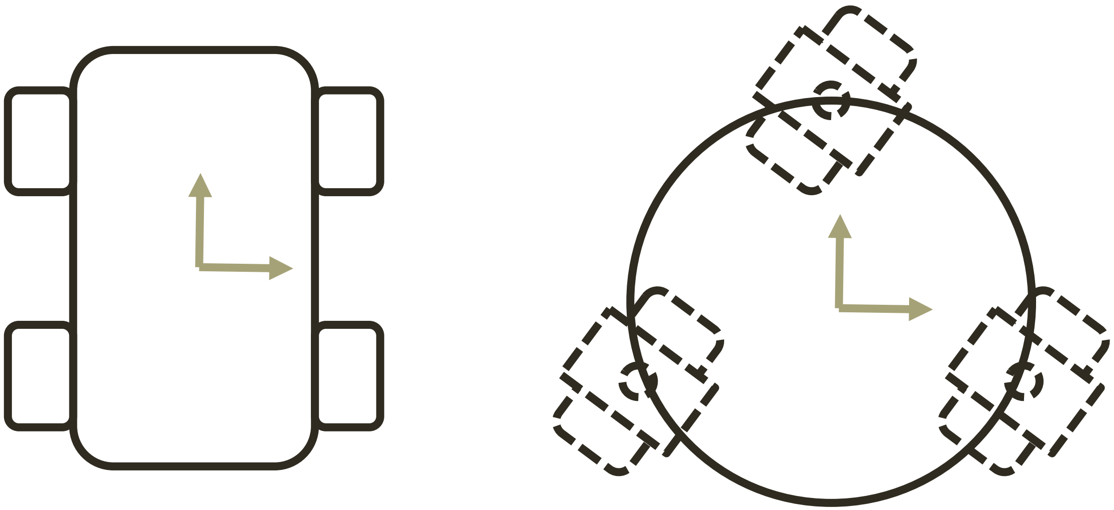
Modelo cinemático del omnidireccional

Dr. José de Jesús Hernández Barragán
josed.hernandezb@academicos.udg.mx

Introducción

Los robots móviles omnidireccionales están conformados por ruedas no convencionales que les permiten desplazarse a cualquier dirección en el plano.



Existes diferentes configuraciones, por ejemplo utilizando 3 o 4 ruedas, esto le permite una buena maniobrabilidad.

Introducción (continuación)

Además, con este tipo de móviles podemos controlar las velocidades lineales $\dot{x}$ y $\dot{y}$, así como la velocidad angular $\dot{\theta}$.

4 ruedas

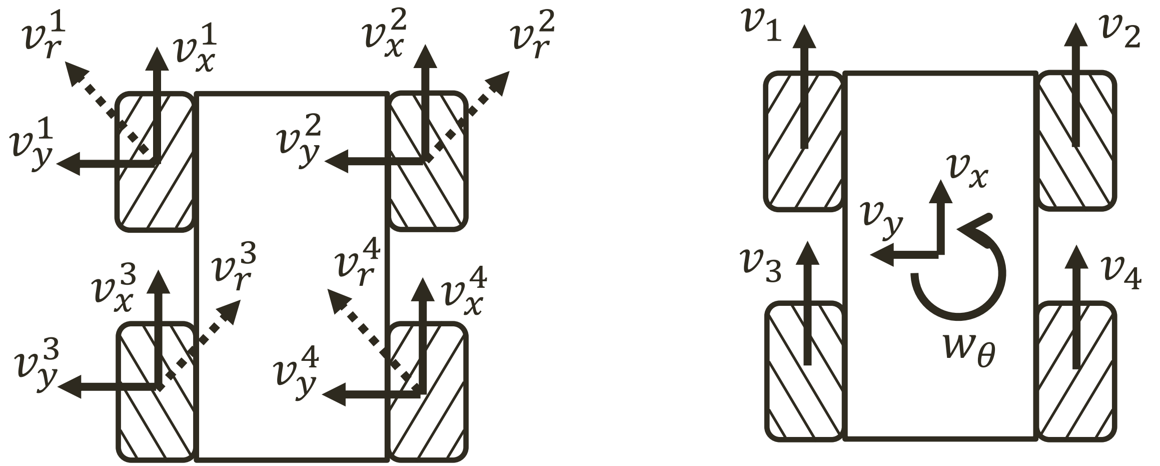
3 ruedas

En las siguientes diapositivas introduciremos el modelo cinemático de ambos robots móviles omnidireccionales.

4 ruedas, imagen recuperada de: electan.com/chasis-robot-omnidireccional-mecanum-4wd-p-6278.html
3 ruedas, imagen recuperada de: amazon.es/Milageto-3WD-Omni-Wheels-Robot/dp/B089H1LZZW

Modelo cinemático

El siguiente esquema ilustra un robot móvil omnidireccional de 4 ruedas.



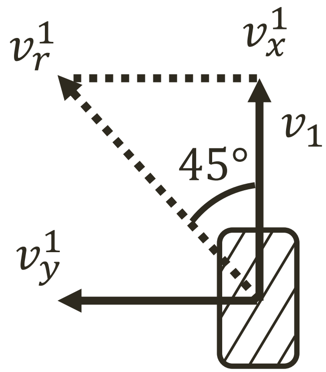
Modelo cinemático (continuación)

En la figura anterior, tenemos:

- v_i son las velocidades lineales de actuación de cada rueda i
- v_x, v_y y w_θ son las velocidades que se producen en el marco de referencia local
- v_x^i, v_y^iy v_r^i son las velocidades lineales que se producen en el eje coordenado de cada rueda i

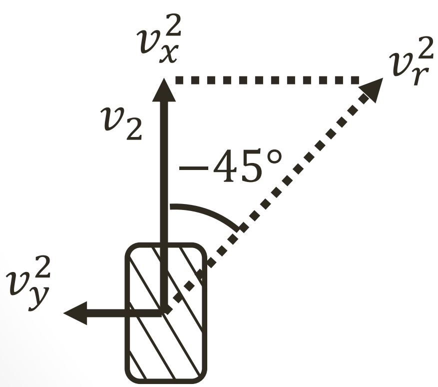
Modelo cinemático (continuación)

Respecto a los marcos de cada rueda tenemos lo siguiente:



$$v_x^1 = v_1 + v_r^1 \cos(45°)$$
$$v_y^1 = v_r^1 \sin(45°)$$

$$v_x^4 = v_4 + v_r^4 \cos(45°)$$
$$v_y^4 = v_r^4 \sin(45°)$$

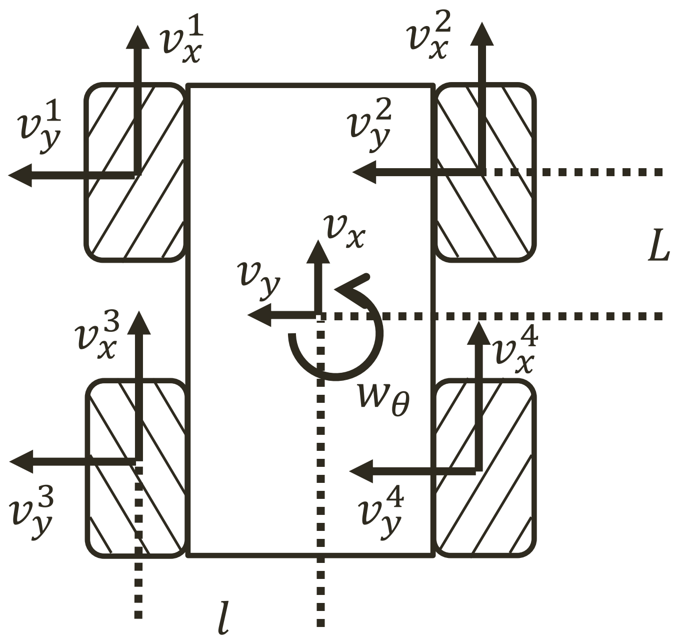


$$v_x^2 = v_2 + v_r^2 \cos(-45°) = v_2 + v_r^2 \cos(45°)$$
$$v_y^2 = v_r^2 \sin(-45°) = -v_r^2 \sin(45°)$$

$$v_x^3 = v_3 + v_r^3 \cos(-45°) = v_3 + v_r^3 \cos(45°)$$
$$v_y^3 = v_r^3 \sin(-45°) = -v_r^3 \sin(45°)$$

Modelo cinemático (continuación)

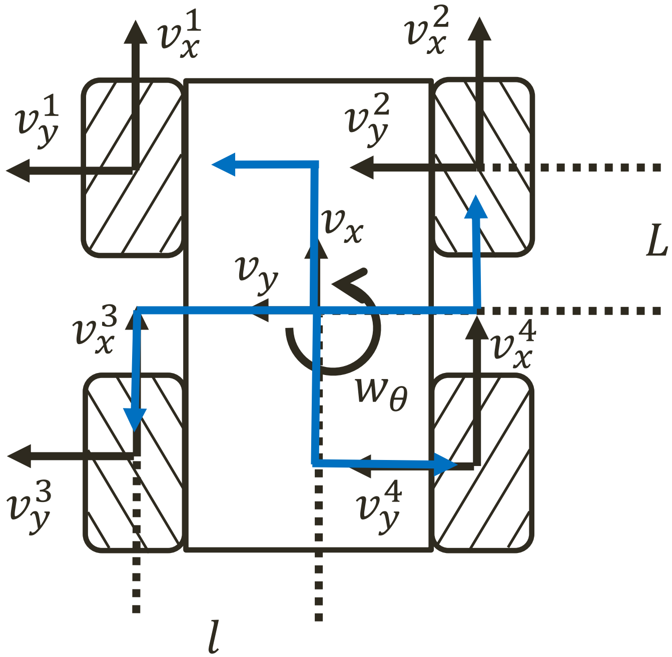
Respecto al marco de referencia local tenemos lo siguiente:



L y l son la medida del centro del robot al centro de las ruedas, en las direcciones v_x y v_y respectivamente.

Modelo cinemático (continuación)

Tomando en cuenta las velocidades del marco de referencia local, tenemos lo siguiente:

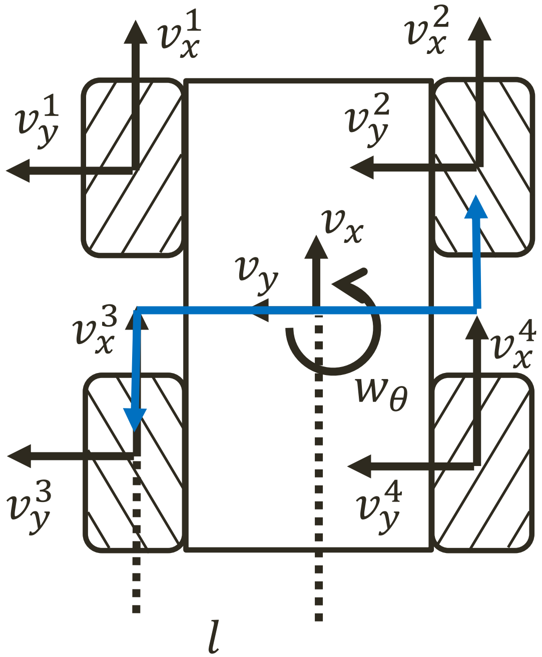


$$
\begin{aligned}
v_x^1 &= v_x - l w_\theta \\
v_x^2 &= v_x + l w_\theta \\
v_x^3 &= v_x - l w_\theta \\
v_x^4 &= v_x + l w_\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_y^1 &= v_y + L w_\theta \\
v_y^2 &= v_y + L w_\theta \\
v_y^3 &= v_y - L w_\theta \\
v_y^4 &= v_y - L w_\theta
\end{aligned}
$$

Modelo cinemático (continuación)

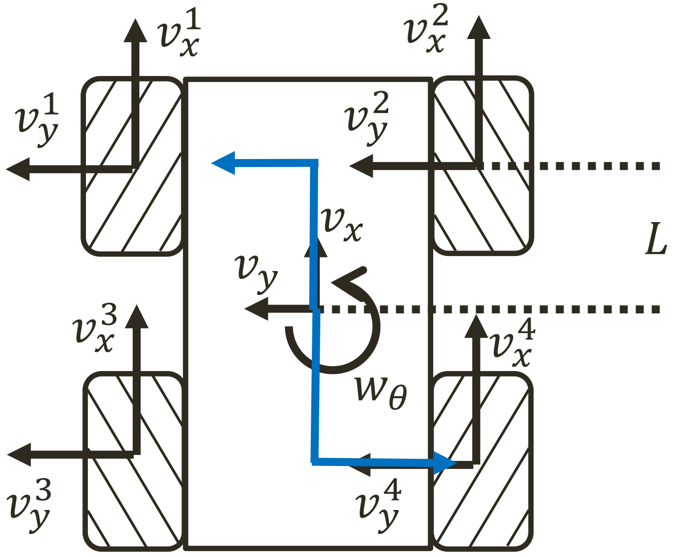
Tomando en cuenta las velocidades del marco de referencia local, tenemos lo siguiente:



$$v_x^1 = v_x - lw_\theta$$
$$v_x^2 = v_x + lw_\theta$$
$$v_x^3 = v_x - lw_\theta$$
$$v_x^4 = v_x + lw_\theta$$

Modelo cinemático (continuación)

Tomando en cuenta las velocidades del marco de referencia local, tenemos lo siguiente:



$$v_y^1 = v_y + Lw_\theta$$
$$v_y^2 = v_y + Lw_\theta$$
$$v_y^3 = v_y - Lw_\theta$$
$$v_y^4 = v_y - Lw_\theta$$

Modelo cinemático (continuación)

Podemos entonces combinar las ecuaciones que representan las velocidades v_x^i y v_y^i de cada rueda i.

Por ejemplo, tomemos en cuenta la rueda 1:

$$v_x^1 = v_1 + v_r^1 \cos(45°)$$
$$v_y^1 = v_r^1 \sin(45°)$$

$$v_x^1 = v_x - lw_\theta$$
$$v_y^1 = v_y + Lw_\theta$$

$$v_1 + v_r^1 \cos(45°) = v_x - lw_\theta$$
$$v_r^1 \sin(45°) = v_y + Lw_\theta$$

Modelo cinemático (continuación)

Además tenemos que:

$$v_r^1 = \frac{v_y + Lw_\theta}{\sin(45°)}$$

$$v_1 + \left(\frac{v_y + Lw_\theta}{\sin(45°)}\right)\cos(45°) = v_x - lw_\theta$$

$$v_1 + v_y + Lw_\theta = v_x - lw_\theta$$

$$v_1 = v_x - lw_\theta - v_y - Lw_\theta$$

$$v_1 = v_x - v_y - (L + l)w_\theta$$

Modelo cinemático (continuación)

Por lo que podemos expresar las velocidades lineales de cada rueda v_i en función de las velocidades del marco de referencia local. Tenemos entonces la cinemática inversa

$$
\begin{aligned}
v_1 &= v_x - v_y - (L+l)w_\theta \\
v_2 &= v_x + v_y + (L+l)w_\theta \\
v_3 &= v_x + v_y - (L+l)w_\theta \\
v_4 &= v_x - v_y + (L+l)w_\theta
\end{aligned}
$$

o también

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & (L+l) \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & (L+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ w_\theta \end{bmatrix}
$$

Modelo cinemático (continuación)

Además, podemos calcular la cinemática directa como

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ w_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & (L+l) \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & (L+l) \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Es importante mencionar que debemos incluir una transformación para mapear las velocidades del marco de referencia local al marco de referencia global.

† pseudo inversa

Modelo cinemático (continuación)

Dicha transformación es

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ w_\theta\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & -(L+l)\\ 1 & 1 & (L+l)\\ 1 & 1 & -(L+l)\\ 1 & -1 & (L+l)\end{bmatrix}^{\dagger}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{bmatrix}$$

Modelo cinemático (continuación)

Como resultado tenemos la cinemática directa expresada como

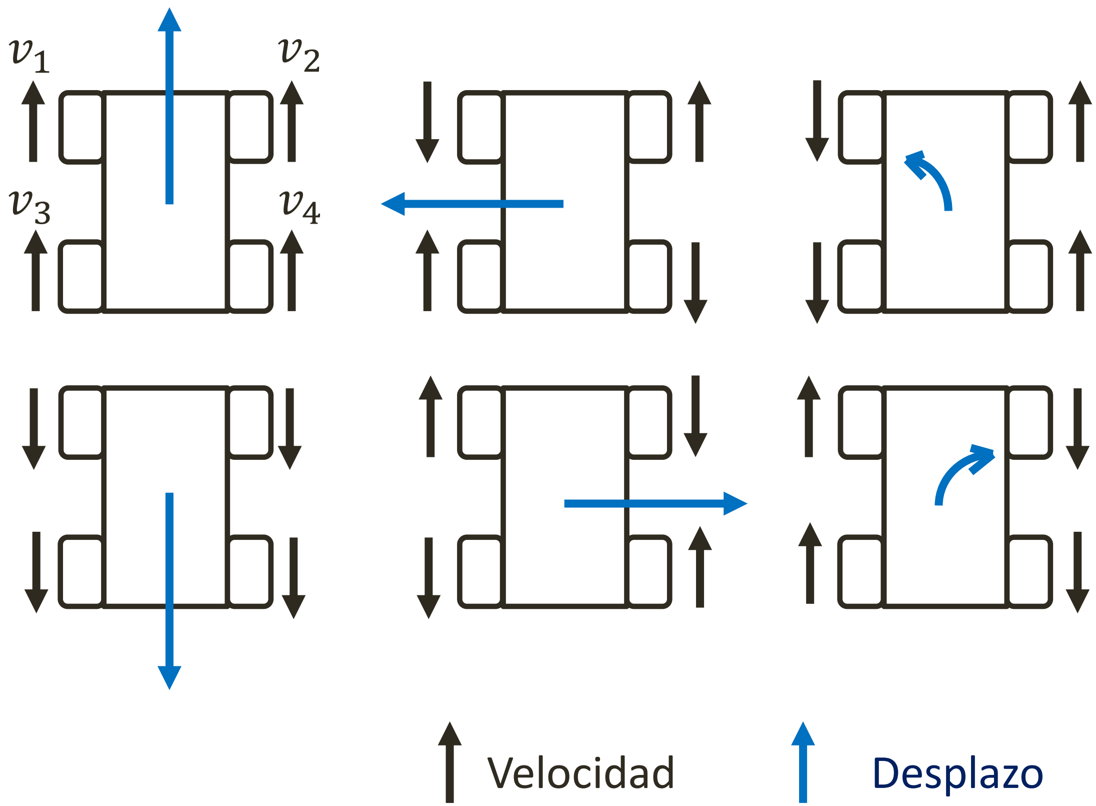
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & (L+l) \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & (L+l) \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

y la cinemática inversa como

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & (L+l) \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & (L+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

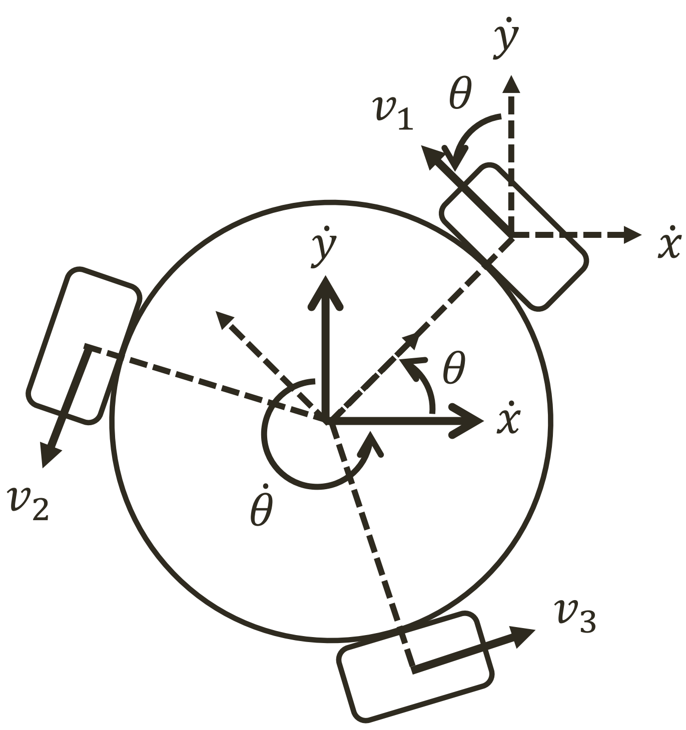
Modelo cinemático (continuación)

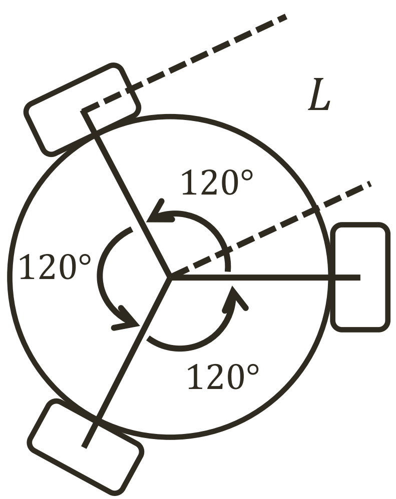
Podemos definir los siguientes movimientos para el móvil omnidireccional con 4 ruedas



Modelo cinemático (continuación)

El siguiente esquema ilustra un robot móvil omnidireccional de 3 ruedas.





Modelo cinemático (continuación)

En la figura anterior, tenemos:

- v_i son las velocidades lineales de actuación de cada rueda i
- $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{\theta}$ son las velocidades que se producen en el marco de referencia global
- L es la distancia del centro del robot a cada una de las ruedas

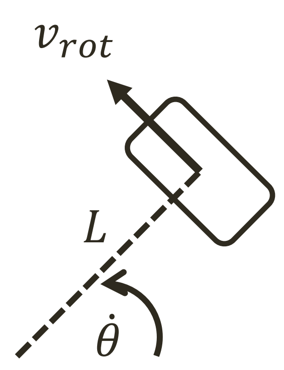
Tenemos un ángulo de 120 grados entre cada rueda.

Modelo cinemático (continuación)

La velocidad v_i se produce tomando en cuenta la velocidad de traslación v_{tras}^i del robot y su velocidad de rotación v_{rot} de cada rueda i, es decir

$$v_i = v_{tras}^i + v_{rot}$$

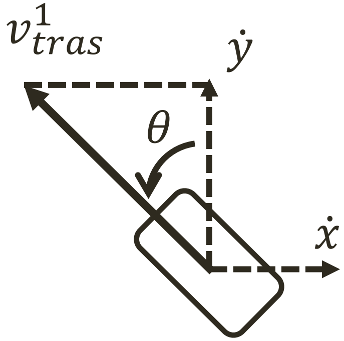
donde tenemos que



$$v_{rot} = L\dot{\theta}$$

Modelo cinemático (continuación)

Por otra parte, tenemos que la velocidad v_{tras}^{1} se puede calcular como



$$v_{tras}^{1} = -\sin(\theta)\,\dot{x} + \cos(\theta)\,\dot{y}$$

Como la segunda y tercer rueda están posicionadas a 120 y 240 grados respecto a la primera, entonces tenemos que

$$v_{tras}^{2} = -\sin(\theta + 120°)\,\dot{x} + \cos(\theta + 120°)\,\dot{y}$$

$$v_{tras}^{3} = -\sin(\theta + 240°)\,\dot{x} + \cos(\theta + 240°)\,\dot{y}$$

Modelo cinemático (continuación)

Tenemos entonces la cinemática inversa expresada como

$$
\begin{aligned}
v_1 &= -\sin(\theta)\,\dot{x} + \cos(\theta)\,\dot{y} + L\dot{\theta} \\
v_2 &= -\sin(\theta + 120°)\,\dot{x} + \cos(\theta + 120°)\,\dot{y} + L\dot{\theta} \\
v_3 &= -\sin(\theta + 240°)\,\dot{x} + \cos(\theta + 240°)\,\dot{y} + L\dot{\theta}
\end{aligned}
$$

Otra forma de expresar la cinemática inversa es

$$
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & L \\ -\sin(\theta + 120°) & \cos(\theta + 120°) & L \\ -\sin(\theta + 240°) & \cos(\theta + 240°) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}
$$

Modelo cinemático (continuación)

Por ultimo, podemos calcular la cinemática directa como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & L \\ -\sin(\theta + 120°) & \cos(\theta + 120°) & L \\ -\sin(\theta + 240°) & \cos(\theta + 240°) & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Modelo cinemático (continuación)

Modelo directo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Modelo inverso

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Modelo cinemático (continuación)

Podemos definir los siguientes movimientos para el móvil omnidireccional con 3 ruedas