Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Новосибирский государственный технический университет

Кафедра ПМт

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Практическое задание № 3

# Решение гармонических задач

Факультет: ПМИ Преподаватели:

Задорожный А. Г.,

Патрушев И.И.

Группа: ПМ-81

Студенты: Ефремов А.А.,

Ртищева К. С.

Бригада: 1

Вариант: 9

Новосибирск

2021

1. **Цель работы**

Разработать программу решения гармонической задачи методом конечных элементов. Провести сравнение прямого и итерационного методов решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ

1. **Задание**

Решить трехмерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции – трилинейные.

1. **Анализ задачи**

Рассмотрим задачу для уравнения:

Функции удовлетворяют системе

И должны удовлетворять краевым условиям .

Умножим каждое уравнение системы на пробную функцию и применим формулу Грина, получим систему двух вариационных уравнений:

Построим конечноэлементную аппроксимацию:

Заменим каждую из искомых функций на функции

– базисные функции

В результате получаем систему из 2n уравнений с 2n неизвестными и . Чтобы определить матрицу и вектор правой части, полученной конечноэлементной СЛАУ, пронумеруем уравнения и неизвестные этой системы поочередно.

Обозначим

где

Тогда матрица конечноэлементной СЛАУ будет состоять из блоков вида:

Для трехмерной задачи в декартовых координатах получаем

где – трилинейные базисные функции.

Тогда, учитывая представление базисных функций:

– локальные матрицы жесткости, – локальные матрицы массы соответствующих одномерных линейных элементов

Получаем

**Учет первых краевых условий:**

в матрице СЛАУ в строке на место диагонального элемента ставится единица, все остальные элементы этой строки матрицы обнуляются, а компоненте вектора правой части присваивается значение .

1. **Проверка работоспособности программы**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0  2  2  2 | ***Файл boundaries.txt***  6  1 0 1 0 1 0 0  1 0 1 0 1 1 1  1 0 0 0 1 0 1  1 1 1 0 1 0 1  1 0 1 0 0 0 1  1 0 1 1 1 0 1 | ***Файл grid.txt***  ----X----  2  0 2  2  ----Y----  2  0 2  2  ----Z----  2  0 2  2  -Regions-  1  0 1 0 1 0 1 |

**x y z prec calc diff n loc**

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 0 border

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 1 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 2 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 3 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 4 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 5 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 6 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 7 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 8 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 9 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 10 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 11 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 12 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 13 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 14 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 15 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 16 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 17 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 18 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 19 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 20 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 21 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 22 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 23 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 24 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 25 border

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 26 inner

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 27 inner

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 28 border

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 29 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 30 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 31 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 32 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 33 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 34 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 35 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 36 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 37 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 38 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 39 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 40 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 41 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 42 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 43 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 44 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 0.000000e+00 45 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 46 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 47 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 48 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 49 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 50 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 1.776357e-15 51 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-15 52 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 5.000000e+00 5.000000e+00 8.881784e-16 53 border

||u-u\*||/||u\*|| = 2.648036e-16

||u-u\*|| = 6.879800e-15

**x y z prec calc diff n loc**

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.078267e-15 1.078267e-15 0 border

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 -1.801862e-16 1.801862e-16 1 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 -5.293063e-16 5.293063e-16 2 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.443290e-15 3 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.078267e-15 1.078267e-15 4 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 5 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-15 6 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.443290e-15 7 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 9.992007e-16 8 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 9 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-15 10 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 8.881784e-16 11 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 12 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 13 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 14 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 8.881784e-16 15 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 16 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 0.000000e+00 17 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-15 18 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 -4.434891e-16 4.434891e-16 19 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 9.992007e-16 20 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.220446e-16 21 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-15 22 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 23 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 8.881784e-16 24 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.220446e-16 25 border

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 26 inner

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.554312e-15 27 inner

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 8.881784e-16 28 border

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 29 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 30 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 31 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 32 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 33 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 34 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 2.664535e-15 35 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 36 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 -1.801862e-16 1.801862e-16 37 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 38 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.443290e-15 39 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.332268e-15 40 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 41 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 42 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.443290e-15 43 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 44 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 45 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 4.440892e-16 46 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 8.881784e-16 47 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 1.776357e-15 48 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 49 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 0.000000e+00 50 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 3.000000e+00 3.000000e+00 8.881784e-16 51 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 1.776357e-15 52 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 0.000000e+00 53 border

||u-u\*||/||u\*|| = 4.289137e-16

||u-u\*|| = 5.146964e-15

**x y z prec calc diff n loc**

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 0 border

0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 1 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 2 border

1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 3 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 4 border

2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 5 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 6 border

0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 7 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 -2.341408e-16 2.341408e-16 8 border

1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.220446e-16 9 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 10 border

2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 11 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 12 border

0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 13 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 14 border

1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 15 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 16 border

2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 8.881784e-16 17 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 18 border

0.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 19 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 -2.341408e-16 2.341408e-16 20 border

1.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 -7.313969e-17 7.313969e-17 21 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 22 border

2.000000e+00 0.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 23 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-16 24 border

0.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 -7.313969e-17 7.313969e-17 25 border

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-15 26 inner

1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 4.440892e-16 27 inner

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 1.110223e-16 28 border

2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 29 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 30 border

0.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 31 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 32 border

1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.440892e-16 33 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 34 border

2.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 8.881784e-16 35 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 36 border

0.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 37 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 1.237749e-15 1.237749e-15 38 border

1.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 39 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 7.000781e-16 7.000781e-16 40 border

2.000000e+00 0.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 41 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 42 border

0.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 1.011203e-15 1.011203e-15 43 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.220446e-16 44 border

1.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 1.000000e+00 1.000000e+00 2.220446e-16 45 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 1.776357e-15 46 border

2.000000e+00 1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 47 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 1.776357e-15 48 border

0.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 3.722623e-16 3.722623e-16 49 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 0.000000e+00 50 border

1.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 0.000000e+00 51 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 1.776357e-15 52 border

2.000000e+00 2.000000e+00 2.000000e+00 4.000000e+00 4.000000e+00 8.881784e-16 53 border

||u-u\*||/||u\*|| = 3.839572e-16

||u-u\*|| = 3.325167e-15

1. **Исследования**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Кол-во узлов** |  |  |  |  | **Кол-во итераций** | **Время решения, сек** |  |  |
| 1000 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |

1. **Выводы**
2. **Текст программы**

**Файл “Matrix.h”**

**Файл “SLAE.h”**

**Файл “Region.h”**

**Файл “NonLinearBVP.h”**

**Файл “Test.h”**

**Файл “main.cpp”**