

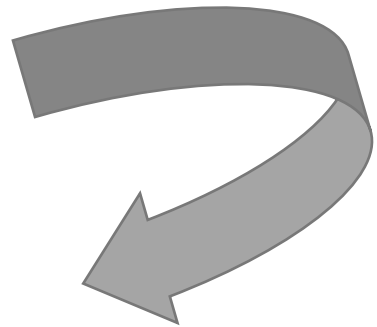
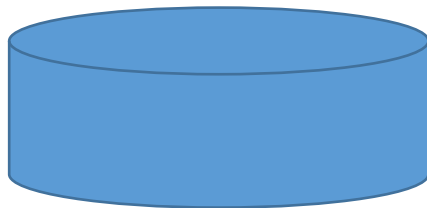
物理探究實作競賽：圓柱體骰子

一、賽題分析

根據此次賽題，我們定義此圓柱形骰子為三面骰子，分為側面、頂面、底面，此賽題須使此三面出現的機率皆相同，才能稱作一公平的骰子。因此我們深入探討圓柱形骰子的物理及幾何特色，並了解到圓柱形的角度關係會影響到此圓柱形骰子的重心分布，進而影響到側面、頂面、底面三面出現的機率，因此我們決定先進行理論推演，找出能使三面出現機率一樣的長寬比，再實際用不同半徑之圓柱體切割模型，最後投擲骰子以驗證理論正確與否。

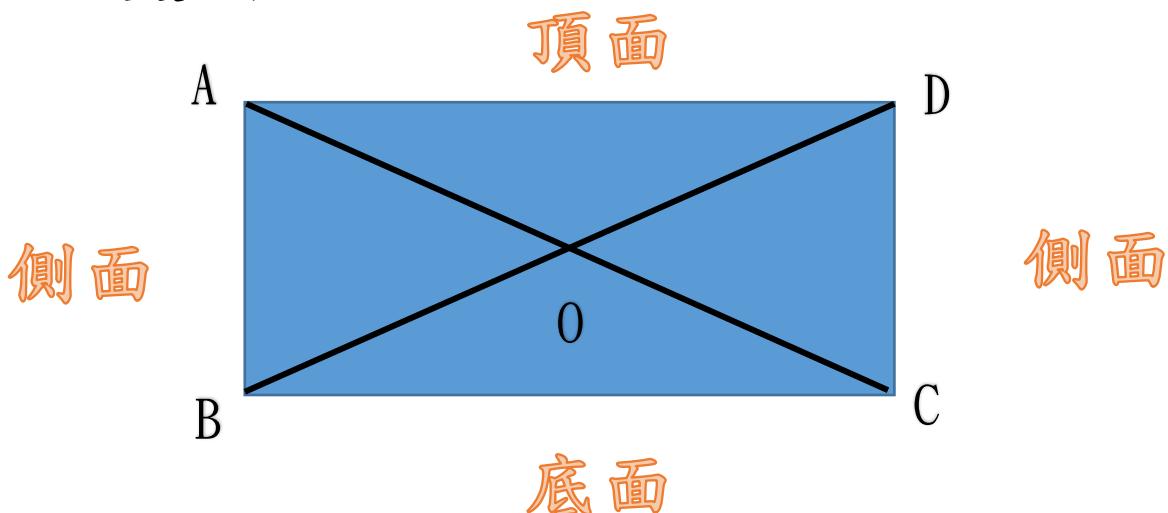
二、科學原理

(一)物理模型:圓柱形骰子



(二)圓柱形骰子的科學概念、理論和原理:

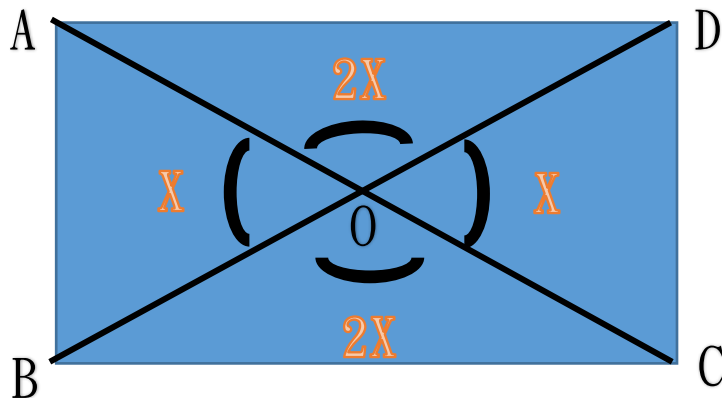
1. 取出圓柱體的側面(長方形)，將長方形的頂點依序標上 A、B、C、D，連接線段 AC 與線段 BD，並交於 O 點。



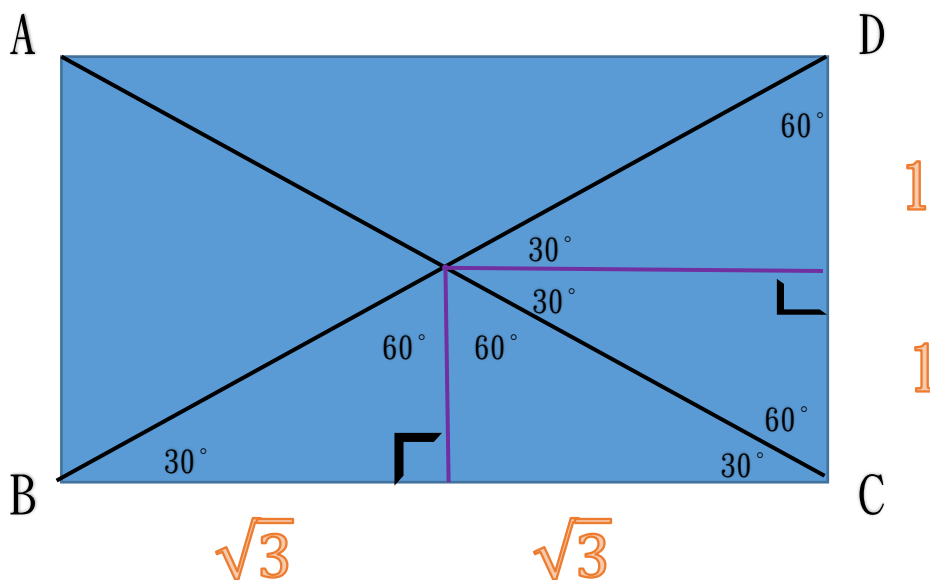
2. 底面、側面、頂面出現的機率取決於重心的分布，故需分析重心分布在何角度時會出現哪一面

- 當重心落於 $\angle AOD$ 內會出現底面
- 當重心落於 $\angle BOC$ 內會出現頂面
- 當重心落於 $\angle AOB$ 及 $\angle COD$ 內會出現側面
- 如果三面出現機率要相等則 $\angle AOD = \angle BOC = \angle AOB + \angle COD$

3. 了解角度後就可以與長度做換算



因為 $\angle AOD + \angle BOC + \angle AOB + \angle COD = 360^\circ$
 故 $2X + 2X + X + X = 6X = 360^\circ$
 即 $X = 60^\circ$



4. 依據 30° 、 60° 、 90° 三角形三邊長比例分別為 $1:\sqrt{3}:2$

5. 最後我們可以導出一個能使三面出現的機率皆相同的公式：

圓柱體上下面的圓形直徑:側面長度(柱高) $=\sqrt{3}:1$

三、實驗設計與規劃

根據上述的物理原理及概念，我們找出欲使三面出現機率相同須有的長寬比，我們取了四種不同半徑的圓柱體做實測，若實驗結果符合預期，即驗證了我們的理論。

(一)第一部分：驗證長寬比理論

a. 變因

1. 控制變因：丟下高度、投擲方式、圓柱體長寬比
2. 操縱變因：圓柱體種類(粗熱熔膠、細熱熔膠、粗橡皮擦、細橡皮擦)
3. 應變變因：圓柱體頂面、底面、側面三面出現次數

b. 實驗流程

1. 依公式 $2\sqrt{3}:2$ =所求圓柱的圓形直徑:側面長度(柱高)，切割四種圓柱體，每種圓柱體切割五塊，共 20 塊骰子。
2. 將骰子置於實驗裝置(見第 5 點)上方，頂面朝上放開始其自由落下置桌面上。
3. 每塊骰子進行 100 次投擲，紀錄每塊圓柱體頂面、底面、側面出現次數(註：撞到器材壁之實驗結果不採計)。

(二)第二部分：延伸探討不同接觸(紙張、桌面、不織布)對骰子結果影響

a. 變因

1. 控制變因：丟下高度、投擲方式、圓柱體長寬比
2. 操縱變因：接觸面種類種類(桌面、紙張、不織布)
3. 應變變因：圓柱體頂面、底面、側面三面出現次數

b. 實驗流程

1. 在不同種類的接觸面重複投擲
2. 記錄出記錄出在紙張、桌面、不織布，每塊圓柱體頂面、底面、側面出現次數(註：撞到器材壁之實驗結果不採計)。

(三)依據變因提出研究問題與假設：

a. 研究問題：

1. 在不同的底面積的情況是否影響其機率
2. 不同圓柱體材質是否影響其機率
3. 不同接觸面材質是否影響其機率

b. 研究假設：

1. 底面積較小的情況下，因為高度較小，使得側面機率降低
2. 當圓柱體材質的落地彈跳高度較高時，其機率較遠離 $1/3$
3. 當接觸面材質摩擦係數較大時，其機率較為符合

(四)針對研究假設設計實驗：

實驗組與控制組的確定：

第一部分：驗證長寬比理論

實驗組：半徑大小

控制組：投擲高度

第二部分：延伸探討不同圓柱體材質面對骰子結果影響

實驗組：圓柱體材質的種類

控制組：投擲高度

第三部分：延伸探討不同接觸面對骰子結果影響

實驗組：接觸面的種類

控制組：投擲高度

(五)器材的架設與測量：

為模擬一般擲骰子情況，我們利用紙箱製作長 27.5 公分、寬 16.5 公分、高 11.4 公分的平台，以固定投下高度，並於頂部切出一直徑為 2.2 公分(約十元硬幣大小)的圓形洞口，以固定骰子被投下位置，目的是要控制投擲的高度要為一致。

四、實驗結果與分析

(一)製作骰子:

1. 依上述理論得到球圓柱的圓形直徑:側面長度(柱高)為 $\sqrt{3}:1$ 。
2. 依給定之不同材料的直徑切出符合 $\sqrt{3}:1$ 的圓柱體高如下:
(註:使用測量工具為工業用游標尺,精確度 0.01cm)

表 1:直徑與柱高

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
2 r (直徑)(cm)	1.10	0.70	0.94	0.62
H (柱高)(cm)	0.64	0.40	0.54	0.36

(二)實驗結果:

1. 相同材質的骰子製作 5 顆,每顆骰子實驗 100 次,合計 500 次。
2. 所有骰子所落下高度均為 11.4cm。在不同接觸面得到的實驗數據如下:

表 2:接觸面為桌面(出現次數)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	184	136	154	190
底面	170	135	146	170
側面	146	229	200	140

表 3:接觸面為紙張(出現次數)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	147	117	143	149
底面	114	111	162	135
側面	239	272	195	216

表 4:接觸面為不織布(出現次數)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	150	127	166	176
底面	146	125	140	167
側面	204	248	194	157

3. 原先預期頂底側面出線機率各為 $1/3$ ，測試 500 次，因此頂面、底面、側面出現次數理論上應該各為 166 次。在此將各項實驗數據減去期望值 166 以觀察離均差的變化，結果如下列表格：

表 5:接觸面為桌面（出現次數-期望值）

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	18	-30	-12	24
底面	4	-31	-20	4
側面	-20	63	34	-26

表 6:接觸面為紙張（出現次數-期望值）

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	-19	-49	-23	-17
底面	-52	-55	-4	-31
側面	73	106	29	50

表 7:接觸面為不織布（出現次數-期望值）

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面	-16	-39	0	10
底面	-20	-41	-26	1
側面	38	82	28	-9

4. 在不同接觸面三面出現的機率數據如下：

表 8:接觸面為桌面（機率）(%)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面(%)	36.8	27.2	30.8	38.0
底面(%)	34.0	27.0	29.2	34.0
側面(%)	29.2	45.8	40.0	28.0

表 9:接觸面為紙張（機率）(%)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面(%)	29.4	23.4	28.6	29.8
底面(%)	22.8	22.2	32.4	27.0
側面(%)	47.8	54.4	39.0	43.2

表 10:接觸面為不織布（機率）(%)

	粗熱熔膠	細熱熔膠	粗橡皮擦	細橡皮擦
頂面(%)	30.0	25.4	33.2	35.2
底面(%)	29.2	25.0	28.0	33.4
側面(%)	40.8	49.6	38.8	31.4

(三)分析數據:

因為每次投擲的角度以及力道不同,還有掉落撞到箱子導致刪除的實驗數據,所以實驗結果略微偏離理論值的每面機率三分之一。

1. 在底面積較大的情況下,側面機率為 0.3927,而在底面積較小的情況下,側面機率為 0.4207,而原先假設為底面積較小的情況下,因為高度較小,使得側面機率降低,與之相反,數據呈現面積較小的情況下,側面機率較高。
2. 而橡皮擦的部分相對於熱熔膠來說機率較接近 $1/3$,但橡皮擦落地彈跳高度較熱熔膠高,與原先假設當圓柱體材質的落地彈跳高度較高時,其機率較遠離 $1/3$ 不同,可能原因是熱熔膠較難將表面磨平,使得機率高於 $1/3$ 許多。
3. 在接觸面為桌面的情況下,側面的機率為 0.3575,在接觸面為紙張的情況下,側面的機率為 0.461,在接觸面為不織布的情況下,側面的機率為 0.4015,與原先假設接觸面材質摩擦係較大時,其機率較為符合有很大的不同,在桌面為三個材質中摩擦係數最小,機率卻最接近 $1/3$,而紙張為三個材質中摩擦係數為第二,機率卻最遠離 $1/3$ 。

(四)歸納實驗結果

1. 在只考慮圓柱體大小的情況下,當圓柱體底面積越小時,骰子結果為側面的機率更高。
2. 骰出側面機率與接觸面材質微乎其微。

(五)實驗結果符合科學理論

當投擲圓柱形骰子時,我們的實驗結果期望值為 166 次底面、頂面及側面(每面機率各為 $1/3$),而我們的數據算 很接近 $1/3(33\pm 7\%)$,因此以我們推論出來的科學原理,是能與能與實驗結果相吻合的。還有,以每種材質的接觸面有 2000 個樣本空間來看,對我們而言已經算很龐大了,所以我們推論我們實驗結果符合科學理論。

五、誤差分析

(一)誤差：

1. 二次彈跳, 骰子和接觸面產生彈性碰撞
2. 理論上重心垂直於接觸面時, 骰子就會停止, 但骰子仍會繼續滾動
3. 人工切割的圓柱體骰子比例上會和理論值有不小的差異
4. 使用熱熔膠當材質難切割, 使得骰子的頂面和底面不平形而導致實驗數據有誤差

(二)改進方式：

1. 降低投擲高度避免出現二次彈跳並在彈性係數較小的平面進行實驗
2. 在摩擦力較大之平面投擲骰子避免骰子不斷滾動
3. 用可固定式的尺以計算後的數值四捨五入至小數後第2單位 (0.01cm)進行切割, 達成切割完美的圓柱形骰子
4. 可以利用更先進的儀器或著其他材質來替代

六、結論

這次的圓柱體骰子議題分析上，我們為了探討如何讓圓柱體骰子的三面在骰出後機率一樣，利用角度與重心來分析出圓柱體骰子的模型，最終分析出圓柱的圓形直徑:側面長度(柱高)= $\sqrt{3}$:1這樣的公式，而我們透過一種情況下五顆骰子各實驗 100 次，總計實驗了 6000 次，得到的結論如下：

1. 在只考慮圓柱體大小的情況下，當圓柱體底面積越小時，骰子結果為側面的機率更高。
2. 骰出側面機率與接觸面材質無關。

並推論出為何實驗數據與假設有這麼大的區別，在第一個假設：「底面積較小的情況下，因為高度較小，使得側面機率降低」中，因為底面積小的圓柱體骰子重量更輕，使得其更容易反轉成側面，在第二個假設：「當圓柱體材質的落地彈跳高度較高時，其機率較遠離 1/3」中，實驗數據卻顯示橡皮擦的部分相對於熱熔膠來說機率較接近 1/3，推論是因為熱熔膠較難將表面磨平，使得機率高於 1/3 許多，在第三個假設所進行的比較則發現，骰出側面機率與接觸面材質微乎其微，並不會因為其接觸面摩擦係數較大而機率較接近 1/3。針對以上得出結果最終得出結論：

1. 此次實驗最大誤差便是骰子的模型製作不善
2. 在 $\sqrt{3}$:1=圓柱體的圓形直徑:側面長度(柱高)在這個模型下理論上為最能使骰子公平的模型，最終數據也十分接近 1/3(33%±7%)
3. 骰出側面機率與接觸面材質兩者關係不大

七、實驗心得

(一)改進實驗設計之想法：

1. 在一個彈性系數為 0 的平面上進行, 使骰子不會有多餘的滾動
2. 以機器固定骰子, 防止落下距離每次的高度不同, 以及人工投擲的施力差異
3. 透過精準的機器切割完美比例的圓柱體骰子

(二)完成探究歷程的感想：

從這次的物理探究實作複賽中，我們學到了理性溝通、團隊以及耐心的重要性。在這次比賽之前，我們本是素不相識的五個人，加上緊迫的時間限制以嚴峻的疫情，都強烈地考驗著我們要完成這次比賽的決心。經過線上漫長地溝通及後，我們相約時間出來製作實驗。

然而，光是賽題分析和科學原理花了我們將近 7 小時時間，還有算出半徑和柱高的比例、重心，我們也討論了很久，最終算出半徑和柱高的比例，但半徑忘了乘以 2，結果切出的柱高都是我們的 2 倍，因此我們又重新測量和切割，切到材料都快沒了，甚至有組員切到手受傷，但我們仍然沒有就此放棄；而做了無數次嘗試及改變就是為了讓實驗誤差小一點。

因此，我們從中領悟到錯誤實驗是會難免的，但重要的是我們必須發揮科學人的精神，在一次次的失敗錯誤當中分析出是什麼原因所導致的並鍥而不捨的調整，直到達成我們理想中的實驗結果。