

**作业4参考答案**

**一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．设全集，集合，，则（    ）

A． B．

C． D．

【答案】C

【分析】首先解一元二次不等式求出集合，根据对数函数的性质求出集合，再根据补集、交集的定义计算可得.

【详解】由，即，解得或，

所以或，

所以，又，

所以.

故选：C

2．若将大小形状完全相同的三个红球和三个白球（除颜色外不考虑球的其他区别）排成一排，则有且只有两个白球相邻的排法有（    ）

A．6 B．12 C．18 D．36

【答案】B

【分析】将白球分为两堆，并插空，求出答案.

【详解】除颜色外不考虑球的其他区别，将三个白球分成两堆，只有一种分法，

大小形状完全相同的三个红球排成一排也只有一种排法，三个红球共有4个空，

将白球插空有种可能.

故选：B.

3．已知命题：“，”为假命题，则实数的取值范围是（   ）

A． B．

C． D．

【答案】A

【分析】根据原命题为假命题得出其否定为真命题，再将问题转化为不等式恒成立问题，最后利用基本不等式求解实数的取值范围.

【详解】已知命题“”为假命题，根据特称命题的否定为全称命题，

可知其否定“”为真命题.

由，，移项可得，

因为，两边同时除以，得到在上恒成立.

在中，因为，所以2*x*和都是正实数，则，

当且仅当，即时等号成立.

因为在上恒成立，所以要小于等于的最小值，

即，

所以实数的取值范围是.

故选：A.

4．已知函数，则不等式的解集是（    ）

A． B． C． D．

【答案】C

【分析】构造函数，利用导数判断函数为单调递减，利用函数的奇偶性判断函数为奇函数，根据单调性与奇偶性将不等式化为，解不等式即可.

【详解】设，函数的定义域为，

则，所以函数在上为减函数，

又，

所以函数为奇函数，

所以，

即，即，

即，

所以，解得，

所以不等式的解集为.

故选：C.

5．设，随机变量的分布列如表．

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
| *P* |  |  |  |

则当*p*在内增大时，下列说法正确的是（    ）

A．一直减小 B．一直增大

C．先减小后增大 D．先增大后减小

【答案】D

【分析】设，求出随机变量的数学期望得方差，再利用二次函数的单调性可得答案.

【详解】设，随机变量的数学期望；

方差

，

所以时，单调递增，时，单调递减，

所以先增大后减小．

故选：D．

6．设为两个事件，已知，则（    ）

A．0.1 B．0.2 C．0.4 D．0.6

【答案】D

【分析】根据对立事件概率及全概率公式列式计算即得.

【详解】由 ，得，显然，

因此，所以.

故选：D

7．已知有10名学生参加AI知识竞赛的初赛，初赛共设置3道试题，且每道试题必须作答，至少答对2道试题，才能进入复赛，每人答对这3道试题的概率分别为，，，3道试题答对与否互不影响．记*n*人进入复赛的概率为，当取得最大值时，（   ）

A．6 B．7 C．8 D．9

【答案】B

【分析】根据相互独立事件的概率乘法公式计算出每个人进入决赛的概率，利用二项分布的概率公式写出的表达式，列出不等式组，结合组合数的阶乘公式进行求解即可.

【详解】依题意，设“答对第道题”；“某同学进入总决赛”，

则，，，

所以

，

所以，故，，

若最大，则，

故，即，

解得，因为，所以，

所以取最大值时的值为7.

故选：B

8．计算器计算，，，等函数的函数值，是通过写入“泰勒展开式”程序的芯片完成的. “泰勒展开式”的内容为：如果函数在含有的某个开区间内可以进行多次求导数运算，则当时，有，其中是的导数，是的导数，是的导数，…. 取，则精确到的近似值为（    ）

A．0.82 B．0.84 C．0.86 D．0.88

【答案】B

【分析】根据泰勒展开式，化简得到，求得的“泰勒展开式”，令，代入上式，进而求得的近似值．

【详解】根据题意，，

取时，可得，

则

，

令，代入上式可得，

所以．

故选：B

**二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．**

9．从0，1，2，3，4，5中任选4个不同的数字组成一个四位数，则下列说法正确的是（    ）

A．这样的四位数有300个

B．若这个四位数是偶数，则这样的四位数有156个

C．若0，1被选中，且0，1不相邻，则这样的四位数有72个

D．若这个四位数的个位、十位和百位上的数字之和为偶数，则这样的四位数有144个

【答案】ABD

【分析】根据排列组合，即可结合选项逐一求解.

【详解】对于A，符合条件的四位数有个，A正确，

对于B，符合条件的奇数有,故偶数有个，B正确，

对于C，先从剩下4个数字选择两个数字，共有，若1在千位，则剩余数字的排列有种，

若1不在千位，则有，故总的四位数有，C错误，

对于D，若千位为1，3，5时，且个位、十位和百位上的数字均为偶数，此时有种，

若千位为1，3，5时，且个位、十位和百位上的数字有一个位置为偶数，另外两个位置的数字为奇数，此时有种，

若千位为2或4时，个位、十位和百位上的数字有一个位置为偶数，另外两个位置的数字为奇数，

此时有种，故符合条件的四位数共有，D正确，

故选：ABD

10．下列说法正确的是（   ）

A．已知为随机事件*B*的对立事件，，，则

B．已知，则

C．随机变量*X*服从正态分布，若，则的最小值为9

D．

【答案】BD

【分析】根据条件概率和对立事件概率性质,根据二项式定理的性质,对其求导构造函数,正态分布密度曲线的性质,以及构造二项式的乘积,找到一个特殊项证明等式,分别判断选项正误.

【详解】已知对立,即,所以,因为,所以A错误.

,对两边求导得,

当时，,化简得,

的一次项为,所以,所以B正确.

根据正态分布的对称性可知,当,,所以对通分得,

设,当时,由最大值,为,所以最小值为,故C错误.

二项式,

,

则,

展开式中项系数为0,在中是由和相乘得到的,

当为奇数时,设,则,

则项的系数为,

其中项系数为,

由可知,

所以.所以D正确.

故选:BD.

11．定义在上的函数满足，且为奇函数，则下列结论正确的是（    ）

A．函数关于点对称

B．函数关于直线对称

C．函数的周期为4

D．

【答案】AC

【分析】利用复合函数的奇函数定义及复合函数的导数法则，结合函数的对称性及周期性即可求解.

【详解】对于A，因为为奇函数，所以，

所以函数关于点对称，故A正确；

对于B，因为，所以，

所以，

又，所以，

所以，即，

所以函数的图象关于点对称，故B错，

对于C，因为，所以，所以，为常数，

因为，所以，所以，

取，可得.所以，

由，得，

所以，即，

所以，所以函数是周期函数，且周期为，

又，即，

所以函数也是以周期得周期函数，故C正确；

对于D，因为，，

所以，即，

所以，则，

所以，

，无法确定该值，故D错误.

故选：AC.

**三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．**

12．的展开式中的系数为 .

【答案】

【分析】根据二项式展开式的通项,求出指定项的系数.

【详解】展开式为,当时,得,

对于二项式的展开式为,当时得.

则含的展开式为.

故答案为:.

13．从原点出发的某质点，按向量移动的概率为，按向量移动的概率为，设可达到点的概率为，则的值为 ， （用含的式子表示）.

【答案】 ； 

【分析】利用分类互斥事件求，利用递推思想，结合构造法和累加法来求.

【详解】空1：，

到达有两种可能：第一种是一次移动2个单位到达，

第二种是每次向上移动1个单位，共移动2次到达，故；

空2：到达点有两种情况：

①从点按向量移动，即

②从点按向量移动，即

所以，即

则数列是以为首项，为公比的等比数列，



所以



…



，

两边分别累加得

，，

因为满足上式，所以.

故答案为：；.

14．已知函数，若函数仅有一个零点，则实数*a*的取值范围是 .（结果用区间表示）

【答案】

【分析】分类求导数确定函数的单调性，极值，函数的变化趋势，作出大致图形，再作出直线，观察直线与函数图象有1个交点得的范围．

【详解】时，，求导得，

当时，，当时，，

函数在上递增，在上递减，且此时，

时，，求导得，

当时，，当时，，

函数在上递增，在上递减，且此时，

因此函数在处取得极小值，在处取得极大值，

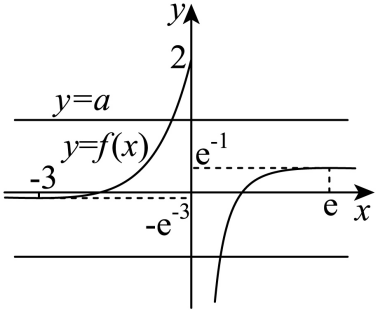
又，，当时，，

而函数在上的取值集合为，因此在上的取值集合为，

函数的图象如图，观察图象得当或时，直线与的图象有1个交点，

所以实数*a*的取值范围是．

故答案为：



**四、解答题：本题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

15．已知函数.

(1)解方程；

(2)判断函数的奇偶性，并说明理由；

(3)若函数在上只有一个零点，求的取值范围.

【答案】(1)

(2)偶函数，理由见解析

(3)2或

【分析】（1）证明即可求解；

（2）求出定义域，根据奇偶性的定义判断即可；

（3）把函数零点问题转化为方程根的问题，结合换元法和判别式进行求解.

【详解】（1）由得，

所以，所以，

令，解得，所以；

（2）定义域为，关于原点对称，

，

所以函数为偶函数；

（3）函数有唯一零点等价于方程有唯一解，

即方程有唯一解，

整理得，

令，即方程有唯一正数根，

①若，此时符合题意；

②若，则

当时，符合题意，

当时，不合题意，舍去，

当时，，方程有两相异实根，符合题意，

当且时，则，

只需，

所以(舍去)，

综上，实数的取值范围是2或.

16．已知函数*，* ．

(1)求的单调区间；

(2)若恒成立，求的取值范围．

【答案】(1)增区间为，减区间为

(2)

【分析】（1）确定定义域，求导函数，令解出不等式即可求单调区间；

（2）法一：参变分离得，再对函数进行求导分析，根据其单调性确定最值即可解得.

【详解】（1）定义域为，，

令得，令得，

所以的增区间为，

减区间为．

（2）法1： 因为，所以，

即，

令，

因为在单调递增且．

所以当时，，在单调递减；

当时，，在单调递增；

故当时，，

所以．

17．研究表明，春季早晚温差大，由于个人体质不同，可能会导致感冒患病．某医学研究小组为了解30~40岁人群的体质健康是否与性别有关，在3月感冒易发季节对某社区中该年龄段的60位居民进行了检测，将检测结果制成如下2×2列联表：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 性别 | 健康状况 | | 合计 |
| 不感冒 | 感冒 |
| 男 | 12 | 18 | 30 |
| 女 | 6 | 24 | 30 |
| 合计 | 18 | 42 | 60 |

(1)在上述不感冒的人群中，按照性别采用分层抽样的方法抽取9人，再从这9人中随机选取4人访谈，记参与访谈的男性人数为，求的分布列和期望；

(2)依据小概率值的独立性检验，能否据此推断30~40岁人群的体质健康与性别有关？若把表中所有数据扩大到原来的10倍，在相同的检验标准下，再用独立性检验判断体质健康与性别的关联性，结论还一样吗？请解释原因．

附录：，其中．

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.001 |
|  | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 10.828 |

【答案】(1)分布列见解析，

(2)答案见解析

【分析】（1）利用分层抽样的方法抽取人，则抽取男性人，女性 人，随机变量的所有取值为，求出对应概率，即可列出分布列，求出期望；

（2）根据列联表中的数据， 经计算得到，再和参考数据表中对应的数据比较，即可得到结论.

【详解】（1）样本中不感冒的男性有人，女性有 人，比例为，

按照性别采用分层抽样的方法抽取人，则抽取男性人，女性 人，

所以随机变量的所有取值为.

则 ， ， ，

，

所以的分布列为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |  |

所以.

（2）提出统计假设：岁人群的体质健康与性别无关.

根据列联表中的数据，经计算得到，

因为，假设成立，

所以依据小概率值的独立性检验，不能据此推断岁人群的体质健康与性别有关.

如果把所有数据都扩大10倍后，

，，

所以依据小概率值的独立性检验，能据此推断岁人群的体质健康与性别有关.

与之前的结论不一样，原因是每个数据都扩大为原来的10倍，相当于样本量变大为原来的10倍，导致推断结论发生了变化.

18．定义：若函数与在公共定义域内存在，使得，则称与为“契合函数”，为“契合点”．

(1)若与为“契合函数”，且只有一个“契合点”，求实数*a*的取值范围．

(2)若与为“契合函数”，且有两个不同的“契合点”．

①求*b*的取值范围；

②证明：．

【答案】(1)；

(2)①；②证明见解析.

【分析】（1）由给定的定义把问题转化为方程有唯一零点，再构造函数，利用导数探讨函数的性质求解即可.

（2）①根据给定的定义将问题转化为方程有两个不同的零点求解；②由①中信息，利用极值点偏移求解.

【详解】（1）由与为“契合函数”，得，使

，令，依题意，方程有唯一解，

求导得，当时，；当时，，

函数在上单调递增，在上单调递减，则，

当时，，时，，，

又和只有一个“契合点”，则直线与函数的图象只有1个交点，则或，

所以实数*a*的取值范围是.

（2）①由与为“契合函数”，且有两个不同的“契合点”，

得存在，使，

即关于的方程有两个相异正根，令函数，

求导得，

由，得，得当时，；当时，，

则函数在上递增，在上递减，则，

当从大于0的方向趋近于0时，；当时，，

因此当时，直线与函数的图象有两个不同交点，

所以*b*的取值范围是.

②由（1）知，当时，，令，

求导得，

令，求导得，

当时，，函数在上单调递减，，，

函数在上单调递减，，因此当时，，

而，则，又，于是，

又，函数在上递减，则，

所以.

19．AI机器人，即人工智能机器人，是一种基于人工智能（AI）技术的机器人，目前应用前景广阔．我国某企业研发的家用AI机器人，其生产共有四道工序，前三道工序的生产互不影响，第四道工序是出厂检测工序，包括智能自动检测与人工抽检，其中智能自动检测为次品的会被自动淘汰，合格的进入流水线进行人工抽检.已知该家用机器人在生产中前三道工序的次品率分别为，，.

(1)已知某批次的家用机器人智能自动检测显示合格率为99%，求在人工抽检时，工人抽检一个家用AI机器人恰好为合格品的概率；

(2)该企业利用短视频直播方式扩大产品影响力，在直播现场进行家用AI机器人推广活动，现场人山人海，场面火爆，从现场抽取幸运顾客参与游戏，游戏规则如下：参与游戏的幸运顾客，每次都要有放回地从10张分别写有数字1～10的卡片中随机抽取一张，指挥家用机器人运乒乓球，直到获得奖品为止，每次游戏开始时，甲箱中有足够多的球，乙箱中没有球，若抽的卡片上的数字为奇数，则从甲箱中运一个乒乓球到乙箱；若抽的卡片上的数字为偶数，则从甲箱中运两个乒乓球到乙箱，当乙箱中的乒乓球数目达到9个时，获得奖品优惠券400元；当乙箱中的乒乓球数目达到10个时，获得奖品大礼包一个，获得奖品时游戏结束.

①求获得“优惠券”的概率；

②若有32个幸运顾客参与游戏，每人参加一次游戏，求该企业预备的优惠券总金额的期望值.

【答案】(1)；

(2)①；②8525元.

【分析】（1）根据题意可得三道工序后是合格品的概率为，再利用条件概率公式求出在家用机器人智能自动检测合格的前提下人工抽检合格的概率为；

（2）①根据题意抽到奇数和偶数的概率都为，设乙箱中有个球的概率为，由获奖规则并利用等比数列前项和公式可得，计算出获得“优惠券”的概率为；

②易知参与游戏的32个幸运顾客中获得优惠券的人数，由二项分布求出期望值为8525元.

【详解】（1）设家用机器人经过前三道工序后是合格品的概率为，

则，

设家用机器人智能自动检测合格为事件，人工抽检合格为事件，则

，，

所以，

即在人工抽检时，工人抽检一个家用AI机器人恰好为合格品的概率约为；

（2）①设乙箱中有个球的概率为（），抽到奇数和偶数的概率都为，

若第一次抽到奇数，家用机器人运1个乒乓球，概率为，即，

若要使乙箱中有2个球，有两类情况，所以，

乙箱中有（）个球的情况有：

ⅰ家用机器人已运个球，又抽出偶数，其概率为；

ⅱ家用机器人已运个球，又抽出奇数，其概率为；

所以，且，

所以，所以，

即当时，数列是公比为的等比数列，

所以，

又，，所以当时也成立，

所以，，……，，

上述各式相加得

，

又，所以，（），

经检验，当时上式也成立，

所以（，），

所以，即获得“优惠券”的概率为；

②设参与游戏的32个幸运顾客中获得优惠券的人数为，则，

所以的期望，

设优惠券的总金额为元，则，

所以32个幸运顾客中获得优惠券总金额的期望值（元），

故该企业预备的优惠券总金额的期望值为8525元.

【点睛】方法点睛：在求解概率统计与数列结合的问题时，找到与（或）之间的关系，再利用数列的递推关系求出对应的通项公式即可求得出相应概率.