Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра ПМт

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Практическое задание № 3

Решение гармонических задач

Факультет: ПМИ

Преподаватели:
Задорожный А. Г.,
Патрушев И.И.

Группа: ПМ-81

Студенты: Ефремов А.А.,
Ртищева К. С.

Бригада: 1

Вариант: 9

Новосибирск
2021

1. Цель работы

Разработать программу решения гармонической задачи методом конечных элементов. Провести сравнение прямого и итерационного методов решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ

2. Задание

Решить трехмерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции – трилинейные.

3. Анализ задачи

Рассмотрим задачу для уравнения:

$$\chi\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\sigma\frac{\partial u}{\partial t}-div(\lambda gradu)=f,$$

$$f(x,y,z,t)=f^s(x,y,z)\sin\omega t+f^c(x,y,z)\cos\omega t\ ,$$

$$u(x,y,z,t)=u^s(x,y,z)\sin\omega t+u^c(x,y,z)\cos\omega t.$$

Функции u^s и u^cудовлетворяют системе

$$\begin{cases}-div(\lambda gradu^s)-\omega\sigma u^c-\omega^2\chi u^s=f^s,\\ -div(\lambda gradu^c)+\omega\sigma u^s-\omega^2\chi u^c=f^c\end{cases}$$

И должны удовлетворять краевым условиям $u^s|_{S_1}=u_g^s, u^c|_{S_1}=u_g^c$.

Умножим каждое уравнение системы на пробную функцию v и применим формулу Грина, получим систему двух вариационных уравнений:

$$\begin{cases}\int_\Omega(\lambda gradu^s gradv-\omega\sigma u^c v-\omega^2\chi u^s v)d\Omega=\int_\Omega f^s v\,d\Omega,\\ \int_\Omega(\lambda gradu^c gradv-\omega\sigma u^s v-\omega^2\chi u^c v)d\Omega=\int_\Omega f^c v\,d\Omega.\end{cases}$$

Построим конечноэлементную аппроксимацию:

Заменим каждую из искомых функций u^s и u^c на функции

$u^{s,h}=\sum_{i=1}^n q_i^s\psi_i$ и $u^{c,h}=\sum_{i=1}^n q_i^c\psi_i, \psi_i$ – базисные функции

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left(\lambda grad\psi_i grad\psi_j-\omega^2\chi\psi_i\psi_j\right)d\Omega\right)q_j^s-\omega\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\sigma\,\psi_i\psi_j d\Omega\right)q_j^c=\int_{\Omega}f^s\psi_i\,d\Omega,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\left(\lambda grad\psi_i grad\psi_j-\omega^2\chi\psi_i\psi_j\right)d\Omega\right)q_j^c+\omega\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{\Omega}\sigma\,\psi_i\psi_j d\Omega\right)q_j^s=\int_{\Omega}f^c\psi_i\,d\Omega.$$

В результате получаем систему из 2n уравнений с 2n неизвестными q_j^s и q_j^c. Чтобы определить матрицу и вектор правой части, полученной конечноэлементной СЛАУ, пронумеруем уравнения и неизвестные этой системы поочередно.

Обозначим

$$p_{ij}=\lambda\int_{\Omega}grad\psi_i grad\psi_j\,d\Omega-\omega^2\chi\int_{\Omega}\psi_i\psi_j\,d\Omega,\qquad c_{ij}=\omega\sigma\int_{\Omega}\psi_i\psi_j d\Omega,$$

где $G_{ij}=\lambda\int_{\Omega}grad\psi_i grad\psi_j\,d\Omega$, $M_{ij}=\int_{\Omega}\psi_i\psi_j d\Omega$

Тогда матрица конечноэлементной СЛАУ будет состоять из блоков вида:

$$A^{ij}=\begin{pmatrix}p_{ij} & -c_{ij}\\ c_{ij} & p_{ij}\end{pmatrix}$$

Для трехмерной задачи в декартовых координатах получаем

$$G_{ij}=\lambda\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{z_r}^{z_{r+1}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial x}+\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}+\frac{\partial\psi_i}{\partial z}\frac{\partial\psi_j}{\partial z}\right)dxdydz,$$

$$M_{ij}=\int_{x_p}^{x_{p+1}}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{z_r}^{z_{r+1}}\psi_i\psi_j\,dxdydz,$$

где ψ_i – трилинейные базисные функции.

$$\psi_i=X_{\mu(i)}X_{v(i)}X_{\vartheta(i)},$$

$$\mu(i)=\big((i-1)mod2\big)+1,\qquad v(i)=\left(\left(\frac{i-1}{2}\right)mod2\right)+1,\qquad \vartheta(i)=\frac{i-1}{4}+1$$

$$X_1(x)=\frac{x_{p+1}-x}{h_x},\qquad X_2(x)=\frac{x-x_p}{h_x},\qquad h_x=x_{p+1}-x_p,$$

$$Y_1(y)=\frac{y_{s+1}-y}{h_y},\qquad Y_2(y)=\frac{y-y_s}{h_y},\qquad h_y=y_{s+1}-y_s,$$

$$Z_1(z)=\frac{z_{r+1}-z}{h_z},\qquad Z_2(z)=\frac{z-z_r}{h_z},\qquad h_z=z_{r+1}-z_r.$$

Тогда, учитывая представление базисных функций:

$$G_{ij}=\lambda\left(G^x_{\mu(i)\mu(j)}M^y_{v(i)v(j)}M^z_{\vartheta(i)\vartheta(j)}+M^x_{\mu(i)\mu(j)}G^y_{v(i)v(j)}M^z_{\vartheta(i)\vartheta(j)}+M^x_{\mu(i)\mu(j)}M^y_{v(i)v(j)}G^z_{\vartheta(i)\vartheta(j)}\right),$$

$$M_{ij}=M^x_{\mu(i)\mu(j)}M^y_{v(i)v(j)}M^z_{\vartheta(i)\vartheta(j)},$$

G^x, G^y, G^z – локальные матрицы жесткости, M^x, M^y, M^z – локальные матрицы массы соответствующих одномерных линейных элементов

$$G^x = \frac{1}{h_x} G^1, \qquad G^y = \frac{1}{h_y} G^1, \qquad G^z = \frac{1}{h_z} G^1,$$

$$M^x = h_x M^1, \qquad M^y = h_y M^1, \qquad M^z = h_z M^1,$$

$$M^1 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad G^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Получаем

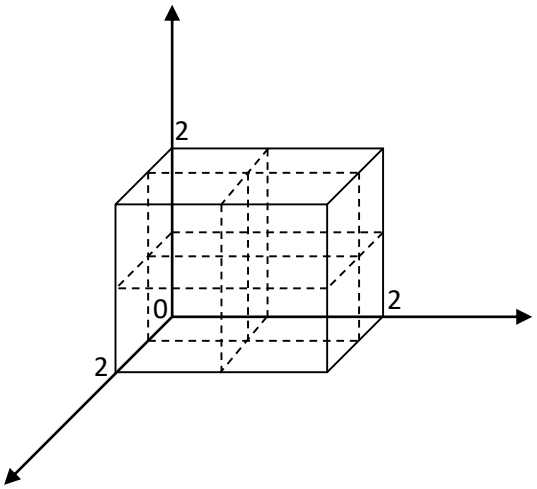
$$G_{ij} = \lambda \left[\frac{h_y h_z}{h_x} G^1 M^1 M^1 + \frac{h_x h_z}{h_y} M^1 G^1 M^1 + \frac{h_y h_x}{h_z} M^1 M^1 G^1 \right]$$

$$M_{ij} = h_x h_y h_z M^1 M^1 M^1$$

Учет первых краевых условий:

в матрице СЛАУ в $i-$ й строке на место диагонального элемента ставится единица, все остальные элементы этой строки матрицы обнуляются, а $i-$ й компоненте вектора правой части присваивается значение u_g.

4. Проверка работоспособности программы



Файл boundaries.txt

```
6
1 0 1 0 1 0 0
1 0 1 0 1 1 1
1 0 0 0 1 0 1
1 1 1 0 1 0 1
1 0 1 0 0 0 1
1 0 1 1 1 0 1
```

Файл grid.txt

```
----X----
2
0 2
2
----Y----
2
0 2
2
----Z----
2
0 2
2
-Regions-
1
0 1 0 1 0 1
```

- $\lambda = 10, \sigma = 1, \chi = 1, \omega = 2, u_s^* = 2, u_c^* = 5, f_s = -18, f_c = -16$

x	y	z	prec	calc	diff	n	loc
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	0	border
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	1	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	2	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	3	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	4	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	5	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	6	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	7	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	8	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	9	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	10	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	11	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	12	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	13	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	14	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	15	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	16	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	17	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	18	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	19	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	20	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	21	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	22	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	23	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	24	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	25	border
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	26	inner
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	27	inner
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	28	border
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	29	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	30	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	31	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	32	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	33	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	34	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	35	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	36	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	37	border
1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	38	border

1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	39	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	40	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	41	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	42	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	43	border
1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	44	border
1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	0.000000e+00	45	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	46	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	47	border
0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	48	border
0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	49	border
1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	50	border
1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	1.776357e-15	51	border
2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-15	52	border
2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	5.000000e+00	5.000000e+00	8.881784e-16	53	border

||u-u*||/||u*|| = 2.648036e-16
||u-u*|| = 6.879800e-15

- $\lambda = 10, \sigma = 1, \chi = 1, \omega = 2, u_s^* = y + z, u_c^* = x + y,$ $f_s = -2x - 6y - 4z, f_c = -4x - 2y + 2z$

x	y	z	prec	calc	diff	n	loc
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.078267e-15	1.078267e-15	0	border
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-1.801862e-16	1.801862e-16	1	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-5.293063e-16	5.293063e-16	2	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.443290e-15	3	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.078267e-15	1.078267e-15	4	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	5	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-15	6	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.443290e-15	7	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	9.992007e-16	8	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	9	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-15	10	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	8.881784e-16	11	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	12	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	13	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	14	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	8.881784e-16	15	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	16	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	0.000000e+00	17	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-15	18	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-4.434891e-16	4.434891e-16	19	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	9.992007e-16	20	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.220446e-16	21	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-15	22	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	23	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	8.881784e-16	24	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.220446e-16	25	border
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	26	inner
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.554312e-15	27	inner
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	8.881784e-16	28	border
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	29	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	30	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	31	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	32	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	33	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	34	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	2.664535e-15	35	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	36	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	-1.801862e-16	1.801862e-16	37	border
1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	38	border
1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.443290e-15	39	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.332268e-15	40	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	41	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	42	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.443290e-15	43	border

1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	44	border
1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	45	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	4.440892e-16	46	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	8.881784e-16	47	border
0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	1.776357e-15	48	border
0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	49	border
1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	0.000000e+00	50	border
1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	3.000000e+00	3.000000e+00	8.881784e-16	51	border
2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	1.776357e-15	52	border
2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	0.000000e+00	53	border

||u-u*||/||u*|| = 4.289137e-16
||u-u*|| = 5.146964e-15

- $\lambda = 10, \sigma = 1, \chi = 1, \omega = 2, u_s^* = yz, u_c^* = xy,$
  $f_s = -2y(x + 2z), f_c = 2y(z - 2x)$

x	y	z	prec	calc	diff	n	loc
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	0	border
0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	3.722623e-16	3.722623e-16	1	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	2	border
1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	3	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	4	border
2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	3.722623e-16	3.722623e-16	5	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	6	border
0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	7	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	-2.341408e-16	2.341408e-16	8	border
1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.220446e-16	9	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	10	border
2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	11	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	12	border
0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	3.722623e-16	3.722623e-16	13	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	14	border
1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	15	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	16	border
2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	8.881784e-16	17	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	18	border
0.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	19	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-2.341408e-16	2.341408e-16	20	border
1.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-7.313969e-17	7.313969e-17	21	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	22	border
2.000000e+00	0.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	23	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-16	24	border
0.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	-7.313969e-17	7.313969e-17	25	border
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-15	26	inner
1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	4.440892e-16	27	inner
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	1.110223e-16	28	border
2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	29	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	30	border
0.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	31	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	32	border
1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	4.440892e-16	33	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	34	border
2.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	4.000000e+00	4.000000e+00	8.881784e-16	35	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	36	border
0.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	3.722623e-16	3.722623e-16	37	border
1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	1.237749e-15	1.237749e-15	38	border
1.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	39	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	7.000781e-16	7.000781e-16	40	border
2.000000e+00	0.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	3.722623e-16	3.722623e-16	41	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	42	border
0.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	1.011203e-15	1.011203e-15	43	border
1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.220446e-16	44	border
1.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	1.000000e+00	1.000000e+00	2.220446e-16	45	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	1.776357e-15	46	border
2.000000e+00	1.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	2.000000e+00	0.000000e+00	47	border

```
  0.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  4.000000e+00  4.000000e+00  1.776357e-15   48 border
  0.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  0.000000e+00  3.722623e-16  3.722623e-16   49 border
  1.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  4.000000e+00  4.000000e+00  0.000000e+00   50 border
  1.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  0.000000e+00   51 border
  2.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  4.000000e+00  4.000000e+00  1.776357e-15   52 border
  2.000000e+00  2.000000e+00  2.000000e+00  4.000000e+00  4.000000e+00  8.881784e-16   53 border

||u-u*||/||u*|| = 3.839572e-16
||u-u*|| = 3.325167e-15
```

5. Исследования

- $\lambda = 10, \sigma = 1, \chi = 1, \omega = 2, u_s^* = y + z, u_c^* = x + y,$ $f_s = -2x - 6y - 4z, f_c = -4x - 2y + 2z$

МСГ с предобуславливанием, 1000 узлов

$\boldsymbol{\omega}$	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\chi}$	Кол-во итераций	Время решения, сек	$\|\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*\|\|$	$\frac{\|\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^*\|\|}{\|\|\boldsymbol{u}^*\|\|}$
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	2403	2.055000e+00	2.660985e-12	7.176143e-15
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	2403	1.723000e+00	2.660985e-12	7.176143e-15
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	2400	1.734000e+00	5.510515e-12	1.486075e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	2410	1.518000e+00	7.760389e-12	2.092821e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	2410	1.514000e+00	7.760389e-12	2.092821e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	2410	1.695000e+00	7.760389e-12	2.092821e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	2627	1.769000e+00	1.317566e-06	3.553210e-09
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	2627	2.089000e+00	1.317566e-06	3.553210e-09
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	2638	1.838000e+00	1.317566e-06	3.553210e-09
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	2.085500e+01	3.012438e-10	8.123940e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	1.913700e+01	3.264696e-10	8.804231e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	1.849000e+01	2.571697e-10	6.935351e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	2.235200e+01	1.493445e-09	4.027522e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	2.273700e+01	1.493445e-09	4.027522e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	1.937300e+01	1.493445e-09	4.027522e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	21519	1.553800e+01	6.205238e-06	1.673428e-08
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	21519	1.344100e+01	6.205238e-06	1.673428e-08
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	21519	1.320500e+01	6.205238e-06	1.673428e-08
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	2.054800e+01	1.014496e-01	2.735893e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	2.074500e+01	9.698096e-02	2.615382e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	2.122200e+01	1.041642e-01	2.809100e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	2.326700e+01	1.217682e-01	3.283843e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	2.449000e+01	1.217682e-01	3.283843e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	2.430400e+01	1.217682e-01	3.283843e-04
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	2.373600e+01	7.782765e-01	2.098856e-03
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	2.303500e+01	7.782765e-01	2.098856e-03
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	2.284000e+01	7.782765e-01	2.098856e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	2402	1.540000e+00	3.110137e-12	8.387415e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	2402	2.175000e+00	2.773975e-12	7.480854e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	2401	1.707000e+00	2.958587e-12	7.978716e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	3915	2.666000e+00	1.324812e+00	3.572754e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	3893	2.629000e+00	1.457581e+00	3.930804e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	3925	2.440000e+00	1.440920e+00	3.885871e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	11085	7.166000e+00	1.259749e+08	3.397290e+05
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	10962	6.927000e+00	1.318654e+08	3.556146e+05
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	11009	7.221000e+00	1.421389e+08	3.833201e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	1.866500e+01	4.097311e-10	1.104963e-12
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	3.145200e+01	3.985278e-10	1.074750e-12
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	2.227100e+01	3.723191e-10	1.004070e-12
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	17253	1.206300e+01	1.233919e+00	3.327633e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	17194	1.175500e+01	1.365575e+00	3.682681e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	17233	1.133100e+01	1.242657e+00	3.351197e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	2.171700e+01	1.402720e+08	3.782854e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	2.330100e+01	1.302678e+08	3.513061e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	2.204200e+01	1.412804e+08	3.810050e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	2.215800e+01	1.124886e-01	3.033592e-04
1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	2.368900e+01	9.366145e-02	2.525861e-04
1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	2.286300e+01	1.048865e-01	2.828579e-04
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	2.980300e+01	1.216733e+00	3.281286e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	2.538800e+01	1.179009e+00	3.179552e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	2.623200e+01	1.104831e+00	2.979508e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	2.231800e+01	1.175369e+08	3.169735e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	1.962400e+01	1.104944e+08	2.979814e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	2.142700e+01	1.452531e+08	3.917184e+05
1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	26831	1.930300e+01	7.995630e-01	2.156261e-03

1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	28571	1.978600e+01	1.188436e+00	3.204972e-03
1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	2.127600e+01	1.053050e+02	2.839865e-01
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	2.102100e+01	1.344924e+12	3.626989e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	2.100200e+01	1.326403e+12	3.577042e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	2.224600e+01	1.335711e+12	3.602145e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	2.221900e+01	2.027026e+19	5.466484e+16
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	2.029100e+01	2.736626e+19	7.380131e+16
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	2.105600e+01	1.891938e+19	5.102176e+16
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	2.071700e+01	8.865552e-01	2.390861e-03
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	2.106200e+01	1.156894e+00	3.119912e-03
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	2.298800e+01	1.110494e+02	2.994778e-01
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	2.176700e+01	1.208814e+12	3.259928e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	5.265500e+01	1.411930e+12	3.807693e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	5.156800e+01	1.205392e+12	3.250699e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	5.201600e+01	3.745253e+19	1.010019e+17
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	5.258700e+01	5.198477e+19	1.401925e+17
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	5.343400e+01	3.331248e+19	8.983707e+16
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	30000	4.982400e+01	9.084352e+01	2.449867e-01
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	4.556300e+01	8.946469e+01	2.412683e-01
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	30000	5.409000e+01	1.256725e+02	3.389134e-01
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	30000	5.246500e+01	1.318492e+12	3.555710e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	30000	5.289200e+01	1.335733e+12	3.602203e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	30000	5.549800e+01	1.288075e+12	3.473680e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	5.440000e+01	4.247439e+19	1.145449e+17
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	5.033900e+01	4.877345e+19	1.315322e+17
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	4.985200e+01	2.367682e+19	6.385164e+16

МСГ без предобуславливания, 1000 узлов

ω	λ	σ	χ	Кол-во итераций	Время решения, сек	$\|\|u-u^*\|\|$	$\frac{\|\|u-u^*\|\|}{\|\|u^*\|\|}$
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	258	7.700000e-02	2.356138e-12	6.354032e-15
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	255	7.700000e-02	2.509431e-12	6.767432e-15
1.000000e-04	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	255	7.600000e-02	2.250035e-12	6.067893e-15
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	258	7.800000e-02	8.431911e-12	2.273917e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	258	9.600000e-02	8.431911e-12	2.273917e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	258	7.700000e-02	8.431911e-12	2.273917e-14
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	675	2.060000e-01	1.222727e-06	3.297450e-09
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	675	2.020000e-01	1.222727e-06	3.297450e-09
1.000000e-04	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	675	2.480000e-01	1.222727e-06	3.297450e-09
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	463	1.380000e-01	2.078898e-10	5.606371e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	462	1.790000e-01	2.704708e-10	7.294056e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	441	1.320000e-01	2.445248e-10	6.594344e-13
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	454	1.360000e-01	1.344673e-09	3.626312e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	454	1.360000e-01	1.344673e-09	3.626312e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	454	1.370000e-01	1.344673e-09	3.626312e-12
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	300	9.000000e-02	5.112716e-06	1.378797e-08
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	300	9.000000e-02	5.112716e-06	1.378797e-08
1.000000e-04	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	300	9.000000e-02	5.112716e-06	1.378797e-08
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	683	2.600000e-01	1.866418e-08	5.033355e-11
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	686	2.040000e-01	1.712741e-08	4.618918e-11
1.000000e-04	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	687	2.060000e-01	1.892983e-08	5.104995e-11
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	696	2.090000e-01	9.362788e-08	2.524956e-10
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	696	2.410000e-01	9.362788e-08	2.524956e-10
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	696	2.080000e-01	9.362788e-08	2.524956e-10
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	615	1.840000e-01	1.271652e-03	3.429390e-06
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	615	1.840000e-01	1.271652e-03	3.429390e-06
1.000000e-04	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	615	1.850000e-01	1.271652e-03	3.429390e-06
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	255	7.600000e-02	2.670551e-12	7.201941e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	254	7.700000e-02	2.049821e-12	5.527956e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	254	7.600000e-02	2.763689e-12	7.453115e-15
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	908	2.720000e-01	1.234291e+00	3.328634e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	909	2.720000e-01	1.239676e+00	3.343158e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	899	3.450000e-01	1.364506e+00	3.679800e-03
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	2215	6.630000e-01	1.187553e+08	3.202593e+05
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	2213	8.490000e-01	1.243775e+08	3.354211e+05
1.000000e+03	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	2235	6.670000e-01	1.440707e+08	3.885297e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	463	1.790000e-01	2.460335e-10	6.635030e-13
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	468	1.410000e-01	2.793820e-10	7.534373e-13
1.000000e+03	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	464	1.390000e-01	4.513420e-10	1.217179e-12
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	951	2.840000e-01	1.234061e+00	3.328015e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	957	2.900000e-01	1.252724e+00	3.378346e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	945	2.830000e-01	1.351849e+00	3.645667e-03
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	2218	6.660000e-01	1.283107e+08	3.460282e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	2225	6.650000e-01	1.290851e+08	3.481167e+05
1.000000e+03	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	2238	8.720000e-01	1.516932e+08	4.090862e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	689	2.060000e-01	1.778680e-08	4.796744e-11
1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	689	2.640000e-01	3.394333e-08	9.153834e-11

1.000000e+03	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	685	2.050000e-01	2.545746e-08	6.865365e-11
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	585	1.750000e-01	1.136910e+00	3.066018e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	587	1.760000e-01	1.043425e+00	2.813907e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	586	1.750000e-01	1.098670e+00	2.962893e-03
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	2230	6.670000e-01	1.227869e+08	3.311316e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	2223	8.410000e-01	1.189097e+08	3.206756e+05
1.000000e+03	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	2233	6.790000e-01	1.600718e+08	4.316816e+05
1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	8.810000e-12	902	2.690000e-01	7.431699e-01	2.004180e-03
1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-11	917	2.740000e-01	1.056385e+00	2.848858e-03
1.000000e+09	1.000000e+02	0.000000e+00	1.000000e-10	1094	3.260000e-01	1.042179e+02	2.810548e-01
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	8.810000e-12	3791	1.132000e+00	1.196128e+12	3.225718e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-11	3794	1.327000e+00	1.326249e+12	3.576627e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+04	1.000000e-10	3809	1.137000e+00	1.350150e+12	3.641085e+09
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	1.162000e+01	2.541073e+21	6.852765e+18
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	8.956000e+00	2.654550e+21	7.158789e+18
1.000000e+09	1.000000e+02	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	8.957000e+00	3.202865e+21	8.637484e+18
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	8.810000e-12	956	2.850000e-01	8.048267e-01	2.170456e-03
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-11	973	2.940000e-01	9.489772e-01	2.559201e-03
1.000000e+09	1.000000e+04	0.000000e+00	1.000000e-10	1110	3.320000e-01	1.075141e+02	2.899439e-01
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	8.810000e-12	3882	1.523000e+00	1.180740e+12	3.184220e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-11	3847	1.150000e+00	1.169669e+12	3.154363e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+04	1.000000e-10	3844	1.165000e+00	1.322633e+12	3.566875e+09
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	8.970000e+00	3.140670e+21	8.469758e+18
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	1.135200e+01	2.996304e+21	8.080431e+18
1.000000e+09	1.000000e+04	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	8.954000e+00	4.098286e+21	1.105225e+19
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	8.810000e-12	28564	8.573000e+00	6.265629e+03	1.689714e+01
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-11	30000	8.954000e+00	4.535235e+04	1.223062e+02
1.000000e+09	8.000000e+05	0.000000e+00	1.000000e-10	1555	4.730000e-01	1.132154e+02	3.053191e-01
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	8.810000e-12	3847	1.149000e+00	1.194472e+12	3.221252e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-11	3846	1.475000e+00	1.370794e+12	3.696757e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+04	1.000000e-10	3841	1.146000e+00	1.317878e+12	3.554051e+09
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	8.810000e-12	30000	8.976000e+00	3.090694e+21	8.334982e+18
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-11	30000	9.005000e+00	2.988677e+21	8.059862e+18
1.000000e+09	8.000000e+05	1.000000e+08	1.000000e-10	30000	9.010000e+00	3.319746e+21	8.952688e+18

6. Выводы

9. Текст программы

Файл “Vector.h”

```
#pragma once
#include <vector>
#include <iomanip>
#include <fstream>
using namespace std;

// Умножение вектора на число
vector<double> operator * (const double& val, vector<double> vec)
{
   for (size_t i = 0; i < vec.size(); i++)
      vec[i] *= val;

   return vec;
}

// Сложение векторов
vector<double> operator + (vector<double> vec1, const vector<double>& vec2)
{
   for (size_t i = 0; i < vec1.size(); i++)
      vec1[i] += vec2[i];
   return vec1;
}

// Вычитание векторов
vector<double> operator - (vector<double> vec1, const vector<double>& vec2)
{
   for(size_t i = 0; i < vec1.size(); i++)
      vec1[i] -= vec2[i];
   return vec1;
}

double ScalarMult(const vector<double>& vec1, const vector<double>& vec2)
{
   double res = 0;
   for(int i = 0; i < vec1.size(); i++)
      res += vec1[i] * vec2[i];
   return res;
}

double operator * (const vector<double>& vec1, const vector<double>& vec2)
{
   return ScalarMult(vec1, vec2);
}

double Norm(const vector<double>& vec)
{
   return sqrt(ScalarMult(vec, vec));
}
```

Файл “Matrix.h”

```
#pragma once
#include <vector>
#include <fstream>
using namespace std;

class Matrix
{
public:
   int size;                  // Размер матрицы
   int tr_size;               // Количество элементов в треугольнике

   vector<int> ind;           // Указатели начала строк
   vector<int> columns_ind;   // Номера столбцов внедиагональных элементов

   vector<double> top_tr;     // Верхний треугольник
   vector<double> bot_tr;     // Нижний треугольник

   vector<double> diag;       // Диагональ

   Matrix(const int& t_size, const int& t_tr_size) : size(t_size), tr_size(t_tr_size)
   {
      top_tr = vector<double>(tr_size);
      bot_tr = vector<double>(tr_size);
      columns_ind = vector<int>(tr_size);
      diag = vector<double>(size);
      ind = vector<int>(size + 1);
   }

   Matrix(const int& t_size) : size(t_size)
   {
      tr_size = size * (size - 1) / 2;

      top_tr.resize(tr_size);
      bot_tr.resize(tr_size);
      columns_ind.resize(tr_size);
      diag.resize(size);
      ind.resize(size + 1);

      ind[0] = ind[1] = 0;

      diag[0] = 1.0;

      for (int i = 1; i < size; i++)
      {
         int i0 = ind[i + 0];
         int i1 = ind[i + 1] = ind[i + 0] + i;

         for (int j = 0, k = i0; j < i; j++, k++)
            columns_ind[k] = j;
      }
   }

   Matrix(const Matrix& mat)
   {
      size = mat.size;
      tr_size = mat.tr_size;

      top_tr = mat.top_tr;
      bot_tr = mat.bot_tr;
      diag = mat.diag;
      ind = mat.ind;
      columns_ind = mat.columns_ind;
```

```
}

Matrix()
{

}

// Получение диагональной факторизации матрицы
void DiagFact(Matrix& fact)
{
   fact.diag = diag;

   for (int i = 0; i < size + 1; i++)
      fact.ind[i] = 0;
}

// Функция умножения матрицы на вектор vec, результат в res
void MatVecMult(const vector<double>& vec, vector<double>& res,
   const vector<double>& bot_tr, const vector<double>& top_tr)
{
   for (int i = 0; i < size; i++)
      res[i] = 0;

   for (int i = 0; i < size; i++)
   {
      res[i] += vec[i] * diag[i];

      int prof_len = ind[i + 1] - ind[i];
      for (int k = 0; k < prof_len; k++)
      {
         int i_in_gg = ind[i] + k;
         int j = columns_ind[i_in_gg];
         res[i] += vec[j] * bot_tr[i_in_gg];
         res[j] += vec[i] * top_tr[i_in_gg];
      }
   }
}

// Функция считывания диагонали и треугольников из файлов
void ReadDiTr(const string& file_name)
{
   ifstream fin;
   fin.open(file_name);

   for(int i = 0; i < size; i++)
      fin >> diag[i];

   for(int i = 0; i < tr_size; i++)
   {
      double t;
      fin >> t;
      top_tr[i] = bot_tr[i] = t;
   }

   fin.close();
}

// Зануление всех элементов матрицы
void ResetValues()
{
   for(int i = 0; i < size; i++)
      diag[i] = 0;

   for(int i = 0; i < tr_size; i++)
```

```
        {
            bot_tr[i] = 0;
            top_tr[i] = 0;
        }
    }

    // Умножение матрицы на число
    void Mult(const double& val)
    {
        for(int i = 0; i < size; i++)
            diag[i] *= val;

        for(int i = 0; i < tr_size; i++)
        {
            bot_tr[i] *= val;
            top_tr[i] *= val;
        }
    }
};
```

Файл “SLAE.h”

```
#pragma once
#include "Vector.h"
#include "Matrix.h"
using namespace std;

class SLAE
{
public:
    int maxiter;           // Максимальное количество итераций
    double eps;            // Велечина требуемой относительной невязки

    vector<double> b;      // Вектор правой части
    vector<double> t;      // Вспомогательный вектор для МСГ
    vector<double> tt;     // Вспомогательный вектор для МСГ
    vector<double> rk1;    // Вектор невязки на перд. итерации МСГ
    vector<double> zk1;    // Вектор спуска на пред. итерации МСГ
    vector<double> AtAzk1; // Вспомогательный вектор для МСГ

    SLAE(int size, int _maxiter, double _eps)
    {
        maxiter = _maxiter;
        eps = _eps;

        b.resize(size);

        t.resize(size);
        tt.resize(size);
        rk1.resize(size);
        zk1.resize(size);
        AtAzk1.resize(size);
    }

    SLAE()
    {

    }

    // Метод сопряженных градиентов, возвращает количество итераций
    int ConjGradMethod(vector<double>& xk1, vector<double>& res, Matrix& mat)
    {
        for(int i = 0; i < mat.size; i++)
```

```
        res[i] = xk1[i] = 0;

    mat.MatVecMult(xk1, t, mat.bot_tr, mat.top_tr);       // t = A * x0
    mat.MatVecMult(b - t, rk1, mat.top_tr, mat.bot_tr);  // r0 = AT(f - A * x0)
    zk1 = rk1;

    int k = 1;
    while(k < maxiter)
    {
        mat.MatVecMult(zk1, t, mat.bot_tr, mat.top_tr);    // t = A * zk-1

        mat.MatVecMult(t, AtAzk1, mat.top_tr, mat.bot_tr); // AtAzk1 = At * A * zk-1
        double ak = (rk1 * rk1) / (AtAzk1 * zk1);
        xk1 = xk1 + ak * zk1;
        double bk = rk1 * rk1;
        rk1 = rk1 - ak * AtAzk1;
        bk = (rk1 * rk1) / bk;
        zk1 = rk1 + bk * zk1;

        double disc = Norm(rk1) / Norm(b); // Относительная невязка

        if(disc < eps)
            break;
        else
            k++;
    }

    res = xk1;
    return k;
}

// Метод сопряженных градиентов с предобусловленной неполной
// факторизацией матрицей, возвращает количество итераций
int ConjGradPredMethod(vector<double>& xk1, vector<double>& res, Matrix& mat,
    SLAE& fac_slae, Matrix& fac_mat)
{
    for(int i = 0; i < mat.size; i++)
        res[i] = xk1[i] = 0;

    mat.MatVecMult(xk1, t, mat.bot_tr, mat.top_tr);       // t = A * x0
    mat.MatVecMult(b - t, rk1, mat.top_tr, mat.bot_tr);  // r0 = AT(f - A * x0)

    // Решаем z0 = M-1 * r0
    fac_slae.b = rk1;
    fac_slae.ConjGradMethod(t, zk1, fac_mat);

    int k = 1;
    while(k < maxiter)
    {
        // Решаем tt = M-1 * rk-1
        fac_slae.b = rk1;
        fac_slae.ConjGradMethod(t, tt, fac_mat);

        mat.MatVecMult(zk1, t, mat.bot_tr, mat.top_tr);    // t = A * zk-1
        mat.MatVecMult(t, AtAzk1, mat.top_tr, mat.bot_tr); // AtAzk1 = At * A * zk-1

        double ak = (tt * rk1) / (AtAzk1 * zk1);
        xk1 = xk1 + ak * zk1;
        double bk = tt * rk1;
        rk1 = rk1 - ak * AtAzk1;

        // Решаем tt = M-1 * rk
        fac_slae.b = rk1;
        fac_slae.ConjGradMethod(t, tt, fac_mat);
```

```
            bk = (tt * rk1) / bk;
            zk1 = tt + bk * zk1;

            double disc = Norm(rk1) / Norm(b);

            if(disc < eps)
               break;
            else
               k++;
         }

         res = xk1;
         return k;
      }
};
```

Файл “Test.h”

```
#pragma once
#pragma once
using namespace std;

class Test
{
public:

   int N, I, J, L, P;

   Test(const int& n, const int& i, const int& j, const int& l, const int& p) : N(n), I(i),
       J(j), L(l), P(p) {};

   Test() : I(0), J(0), L(0), P(0) {};

   double us(const double& x, const double& y, const double& z)
   {
      switch(N)
      {
         case(0): return 2.0;
         case(1): return y + z;
         case(2): return y * z;
      };
   }

   double uc(const double& x, const double& y, const double& z)
   {
      switch(N)
      {
         case(0): return 5.0;
         case(1): return x + y;
         case(2): return x * y;
      };
   }

   double fs(const double& x, const double& y, const double& z)
   {
     return -1 * divlambdagradus(x, y, z) +
            -1 * omega() * sigma() * uc(x, y, z) -
            omega() * omega() * chi() * us(x, y, z);
   }

   double fc(const double& x, const double& y, const double& z)
   {
```

```
   return -1 * divlambdagraduc(x, y, z) +
         omega() * sigma() * us(x, y, z) -
         omega() * omega() * chi() * uc(x, y, z);
}

double divlambdagradus(const double& x, const double& y, const double& z)
{
   switch(N)
   {
      default: return 0;
   };
}

double divlambdagraduc(const double& x, const double& y, const double& z)
{
   switch(N)
   {
      default: return 0;
   };
}

double lambda()
{
   switch (I)
   {
      case(0): return 1e2;
      case(1): return 1e4;
      case(2): return 8e5;
      case(3): return 1;
   };
}

double sigma()
{
   switch (J)
   {
      case(0): return 0;
      case(1): return 1e4;
      case(2): return 1e8;
      case(3): return 1;
   };
}

double chi()
{
   switch (L)
   {
      case(0): return 8.81e-12;
      case(1): return 1e-11;
      case(2): return 1e-10;
      case(3): return 1;
   };
}

double omega()
{
   switch (P)
   {
      case(0): return 1e-4;
      case(1): return 1e3;
      case(2): return 1e9;
      case(3): return 1;
   };
}
```

```
    void Print(ofstream& fout)
    {
        fout << scientific << omega() << "\t" << lambda() << "\t";
        fout << sigma() << "\t" << chi() << "\t";
    }
};
```

Файл “HarmonicProblem.cpp”

```
#pragma once
#include <iostream>
#include "Matrix.h"
#include "SLAE.h"
#include "Test.h"
#include <ctime>

using namespace std;

class HarmonicProblem
{
public:
    Matrix global;                  // Глобальная матрица
    Matrix fac_global;              // Неполная факторизация глобальной матрицы

    Matrix  GMM, MGM, MMG, MMM;     // Вспомогательные матрицы для вычисления элементов
                                    // локальных матриц и векторов правых частей

    SLAE slae;                      // Решатель системы без предобуславливания
    SLAE fac_slae;                  // Решатель системы с предобуславливанием

    vector<double> b;               // Глобальный вектор правой части
    vector<double> loc_b;           // Локальный вектор правой части
    vector<double> true_solution;   // Точное решение
    vector<double> solution;        // Решение
    vector<int> location;           // Положение на сетке для каждого узла

    Test test;                      // Информация о значениях функции,
                                    // парматров лямбда и гамма

    int elems_count;                // Количество конечных элементов
    int nodes_count;                // Количество узлов

    vector<double> x_nodes;         // Координаты сетки по x
    vector<double> y_nodes;         // Координаты сетки по y
    vector<double> z_nodes;         // Координаты сетки по z

    int x_nodes_count;              // Количество узлов по x
    int y_nodes_count;              // Количество узлов по y
    int z_nodes_count;              // Количество узлов по z

    vector<vector<int>> regions;    // Информация о подобластях (регионах)
    int regions_count;              // Количество регионов

    vector<int> x_cords_i;          //Индексы исходных координатных линий в векторе сетки по x
    vector<int> y_cords_i;          //Индексы исходных координатных линий в векторе сетки по y
    vector<int> z_cords_i;          //Индексы исходных координатных линий в векторе сетки по z

    vector<vector<int>> boundaries; // Информация о краевых условиях
    int bound_count;                // Количество краевых условий
```

```
// Вспомогательная функция для формирования сетки
void ReadFormGridHelp(int& t_nodes_count, vector<double>& t_nodes,
    vector<int>& t_cords_i, ifstream& fin)
{
   int t_coords_count;
   fin >> t_coords_count;

   vector<double> t_coords(t_coords_count);

   for(int i = 0; i < t_coords_count; i++)
      fin >> t_coords[i];

   t_nodes_count = 1;
   t_nodes = vector<double>(1);
   t_nodes[0] = t_coords[0];
   vector<int> n_t(t_coords_count - 1);

   for(int i = 0; i < t_coords_count - 1; i++)
   {
      fin >> n_t[i];
      t_nodes.resize(t_nodes_count + n_t[i]);

      double h = (t_coords[i + 1] - t_coords[i]) / n_t[i];

      for(int j = 0; j < n_t[i]; j++)
         t_nodes[j + t_nodes_count] = t_nodes[t_nodes_count - 1] + h * (j + 1);

      t_nodes_count += n_t[i];
   }

   // Пересчет индексов границ подобластей
   for(int i = 1; i < n_t.size(); i++)
      n_t[i] += n_t[i - 1];

   t_cords_i = vector<int>(n_t.size() + 1);

   for(int i = 0; i < n_t.size(); i++)
      t_cords_i[i + 1] = n_t[i];

   elems_count *= n_t[n_t.size() - 1];
}

// Считывание и формирование сетки из файла file_name
void ReadFormGrid(const string& file_name)
{
   ifstream fin(file_name);
   string fake;

   elems_count = 1;

   // Считывание координатных линий и формирование сетки по x
   fin >> fake;
   ReadFormGridHelp(x_nodes_count, x_nodes, x_cords_i, fin);

   // Считывание координатных линий и формирование сетки по y
   fin >> fake;
   ReadFormGridHelp(y_nodes_count, y_nodes, y_cords_i, fin);

   // Считывание координатных линий и формирование сетки по z
   fin >> fake;
   ReadFormGridHelp(z_nodes_count, z_nodes, z_cords_i, fin);

   // Считывание информации о подобластях
   fin >> fake;
```

```
    fin >> regions_count;
    regions = vector<vector<int>>(regions_count, vector<int>(6));

    for(int i = 0; i < regions_count; i++)
        fin >> regions[i][0] >> regions[i][1] >> regions[i][2] >> regions[i][3]
            >> regions[i][4] >> regions[i][5];

    fin.close();

    // Перерасчет индексов границ подобластей в соответствии с разбиением сетки
    for(int reg_i = 0; reg_i < regions_count; reg_i++)
    {
        regions[reg_i][0] = x_cords_i[regions[reg_i][0]];
        regions[reg_i][1] = x_cords_i[regions[reg_i][1]];
        regions[reg_i][2] = y_cords_i[regions[reg_i][2]];
        regions[reg_i][3] = y_cords_i[regions[reg_i][3]];
        regions[reg_i][4] = z_cords_i[regions[reg_i][4]];
        regions[reg_i][5] = z_cords_i[regions[reg_i][5]];
    }

    nodes_count = x_nodes_count * y_nodes_count * z_nodes_count;
}

// Считывание информации о краевых условиях из файла file_name
void ReadBoundaries(const string& file_name)
{
    ifstream fin(file_name);

    fin >> bound_count;

    boundaries = vector<vector<int>>(bound_count, vector<int>(7));

    for(int bound_i = 0; bound_i < bound_count; bound_i++)
    {
        for(int i = 0; i < 7; i++)
            fin >> boundaries[bound_i][i];

        boundaries[bound_i][1] = x_cords_i[boundaries[bound_i][1]];
        boundaries[bound_i][2] = x_cords_i[boundaries[bound_i][2]];
        boundaries[bound_i][3] = y_cords_i[boundaries[bound_i][3]];
        boundaries[bound_i][4] = y_cords_i[boundaries[bound_i][4]];
        boundaries[bound_i][5] = z_cords_i[boundaries[bound_i][5]];
        boundaries[bound_i][6] = z_cords_i[boundaries[bound_i][6]];
    }

    fin.close();
}

// Считывание вспомогательных матриц для формирования
// матриц жесткости и массы
void ReadMatrices()
{
    GMM = Matrix(8);
    GMM.ReadDiTr("data/GMM.txt");

    MGM = Matrix(8);
    MGM.ReadDiTr("data/MGM.txt");

    MMG = Matrix(8);
    MMG.ReadDiTr("data/MMG.txt");

    MMM = Matrix(8);
    MMM.ReadDiTr("data/MMM.txt");
}
```

```
// Выделение памяти под массивы
void InitializeMemory()
{
   slae = SLAE(nodes_count * 2, 30000, 1e-20);
   fac_slae = SLAE(nodes_count * 2, 30000, 1e-20);

   global.ind = vector<int>(nodes_count * 2 + 1);
   b = vector<double>(nodes_count * 2);

   solution = vector<double>(nodes_count * 2);
   true_solution = vector<double>(nodes_count * 2);
   location = vector<int>(nodes_count * 2);

   fac_global = Matrix(nodes_count * 2, 0);
}

// Заполнение массива global_indices индексами, соответствующими глобальной номерации
// узлов конечного элемента с номером elem_index(индексация с нуля)
void CalcGlobalIndices(int elem_i, vector<int>& global_indices)
{
   int n_coords = x_nodes_count / 2 + 1;
   int k = elem_i % (x_nodes_count - 1) + x_nodes_count * floor(elem_i /
          (x_nodes_count - 1));
   k = k % (x_nodes_count * (y_nodes_count - 1)) + (x_nodes_count * y_nodes_count) *
           floor(k / (x_nodes_count * (y_nodes_count - 1)));

   global_indices[0] = (k + 0);
   global_indices[1] = (k + 1);

   global_indices[2] = (k + x_nodes_count + 0);
   global_indices[3] = (k + x_nodes_count + 1);

   global_indices[4] = (k + x_nodes_count * y_nodes_count + 0);
   global_indices[5] = (k + x_nodes_count * y_nodes_count + 1);

   global_indices[6] = (k + x_nodes_count * y_nodes_count + x_nodes_count + 0);
   global_indices[7] = (k + x_nodes_count * y_nodes_count + x_nodes_count + 1);
}

// Поиск региона по номеру конечного элемента
int CalcRegionIndex(const int& elem_i)
{
   int n_coords = x_nodes_count / 2 + 1;
   int x0 = (elem_i) % (n_coords - 1) * 2 + 1;
   int y0 = floor((elem_i) / (n_coords - 1)) * 2 + 1;

   int found_reg_i = -1;

   for(int reg_i = 0; reg_i < regions_count; reg_i++)
   {
      if(regions[reg_i][0] <= x0 && x0 <= regions[reg_i][1] &&
         regions[reg_i][2] <= y0 && y0 <= regions[reg_i][3])
      {
         found_reg_i = reg_i;
         break;
      }
   }
   return found_reg_i;
}

// Вспомогательная функция для формирования портрета
void IncertToRow(Matrix& mat, const int& r, const int& c)
{
   int i_in_jg = mat.ind[r];
```

```
    int prof_len = mat.ind[r + 1] - mat.ind[r];

    bool found = false;

    for(int k = i_in_jg; k < i_in_jg + prof_len; k++)
        if(mat.columns_ind[k] == c)
        {
            found = true;
            break;
        }

    if(!found)
    {
        for(int l = r + 1; l < mat.ind.size(); l++)
            mat.ind[l]++;

        int k = i_in_jg;

        while((k < i_in_jg + prof_len) && mat.columns_ind[k] < c)
            k++;

        mat.columns_ind.insert(mat.columns_ind.begin() + k, c);
    }
}

// Формирование портрета глобальной матрицы с учетом блочной специфики
void FormGlobalPortrait()
{
    global.ind[0] = global.ind[1] = 0;

    for(int elem_i = 0; elem_i < elems_count; elem_i++)
    {
        int reg_i = CalcRegionIndex(elem_i);

        //if(reg_i != -1)
        {
            vector<int> global_indices(8);
            CalcGlobalIndices(elem_i, global_indices);
            vector<vector<vector<int>>> help(8);

            for(int i = 0; i < 8; i++)
                help[i].resize(8);

            for(int i = 0; i < 8; i++)
                for(int j = 0; j < 8; j++)
                    help[i][j] = { global_indices[i], global_indices[j] };

            for(int i = 0; i < 8; i++)
            {
                IncertToRow(global, help[i][i][0] * 2 + 1, help[i][i][1] * 2);
            }


            for(int i = 0; i < 8; i++)
                for(int j = 0; j < i; j++)
                {
                    IncertToRow(global, help[i][j][0] * 2, help[i][j][1] * 2);
                    IncertToRow(global, help[i][j][0] * 2, help[i][j][1] * 2 + 1);
                    IncertToRow(global, help[i][j][0] * 2 + 1, help[i][j][1] * 2);
                    IncertToRow(global, help[i][j][0] * 2 + 1, help[i][j][1] * 2 + 1);
                }
        }
    }
```

```
   global.size = global.ind.size() - 1;
   global.diag.resize(global.size);

   global.tr_size = global.columns_ind.size();
   global.bot_tr.resize(global.tr_size);
   global.top_tr.resize(global.tr_size);
}

// Формирование портрета матрицы mat
void FormPortrait(Matrix& mat)
{
   mat.ind[0] = mat.ind[1] = 0;

   for(int elem_i = 0; elem_i < elems_count; elem_i++)
   {
      int reg_i = CalcRegionIndex(elem_i);

      //if(reg_i != -1)
      {
         vector<int> mat_indices(8);
         CalcGlobalIndices(elem_i, mat_indices);
         vector<vector<vector<int>>> help(8);

         for(int i = 0; i < 8; i++)
            help[i].resize(8);

         for(int i = 0; i < 8; i++)
            for(int j = 0; j < 8; j++)
               help[i][j] = { mat_indices[i], mat_indices[j] };

         for(int i = 0; i < 8; i++)
            for(int j = 0; j < i; j++)
               IncertToRow(mat, help[i][j][0], help[i][j][1]);
      }
   }

   mat.size = mat.ind.size() - 1;
   mat.diag.resize(mat.size);

   mat.tr_size = mat.columns_ind.size();
   mat.bot_tr.resize(mat.tr_size);
   mat.top_tr.resize(mat.tr_size);
}

// Добавление к элменту матрицы с индексом [row_i][col_i] значения val
void AddToMat(Matrix& mat, const int& row_i, const int& col_i, const double& val_l,
    const double& val_u)
{
   if(row_i == col_i)
      mat.diag[row_i] += val_l;
   else
   {
      int beg_prof = mat.ind[row_i];
      int end_prof = mat.ind[row_i + 1];

      for(int i_in_prof = beg_prof; i_in_prof < end_prof; i_in_prof++)
      {
         if(mat.columns_ind[i_in_prof] == col_i)
         {
            mat.bot_tr[i_in_prof] += val_l;
            mat.top_tr[i_in_prof] += val_u;
            break;
         }
      }
```

```
    }
}

// Находит координаты узлов конечного элемента
// с номером elem_index(индексация с нуля)
void CalcElemNodes(const int& elem_i, vector<double>& x_elem_nodes,
    vector<double>& y_elem_nodes, vector<double>& z_elem_nodes)
{
    int n_x = x_nodes_count - 1;
    int n_y = y_nodes_count - 1;
    int n_z = z_nodes_count - 1;

    int x0 = elem_i % n_x;
    int y0 = (int)floor(elem_i / n_x) % n_y;
    int z0 = (int)floor(elem_i / (n_x * n_y));

    x_elem_nodes[0] = x_nodes[x0];
    x_elem_nodes[1] = x_nodes[x0 + 1];

    y_elem_nodes[0] = y_nodes[y0];
    y_elem_nodes[1] = y_nodes[y0 + 1];

    z_elem_nodes[0] = z_nodes[z0];
    z_elem_nodes[1] = z_nodes[z0 + 1];

    //cout << x0 << " " << y0 << " " << z0 << endl;
}

// Сборка глобальной матрицы
void AssembleGlobalMatrix()
{
    vector<int> global_indices(8);

    for(int i = 0; i < global.tr_size; i++)
    {
        global.bot_tr[i] = global.top_tr[i] = 0;
    }

    for(int i = 0; i < nodes_count * 2; i++)
    {
        global.diag[i] = b[i] = 0;
    }

    for(int elem_i = 0; elem_i < elems_count; elem_i++)
    {
        int reg_i = CalcRegionIndex(elem_i);
        CalcGlobalIndices(elem_i, global_indices);

        {
            vector<double> x_elem_nodes(2);       // Координаты конечного элемента по x
            vector<double> y_elem_nodes(2);       // Координаты конечного элемента по y
            vector<double> z_elem_nodes(2);       // Координаты конечного элемента по z
            CalcElemNodes(elem_i, x_elem_nodes, y_elem_nodes, z_elem_nodes);

            double hx = x_elem_nodes[1] - x_elem_nodes[0];
            double hy = y_elem_nodes[1] - y_elem_nodes[0];
            double hz = z_elem_nodes[1] - z_elem_nodes[0];

            vector<double> local_fs(8);
            vector<double> local_fc(8);

            for(int i = 0; i < 8; i++)
            {
                double x = x_elem_nodes[i % 2];
```

```
                double y = y_elem_nodes[(int)floor(i / 2) % 2];
                double z = z_elem_nodes[(int)floor(i / 4) % 4];

                local_fs[i] = test.fs(x, y, z);
                local_fc[i] = test.fc(x, y, z);

                true_solution[global_indices[i] * 2    ] = test.us(x, y, z);
                true_solution[global_indices[i] * 2 + 1] = test.uc(x, y, z);

                for(int j = 0; j <= i; j++)
                {
                   double p = 0;
                   double c = 0;

                   if(i == j)
                   {
                      p = test.lambda() * (hy * hz / (hx * 36) * GMM.diag[i] + hx * hz /
                            (hy * 36) * MGM.diag[i] + hx * hy / (hz * 36) * MMG.diag[i]);

                     p -= test.omega() * test.omega() * test.chi() * hx * hy * hz / 216.0 *
                            MMM.diag[i];

                     c = test.omega() * test.sigma() * hx * hy * hz / 216.0 * MMM.diag[i];
                   }
                   else
                   {
                      int tr_i = MMM.ind[i] + j;

                      p = test.lambda() * (hy * hz / (hx * 36) * GMM.bot_tr[tr_i] + hx * hz /
                     (hy * 36) * MGM.bot_tr[tr_i] + hx * hy / (hz * 36) * MMG.bot_tr[tr_i]);

                     p -= test.omega() * test.omega() * test.chi() * hx * hy * hz / 216.0 *
                            MMM.bot_tr[tr_i];

                      c = test.omega() * test.sigma() * hx * hy * hz / 216.0 *
                            MMM.bot_tr[tr_i];
                   }

                   AddToMat(global, global_indices[i] * 2, global_indices[j] * 2, p, p);
                   AddToMat(global, global_indices[i] * 2 + 1, global_indices[j]*2+1, p, p);

                   AddToMat(global, global_indices[i] * 2 + 1, global_indices[j] * 2, c, -c);
                   AddToMat(global, global_indices[i] * 2, global_indices[j] * 2 + 1, -c, c);
                }
             }

             vector<double> local_bs(8);
             vector<double> local_bc(8);
             MMM.MatVecMult(local_fs, local_bs, MMM.bot_tr, MMM.top_tr);
             MMM.MatVecMult(local_fc, local_bc, MMM.bot_tr, MMM.top_tr);

             for(int i = 0; i < 8; i++)
             {
                b[global_indices[i] * 2    ] += hx * hy * hz / 216.0 * local_bs[i];
                b[global_indices[i] * 2 + 1] += hx * hy * hz / 216.0 * local_bc[i];
             }
          }
       }
    }
```

```
// Учет первых краевых условий на строкес с номером line_i
void FirstBoundOnLine(int line_i, const double& x, const double& y, const double& z)
{
   line_i *= 2;

   global.diag[line_i    ] = 1;
   global.diag[line_i + 1] = 1;

   true_solution[line_i    ] = test.us(x, y, z);
   true_solution[line_i + 1] = test.uc(x, y, z);

   b[line_i    ] = test.us(x, y, z);
   b[line_i + 1] = test.uc(x, y, z);

   for(int prof_i = global.ind[line_i]; prof_i < global.ind[line_i + 1]; prof_i++)
      global.bot_tr[prof_i] = 0;

   for(int prof_i = global.ind[line_i + 1]; prof_i < global.ind[line_i + 2]; prof_i++)
      global.bot_tr[prof_i] = 0;

   for(int i = 0; i < nodes_count * 2; i++)
   {
      for(int prof_i = global.ind[i]; prof_i < global.ind[i + 1]; prof_i++)
      {
         if(global.columns_ind[prof_i] == line_i || global.columns_ind[prof_i]==line_i+1)
            global.top_tr[prof_i] = 0;
      }
   }
}

// Учет первых краевых условий
void AccountFirstBound()
{
   for(int x_i = 0; x_i < x_nodes_count; x_i++)
   {
      for(int y_i = 0; y_i < y_nodes_count; y_i++)
      {
         for(int z_i = 0; z_i < z_nodes_count; z_i++)
         {
            for(int bound_i = 0; bound_i < bound_count; bound_i++)
            {
               if(boundaries[bound_i][1] <= x_i && x_i <= boundaries[bound_i][2] &&
                  boundaries[bound_i][3] <= y_i && y_i <= boundaries[bound_i][4] &&
                  boundaries[bound_i][5] <= z_i && z_i <= boundaries[bound_i][6])
               {
                  int i = x_i + y_i * x_nodes_count + z_i * x_nodes_count *
                        y_nodes_count;
                  FirstBoundOnLine(i, x_nodes[x_i], y_nodes[y_i], z_nodes[z_i]);
                  location[i * 2    ] = 1;
                  location[i * 2 + 1] = 1;
                  break;
               }
            }
         }
      }
   }
}

// Нахождение решения
void Solve(ofstream& fout)
{
   slae.b = b;
   global.DiagFact(fac_global);
```

```
    vector<double> x0(nodes_count * 2);

    double start_time = clock();
    int iter = slae.ConjGradPredMethod(x0, solution, global, fac_slae, fac_global);
    double end_time = clock();

    fout << iter << "\t" << (end_time - start_time) / CLOCKS_PER_SEC << "\t";
}

// Вывод решения на временном слое t в поток fout
void PrintSolution(ofstream& fout)
{
    /*fout << setw(14) << "x" << setw(14) << "y" << setw(14) << "z";
    fout << setw(14) << "prec" << setw(14) << "calc" << setw(14) << "diff";
    fout << setw(5) << "n" << " loc" << endl;*/

    double norm = 0, norm_u = 0;
    for(int z_i = 0; z_i < z_nodes_count; z_i++)
    {
        for(int y_i = 0; y_i < y_nodes_count; y_i++)
        {
            for(int x_i = 0; x_i < x_nodes_count; x_i++)
            {
                int i = x_i + y_i * x_nodes_count + z_i * x_nodes_count * y_nodes_count;

                double prec = true_solution[i * 2];
                double calc = solution[i * 2];

                //if(x_i % 32 == 0 && y_i % 32 == 0)
                /*{
                    fout << scientific;
                    fout << setw(14) << x_nodes[x_i];
                    fout << setw(14) << y_nodes[y_i];
                    fout << setw(14) << z_nodes[z_i];

                    fout << setw(14) << prec;
                    fout << setw(14) << calc;
                    fout << setw(14) << abs(true_solution[i * 2] - solution[i * 2]);

                    fout << fixed << setw(5) << i * 2;

                    if(location[i * 2] == 2)
                        fout << " outer";
                    else if(location[i * 2] == 1)
                        fout << " border";
                    else
                        fout << " inner";

                    fout << endl;

                }*/

                prec = true_solution[i * 2 + 1];
                calc = solution[i * 2 + 1];

                //if(x_i % 32 == 0 && y_i % 32 == 0)
                /*{
                    fout << scientific;
                    fout << setw(14) << x_nodes[x_i];
                    fout << setw(14) << y_nodes[y_i];
                    fout << setw(14) << z_nodes[z_i];

                    fout << setw(14) << prec;
                    fout << setw(14) << calc;
```

```
                fout << setw(14) << abs(true_solution[i * 2 + 1] - solution[i * 2 + 1]);

                fout << fixed << setw(5) << i * 2 + 1;

                if(location[i * 2 + 1] == 2)
                   fout << " outer";
                else if(location[i * 2 + 1] == 1)
                   fout << " border";
                else
                   fout << " inner";

                fout << endl;

             }*/
             norm_u += prec * prec;
             norm += abs(prec - calc) * abs(prec - calc);
          }
       }
    }

    /*fout << "||u-u*||/||u*|| = " << scientific << sqrt(norm) / sqrt(norm_u) << endl;
    fout << "||u-u*|| = " << scientific << sqrt(norm) << endl;*/
    fout << scientific << sqrt(norm) << "\t";
    fout << scientific << sqrt(norm) / sqrt(norm_u) << endl;
 }
};
```

Файл “main.cpp”

```
#include <iostream>
#include "HarmonicProblem.h"

using namespace std;

int main()
{
   HarmonicProblem hp;
   hp.ReadFormGrid("data/grid.txt");
   hp.ReadBoundaries("data/boundaries.txt");
   hp.ReadMatrices();

   ofstream fout("result.txt");

   //for (int p = 0; p < 3; p++)
      //for (int i = 0; i < 3; i++)
         //for (int j = 0; j < 3; j++)
            //for (int l = 0; l < 3; l++)
            {
               hp.InitializeMemory();
               hp.FormGlobalPortrait();
              // hp.test = Test(1, i, j, l, p);
               hp.test = Test(1, 0, 2, 0, 2);
               hp.AssembleGlobalMatrix();
               hp.AccountFirstBound();
               hp.test.Print(fout);
               hp.Solve(fout);
               hp.PrintSolution(fout);
            }

   fout.close();
}
```