sale by the Supt. of Docs., U.S. Govt. Print. Off.] Washington, 1969, vii, 353 p.
- [20] Jean-Louis DAVET. « Justification de modèles de plaques non linéaires pour des lois de comportement générales ». In : *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 20.2 (1986), p. 225-249.
- [21] Andrea BRUGNOLI et al. « Port-Hamiltonian formulation and symplectic discretization of plate models Part II : Kirchhoff model for thin plates ». In : *Applied Mathematical Modelling* 75 (2019), p. 961-981.
- [22] Andrea BRUGNOLI et al. « Port-Hamiltonian formulation and symplectic discretization of plate models Part I : Mindlin model for thick plates ». In : *Applied Mathematical Modelling* 75 (2019), p. 940-960.
- [23] Boris Grigoryevich GALERKIN. « Rods and plates. Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates ». In : *Engineers Bulletin (Vestnik Inzhenerov)* 19 (1915), p. 897-908.
- [24] *Fenics project : a popular open-source computing platform for solving partial differential equations (PDEs)*. <https://fenicsproject.org/>. Accessed : 04-05-23.
- [25] *Firedrake project : an automated system for the solution of partial differential equations using the finite element method (FEM)*. <https://www.firedrakeproject.org/index.html>. Accessed : 04-05-23.
- [26] André PREUMONT. *Vibration control of active structures : an introduction*. T. 246. Springer, 2018.
- [27] Emmanuel FRIOT. *Une introduction au contrôle acoustique actif*. DEA, 2006. URL : <https://cel.hal.science/cel-00092972>.
- [28] Sen M KUO et Dennis R MORGAN. *Active noise control systems*. T. 4. Wiley, New York, 1996.
- [29] Volker MEHRMANN et Benjamin UNGER. « Control of port-Hamiltonian differential-algebraic systems and applications ». In : *Acta Numerica* 32 (2023), p. 395-515.

- [30] Vincent DUINDAM et al. *Modeling and control of complex physical systems : the port-Hamiltonian approach*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [31] *hertz-audio.com : site web à l'origine de la photo du haut-parleur*. https://de.hertz-audio.com/product/car-audio-midrange-mille-legend-ml700_3/. Accessed : 28-07-23.
- [32] Kolbein BELL. « A refined triangular plate bending finite element ». In : *International journal for numerical methods in engineering* 1.1 (1969), p. 101-122.
- [33] Antoine FALAIZE. « Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios : Approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne À Ports ». Thèse de doct. Université Pierre & Marie Curie-Paris 6, 2016.
- [34] Thomas HÉLIE, Antoine FALAIZE et Nicolas LOPES. « Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs ». In : *Colloque National en Calcul des Structures*. T. 12. 2015.
- [35] Toshiaki ITOH et Kanji ABE. « Hamiltonian-conserving discrete canonical equations based on variational difference quotients ». In : *Journal of Computational Physics* 76.1 (1988), p. 85-102.
- [36] Suriya GHARIB et al. « System of linear equations, Gaussian elimination ». In : *Global Journal of Computer Science and Technology* 15.5 (2015).
- [37] DRA MOHAMMAD, NU KHAN et V RAMAMURTI. « On the role of Rayleigh damping ». In : *Journal of Sound and Vibration* 185.2 (1995), p. 207-218.
- [38] Ahmad Idzwan YUSUF et Norliyati Mohd AMIN. « Determination of Rayleigh damping coefficient for natural damping rubber plate using finite element modal analysis ». In : *InCIEC 2014 : Proceedings of the International Civil and Infrastructure Engineering Conference 2014*. Springer. 2015, p. 713-725.
- [39] Stephen ELLIOTT. *Signal processing for active control*. Elsevier, 2000.
- [40] Maamar AHFIR, Izzet KALE et Daoud BERKANI. « An Alternative Approach to the Balanced Model Truncation Algorithm for Acoustic Minimum-Phase Inverse Filters Order Reduction ». In : *International Scholarly Research Notices* 2011 (2011).
- [41] FL CARDOSO-RIBEIRO. « Port-Hamiltonian modeling and control of a fluid-structure system : Application to sloshing phenomena in a moving container coupled to a flexible structure ». Thèse de doct. Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées, 2016.
- [42] A. J. van der SCHAFT. « Port-Hamiltonian Differential-Algebraic Systems ». In : *Surveys in Differential-Algebraic Equations I*. Springer Berlin Heidelberg, 2013, p. 173-226. DOI : [10.1007/978-3-642-34928-7_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-34928-7_5).
- [43] Bernard WIDROW. « Adaptive filters ». In : *Aspects of network and system theory* (1971).
- [44] Bernard WIDROW. « Adaptive inverse control ». In : *Adaptive Systems in Control and Signal Processing 1986*. Elsevier, 1987, p. 1-5.

BIBLIOGRAPHIE

- [45] Stephen ELLIOTT, IANM STOTHERS et Philip NELSON. « A multiple error LMS algorithm and its application to the active control of sound and vibration ». In : *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 35.10 (1987), p. 1423-1434.
- [46] Neil BERSHAD. « Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs ». In : *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 34.4 (1986), p. 793-806.
- [47] L ERIKSSON, M ALLIE et R GREINER. « The selection and application of an IIR adaptive filter for use in active sound attenuation ». In : *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* 35.4 (1987), p. 433-437.
- [48] Iman Tabatabaei ARDEKANI et Waleed H ABDULLA. « On the stability of adaptation process in active noise control systems ». In : *The journal of the Acoustical Society of America* 129.1 (2011), p. 173-184.
- [49] Enceinte AW650 de la marque Klipsch. <https://www.klipsch.com/products/aw-650-outdoor-speaker-custom>. Accessed : 30-07-23.
- [50] Procédure d'identification des paramètres Thiele et Small sur banc Klippel. <https://www.klippel.de/products/rd-system/modules/lpm-linear-parameter-measurement.html>. Accessed : 30-07-23.
- [51] Angelo FARINA. « Simultaneous measurement of impulse response and distortion with a swept-sine technique ». In : *Audio engineering society convention 108*. Audio Engineering Society. 2000.
- [52] Supports d'enceinte de La Maison du Haut-Parleur. <https://www.lamaisonduhautparleur.com/fr/pieds-et-pointes/1517-pointe-plaquee-or-80kg-wt-27m12-30-g.html>. Accessed : 30-07-23.
- [53] Caractéristiques élastique de panneaux en bois aggloméré. <https://www.vidal-panneaux.fr/mdf.html>. Accessed : 31-07-23.
- [54] Miroslav PASTOR, Michal BINDA et Tomáš HARČARIK. « Modal assurance criterion ». In : *Procedia Engineering* 48 (2012), p. 543-548.
- [55] Patrick GUILLAUME et al. « A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator ». In : *Proceedings of IMAC. T. 21. 183-192. A Conference & Exposition on Structural Dynamics, Society for Experimental ... 2003*, p. 214.
- [56] Ganesh Naik GUGULOTH, Baij Nath SINGH et Vinayak RANJAN. « Free vibration analysis of simply supported rectangular plates ». In : *Vibroengineering Procedia* 29 (2019), p. 270-273.