数据结构

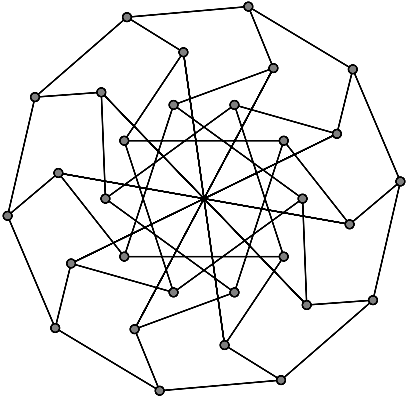
夏天

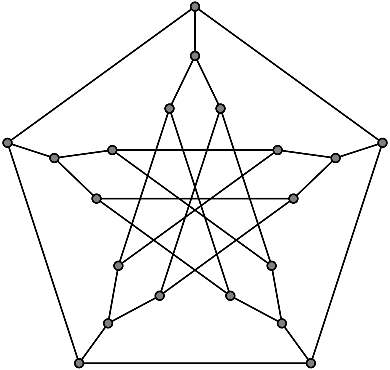
xiat@ruc.edu.cn

中国人民大学信息资源管理学院

November 26, 2020

Graph





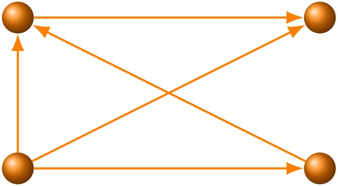
Content

- 图的定义
- 图的存储表示
- 图的遍历
- 图的连通性

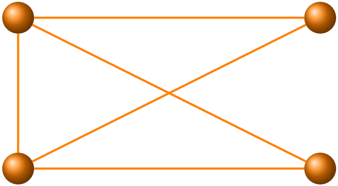
图 (Graph)

- 图 $G = (V, E)$, V 是顶点 (Vertex) 集合,E 是边/弧 (Edge/Arc) 的集合.
- 顶点的度、出度和入度

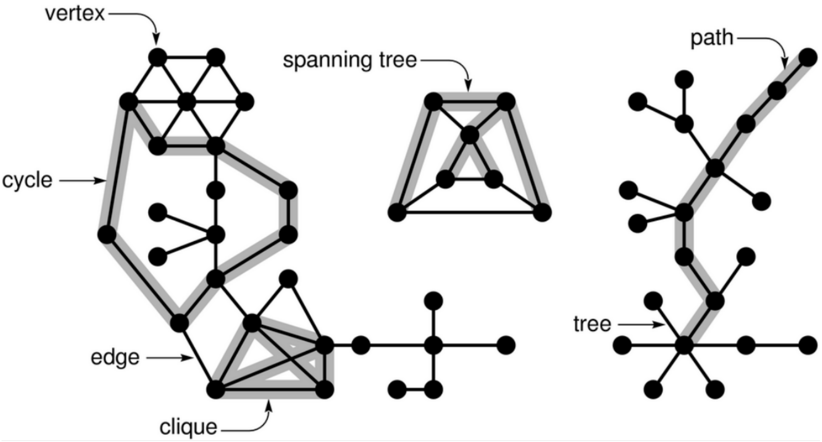
有向图:



无向图:



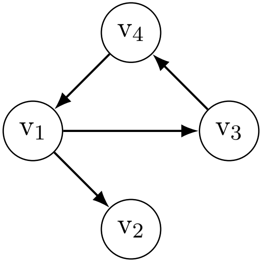
图的相关概念



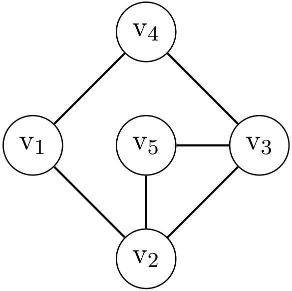
图的存储

如何表达下图的信息？

有向图：



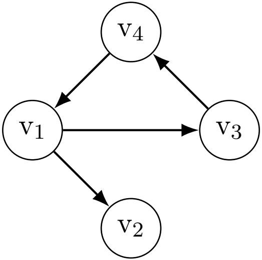
无向图：



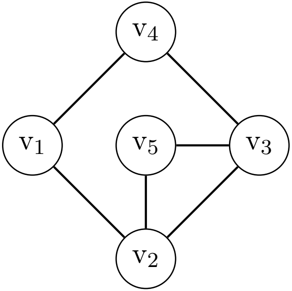
图的存储

如何表达下图的信息？

有向图：

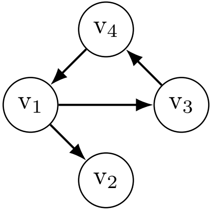


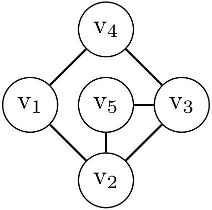
无向图：



- 可用邻接矩阵表达顶点及其关系。

图的存储



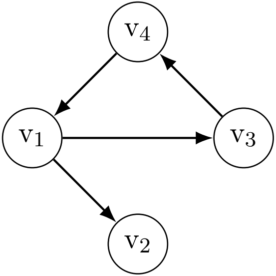


$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 根据邻接矩阵, 如何判断各顶点的度?

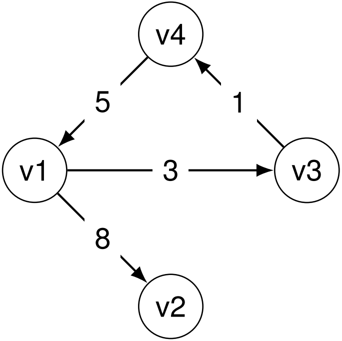
有向图的连续存储方式：邻接矩阵



- 建立二维数组 $A[n][n], n = |V|$
- 另需存放 n 个顶点信息

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

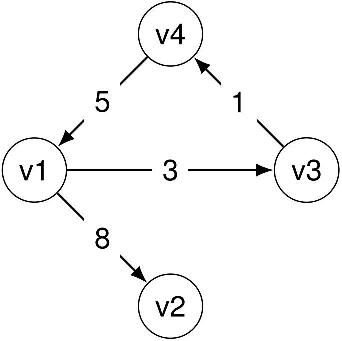
网的邻接矩阵



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\infty & 8 & 3 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 1 \\
5 & \infty & \infty & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 有些图的边带有权重 (常用来表示成本、距离、时间等), 这样的图称为：网。
- 网的邻接矩阵表达权重, 没有边的顶点之间的权重默认为 ∞
- 邻接矩阵表示方法非常直观、简单, 但是会有什么问题?

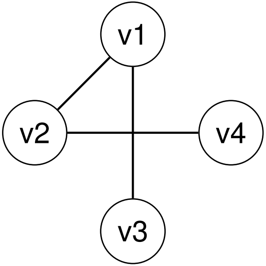
网的邻接矩阵

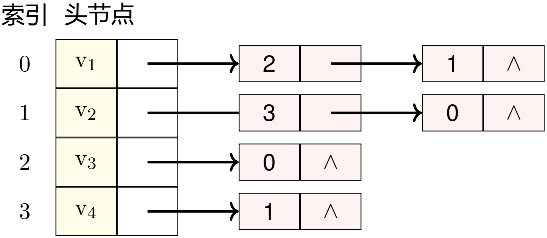


$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
\infty & 8 & 3 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 1 \\
5 & \infty & \infty & \infty
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- 有些图的边带有权重 (常用来表示成本、距离、时间等), 这样的图称为：网。
- 网的邻接矩阵表达权重, 没有边的顶点之间的权重默认为 ∞
- 邻接矩阵表示方法非常直观、简单, 但是会有什么问题?
- 现实中的图经常对应稀疏矩阵, 在这样情形下会有很大空间浪费.

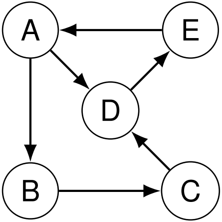
邻接表 (Adjacency List) – 无向图



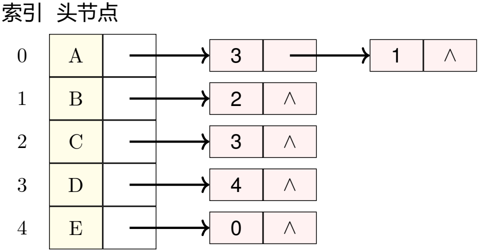


- 无向图的邻接表: 同一个顶点发出的边链接在同一个边链表中, 便于确定顶点的度
- 需要 n 个头结点, $2e$ 个表结点

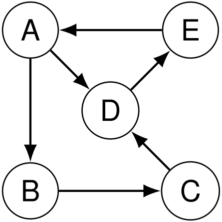
邻接表--有向图



邻接表, 便于确定节点出度



邻接表--有向图



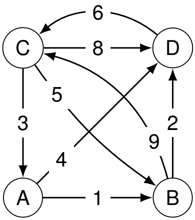
逆邻接表，便于确定节点入度

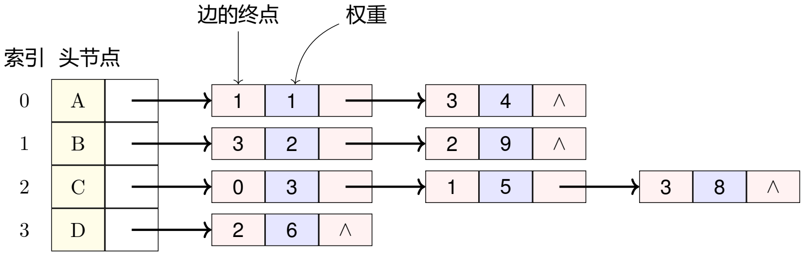
索引	头节点	
0	A	→ 4 → ∧
1	B	→ 0 → ∧
2	C	→ 1 → ∧
3	D	→ 2 → 0 → ∧
4	E	→ 3 → ∧

邻接表，便于确定节点出度

索引	头节点	
0	A	→ 3 → 1 → ∧
1	B	→ 2 → ∧
2	C	→ 3 → ∧
3	D	→ 4 → ∧
4	E	→ 0 → ∧

邻接表--权重处理





练习

1. 请写出数组存储和邻接表的类型定义
2. 请在如下方面对比数组表示法和邻接表示法
   - 存储表示是否唯一
   - 空间复杂度
   - 操作 a: 求顶点 v_i 的度
   - 操作 b: 判定 (v_i, v_j) 是否是图的一条边
   - 操作 c: 通过遍历求边的数目

邻接表表示 I

```java
class VertexNode {
  String data;
  EdgeNode firstAdj = null;

  public VertexNode(String data) {
    this.data = data;
  }
}

class EdgeNode {
  int adjVertexNode;
  EdgeNode nextAdj = null;
```

邻接表表示 II

```java
    public EdgeNode(int vertexIdx) {
        this.adjVertexNode = vertexIdx;
    }

    public EdgeNode(int vertexIdx, EdgeNode nextAdj)
        this.adjVertexNode = vertexIdx;
        this.nextAdj = nextAdj;
    }
}

public class Graph {
```

邻接表表示 III

```
VertexNode[] vertices;

public void init() {
  this.vertices = new VertexNode[]{
    new VertexNode("v1"),
    new VertexNode("v2"),
    new VertexNode("v3"),
    new VertexNode("v4"),
    new VertexNode("v5"),
    new VertexNode("v6"),
    new VertexNode("v7"),
    new VertexNode("v8")
```

邻接表表示 IV

```
    };
    vertices[0].firstAdj = new EdgeNode(1, new Edg
    vertices[1].firstAdj = new EdgeNode(0, new Edg
    vertices[2].firstAdj = new EdgeNode(0, new Edg
    vertices[3].firstAdj = new EdgeNode(1, new Edg
    vertices[4].firstAdj = new EdgeNode(1, new Edg
    vertices[5].firstAdj = new EdgeNode(2, new Edg
    vertices[6].firstAdj = new EdgeNode(2, new Edg
    vertices[7].firstAdj = new EdgeNode(3, new Edg
  }
}
```

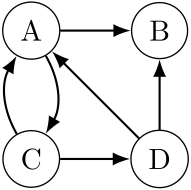
比较

	数组表示法	邻接表法
表示结果	唯一	不唯一
空间复杂度	$O(n^2)$ (适用于稠密图)	$O(n+e)$ (适用于稀疏图)
无向图求顶点 v_i 的度	第 i 行 (或第 i 列) 上非零元素的个数	第 i 个边表中的结点个数
有向图求顶点 v_i 的度	第 i 行上非零元素的个数是 v_i 出度，第 i 列上非零元素的个数是 v_i 的入度	第 i 个边表上的结点个数，求入度还需遍历各顶点的边表。逆邻接表则相反
判定 (v_i, v_j) 是否是图的一条边	看矩阵中的 i 行 j 列是否为 0	扫描第 i 个边表
求边的数目	检测整个矩阵中的非零元所耗费的时间是 $O(N^2)$	对每个边表的结点个数计数所耗费的时间是 $O(e+n)$

思考

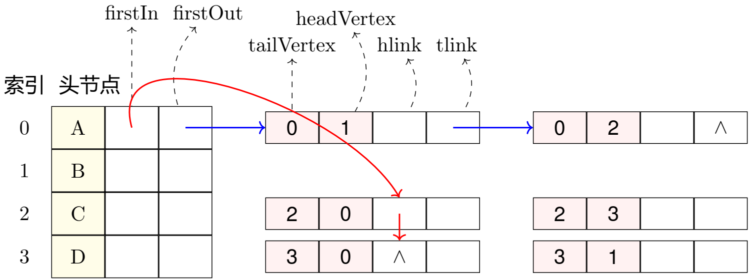
怎么把邻接表和逆邻接表相结合, 同时表示出来?

有向图的十字链表 (Orthogonal List)



将邻接表、逆邻接表结合起来.

- hlink: 指向弧头相同的下一条弧
- tlink: 指向弧尾相同的下一条弧

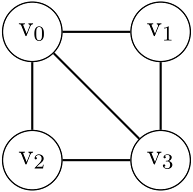


有向图的十字链表

```
class VertexNode {
  String data;
  ArcBox firstIn;
  ArcBox firstOut;
}

class ArcBox {
  int headVertex, tailVertex;
  ArcBox hlink;
  ArcBox tlink;
  String data;
}
```

```
class OLGraph {
  List<VertexNode> xlist
  int vertexNum, arcNum;
}
```

无向图的多重邻接表

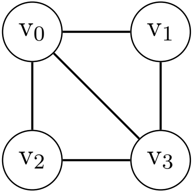


- 无向图的应用中，关注的重点是顶点，那么邻接表是不错的选择
- 如更关注边的操作，比如对已访问过的边做标记，删除某一条边等操作，就意味着需要找到这条边的两个边表结点进行操作。

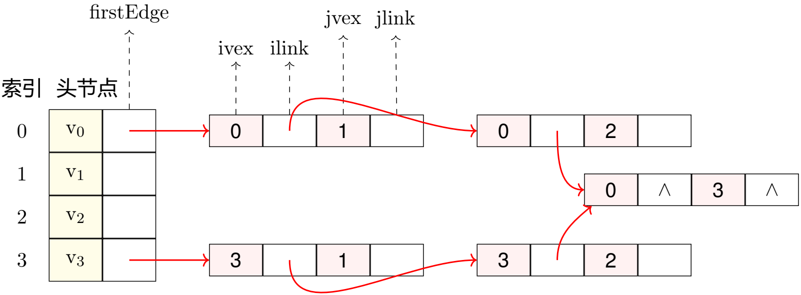
ivex	ilink	jvex	jlink

- ivex, jvex: 某条边依附的两个顶点
- ilink: 指向依附顶点 ivex 的下一条边
- jlink: 指向依附顶点 jvex 的下一条边

无向图的多重邻接表



- 无向图的应用中，关注的重点是顶点，那么邻接表是不错的选择
- 如更关注边的操作，比如对已访问过的边做标记，删除某一条边等操作，就意味着需要找到这条边的两个边表结点进行操作。

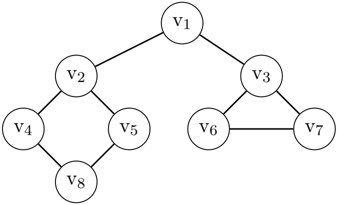


图的遍历

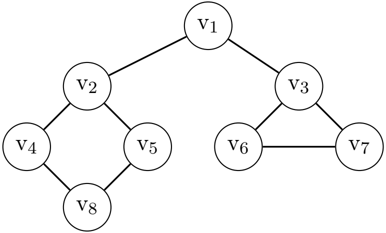
图的遍历

图的遍历: 从图的某顶点出发, 访问所有顶点, 且每个顶点仅被访问一次。无论是无向图还是有向图，都有两种遍历方式:

- 深度优先 (类似于树的先根遍历)
- 广度优先 (类似于树的层次遍历)



深度优先搜索 - Depth First Search



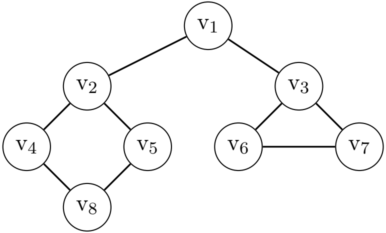
v_1	$\rightarrow v_2 \rightarrow v_3$
v_2	$\rightarrow v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5$
v_3	$\rightarrow v_1 \rightarrow v_6 \rightarrow v_7$
v_4	$\rightarrow v_2 \rightarrow v_8$
v_5	$\rightarrow v_2 \rightarrow v_8$
v_6	$\rightarrow v_3 \rightarrow v_7$
v_7	$\rightarrow v_3 \rightarrow v_6$
v_8	$\rightarrow v_4 \rightarrow v_5$

以 v_1 开始为例:

$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_8 \rightarrow v_5 \rightarrow \cdots$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
visited	1	1	0	1	1	0	0	1
stack	v_1	v_2	v_4	v_8	v_5			

深度优先搜索 - Depth First Search



v_1	$\to v_2 \to v_3$
v_2	$\to v_1 \to v_4 \to v_5$
v_3	$\to v_1 \to v_6 \to v_7$
v_4	$\to v_2 \to v_8$
v_5	$\to v_2 \to v_8$
v_6	$\to v_3 \to v_7$
v_7	$\to v_3 \to v_6$
v_8	$\to v_4 \to v_5$

以 v_1 开始为例:

$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_8 \to v_5 \to \cdots$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
visited	1	1	0	1	1	0	0	1

stack	v_1	v_2	v_4	v_8	v_5			

$v_1 \to v_2 \to v_4 \to v_8 \to v_5 \to v_3 \to v_6 \to v_7$

```java
class VertexNode {
  String data;
  EdgeNode firstAdj = null;

  public VertexNode(String data) {
    this.data = data;
  }
}

class EdgeNode {
  int adjVertexNode;
  EdgeNode nextAdj = null;

  public EdgeNode(int vertexIdx) {
    this.adjVertexNode = vertexIdx;
  }
```

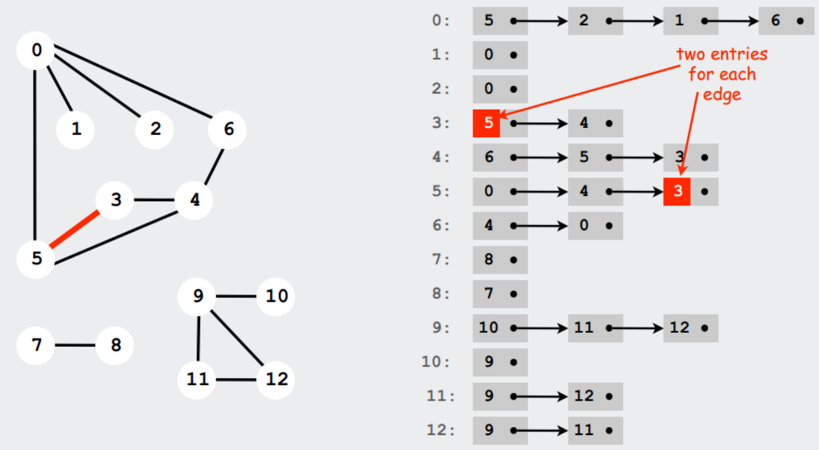
```
  public EdgeNode(int vertexIdx, EdgeNode nextAdj) {
    this.adjVertexNode = vertexIdx;
    this.nextAdj = nextAdj;
  }
}

public class Graph {
  VertexNode[] vertices;

  public void init() {
    this.vertices = new VertexNode[]{
      new VertexNode("v1"),
      new VertexNode("v2"),
      new VertexNode("v3"),
```

```
        new VertexNode("v4"),
        new VertexNode("v5"),
        new VertexNode("v6"),
        new VertexNode("v7"),
        new VertexNode("v8")
    };
    vertices[0].firstAdj = new EdgeNode(1, new EdgeNode
    vertices[1].firstAdj = new EdgeNode(0, new EdgeNode
    vertices[2].firstAdj = new EdgeNode(0, new EdgeNode
    vertices[3].firstAdj = new EdgeNode(1, new EdgeNode
    vertices[4].firstAdj = new EdgeNode(1, new EdgeNode
    vertices[5].firstAdj = new EdgeNode(2, new EdgeNode
    vertices[6].firstAdj = new EdgeNode(2, new EdgeNode
    vertices[7].firstAdj = new EdgeNode(3, new EdgeNode
}
```

```java
void dfsTraverse() {
  boolean[] visited = new boolean[vertices.length];
  //for (int i = 0; i < visited.length; i++) visited[
  for (int v = 0; v < vertices.length; v++) { //why f
    if (!visited[v]) dfs(v, visited);
  }
}

void dfs(int v, boolean[] visited) {
  visited[v] = true;
  VertexNode vertex = vertices[v];
  System.out.print(vertex.data + " ");

  for (EdgeNode w = vertex.firstAdj; w != null; w = w
```

```java
      if (!visited[w.adjVertexNode])
      dfs(w.adjVertexNode, visited);
    }
  }

  public static void main(String[] args) {
    Graph g = new Graph();
    g.init();
    g.dfsTraverse();
  }
}
```

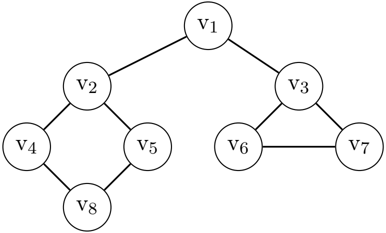
图不一定连通，需要遍历每一个节点



DFS 算法分析

- 比较两种存储结构下的算法 (设 n 个顶点, e 条边)
  - 数组表示: 查找每个顶点的邻接点要遍历每一行, 遍历的时间复杂度为 $O(n^2)$
  - 邻接表表示: 虽然有 $2e$ 个表结点, 但只需扫描 e 个结点即可完成遍历, 加上访问 n 个头结点的时间, 遍历的时间复杂度为 $O(n+e)$
- 结论:
  - 稠密图适于在邻接矩阵上进行深度遍历;
  - 稀疏图适于在邻接表上进行深度遍历。

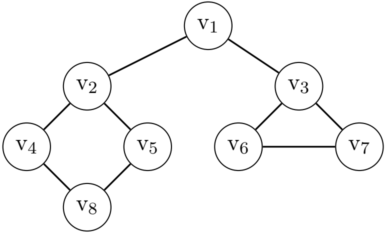
广度优先搜索 - Breadth First Search



	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8
visited	1	0	0	0	0	0	0	0
queue	v2	v3						

v1	→ v2 → v3
v2	→ v1 → v4 → v5
v3	→ v1 → v6 → v7
v4	→ v2 → v8
v5	→ v2 → v8
v6	→ v3 → v7
v7	→ v3 → v6
v8	→ v4 → v5

广度优先搜索 - Breadth First Search



	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
visited	1	0	0	0	0	0	0	0
queue	v_2	v_3						

$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_6 \to v_7 \to v_8$

v_1	$\to v_2 \to v_3$
v_2	$\to v_1 \to v_4 \to v_5$
v_3	$\to v_1 \to v_6 \to v_7$
v_4	$\to v_2 \to v_8$
v_5	$\to v_2 \to v_8$
v_6	$\to v_3 \to v_7$
v_7	$\to v_3 \to v_6$
v_8	$\to v_4 \to v_5$

BFS I

```
void bfs() {
  boolean[] visited = new boolean[vertices.length];
  //for (int i = 0; i < visited.length; i++) visited[i]

  Queue<Integer> Q = new LinkedList<>();
  for (int v = 0; v < vertices.length; v++) {
    if (!visited[v]) {
      visited[v] = true;
      System.out.print(vertices[v].data + " ");
      Q.add(v);

      while (!Q.isEmpty()) {
        int u = Q.poll();
```

BFS II

```
              for (EdgeNode w = vertices[u].firstAdj; w != nu
                if (!visited[w.adjVertexNode]) {
                  visited[w.adjVertexNode] = true;
                  System.out.print(vertices[w.adjVertexNode].
                  Q.add(w.adjVertexNode);
                }
              }
            }
          }
        }
      }
```

分析以下代码的输出结果 I

```
void bfs() {
    boolean[] visited = new boolean[vertices.length];
    //for (int i = 0; i < visited.length; i++) visited[

    Queue<Integer> Q = new LinkedList<>();
    for (int v = 0; v < vertices.length; v++) {
        if (!visited[v]) {
            Q.add(v);
        }

        while (!Q.isEmpty()) {
            int u = Q.poll();

            visited[u] = true;
```

分析以下代码的输出结果 II

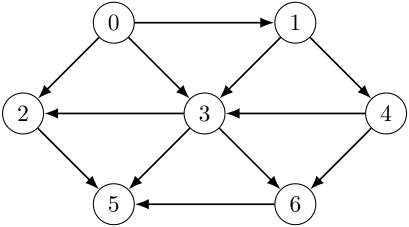
```
                    System.out.print(vertices[u].data + " ");

                    for (EdgeNode w = vertices[u].firstAdj; w !
                        if (!visited[w.adjVertexNode]) {
                            Q.add(w.adjVertexNode);
                        }
                    }
                }
            }
        }
```

BFS 算法分析

- 数组表示:BFS 对于每一个被访问到的顶点, 都要循环检测矩阵中的整整一行 (n 个元素), 总的时间代价为 $\mathrm{O}(\mathrm{n}^2)$
- 邻接表表示: 时间复杂度 $\mathrm{O}(\mathrm{n}+\mathrm{e})$

作业练习

1. 请写出如下有向图的邻接矩阵，基于该矩阵进行图的深度优先遍历；
2. 建立如下有向图的邻接表，进行图的广度优先遍历．

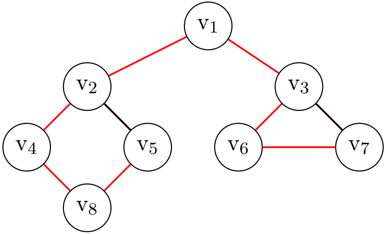


图的连通性

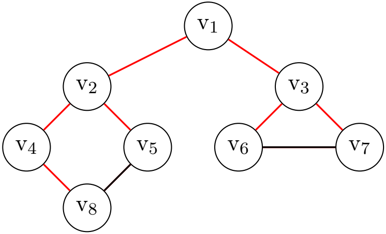
图的连通性在计算机网、通信网和电力网等方面有着重要的应用。

生成树 (Spanning tree)

深度优先生成树:



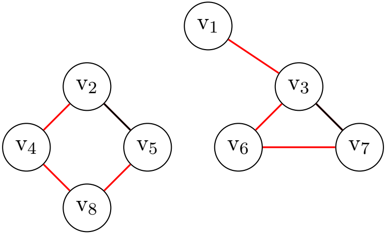
广度优先生成树:



连通图的生成树是它的极小连通子图, 有 n 个顶点和 $n-1$ 条边。

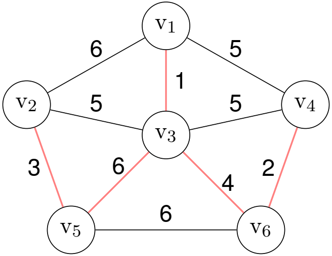
非连通图的连通分量

对于非连通图则遍历生成森林, 下图是深度优先遍历生成森林

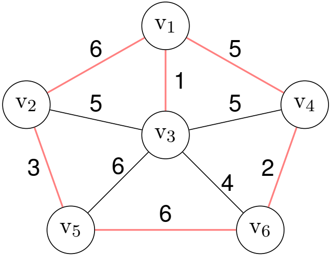


最小生成树

- 很多现实问题可以抽象成网。比如, 在 n 个城市之间建立通信网, 要求总成本最低。
- 上述问题是求连通网的最小生成树问题, 即挑选 $n-1$ 条不产生回路的最短边, 则总成本 (生成树的各边的权重之和) 达到最低。



总成本为 16



总成本为 23

最小生成树

利用最小生成树的如下性质：

假设 $G = (V, E)$ 是一个连通图,U 是顶点集 V 的一个非空子集。若 (u, v) 是一条具有最小权值 (代价) 的边, 其中 $u \in U, v \in V - U$, 则必存在一棵包含边 (u, v) 的最小生成树。

Prim MST I

```java
public class PrimMST {
  static int minimum(CloseEdge[] closeEdges) {
    int minValue = closeEdges[0].lowcost;
    int minVex = 0;
    for (int i = 1; i < closeEdges.length; i++) {
      int lowcost = closeEdges[i].lowcost;
      if (lowcost > 0 && (lowcost < minValue || minValue == 0)) {
        minValue = lowcost;
        minVex = i;
      }
    }
    return minVex;
  }

  static void mst() {
    CloseEdge[] closeEdges = new CloseEdge[Graph.vexnum];
    closeEdges[0] = new CloseEdge(0, 0);
```

Prim MST II

```
//初始化
for (int i = 1; i < Graph.vexnum; i++) {
  closeEdges[i] = new CloseEdge(0, Graph.arcs[0][i]);
}

//默认选中了第 0 个节点，处理剩余的 n-1 个
for (int i = 1; i < Graph.vexnum; i++) {
  int k = minimum(closeEdges);
  String fromVex = Graph.labels[closeEdges[k].adjvex];
  String toVex = Graph.labels[k];

  System.out.println(fromVex + " -> " + toVex);
  closeEdges[k].lowcost = 0;

  //处理每一个 Vertex，看能否通过 k 让代价更低
  for (int j = 0; j < Graph.vexnum; j++) {
```

Prim MST III

```
            if (Graph.arcs[k][j] < closeEdges[j].lowcost) {
              closeEdges[j].lowcost = Graph.arcs[k][j];
              closeEdges[j].adjvex = k;
            }
          }
        }
      }

      public static void main(String[] args) {
        mst();
      }

      public static class CloseEdge {
        public int adjvex;
        public int lowcost;

        public CloseEdge(int adjvex, int lowcost) {
```

Prim MST IV

```
      this.adjvex = adjvex;
      this.lowcost = lowcost;
    }
  }


  public static class Graph {
    public static int INFINITE = 10000;

    public static int vexnum = 6;

    public static String[] labels = new String[]{"v1", "v2", "v3",
      "v4", "v5", "v6"};

    public static int[][] arcs = new int[][]{
      {0, 6, 1, 5, INFINITE, INFINITE},
      {6, 0, 5, INFINITE, 3, INFINITE},
```

Prim MST V

```
        {1, 5, 0, 5, 6, 4},
        {5, INFINITE, 5, 0, INFINITE, 2},
        {0, 3, 6, INFINITE, 0, 6},
        {INFINITE, INFINITE, 4, 2, 6, 0}
      };
    }
  }
```

延伸阅读

Algorithms Course - Graph Theory Tutorial from a Google Engineer:

`https://www.youtube.com/watch?v=09_LlHjoEiY`

本章作业

1. 最小生成树的 Prim, Kruscal 算法
2. 最短路径的 Dijstra, Floyd 算法

- 编程实现上述算法 (务必认真写注释),
- 要求显示某图的最小生成树/某两点之间的最短路径;
- 基本要求：Prim, Kruscal 可以二选一, Dijstra, Floyd 可以二选一
- 优秀要求：四种算法都实现