

**作业3参考答案**

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.**

1．已知集合，集合，则（    ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】根据题意求集合，根据集合间的运算以及包含关系逐项分析判断.

【详解】由题意可得：，或.

可得，故B错误；

可得或，可知集合不是集合的子集，故AC错误；

可得，故D正确.

故选：D.

2．已知函数，则“”是“函数在上是单调函数”的（   ）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

【答案】A

【分析】对函数进行求导得，进而得时，，在上为增函数，然后判断充分性和必要性即可.

【详解】因为的定义域是，

所以，

当时，，在上为增函数，即在上是单调函数.

所以在上为单调函数，是充分条件；

反之，在上为单调函数或，不是必要条件.

故选：A.

3．某班有男生25人，女生20人，其中60%的男生和50%的女生都喜欢篮球运动，现从该班级随机抽取一名学生，已知该同学喜欢篮球运动，则该同学是男生的概率为（   ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据全概率公式以及条件概率公式即可求解.

【详解】记“喜欢篮球的同学”，“喜欢篮球是男生”，

故,

,

所以,

故选：C

4．已知，则的大小关系为（    ）

A． B．

C． D．

【答案】D

【分析】令，求导可得在上为减函数，可得结论.

【详解】.设，则，

当时，，所以在上为减函数，又，

所以，即.

故选：D.

5．已知离散型随机变量*X*服从二项分布，且，，则的最小值为（    ）

A． B． C．2 D．4

【答案】B

【分析】根据期望和方差的线性运算得到，再利用基本不等式的运用可求的最小值.

【详解】，，

，，又，解得，即，，当且仅当，又，即当时取等，

故选：B.

6．若函数恰有两个零点，则实数的取值范围为（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】根据题意，求得，分得和，求得函数 的单调性，以及最小值，结合，即可求解.

【详解】由函数，可得，

若，，在单调递增，此时至多有一个零点，舍去；

若，令，解得，

当时，，在单调递减；

当时，，在单调递增，

所以当时，函数取得极小值，也时最小值，

又由时，，且时，，

要使得函数恰有两个零点，则满足，即，

解得，所以实数的取值范围为.

故选：C.

7．将一颗骰子连续抛掷三次，向上的点数依次为，则的概率为（    ）

A． B． C． D．

【答案】D

【分析】取定中的一个值，考查另外两次抛掷骰子的样本点数，利用分类加法计数原理和古典概型概率公式计算即得.

【详解】考虑取定的值，分类统计事件“”所含的样本点数，将对应的值作为一个数组，列表如下：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | （1,1） | （1,2） | （1,3） | （1,4） | （1,5） | （1,6） |
| 2 | （2,1） | （2,2） | （2,3） | （2,4） | （2,5） | （2,6） |
| 3 | （3,1） | （3,2） | （3,3） | （3,4） | （3,5） | （3,6） |
| 4 | （4,1） | （4,2） | （4,3） | （4,4） | （4,5） | （4,6） |
| 5 | （5,1） | （5,2） | （5,3） | （5,4） | （5,5） | （5,6） |
| 6 | （6,1） | （6,2） | （6,3） | （6,4） | （6,5） | （6,6） |

第一类：时，满足“”的样本点有个；

第二类：时，满足“”的样本点有个；

第三类：时，满足“”的样本点有个；

第四类：时，满足“”的样本点有个；

第五类：时，满足“”的样本点有个；

第六类：时，满足“”的样本点有1个.

由分类加法计数原理，满足“”的样本点共有：个，

而一颗骰子抛掷一次有6种结果，抛掷三次有个样本点，

因结果有限，且每个样本点发生的可能性相等，故是古典概型.

则“”的概率为.

故选：D.

【点睛】思路点睛：本题主要考查计数原理和古典概型概率公式的应用，属于较难题.

因同时考虑抛掷三次骰子出现的不同结果较复杂，故可采取取定一次抛掷结果，分析讨论另外两次抛掷结果中符合题意的样本点，即可化繁为简，达到解题的目的.

8．对于函数，若存在实数，使，其中，则称为“可移倒数函”，为“的可移倒数点”.设，若函数恰有3个“可移1倒数点”，则的取值范围（    ）

A． B． C． D．

【答案】A

【分析】利用定义转化为求方程恰有3个不同的实根，再借助导数分段探讨零点情况即可.

【详解】依题意，，

由恰有3个“可移1倒数点”，得方程恰有3个不等实数根，

①当时，，方程可化为，解得，

这与不符，因此在内没有实数根；

②当时，，方程可化为，

该方程又可化为．

设，则，

因为当时，，所以在内单调递增，

又因为，所以当时，，

因此，当时，方程在内恰有一个实数根；

当时，方程在内没有实数根．

③当时，没有意义，所以不是的实数根．

④当时，，方程可化为，

化为，于是此方程在内恰有两个实数根，

则有，解得，

因此当时，方程在内恰有两个实数根，

当时，方程在内至多有一个实数根，

综上，的取值范围为．

故选：A

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：（1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；（2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；（3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围．

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.**

9．若，则（   ）

A．

B．

C．

D．

【答案】AD

【分析】利用赋值法求系数和，可判断ACD，利用指定项求系数可判断B.

【详解】令，得，A正确．

，B错误．

令，得，则，C错误．

令，得，

则，D正确．

故选：AD.

10．下列说法中正确的是（    ）

A．设和互为对立事件，则

B．若随机变量，且，则

C．若，则

D．若随机变量*X*的分布列为，则

【答案】ABC

【分析】利用条件概率的公式可判断A，利用二项分布的期望和方差公式可判断B，利用全概率公式可判断C，由超几何分布的期望公式可判断D.

【详解】对于A，由条件概率的公式可知，故A正确

对于B，因为，所以，

则，所以，

所以，故B正确

对于C，根据全概率公式，，

故，故C正确

对于D，由题意知，服从，，的超几何分布，所以，故D错误．

故选：ABC

11．已知，，且当时，则下列正确的是（   ）

A． B．当时，

C． D．

【答案】BCD

【分析】由可得函数周期为6，再根据周期函数性质可解.

【详解】∵，

∴，即，

两式相乘，

∵，∴，即，

∴，所以函数周期为6，故A错误；

当时，，

又，故B正确；

∵，

∴除以6余数为5，故，故C正确，

由题知，，

代入可求，

∴，



故D正确，

故选：BCD.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.**

12．若函数的导函数为偶函数，且，都有，则可以是 .（写出一个满足条件的函数解析式即可）

【答案】（答案不唯一）

【分析】先由为偶函数，得出的性质，进而不妨设为奇函数，再结合即可求出的一个周期，即可写出满足题意的解析式.

【详解】因为偶函数，则，即，

则，其中为常数，

不妨设，即为奇函数，

结合可得，，则，

则有一个周期为，

故可以为.

故答案为： （答案不唯一）

13．某地教育部门联合当地高校发起公益助教赠书行动.现安排卡车为乡村小学运送书籍，共装有16个纸箱，其中6箱数学书､6箱语文书､4箱物理书.由于山路崎岖，到达目的地时发现丢失一箱书籍，则丢失的一箱恰巧是物理书的概率为 ；若不知丢失哪一箱，则从剩下的15箱中任意打开两箱，结果发现都是数学书的概率为 .

【答案】 ##0.25 ##0.125

【分析】利用古典概率公式求得丢失物理书的概率；利用全概率公式求得答案.

【详解】依题意，丢失的一箱恰巧是物理书的概率为；

记事件“丢失数学书”，事件“任取两箱都是数学”，

则，，

所以所求概率.

故答案为：；

14．已知函数.

①当时，，记前项积为，若恒成立，整数的最小值是 ;

②对所有*n*都有成立，则的最小值是 .

【答案】 3 

【分析】①先得到，，故，构造，，求导得到其单调性，从而确定当时，，利用放缩和等比数列求和公式得到，求出，确定，整数的最小值为3；变形得到，令，求导得到函数单调性和最值，得到，故，得到答案.

【详解】，，，故，

设，，则，

故在上单调递减，

则，故当时，，

则

，

所以，

综上，，若恒成立，整数的最小值为3，

，

化简得，即，

令，，

当时，，

所以在上单调递减，

又，

所以，故，

解得，所以的最小值为.

故答案为：3，

【点睛】对于求不等式成立时的参数范围问题，一般有三个方法，一是分离参数法, 使不等式一端是含有参数的式子，另一端是一个区间上具体的函数，通过对具体函数的研究确定含参式子满足的条件.二是讨论分析法，根据参数取值情况分类讨论，三是数形结合法，将不等式转化为两个函数，通过两个函数图像确定条件.

**四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

15．已知函数是偶函数．

(1)求的值；

(2)若关于的不等式在上有解，求实数*m*的取值范围．

【答案】(1)1

(2)

【分析】（1）根据偶函数的性质求出参数的值，即可得到函数解析式，再代入计算可得；

（2）依题意关于的不等式在上有解，令，，利用作差法证明函数的单调性，即可得到在上的单调性，从而求出，即可得解.

【详解】（1）因为函数为偶函数，所以，

即，

所以，整理得恒成立，

所以，解得，所以，故．

（2）由（1）可得，关于*x*的不等式在上有解，

令，，取，

则．

因为，所以，，，，

所以，，即，

所以在上单调递增，

又在定义域上单调递增，因此在上单调递增．

令，，

因为函数与函数在上均单调递增，

所以在上单调递增，且，

所以，故实数的取值范围为．

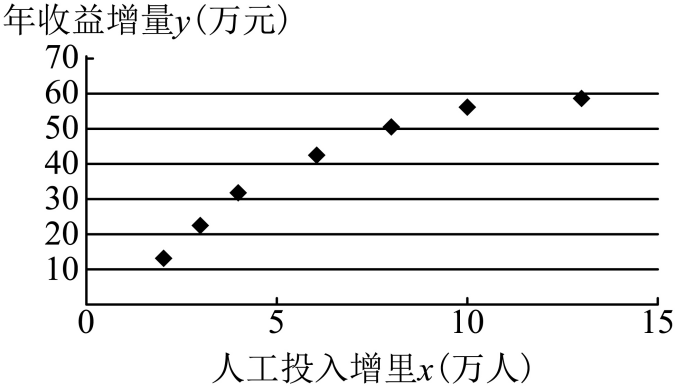
16．“南澳牡蛎”是我国地理标志产品，产量高、肉质肥、营养好，素有“海洋牛奶精品”的美誉.2024年该基地考虑增加人工投入，现有以往的人工投入增量*x*（人）与年收益增量*y*（万元）的数据如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 人工投入增量*x*（人） | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 13 |
| 年收益增量*y*（万元） | 13 | 22 | 31 | 42 | 50 | 56 | 58 |

该基地为了预测人工投入增量为16人时的年收益增量，建立了*y*与*x*的两个回归模型：

模型①：由最小二乘公式可求得*y*与*x*的线性回归方程：；

模型②：由散点图的样本点分布，可以认为样本点集中在曲线：的附近，对人工投入增量*x*做变换，令，则，且有，，，.



(1)（i）根据所给的统计量，求模型②中*y*关于*x*的回归方程（精确到0.1）；

（ii）根据下列表格中的数据，比较两种模型的决定系数，并选择拟合精度更高、更可靠的模型，预测人工投入增量为16人时的年收益增量.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 回归模型 | 模型① | 模型② |
| 回归方程 |  |  |
|  | 182.4 | 79.2 |

(2)根据养殖规模与以往的养殖经验，产自某南澳牡蛎养殖基地的单个“南澳牡蛎”质量（克）在正常环境下服从正态分布.购买10只该基地的“南澳牡蛎”，会买到质量小于20g的牡蛎的可能性有多大?

附：若随机变量，则，；

样本的最小二乘估计公式为：，，.

【答案】(1)（i）；（ii）答案见解析

(2)

【分析】（1）（i）根据公式计算得到回归直线方程；（ii）通过比较的大小可得到拟合效果的差异，将代入回归方程可得到预测值.

（2）根据正态分布的对称性得到，购买10只该基地的“南澳牡蛎”，其中质量小于20g的牡蛎为只，故，由间接法列式得到结果即可；

【详解】（1）（i）由，

有，

且，

所以模型②中关于的回归方程为.

（ii）由表格中的数据，有，即，

模型①的小于模型②，说明回归模型②刻画的拟合效果更好．

当时，模型②的收益增量的预测值为

（万元），

这个结果比模型①的预测精度更高、更可靠．

（2）由已知单个“南澳牡蛎”质量，则，

由正态分布的对称性可知，



，

设购买10只该基地的“南澳牡蛎”，其中质量小于的牡蛎为只，

故，

所以，

所以这10只“南澳牡蛎”中，会买到质量小于的牡蛎的可能性仅为．

17．已知函数．

(1)讨论的单调区间；

(2)证明：．

【答案】(1)当时， 单调递增；当时，单调递减

(2)证明见解析

【分析】（1）求导后，令导数等于0即可得出函数的单调区间；

（2）只需证明函数的最大值即可，从而可以构造一个关于的函数，结合导数来证明即可.

【详解】（1），，令，得．

当时，，在上单调递增；

当时，，在上单调递减.

（2）．

设，则，

令，得

当时，，单调递增；

当时，，单调递减．

所以，即，

由（1）知，，得证．

18．一个不透明的袋子中装有大小、质地相同的40个小球，其中10个红球，10个黄球，20个绿球，依次随机抽取小球，每次只取1个小球，完成下列问题：

(1)若取出的小球不再放回，

①求最后取完的小球是黄球的概率；

②求红球比其余两种颜色小球更早取完的概率；

③设随机变量为最后一个红球被取出时所需的取球次数，求；

(2)若取出的小球又放回袋中，直到取到红球就停止取球，且最多取次球，设随机变量为取球次数，证明：.

【答案】(1)①；②；③，

(2)证明见解析

【分析】（1）①最后一次取出的是黄色小球，利用古典概率可求；②利用全概率公式可求答案；③求出的所有取值，利用期望公式，结合组合数的性质可求答案.

（2）先求的分布列，写出期望，结合错位相减法可求答案.

【详解】（1）①最后取完的小球颜色是黄色，则第40次取球恰好为黄色小球，设事件*A*:第40次取球恰好为黄色小球.

则.

②设事件*B*:最后取完的小球是黄球，事件：最后取完的小球是绿球，事件*D*:红球比其余两种颜色更早取完.



;

③的可能取值为10,11,12，，40.

，

.

因为，所以.

（2）设，则的分布列为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |





两式相减可得



.

【点睛】关键点点睛：本题求解的关键有两个：一是利用组合数的性质进行转化求解；二是利用数列的错位相减法求和.

19．若定义域为*D*的函数满足：非空集合，，若，则称是一个*I*上的“非负函数”；若，则称是一个*I*上的“非正函数”．

(1)分别判断，是否为定义域上的“非负函数”，并说明理由．

(2)已知函数为上的“非负函数”，求*a*的取值范围．

(3)设，且，证明：．

【答案】(1)答案见解析

(2)

(3)证明见解析

【分析】（1）判断函数是否为“非负函数”，对，在定义域内找值使函数值为负来否定；对，先求导找单调性，再算最小值，若最小值非负则是“非负函数”.

（2）要让在为“非负函数”，需恒成立.先求，再通过多次求导分析单调性，确定单调性，根据最小值大于等于求范围.

（3）先由已知不等式变形得到的不等式，代入得到一系列不等式，再利用放缩法和裂项相消，将这些不等式相加得出结论.

【详解】（1）对于，

定义域，找一个值代入看函数值正负.

取，.因为在取合适值时能使，所以不是定义域上“非负函数”.

对于，

定义域，先求导.令，即，解得.

当，，递减；当，，递增.

所以在取最小值，故是上“非负函数”.

（2）要使在上为“非负函数”，则在恒成立.

求，令，，再令，.

当，，所以在递减，且.

当，，递增；当，，递减.

，，，所以在递减.

，解得.

（3）由，移项得，得.

把代入，有.

因为，两边乘再加，得.

当，；，；；，.

把这些不等式相加：

左边是，右边.

综上，证得.