

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра ПМ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Практическое задание № 1

Решение эллиптических краевых задач методом конечных разностей

Факультет: ПМИ

Преподаватели:

Задорожный А. Г.,
Патрушев И.И.

Группа: ПМ-81

Студенты: Ефремов А.А.,
Ртищева К. С.

Бригада: 1

Вариант: 5

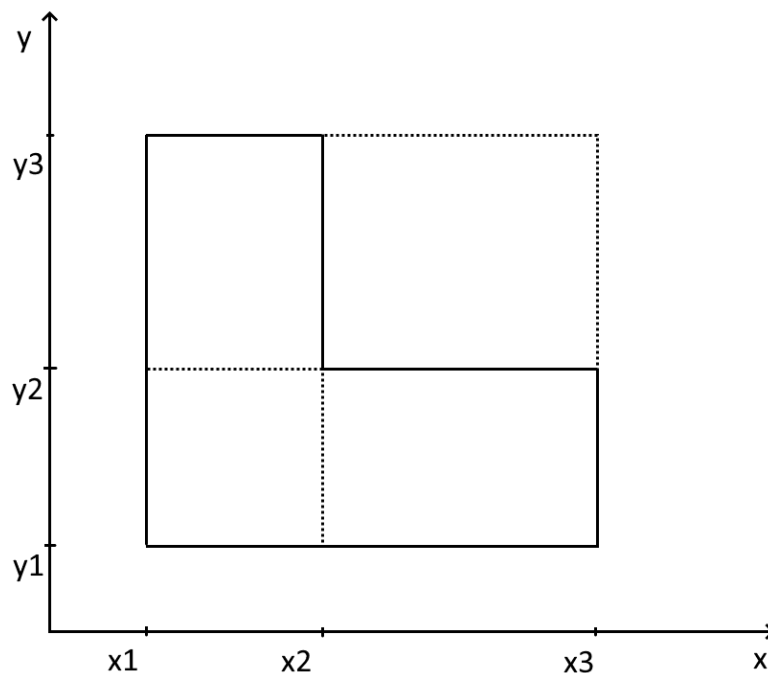
Новосибирск
2021

1. Цель работы

Разработать программу решения эллиптической краевой задачи методом конечных разностей. Протестировать программу и численно оценить порядок аппроксимации.

2. Задание

Область имеет L-образную форму. Предусмотреть учет первых и вторых краевых условий.



3. Анализ задачи

Эллиптическая краевая задача для функции u определяется дифференциальным уравнением

$$-\lambda(\Delta u) + \gamma u = f, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

Заданным в двумерной области Ω с границей $S = S_1 \cup S_2$, и краевыми условиями

$$u|_{S_1} = u_g,$$

$$\lambda \frac{\partial u}{\partial n}|_{S_2} = \theta.$$

Для двумерного оператора Лапласа Δu дискретный аналог на неравномерной прямоугольной сетке может быть представлен пятиточечным разностным выражением

$$\Delta_h u_{i,j} = \frac{2u_{i-1,j}}{h_{i-1}^x(h_i^x + h_{i-1}^x)} + \frac{2u_{i,j-1}}{h_{j-1}^y(h_j^y + h_{j-1}^y)} + \frac{2u_{i+1,j}}{h_i^x(h_i^x + h_{i-1}^x)} + \frac{2u_{i,j+1}}{h_j^y(h_j^y + h_{j-1}^y)} - \left(\frac{2}{h_{i-1}^x h_i^x} + \frac{2}{h_{j-1}^y h_j^y} \right) u_{i,j}.$$

Подставим данное разностное выражение в дифференциальное уравнение и получим:

$$-\frac{2\lambda u_{i-1,j}}{h_{i-1}^x(h_i^x + h_{i-1}^x)} - \frac{2\lambda u_{i,j-1}}{h_{j-1}^y(h_j^y + h_{j-1}^y)} - \frac{2\lambda u_{i+1,j}}{h_i^x(h_i^x + h_{i-1}^x)} - \frac{2\lambda u_{i,j+1}}{h_j^y(h_j^y + h_{j-1}^y)} + \left(\frac{2}{h_{i-1}^x h_i^x} + \frac{2}{h_{j-1}^y h_j^y} \right) \lambda u_{i,j} + \gamma u_{i,j} = f_{i,j}.$$

Учет первых краевых условий:

в матрице СЛАУ в i — й строке на место диагонального элемента ставится единица, все остальные элементы этой строки матрицы обнуляются, а i — й компоненте вектора правой части присваивается значение $u_g(x_i, y_i)$.

Учет вторых краевых условий:

так как расчетная область представляет собой многоугольник, со сторонами, параллельными координатным осям, то направление нормали к границам, на которых заданы вторые краевые условия совпадает с одной из координатных линий, методы аппроксимации производной по нормали $\frac{\partial u}{\partial n}$ можно свести к формуле левой конечной разности для расчета нормали, направленной вверх или вправо, и правой конечной разности для расчета нормали, направленной вниз или влево.

$$\nabla_h^- u_{i,j} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad \nabla_h^+ u_{i,j} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i}$$

4. Текст программы

Файл "vector.h"

```
#pragma once
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <fstream>
using namespace std;

// Умножение вектора на число
vector<double> operator * (double val, const vector<double>& vec)
{
    size_t n = vec.size();
    vector<double> res(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i)
        res[i] = val * vec[i];
    return res;
}

// Сложение векторов
vector<double> operator + (const vector<double>& vec1, const vector<double>& vec2)
{
    size_t n = vec1.size();
    if (n != vec2.size())
        throw("a.size() != b.size()");

    vector<double> res(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i)
        res[i] = vec1[i] + vec2[i];
    return res;
}

// Вычитание векторов
vector<double> operator - (const vector<double>& vec1, const vector<double>& vec2)
{
    size_t n = vec1.size();
    if (n != vec2.size())
        throw("a.size() != b.size()");

    vector<double> res(n);

    for (size_t i = 0; i < n; ++i)
        res[i] = vec1[i] - vec2[i];
    return res;
}

// Скалярное произведение векторов
double operator *(const vector<double>& vec1, const vector<double>& vec2)
{
    size_t n = vec1.size();
    if (n != vec2.size())
        throw("vec1.size() != vec2.size()");

    double res = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        res += vec1[i] * vec2[i];
    return res;
}
```

```
// Норма вектора
double Norm(const vector<double>& vec)
{
    return sqrt(vec * vec);
}
```

Файл "SLAE.h"

```
#pragma once
#include <vector>
#include "Vector.h"

using namespace std;

class SLAE
{
public:
    vector<vector<double>> matrix; // Матрица системы
    vector<int> index;             // Индексы столбцов
    vector<double> f;              // Вектор правой части

    const int D = 5;               // Количество диагоналей матрицы
    int N = 0;                     // Размерность матрицы
    int M = 0;                     // Расстояние до крайних диагоналей

    vector<double> xk, xk1;        // Вспомогательные векторы

    SLAE(const int& N, const int& N_X)
    {
        M = N_X - 2;
        this->N = N;

        index.resize(D);
        index[0] = -(2 + M);
        index[1] = -1;
        index[2] = 0;
        index[3] = 1;
        index[4] = 2 + M;

        matrix.resize(D);

        for(int i = 0; i < D; i++)
            matrix[i].resize(N);

        xk.resize(N);
        xk1.resize(N);
        f.resize(N);
    }

    // Умножение матрицы системы на вектор vec,
    // результат в res
    void Multiplication(vector<double>& vec, vector<double>& res)
    {
        int n = vec.size(), k = 0;
        for(int i = 0; i < D; i++)
        {
            k = index[i];
            if(k < 0)
                for(int j = abs(k); j < n; j++)
                    res[j] += matrix[i][j] * vec[k + j];
            else
                for(int j = 0; j < n - k; j++)
                    res[j] += matrix[i][j] * vec[k + j];
        }
    }
}
```

```

    }
}

// Получение относительной невязки системы
double RelativeResidual(vector<double>& vec)
{
    vector<double> mult(N);

    Multiplication(vec, mult);
    mult = f - mult;

    return Norm(mult) / Norm(f);
}

// Итерационный процесс метода Гаусса-Зейделя
void IterativeProcess(const int& j, double& sum)
{
    int k = 0, n = xk.size();
    for(int i = 0; i < D; i++)
    {
        k = index[i];
        if(k + j >= 0 && k + j < n)
        {
            if(i < 3) // нижний треугольник
                sum += matrix[i][j] * xk1[k + j];
            else // верхний треугольник
                sum += matrix[i][j] * xk[k + j];
        }
    }
}

// Решение системы методом Гаусса-Зейделя
void GaussSeidel(const int& MAX_ITER, const double& EPS,
    const double& RELAX)
{
    double residual = 0.0, sum = 0.0;
    residual = RelativeResidual(xk);
    for(int k = 0; k < MAX_ITER && residual > EPS; k++)
    {
        for(int j = 0; j < N; j++)
        {
            IterativeProcess(j, sum);
            xk1[j] = xk[j] + (RELAX / matrix[2][j]) * (f[j] - sum);
            sum = 0.;
        }
        xk.swap(xk1);
        residual = RelativeResidual(xk);
        //cout << k << " " << residual << endl;
    }
}

};

```

Файл "EllipticalProblev.h"

```

#pragma once
#include <vector>
#include <fstream>
#include <string>
#include "SLAE.h"
#include "Test.h"

using namespace std;

```

```

class EllipticalProblem
{
public:
    vector<double> x_reg;           // Границы области по X
    vector<double> y_reg;           // Границы области по Y

    vector<double> x_node;          // Координаты узлов по X
    vector<double> y_node;          // Координаты узлов по Y

    int N_X;                       // Количество узлов по X
    int N_Y;                       // Количество узлов по Y

    int x_bord;                    // Индекс внутренней границы
                                // L-области по X
    int y_bord;                    // Индекс внутренней границы
                                // L-области по Y

    const int N_BORD = 6;          // Количество ребер

    vector<vector<int>>> borders;    // Информация о граничных условиях

    SLAE* slae;                    // Система
    Test test;                     // Тестовая информация

    EllipticalProblem()
    {
        x_reg = vector<double>(3);
        y_reg = vector<double>(3);
    }

    ~EllipticalProblem()
    {
        delete slae;
    }

    // Функция считывания границ области из файла FILE_NAME
    // и формирования сетки
    void FormGrid(const string& FILE_NAME)
    {
        ifstream fin(FILE_NAME);

        // Считываем границы области
        for(int i = 0; i < 3; i++)
            fin >> x_reg[i];

        for(int i = 0; i < 3; i++)
            fin >> y_reg[i];

        // Генерация координат узлов по X
        int n;
        double h, q;

        fin >> q >> n;
        N_X = n + 1;
        x_bord = n;
        x_node.resize(N_X);

        h = (x_reg[1] - x_reg[0]);
        if (q != 1)
            h *= (1 - q) / (1 - pow(q, n));
        else
            h /= n;

        x_node[0] = x_reg[0];
    }
};

```

```

    for (int i = 0; i < n; i++)
        x_node[i + 1] = x_node[i] + h * pow(q, i);

    fin >> q >> n;
    N_X += n;
    x_node.resize(N_X);

    h = (x_reg[2] - x_reg[1]);
    if (q != 1)
        h *= (1 - q) / (1 - pow(q, n));
    else
        h /= n;

    for (int i = 1; i <= n; i++)
        x_node[i + x_bord] = x_node[i + x_bord - 1] + h * pow(q, i - 1);

    // Генерация координат узлов по Y
    fin >> q >> n;
    N_Y = n + 1;
    y_bord = n;
    y_node.resize(N_Y);

    h = (y_reg[1] - y_reg[0]);
    if (q != 1)
        h *= (1 - q) / (1 - pow(q, n));
    else
        h /= n;

    y_node[0] = y_reg[0];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        y_node[i+1] = y_node[i] + h * pow(q, i);

    fin >> q >> n;
    N_Y += n;
    y_node.resize(N_Y);

    h = (y_reg[2] - y_reg[1]);
    if (q != 1)
        h *= (1 - q) / (1 - pow(q, n));
    else
        h /= n;

    for (int i = 1; i <= n; i++)
        y_node[i + y_bord] = y_node[i + y_bord - 1] + h * pow(q, i - 1);

    fin.close();
}

int CorrespondX(const int& I)
{
    switch(I)
    {
        {
            case(0): return 0;
            case(1): return x_bord;
            case(2): return N_X - 1;
        }
    }
}

int CorrespondY(const int& I)
{
    switch(I)
    {
        {
            case(0): return 0;
            case(1): return y_bord;
            case(2): return N_Y - 1;
        }
    }
}

```



```

    }
}

// Функция считывания индексов для описания краевых условий
// из файла FILE_NAME
void ReadBordConditions(const string& FILE_NAME)
{
    ifstream fin(FILE_NAME);

    borders.resize(N_BORD);

    for(int i = 0; i < N_BORD; i++)
    {
        borders[i].resize(5);

        for(int j = 0; j < 5; j++)
            fin >> borders[i][j];
    }

    fin.close();
}

// Функция формирования индексов границ ребер с соответствующими
// краевыми условиями
void FormBordConditions()
{
    for(int i = 0; i < N_BORD; i++)
    {
        borders[i][1] = CorrespondX(borders[i][1]);
        borders[i][2] = CorrespondX(borders[i][2]);
        borders[i][3] = CorrespondY(borders[i][3]);
        borders[i][4] = CorrespondY(borders[i][4]);
    }
}

// Формирование матрицы системы
void FormMatrix()
{
    for(int n = 0; n < slae->N; n++)
    {
        // Индексы центрального узла
        int x_cent = n % N_X;
        int y_cent = floor(n / N_X);

        // Обработка некраевых узлов внутри L-формы
        if(x_cent < N_X - 1 && x_cent > 0 &&
           y_cent < y_bord && y_cent > 0 ||
           x_cent < x_bord && x_cent > 0 &&
           y_cent < N_Y - 1 && y_cent > 0)
        {
            // Приросты по X
            double hi = x_node[x_cent + 1] - x_node[x_cent + 0];
            double hi1 = x_node[x_cent - 0] - x_node[x_cent - 1];

            // Приросты по Y
            double hj = y_node[y_cent + 1] - y_node[y_cent + 0];
            double hj1 = y_node[y_cent - 0] - y_node[y_cent - 1];

            // Нижний узел
            slae->matrix[0][n] = -test.lambda() *
                (2.0 / (hj1 * (hj + hj1)));

            // Левый узел
            slae->matrix[1][n] = -test.lambda() *

```

```

        (2.0 / (hi1 * (hi + hi1)));

// Центральный узел
slae->matrix[2][n] = +test.lambda() *
    (2.0 / (hi1 * hi) + 2.0 / (hj1 * hj)) + test.gamma();

// Правый узел
slae->matrix[3][n] = -test.lambda() *
    (2.0 / (hi * (hi + hi1)));

// Верхний узел
slae->matrix[4][n] = -test.lambda() *
    (2.0 / (hj * (hj + hj1)));

// Вектор правой части
slae->f[n] = test.f(x_node[x_cent], y_node[y_cent]);
}
// Обработка краевого узла
else if(x_cent <= x_bord || y_cent <= y_bord)
{
    // Обход по всем ребрам
    for(int b = 0; b < N_BORD; b++)
    {
        // Условие узла нахождения на ребре b
        if(x_cent >= borders[b][1] && x_cent <= borders[b][2] &&
            y_cent >= borders[b][3] && y_cent <= borders[b][4])
        {
            // Первое краевое условие
            if(borders[b][0] == 0)
            {
                slae->matrix[2][n] = 1.0;
                slae->f[n] = test.u(x_node[x_cent], y_node[y_cent]);
            }
            // Второе краевое условие
            else if(borders[b][0] == 1)
            {
                // Если ребро параллельно оси X
                if(borders[b][3] == borders[b][4])
                {
                    // Если нормаль направлена вниз
                    if(y_cent == 0)
                    {
                        double dy = y_node[y_cent + 1] - y_node[y_cent];
                        slae->matrix[2][n] = test.lambda() / dy;
                        slae->matrix[4][n] = -test.lambda() / dy;
                        slae->f[n] = test.theta(x_node[x_cent], y_node[y_cent])[0];
                    }
                    // Если нормаль направлена вверх
                    else
                    {
                        double dy = y_node[y_cent] - y_node[y_cent - 1];
                        slae->matrix[0][n] = -test.lambda() / dy;
                        slae->matrix[2][n] = test.lambda() / dy;
                        slae->f[n] = test.theta(x_node[x_cent], y_node[y_cent])[2];
                    }
                }
                // Если ребро параллельно оси Y
                else if(borders[b][1] == borders[b][2])
                {
                    // Если нормаль направлена влево
                    if(x_cent == 0)
                    {
                        double dx = x_node[x_cent + 1] - x_node[x_cent];
                        slae->matrix[2][n] = test.lambda() / dx;

```

```

        slae->matrix[3][n] = -test.lambda() / dx;
        slae->f[n] = test.theta(x_node[x_cent], y_node[y_cent])[3];
    }
    // Если нормаль направлена вправо
    else
    {
        double dx = x_node[x_cent] - x_node[x_cent - 1];
        slae->matrix[1][n] = -test.lambda() / dx;
        slae->matrix[2][n] = test.lambda() / dx;
        slae->f[n] = test.theta(x_node[x_cent], y_node[y_cent])[1];
    }
    }
    }
    break;
}
}
// Обработка квадрата за пределами L-формы
else
    slae->matrix[2][n] = 1.0;
}
}

// Вывод решения в файл FILE_NAME
void PrintSolution(const string& FILE_NAME)
{
    ofstream fout(FILE_NAME);
    int w = ceil(log10(N_X * N_Y)) + 2;
    double norm = 0., norm_u = 0.;

    fout << " y          x          calc          prec          dif          ";

    for(int i = 0; i < w - 1; i++)
        fout << " ";

    fout << "N location" << endl << fixed;
    for(int j = 0; j < N_Y; j++)
    {
        for(int i = 0; i < N_X; i++)
        {
            int n = j * N_X + i;
            //if (i % 8 == 0 && j % 8 == 0)
            {
                fout << setw(9) << y_node[j];
                fout << setw(11) << x_node[i];
                double t = slae->xk[n];
                fout << setw(15) << t;
                double tt = 0;
                if (i <= x_bord || j <= y_bord) tt = test.u(x_node[i], y_node[j]);
                fout << setw(15) << tt;
                fout << setw(14) << scientific << abs(t - tt);
                fout << fixed << setw(w) << n;

                if (i < N_X - 1 && i > 0 &&
                    j < y_bord && j > 0 ||
                    i < x_bord && i > 0 &&
                    j < N_Y - 1 && j > 0)
                    fout << " inner";
                else if (i <= x_bord || j <= y_bord)
                    fout << " border";
                else
                    fout << " outer";
                fout << endl;
            }
        }
    }
}

```

```

        norm_u += tt * tt;
        norm += abs(t - tt) * abs(t - tt);
    }
}
}
fout << "||u-u*||/||u*|| = " << scientific << sqrt(norm) / sqrt(norm_u) << endl;
fout << "||u-u*|| = " << scientific << sqrt(norm);
fout.close();
}

};

```

Файл "Test.h"

```

#pragma once
#include <vector>
using namespace std;

class Test
{
public:
    int N;

    Test(const int& t_N) : N(t_N) {};

    Test() : N(0) {};

    double f(const double& x, const double& y)
    {
        switch(N)
        {
            case(0): return (0)* lambda() + u(x, y) * gamma();
            case(1): return (0)* lambda() + u(x, y) * gamma();
            case(2): return (-4)* lambda() + u(x, y) * gamma();
            case(3): return (-6 * x - 6 * y) * lambda() + u(x, y) * gamma();
            case(4): return (-12 * x * x - 12 * y * y) * lambda() + u(x, y) * gamma();
            case(5): return 2 * sin(x + y) * lambda() + u(x, y) * gamma();
        };
    }

    double lambda()
    {
        return 1;
    }

    double gamma()
    {
        return 1;
    }

    vector<double> theta(const double& x, const double& y)
    {
        // Нормали вниз, вправо, вверх, влево
        switch(N)
        {
            case(0): return vector<double>(4, 0);
            case(1): return { -1, 1, 1, -1 };
        };
    }

    double u(const double& x, const double& y)
    {

```

```

        switch(N)
        {
        case(0): return 2.0;
        case(1): return x + y;
        case(2): return x * x + y * y;
        case(3): return x * x * x + y * y * y;
        case(4): return x * x * x * x + y * y * y * y;
        case(5): return sin(x + y);
        };
    }
};

```

Файл "Main.cpp"

```

#include <iostream>
#include "EllipticalProblem.h"

using namespace std;

void main()
{
    EllipticalProblem ep = EllipticalProblem();

    ep.FormGrid("coords.txt");

    ep.ReadBordConditions("borders.txt");
    ep.FormBordConditions();

    // Инициализация СЛАУ
    ep.slae = new SLAE(ep.N_X * ep.N_Y, ep.N_X);

    // Инициализация тестовых данных
    ep.test = Test(1);

    ep.FormMatrix();

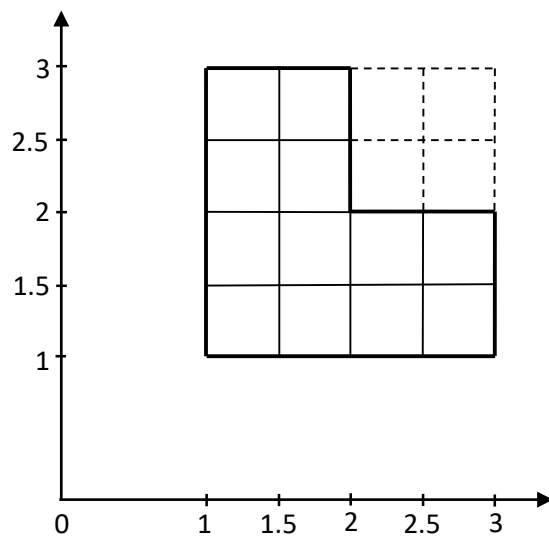
    ep.slae->GaussSeidel(10000, 1e-14, 0.65);

    ep.PrintSolution("res.txt");

}

```

5. Исследование порядка аппроксимации на равномерной сетке



Файл *cords.txt*

```
1 2 3
1 2 3
2 2 2 2
```

Файл *borders.txt*

```
0 0 2 0 0
0 2 2 0 1
0 1 2 1 1
0 1 1 1 2
0 0 1 2 2
0 0 0 0 2
```

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = 2, f = 2$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.500000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.500000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	3	border
1.000000	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	4	border
1.500000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	5	border
1.500000	1.500000	2.000000	2.000000	2.442491e-15	6	inner
1.500000	2.000000	2.000000	2.000000	1.776357e-15	7	inner
1.500000	2.500000	2.000000	2.000000	2.664535e-15	8	inner
1.500000	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	9	border
2.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	10	border
2.000000	1.500000	2.000000	2.000000	1.776357e-15	11	inner
2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.500000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	13	border
2.000000	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	14	border
2.500000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	15	border
2.500000	1.500000	2.000000	2.000000	2.664535e-15	16	inner
2.500000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	17	border
2.500000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.500000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	20	border
3.000000	1.500000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	21	border
3.000000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	22	border
3.000000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x + y, f = x + y$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.500000	2.500000	2.500000	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	3.000000	3.000000	4.440892e-16	2	border
1.000000	2.500000	3.500000	3.500000	4.440892e-16	3	border
1.000000	3.000000	4.000000	4.000000	0.000000e+00	4	border
1.500000	1.000000	2.500000	2.500000	0.000000e+00	5	border
1.500000	1.500000	3.000000	3.000000	7.105427e-15	6	inner
1.500000	2.000000	3.500000	3.500000	1.332268e-15	7	inner
1.500000	2.500000	4.000000	4.000000	3.552714e-15	8	inner
1.500000	3.000000	4.500000	4.500000	0.000000e+00	9	border
2.000000	1.000000	3.000000	3.000000	4.440892e-16	10	border
2.000000	1.500000	3.500000	3.500000	1.332268e-15	11	inner
2.000000	2.000000	4.000000	4.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.500000	4.500000	4.500000	0.000000e+00	13	border
2.000000	3.000000	5.000000	5.000000	0.000000e+00	14	border
2.500000	1.000000	3.500000	3.500000	4.440892e-16	15	border
2.500000	1.500000	4.000000	4.000000	3.552714e-15	16	inner
2.500000	2.000000	4.500000	4.500000	0.000000e+00	17	border
2.500000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.500000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	4.000000	4.000000	0.000000e+00	20	border
3.000000	1.500000	4.500000	4.500000	0.000000e+00	21	border
3.000000	2.000000	5.000000	5.000000	0.000000e+00	22	border
3.000000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^2 + y^2, f = -4 + x^2 + y^2$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.500000	3.250000	3.250000	4.440892e-16	1	border
1.000000	2.000000	5.000000	5.000000	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.500000	7.250000	7.250000	8.881784e-16	3	border
1.000000	3.000000	10.000000	10.000000	0.000000e+00	4	border
1.500000	1.000000	3.250000	3.250000	4.440892e-16	5	border
1.500000	1.500000	4.500000	4.500000	1.776357e-14	6	inner
1.500000	2.000000	6.250000	6.250000	2.664535e-15	7	inner
1.500000	2.500000	8.500000	8.500000	3.552714e-15	8	inner
1.500000	3.000000	11.250000	11.250000	1.776357e-15	9	border
2.000000	1.000000	5.000000	5.000000	0.000000e+00	10	border
2.000000	1.500000	6.250000	6.250000	2.664535e-15	11	inner
2.000000	2.000000	8.000000	8.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.500000	10.250000	10.250000	0.000000e+00	13	border
2.000000	3.000000	13.000000	13.000000	1.776357e-15	14	border
2.500000	1.000000	7.250000	7.250000	8.881784e-16	15	border
2.500000	1.500000	8.500000	8.500000	3.552714e-15	16	inner
2.500000	2.000000	10.250000	10.250000	0.000000e+00	17	border
2.500000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.500000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	10.000000	10.000000	0.000000e+00	20	border
3.000000	1.500000	11.250000	11.250000	1.776357e-15	21	border
3.000000	2.000000	13.000000	13.000000	1.776357e-15	22	border
3.000000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

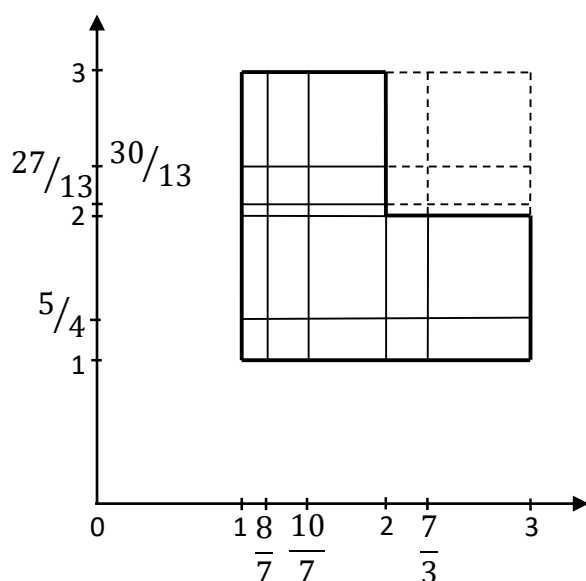
x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.500000	4.375000	4.375000	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	9.000000	9.000000	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.500000	16.625000	16.625000	0.000000e+00	3	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	3.552714e-15	4	border
1.500000	1.000000	4.375000	4.375000	0.000000e+00	5	border
1.500000	1.500000	6.750000	6.750000	4.707346e-14	6	inner
1.500000	2.000000	11.375000	11.375000	1.065814e-14	7	inner
1.500000	2.500000	19.000000	19.000000	7.105427e-15	8	inner
1.500000	3.000000	30.375000	30.375000	3.552714e-15	9	border
2.000000	1.000000	9.000000	9.000000	0.000000e+00	10	border
2.000000	1.500000	11.375000	11.375000	1.065814e-14	11	inner
2.000000	2.000000	16.000000	16.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.500000	23.625000	23.625000	3.552714e-15	13	border
2.000000	3.000000	35.000000	35.000000	0.000000e+00	14	border
2.500000	1.000000	16.625000	16.625000	0.000000e+00	15	border
2.500000	1.500000	19.000000	19.000000	7.105427e-15	16	inner
2.500000	2.000000	23.625000	23.625000	3.552714e-15	17	border
2.500000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.500000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	3.552714e-15	20	border
3.000000	1.500000	30.375000	30.375000	3.552714e-15	21	border
3.000000	2.000000	35.000000	35.000000	0.000000e+00	22	border
3.000000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.500000	6.062500	6.062500	8.881784e-16	1	border
1.000000	2.000000	17.000000	17.000000	3.552714e-15	2	border
1.000000	2.500000	40.062500	40.062500	7.105427e-15	3	border
1.000000	3.000000	82.000000	82.000000	1.421085e-14	4	border
1.500000	1.000000	6.062500	6.062500	8.881784e-16	5	border
1.500000	1.500000	10.232640	10.125000	1.076397e-01	6	inner
1.500000	2.000000	21.166234	21.062500	1.037344e-01	7	inner
1.500000	2.500000	44.208232	44.125000	8.323163e-02	8	inner
1.500000	3.000000	86.062500	86.062500	1.421085e-14	9	border
2.000000	1.000000	17.000000	17.000000	3.552714e-15	10	border
2.000000	1.500000	21.166234	21.062500	1.037344e-01	11	inner
2.000000	2.000000	32.000000	32.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.500000	55.062500	55.062500	7.105427e-15	13	border
2.000000	3.000000	97.000000	97.000000	1.421085e-14	14	border
2.500000	1.000000	40.062500	40.062500	7.105427e-15	15	border
2.500000	1.500000	44.208232	44.125000	8.323163e-02	16	inner
2.500000	2.000000	55.062500	55.062500	7.105427e-15	17	border
2.500000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.500000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	82.000000	82.000000	1.421085e-14	20	border
3.000000	1.500000	86.062500	86.062500	1.421085e-14	21	border
3.000000	2.000000	97.000000	97.000000	1.421085e-14	22	border
3.000000	2.500000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

При увеличении степени искомой функции, начиная с $u^* = x^4 + y^4$, происходит увеличение погрешности.

6. Исследование порядка аппроксимации на неравномерной сетке



Файл cords.txt

```
1 2 3
1 2 3
2 3 2 2
3 2 3 3
```

Файл borders.txt

```
0 0 2 0 0
0 2 2 0 1
0 1 2 1 1
0 1 1 1 2
0 0 1 2 2
0 0 0 0 2
```

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = 2, f = 2$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.250000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.076923	2.000000	2.000000	0.000000e+00	3	border
1.000000	2.307692	2.000000	2.000000	0.000000e+00	4	border
1.000000	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	5	border
1.142857	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	6	border
1.142857	1.250000	2.000000	2.000000	2.220446e-16	7	inner
1.142857	2.000000	2.000000	2.000000	8.881784e-16	8	inner
1.142857	2.076923	2.000000	2.000000	4.440892e-16	9	inner
1.142857	2.307692	2.000000	2.000000	6.661338e-16	10	inner
1.142857	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	11	border
1.428571	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	12	border
1.428571	1.250000	2.000000	2.000000	1.332268e-15	13	inner
1.428571	2.000000	2.000000	2.000000	3.996803e-15	14	inner
1.428571	2.076923	2.000000	2.000000	0.000000e+00	15	border
1.428571	2.307692	2.000000	2.000000	0.000000e+00	16	border
1.428571	3.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	17	border
2.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	18	border
2.000000	1.250000	2.000000	2.000000	1.110223e-15	19	inner
2.000000	2.000000	2.000000	2.000000	3.330669e-15	20	inner
2.000000	2.076923	2.000000	2.000000	0.000000e+00	21	border
2.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	22	outer
2.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
2.333333	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	24	border
2.333333	1.250000	2.000000	2.000000	8.881784e-16	25	inner
2.333333	2.000000	2.000000	2.000000	2.220446e-15	26	inner
2.333333	2.076923	2.000000	2.000000	0.000000e+00	27	border
2.333333	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	28	outer
2.333333	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	29	outer
3.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	30	border
3.000000	1.250000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	31	border
3.000000	2.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	32	border
3.000000	2.076923	2.000000	2.000000	0.000000e+00	33	border
3.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	34	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	35	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x + y, f = x + y$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.250000	2.142857	2.142857	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	2.428571	2.428571	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.076923	3.000000	3.000000	4.440892e-16	3	border
1.000000	2.307692	3.333333	3.333333	4.440892e-16	4	border
1.000000	3.000000	4.000000	4.000000	4.440892e-16	5	border
1.142857	1.000000	2.250000	2.250000	0.000000e+00	6	border
1.142857	1.250000	2.392857	2.392857	1.776357e-15	7	inner
1.142857	2.000000	2.678571	2.678571	1.776357e-15	8	inner
1.142857	2.076923	3.250000	3.250000	4.440892e-16	9	inner
1.142857	2.307692	3.583333	3.583333	4.440892e-16	10	inner
1.142857	3.000000	4.250000	4.250000	0.000000e+00	11	border
1.428571	1.000000	3.000000	3.000000	4.440892e-16	12	border
1.428571	1.250000	3.142857	3.142857	4.884981e-15	13	inner
1.428571	2.000000	3.428571	3.428571	6.217249e-15	14	inner
1.428571	2.076923	4.000000	4.000000	0.000000e+00	15	border
1.428571	2.307692	4.333333	4.333333	0.000000e+00	16	border
1.428571	3.000000	5.000000	5.000000	0.000000e+00	17	border
2.000000	1.000000	3.076923	3.076923	4.440892e-16	18	border
2.000000	1.250000	3.219780	3.219780	3.996803e-15	19	inner
2.000000	2.000000	3.505495	3.505495	4.440892e-15	20	inner
2.000000	2.076923	4.076923	4.076923	0.000000e+00	21	border
2.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	22	outer
2.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
2.333333	1.000000	3.307692	3.307692	4.440892e-16	24	border
2.333333	1.250000	3.450549	3.450549	2.220446e-15	25	inner
2.333333	2.000000	3.736264	3.736264	1.332268e-15	26	inner
2.333333	2.076923	4.307692	4.307692	0.000000e+00	27	border
2.333333	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	28	outer
2.333333	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	29	outer
3.000000	1.000000	4.000000	4.000000	0.000000e+00	30	border
3.000000	1.250000	4.142857	4.142857	0.000000e+00	31	border
3.000000	2.000000	4.428571	4.428571	0.000000e+00	32	border
3.000000	2.076923	5.000000	5.000000	0.000000e+00	33	border
3.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	34	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	35	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^2 + y^2, f = -4 + x^2 + y^2$

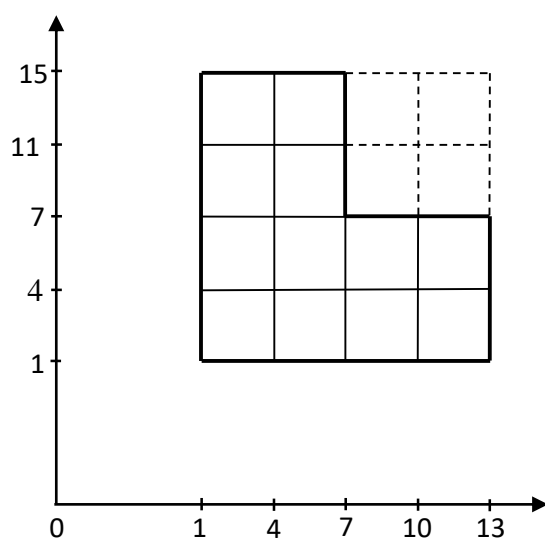
x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.250000	2.306122	2.306122	4.440892e-16	1	border
1.000000	2.000000	3.040816	3.040816	0.000000e+00	2	border
1.000000	2.076923	5.000000	5.000000	8.881784e-16	3	border
1.000000	2.307692	6.444444	6.444444	0.000000e+00	4	border
1.000000	3.000000	10.000000	10.000000	1.776357e-15	5	border
1.142857	1.000000	2.562500	2.562500	4.440892e-16	6	border
1.142857	1.250000	2.868622	2.868622	4.440892e-16	7	inner
1.142857	2.000000	3.603316	3.603316	2.220446e-15	8	inner
1.142857	2.076923	5.562500	5.562500	8.881784e-16	9	inner
1.142857	2.307692	7.006944	7.006944	1.776357e-15	10	inner
1.142857	3.000000	10.562500	10.562500	0.000000e+00	11	border
1.428571	1.000000	5.000000	5.000000	8.881784e-16	12	border
1.428571	1.250000	5.306122	5.306122	3.552714e-15	13	inner
1.428571	2.000000	6.040816	6.040816	8.881784e-15	14	inner
1.428571	2.076923	8.000000	8.000000	0.000000e+00	15	border
1.428571	2.307692	9.444444	9.444444	1.776357e-15	16	border
1.428571	3.000000	13.000000	13.000000	0.000000e+00	17	border
2.000000	1.000000	5.313609	5.313609	8.881784e-16	18	border
2.000000	1.250000	5.619732	5.619732	2.664535e-15	19	inner
2.000000	2.000000	6.354426	6.354426	4.440892e-15	20	inner
2.000000	2.076923	8.313609	8.313609	1.776357e-15	21	border
2.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	22	outer
2.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
2.333333	1.000000	6.325444	6.325444	0.000000e+00	24	border
2.333333	1.250000	6.631566	6.631566	8.881784e-16	25	inner
2.333333	2.000000	7.366260	7.366260	8.881784e-16	26	inner
2.333333	2.076923	9.325444	9.325444	1.776357e-15	27	border
2.333333	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	28	outer
2.333333	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	29	outer
3.000000	1.000000	10.000000	10.000000	1.776357e-15	30	border
3.000000	1.250000	10.306122	10.306122	1.776357e-15	31	border
3.000000	2.000000	11.040816	11.040816	1.776357e-15	32	border
3.000000	2.076923	13.000000	13.000000	0.000000e+00	33	border
3.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	34	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	35	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.250000	2.492711	2.492711	4.440892e-16	1	border
1.000000	2.000000	3.915452	3.915452	4.440892e-16	2	border
1.000000	2.076923	9.000000	9.000000	1.776357e-15	3	border
1.000000	2.307692	13.703704	13.703704	1.776357e-15	4	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	3.552714e-15	5	border
1.142857	1.000000	2.953125	2.953125	4.440892e-16	6	border
1.142857	1.250000	3.492480	3.445836	4.664323e-02	7	inner
1.142857	2.000000	4.963673	4.868577	9.509651e-02	8	inner
1.142857	2.076923	10.023599	9.953125	7.047387e-02	9	inner
1.142857	2.307692	14.757934	14.656829	1.011053e-01	10	inner
1.142857	3.000000	28.953125	28.953125	3.552714e-15	11	border
1.428571	1.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	12	border
1.428571	1.250000	9.489236	9.492711	3.475575e-03	13	inner
1.428571	2.000000	10.928305	10.915452	1.285312e-02	14	inner
1.428571	2.076923	16.000000	16.000000	1.776357e-15	15	border
1.428571	2.307692	20.703704	20.703704	3.552714e-15	16	border
1.428571	3.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	17	border
2.000000	1.000000	9.959035	9.959035	1.776357e-15	18	border
2.000000	1.250000	10.464654	10.451746	1.290714e-02	19	inner
2.000000	2.000000	11.909864	11.874487	3.537704e-02	20	inner
2.000000	2.076923	16.959035	16.959035	3.552714e-15	21	border
2.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	22	outer
2.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
2.333333	1.000000	13.289486	13.289486	1.776357e-15	24	border
2.333333	1.250000	13.825582	13.782197	4.338520e-02	25	inner
2.333333	2.000000	15.289575	15.204938	8.463696e-02	26	inner
2.333333	2.076923	20.289486	20.289486	3.552714e-15	27	border
2.333333	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	28	outer
2.333333	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	29	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	3.552714e-15	30	border
3.000000	1.250000	28.492711	28.492711	3.552714e-15	31	border
3.000000	2.000000	29.915452	29.915452	3.552714e-15	32	border
3.000000	2.076923	35.000000	35.000000	7.105427e-15	33	border
3.000000	2.307692	0.000000	0.000000	0.000000e+00	34	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	35	outer

При увеличении степени искомой функции, начиная с $u^* = x^3 + y^3$, происходит увеличение погрешности.

7. Исследование порядка сходимости на равномерной сетке



Файл *cords.txt*

```
1 7 13
1 7 13
1 2 1 2
1 2 1 2
```

Файл *borders.txt*

```
0 0 2 0 0
0 2 2 0 1
0 1 2 1 1
0 1 1 1 2
0 0 1 2 2
0 0 0 0 2
```

Будем использовать данную сетку для следующих двух тестов.

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	4.440892e-16	0	border
1.000000	4.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	1	border
1.000000	7.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	2	border
1.000000	10.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	3	border
1.000000	13.000000	28562.000000	28562.000000	7.275958e-12	4	border
4.000000	1.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	5	border
4.000000	4.000000	541.427247	512.000000	2.942725e+01	6	inner
4.000000	7.000000	2686.277108	2657.000000	2.927711e+01	7	inner
4.000000	10.000000	10283.175162	10256.000000	2.717516e+01	8	inner
4.000000	13.000000	28817.000000	28817.000000	7.275958e-12	9	border
7.000000	1.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	10	border
7.000000	4.000000	2686.277108	2657.000000	2.927711e+01	11	inner
7.000000	7.000000	4802.000000	4802.000000	9.094947e-13	12	border
7.000000	10.000000	12401.000000	12401.000000	3.637979e-12	13	border
7.000000	13.000000	30962.000000	30962.000000	7.275958e-12	14	border
10.000000	1.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	15	border
10.000000	4.000000	10283.175162	10256.000000	2.717516e+01	16	inner
10.000000	7.000000	12401.000000	12401.000000	3.637979e-12	17	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
13.000000	1.000000	28562.000000	28562.000000	7.275958e-12	20	border
13.000000	4.000000	28817.000000	28817.000000	7.275958e-12	21	border
13.000000	7.000000	30962.000000	30962.000000	7.275958e-12	22	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	2.331468e-15	0	border
1.000000	4.000000	-0.958924	-0.958924	2.442491e-15	1	border
1.000000	7.000000	0.989358	0.989358	2.553513e-15	2	border
1.000000	10.000000	-0.999990	-0.999990	2.553513e-15	3	border
1.000000	13.000000	0.990607	0.990607	2.553513e-15	4	border
4.000000	1.000000	-0.958924	-0.958924	2.442491e-15	5	border
4.000000	4.000000	1.650910	0.989358	6.615517e-01	6	inner
4.000000	7.000000	-1.666497	-0.999990	6.665072e-01	7	inner
4.000000	10.000000	1.704394	0.990607	7.137862e-01	8	inner
4.000000	13.000000	-0.961397	-0.961397	2.442491e-15	9	border
7.000000	1.000000	0.989358	0.989358	2.553513e-15	10	border
7.000000	4.000000	-1.666497	-0.999990	6.665072e-01	11	inner
7.000000	7.000000	0.990607	0.990607	2.553513e-15	12	border
7.000000	10.000000	-0.961397	-0.961397	2.442491e-15	13	border
7.000000	13.000000	0.912945	0.912945	2.331468e-15	14	border
10.000000	1.000000	-0.999990	-0.999990	2.553513e-15	15	border
10.000000	4.000000	1.704394	0.990607	7.137862e-01	16	inner
10.000000	7.000000	-0.961397	-0.961397	2.442491e-15	17	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
13.000000	1.000000	0.990607	0.990607	2.553513e-15	20	border
13.000000	4.000000	-0.961397	-0.961397	2.442491e-15	21	border
13.000000	7.000000	0.912945	0.912945	2.331468e-15	22	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

Поделим сетку в два раза по x и y

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	4.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	2	border
1.000000	7.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	4	border
1.000000	10.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	6	border
1.000000	13.000000	28562.000000	28562.000000	3.637979e-12	8	border
4.000000	1.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	18	border
4.000000	4.000000	519.888469	512.000000	7.888469e+00	20	inner
4.000000	7.000000	2664.945159	2657.000000	7.945159e+00	22	inner
4.000000	10.000000	10263.493892	10256.000000	7.493892e+00	24	inner
4.000000	13.000000	28817.000000	28817.000000	3.637979e-12	26	border
7.000000	1.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	36	border
7.000000	4.000000	2664.945159	2657.000000	7.945159e+00	38	inner
7.000000	7.000000	4802.000000	4802.000000	9.094947e-13	40	border
7.000000	10.000000	12401.000000	12401.000000	1.818989e-12	42	border
7.000000	13.000000	30962.000000	30962.000000	3.637979e-12	44	border
10.000000	1.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	54	border
10.000000	4.000000	10263.493892	10256.000000	7.493892e+00	56	inner
10.000000	7.000000	12401.000000	12401.000000	1.818989e-12	58	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	60	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	62	outer
13.000000	1.000000	28562.000000	28562.000000	3.637979e-12	72	border
13.000000	4.000000	28817.000000	28817.000000	3.637979e-12	74	border
13.000000	7.000000	30962.000000	30962.000000	3.637979e-12	76	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	78	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	80	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	1.110223e-16	0	border
1.000000	4.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	2	border
1.000000	7.000000	0.989358	0.989358	1.110223e-16	4	border
1.000000	10.000000	-0.999990	-0.999990	1.110223e-16	6	border
1.000000	13.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	8	border
4.000000	1.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	18	border
4.000000	4.000000	1.126187	0.989358	1.368285e-01	20	inner
4.000000	7.000000	-1.138930	-0.999990	1.389401e-01	22	inner
4.000000	10.000000	1.132765	0.990607	1.421572e-01	24	inner
4.000000	13.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	26	border
7.000000	1.000000	0.989358	0.989358	1.110223e-16	36	border
7.000000	4.000000	-1.138930	-0.999990	1.389401e-01	38	inner
7.000000	7.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	40	border
7.000000	10.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	42	border
7.000000	13.000000	0.912945	0.912945	1.110223e-16	44	border
10.000000	1.000000	-0.999990	-0.999990	1.110223e-16	54	border
10.000000	4.000000	1.132765	0.990607	1.421572e-01	56	inner
10.000000	7.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	58	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	60	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	62	outer
13.000000	1.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	72	border
13.000000	4.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	74	border
13.000000	7.000000	0.912945	0.912945	1.110223e-16	76	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	78	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	80	outer

Поделим сетку еще в два раза по x и y

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	4.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	4	border
1.000000	7.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	8	border
1.000000	10.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	12	border
1.000000	13.000000	28562.000000	28562.000000	0.000000e+00	16	border
4.000000	1.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	68	border
4.000000	4.000000	514.015066	512.000000	2.015066e+00	72	inner
4.000000	7.000000	2659.038689	2657.000000	2.038689e+00	76	inner
4.000000	10.000000	10257.931897	10256.000000	1.931897e+00	80	inner
4.000000	13.000000	28817.000000	28817.000000	0.000000e+00	84	border
7.000000	1.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	136	border
7.000000	4.000000	2659.038689	2657.000000	2.038689e+00	140	inner
7.000000	7.000000	4802.000000	4802.000000	9.094947e-13	144	border
7.000000	10.000000	12401.000000	12401.000000	0.000000e+00	148	border
7.000000	13.000000	30962.000000	30962.000000	0.000000e+00	152	border
10.000000	1.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	204	border
10.000000	4.000000	10257.931897	10256.000000	1.931897e+00	208	inner
10.000000	7.000000	12401.000000	12401.000000	0.000000e+00	212	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	216	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	220	outer
13.000000	1.000000	28562.000000	28562.000000	0.000000e+00	272	border
13.000000	4.000000	28817.000000	28817.000000	0.000000e+00	276	border
13.000000	7.000000	30962.000000	30962.000000	0.000000e+00	280	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	284	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	288	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	0.000000e+00	0	border
1.000000	4.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	4	border
1.000000	7.000000	0.989358	0.989358	0.000000e+00	8	border
1.000000	10.000000	-0.999990	-0.999990	0.000000e+00	12	border
1.000000	13.000000	0.990607	0.990607	0.000000e+00	16	border
4.000000	1.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	68	border
4.000000	4.000000	1.021736	0.989358	3.237752e-02	72	inner
4.000000	7.000000	-1.032798	-0.999990	3.280781e-02	76	inner
4.000000	10.000000	1.023880	0.990607	3.327262e-02	80	inner
4.000000	13.000000	-0.961397	-0.961397	0.000000e+00	84	border
7.000000	1.000000	0.989358	0.989358	0.000000e+00	136	border
7.000000	4.000000	-1.032798	-0.999990	3.280781e-02	140	inner
7.000000	7.000000	0.990607	0.990607	0.000000e+00	144	border
7.000000	10.000000	-0.961397	-0.961397	0.000000e+00	148	border
7.000000	13.000000	0.912945	0.912945	0.000000e+00	152	border
10.000000	1.000000	-0.999990	-0.999990	0.000000e+00	204	border
10.000000	4.000000	1.023880	0.990607	3.327262e-02	208	inner
10.000000	7.000000	-0.961397	-0.961397	0.000000e+00	212	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	216	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	220	outer
13.000000	1.000000	0.990607	0.990607	0.000000e+00	272	border
13.000000	4.000000	-0.961397	-0.961397	0.000000e+00	276	border
13.000000	7.000000	0.912945	0.912945	0.000000e+00	280	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	284	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	288	outer

Поделим сетку еще в два раза по x и y

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	4.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	8	border
1.000000	7.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	16	border
1.000000	10.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	24	border
1.000000	13.000000	28562.000000	28562.000000	3.637979e-12	32	border
4.000000	1.000000	257.000000	257.000000	5.684342e-14	264	border
4.000000	4.000000	512.506759	512.000000	5.067595e-01	272	inner
4.000000	7.000000	2657.513201	2657.000000	5.132015e-01	280	inner
4.000000	10.000000	10256.487059	10256.000000	4.870588e-01	288	inner
4.000000	13.000000	28817.000000	28817.000000	3.637979e-12	296	border
7.000000	1.000000	2402.000000	2402.000000	4.547474e-13	528	border
7.000000	4.000000	2657.513201	2657.000000	5.132015e-01	536	inner
7.000000	7.000000	4802.000000	4802.000000	9.094947e-13	544	border
7.000000	10.000000	12401.000000	12401.000000	1.818989e-12	552	border
7.000000	13.000000	30962.000000	30962.000000	3.637979e-12	560	border
10.000000	1.000000	10001.000000	10001.000000	1.818989e-12	792	border
10.000000	4.000000	10256.487059	10256.000000	4.870588e-01	800	inner
10.000000	7.000000	12401.000000	12401.000000	1.818989e-12	808	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	816	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	824	outer
13.000000	1.000000	28562.000000	28562.000000	3.637979e-12	1056	border
13.000000	4.000000	28817.000000	28817.000000	3.637979e-12	1064	border
13.000000	7.000000	30962.000000	30962.000000	3.637979e-12	1072	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1080	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1088	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	1.110223e-16	0	border
1.000000	4.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	8	border
1.000000	7.000000	0.989358	0.989358	1.110223e-16	16	border
1.000000	10.000000	-0.999990	-0.999990	1.110223e-16	24	border
1.000000	13.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	32	border
4.000000	1.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	264	border
4.000000	4.000000	0.997340	0.989358	7.981730e-03	272	inner
4.000000	7.000000	-1.008070	-0.999990	8.080090e-03	280	inner
4.000000	10.000000	0.998787	0.990607	8.179159e-03	288	inner
4.000000	13.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	296	border
7.000000	1.000000	0.989358	0.989358	1.110223e-16	528	border
7.000000	4.000000	-1.008070	-0.999990	8.080090e-03	536	inner
7.000000	7.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	544	border
7.000000	10.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	552	border
7.000000	13.000000	0.912945	0.912945	1.110223e-16	560	border
10.000000	1.000000	-0.999990	-0.999990	1.110223e-16	792	border
10.000000	4.000000	0.998787	0.990607	8.179159e-03	800	inner
10.000000	7.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	808	border
10.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	816	outer
10.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	824	outer
13.000000	1.000000	0.990607	0.990607	1.110223e-16	1056	border
13.000000	4.000000	-0.961397	-0.961397	1.110223e-16	1064	border
13.000000	7.000000	0.912945	0.912945	1.110223e-16	1072	border
13.000000	10.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1080	outer
13.000000	13.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1088	outer

Рассмотрим значения численного и аналитического решения

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^4 + y^4, f = -12(x^2 + y^2) + x^4 + y^4$

n	x	y	u	u^*	$ u - u^* $	2/4	4/8	8/16
2	7	4	2686,277108	2657	29,27711	3,684899	3,8971903	3,97249616
4			2664,945159		7,945159			
8			2659,038689		2,038689			
16			2657,513201		0,513201			

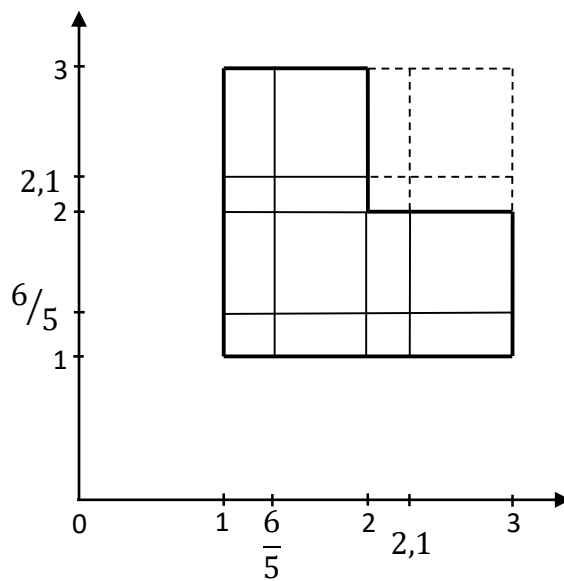
n	$ u - u^* $			
2	6,36965E+01	3,67265E+00	3,89E+00	3,97E+00
4	1,73E+01			
8	4,45E+00			
16	1,12E+00			

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

n	x	y	u	u^*	$ u - u^* $			
2	7	4	-1,666497	-0,99999	0,666507	4,797091	4,2349631	4,06047428
4			-1,13893		0,13894			
8			-1,032798		0,032808			
16			-1,00807		0,00808			

n	$ u - u^* $			
2	1,53137E+00	4,89808E+00	4,25E+00	4,06E+00
4	3,13E-01			
8	7,36E-02			
16	1,81E-02			

8. Исследование порядка сходимости на неравномерной сетке



Файл *cords.txt*

```
1 2 3
1 2 3
4 2 9 2
4 2 9 2
```

Файл *borders.txt*

```
0 0 2 0 0
0 2 2 0 1
0 1 2 1 1
0 1 1 1 2
0 0 1 2 2
0 0 0 0 2
```

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	1	border
1.000000	2.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	2	border
1.000000	2.100000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	3	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	4	border
1.200000	1.000000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	5	border
1.200000	1.200000	3.561856	3.456000	1.058563e-01	6	inner
1.200000	2.000000	9.798453	9.728000	7.045275e-02	7	inner
1.200000	2.100000	11.106827	10.989000	1.178274e-01	8	inner
1.200000	3.000000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	9	border
2.000000	1.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	10	border
2.000000	1.200000	9.798453	9.728000	7.045275e-02	11	inner
2.000000	2.000000	16.000000	16.000000	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.100000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	13	border
2.000000	3.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	14	border
2.100000	1.000000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	15	border
2.100000	1.200000	11.106827	10.989000	1.178274e-01	16	inner
2.100000	2.000000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	17	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	20	border
3.000000	1.200000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	21	border
3.000000	2.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	22	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	1	border
1.000000	2.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	2	border
1.000000	2.100000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	3	border
1.000000	3.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	4	border
1.200000	1.000000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	5	border
1.200000	1.200000	0.690628	0.675463	1.516508e-02	6	inner
1.200000	2.000000	-0.047997	-0.058374	1.037757e-02	7	inner
1.200000	2.100000	-0.139966	-0.157746	1.777988e-02	8	inner
1.200000	3.000000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	9	border
2.000000	1.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	10	border
2.000000	1.200000	-0.047997	-0.058374	1.037757e-02	11	inner
2.000000	2.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	12	border
2.000000	2.100000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	13	border
2.000000	3.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	14	border
2.100000	1.000000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	15	border
2.100000	1.200000	-0.139966	-0.157746	1.777988e-02	16	inner
2.100000	2.000000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	17	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	18	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	19	outer
3.000000	1.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	20	border
3.000000	1.200000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	21	border
3.000000	2.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	22	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	23	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	24	outer

Поделим сетку в два раза по x и y ($q1 = 2; n1 = 4; q2 = 3; n2 = 4$).

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	2	border
1.000000	2.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	4	border
1.000000	2.100000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	6	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	8	border
1.200000	1.000000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	18	border
1.200000	1.200000	3.482521	3.456000	2.652114e-02	20	inner
1.200000	2.000000	9.744128	9.728000	1.612751e-02	22	inner
1.200000	2.100000	11.020804	10.989000	3.180412e-02	24	inner
1.200000	3.000000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	26	border
2.000000	1.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	36	border
2.000000	1.200000	9.744128	9.728000	1.612751e-02	38	inner
2.000000	2.000000	16.000000	16.000000	0.000000e+00	40	border
2.000000	2.100000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	42	border
2.000000	3.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	44	border
2.100000	1.000000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	54	border
2.100000	1.200000	11.020804	10.989000	3.180412e-02	56	inner
2.100000	2.000000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	58	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	60	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	62	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	72	border
3.000000	1.200000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	74	border
3.000000	2.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	76	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	78	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	80	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	1.110223e-16	0	border
1.000000	1.200000	0.808496	0.808496	1.110223e-16	2	border
1.000000	2.000000	0.141120	0.141120	0.000000e+00	4	border
1.000000	2.100000	0.041581	0.041581	0.000000e+00	6	border
1.000000	3.000000	-0.756802	-0.756802	1.110223e-16	8	border
1.200000	1.000000	0.808496	0.808496	1.110223e-16	18	border
1.200000	1.200000	0.679345	0.675463	3.881945e-03	20	inner
1.200000	2.000000	-0.056754	-0.058374	1.620202e-03	22	inner
1.200000	2.100000	-0.153828	-0.157746	3.917653e-03	24	inner
1.200000	3.000000	-0.871576	-0.871576	1.110223e-16	26	border
2.000000	1.000000	0.141120	0.141120	0.000000e+00	36	border
2.000000	1.200000	-0.056754	-0.058374	1.620202e-03	38	inner
2.000000	2.000000	-0.756802	-0.756802	1.110223e-16	40	border
2.000000	2.100000	-0.818277	-0.818277	1.110223e-16	42	border
2.000000	3.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	44	border
2.100000	1.000000	0.041581	0.041581	0.000000e+00	54	border
2.100000	1.200000	-0.153828	-0.157746	3.917653e-03	56	inner
2.100000	2.000000	-0.818277	-0.818277	1.110223e-16	58	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	60	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	62	outer
3.000000	1.000000	-0.756802	-0.756802	1.110223e-16	72	border
3.000000	1.200000	-0.871576	-0.871576	1.110223e-16	74	border
3.000000	2.000000	-0.958924	-0.958924	1.110223e-16	76	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	78	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	80	outer

Поделим сетку в два раза по x и y ($q1 = \sqrt{2}; n1 = 8; q2 = \sqrt{3}; n2 = 8$).

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	4	border
1.000000	2.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	8	border
1.000000	2.100000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	12	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	16	border
1.200000	1.000000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	68	border
1.200000	1.200000	3.462795	3.456000	6.794659e-03	72	inner
1.200000	2.000000	9.731040	9.728000	3.040030e-03	76	inner
1.200000	2.100000	10.996844	10.989000	7.843641e-03	80	inner
1.200000	3.000000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	84	border
2.000000	1.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	136	border
2.000000	1.200000	9.731040	9.728000	3.040030e-03	140	inner
2.000000	2.000000	16.000000	16.000000	3.552714e-15	144	border
2.000000	2.100000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	148	border
2.000000	3.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	152	border
2.100000	1.000000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	204	border
2.100000	1.200000	10.996844	10.989000	7.843641e-03	208	inner
2.100000	2.000000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	212	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	216	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	220	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	272	border
3.000000	1.200000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	276	border
3.000000	2.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	280	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	284	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	288	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	4	border
1.000000	2.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	8	border
1.000000	2.100000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	12	border
1.000000	3.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	16	border
1.200000	1.000000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	68	border
1.200000	1.200000	0.676446	0.675463	9.830912e-04	72	inner
1.200000	2.000000	-0.058294	-0.058374	8.052351e-05	76	inner
1.200000	2.100000	-0.156978	-0.157746	7.676553e-04	80	inner
1.200000	3.000000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	84	border
2.000000	1.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	136	border
2.000000	1.200000	-0.058294	-0.058374	8.052351e-05	140	inner
2.000000	2.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	144	border
2.000000	2.100000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	148	border
2.000000	3.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	152	border
2.100000	1.000000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	204	border
2.100000	1.200000	-0.156978	-0.157746	7.676553e-04	208	inner
2.100000	2.000000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	212	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	216	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	220	outer
3.000000	1.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	272	border
3.000000	1.200000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	276	border
3.000000	2.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	280	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	284	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	288	outer

Поделим сетку в два раза по x и y ($q1 = \sqrt[4]{2}; n1 = 16; q2 = \sqrt[4]{3}; n2 = 16$).

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	2.000000	2.000000	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	8	border
1.000000	2.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	16	border
1.000000	2.100000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	24	border
1.000000	3.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	32	border
1.200000	1.000000	2.728000	2.728000	4.440892e-16	264	border
1.200000	1.200000	3.457714	3.456000	1.713912e-03	272	inner
1.200000	2.000000	9.728574	9.728000	5.741465e-04	280	inner
1.200000	2.100000	10.990903	10.989000	1.903058e-03	288	inner
1.200000	3.000000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	296	border
2.000000	1.000000	9.000000	9.000000	1.776357e-15	528	border
2.000000	1.200000	9.728574	9.728000	5.741465e-04	536	inner
2.000000	2.000000	16.000000	16.000000	0.000000e+00	544	border
2.000000	2.100000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	552	border
2.000000	3.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	560	border
2.100000	1.000000	10.261000	10.261000	1.776357e-15	792	border
2.100000	1.200000	10.990903	10.989000	1.903058e-03	800	inner
2.100000	2.000000	17.261000	17.261000	3.552714e-15	808	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	816	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	824	outer
3.000000	1.000000	28.000000	28.000000	0.000000e+00	1056	border
3.000000	1.200000	28.728000	28.728000	0.000000e+00	1064	border
3.000000	2.000000	35.000000	35.000000	7.105427e-15	1072	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1080	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1088	outer

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

x	y	calc	prec	dif	N	location
1.000000	1.000000	0.909297	0.909297	0.000000e+00	0	border
1.000000	1.200000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	8	border
1.000000	2.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	16	border
1.000000	2.100000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	24	border
1.000000	3.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	32	border
1.200000	1.000000	0.808496	0.808496	0.000000e+00	264	border
1.200000	1.200000	0.675710	0.675463	2.465978e-04	272	inner
1.200000	2.000000	-0.058404	-0.058374	2.980813e-05	280	inner
1.200000	2.100000	-0.157586	-0.157746	1.596075e-04	288	inner
1.200000	3.000000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	296	border
2.000000	1.000000	0.141120	0.141120	2.775558e-17	528	border
2.000000	1.200000	-0.058404	-0.058374	2.980813e-05	536	inner
2.000000	2.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	544	border
2.000000	2.100000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	552	border
2.000000	3.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	560	border
2.100000	1.000000	0.041581	0.041581	6.938894e-18	792	border
2.100000	1.200000	-0.157586	-0.157746	1.596075e-04	800	inner
2.100000	2.000000	-0.818277	-0.818277	0.000000e+00	808	border
2.100000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	816	outer
2.100000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	824	outer
3.000000	1.000000	-0.756802	-0.756802	0.000000e+00	1056	border
3.000000	1.200000	-0.871576	-0.871576	0.000000e+00	1064	border
3.000000	2.000000	-0.958924	-0.958924	0.000000e+00	1072	border
3.000000	2.100000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1080	outer
3.000000	3.000000	0.000000	0.000000	0.000000e+00	1088	outer

Рассмотрим значения численного и аналитического решения

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = x^3 + y^3, f = -6(x + y) + x^3 + y^3$

n	x	y	u	u*	u - u*			
2	2	1,2	9,798453	9,728	0,070453	4,36836558	5,305263158	5,296167247
4			9,744128		0,016128			
8			9,73104		0,00304			
16			9,728574		0,000574			

n	u - u*			
2	2,21132E-01	3,88096E+00	4,15896E+00	4,16E+00
4	5,69787E-02			
8	1,37E-02			
16	3,29E-03			

- $\lambda = 1, \gamma = 1, u^* = \sin(x + y), f = 2 * \sin(x + y) + \sin(x + y)$

n	x	y	u	u*	u - u*			
2	1,2	2,1	-0,139966	-0,15775	0,017779694	4,53830582	5,103196602	4,807278011
4			-0,153828		0,003917694			
8			-0,156978		0,000767694			
16			-0,157586		0,000159694			

n	u - u*			
2	3,28E-02	4,60E+00	4,86E+00	4,36E+00
4	7,14E-03			
8	1,47E-03			
16	3,37E-04			

9. Выводы

I. Исследование на порядок аппроксимации

В результате исследования на порядок аппроксимации можно сказать, что при увеличении степени u^* - искомой функции, на равномерной сетке начиная с $u^* = x^4 + y^4$, на неравномерной сетке начиная с $u^* = x^3 + y^3$, происходит увеличение погрешности. Это связано с тем, что частные вторые производные полиномов высших степеней – нелинейные функции. Таким образом, на **равномерной** сетке третий порядок аппроксимации, а на **неравномерной** – второй.

II. Исследование на порядок сходимости

В результате исследования на равномерной сетке, мы получили, что при дроблении сетки в 2 раза погрешность решения падает в 4 раза, следовательно, **порядок сходимости на равномерной сетке равен 2.**

В результате исследования на неравномерной сетке, мы получили, что при дроблении сетки в 2 раза для полинома 3 степени погрешность падает в 4 раза, а для не полиномиального решения – в 5 раз, следовательно, **порядок сходимости на неравномерной сетке равен 2.**