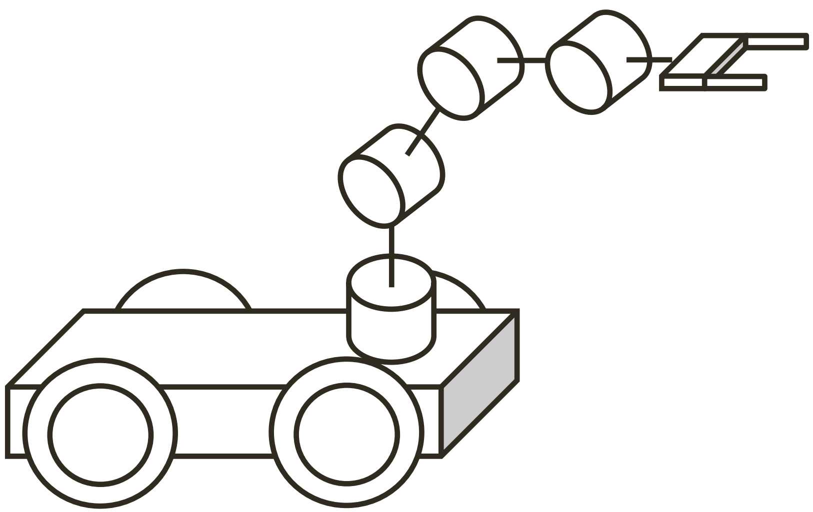
Modelo cinemático del manipulador móvil

Dr. José de Jesús Hernández Barragán
josed.hernandezb@academicos.udg.mx

Introducción

Los robots manipuladores móviles están compuestos por una plataforma móvil y uno o más manipuladores adheridos a la plataforma.



La cinemática de un manipulador móvil combina la cinemática de la plataforma móvil y del manipulador.

Introducción (continuación)

Existen diversas combinaciones de plataformas móviles y manipuladores. Por ejemplo:

Ejemplo 1

Ejemplo 2

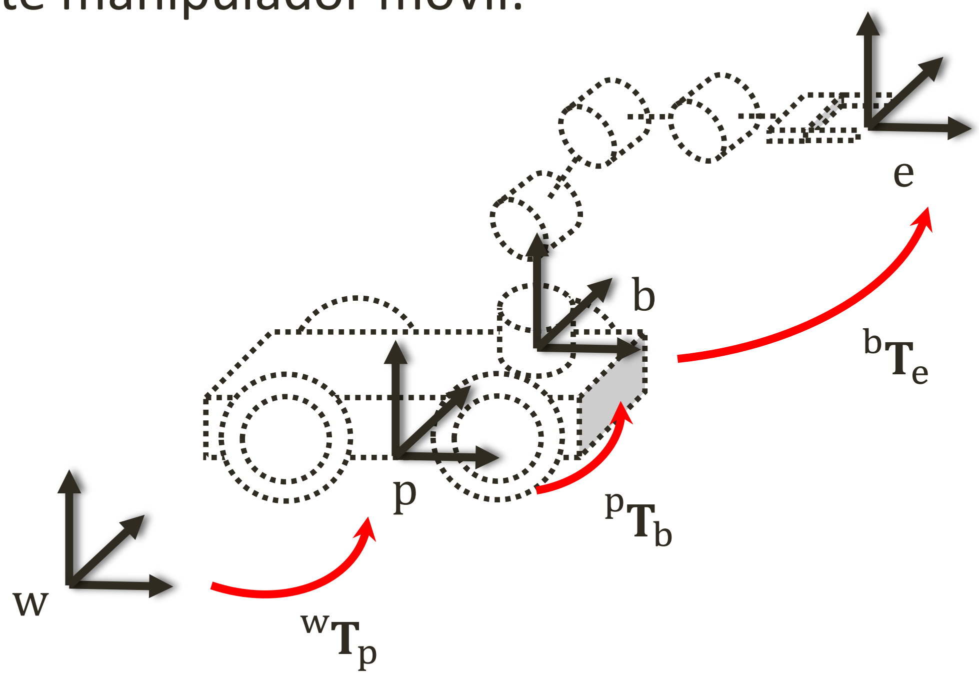
Ejemplo 3

Ejemplo 1, imagen recuperada de: robotnik.eu/es/productos/manipuladores-moviles/manipuladores-xl-gen/
Ejemplo 2, imagen recuperada de: pinterest.com.mx/pin/373306256598726427/
Ejemplo 3, imagen recuperada de: robotmilitar.org

Cinemática directa

Consideremos el siguiente manipulador móvil:

- "w" es el eje coordenado del origen
- "p" es el eje coordenado adherido a la plataforma
- "b" es el eje coordenado base del manipulador
- "e" es el eje coordenado del actuador final



La cinemática directa para el actuador final del manipulador móvil se puede calcular como:

$$ {}^{w}\mathbf{T}_{e} = {}^{w}\mathbf{T}_{p}\ {}^{p}\mathbf{T}_{b}\ {}^{b}\mathbf{T}_{e} $$

Cinemática directa (continuación)

Para calcular ${}^{w}\mathbf{T}_{p}$ debemos tener en cuenta la pose de la plataforma móvil. Definimos

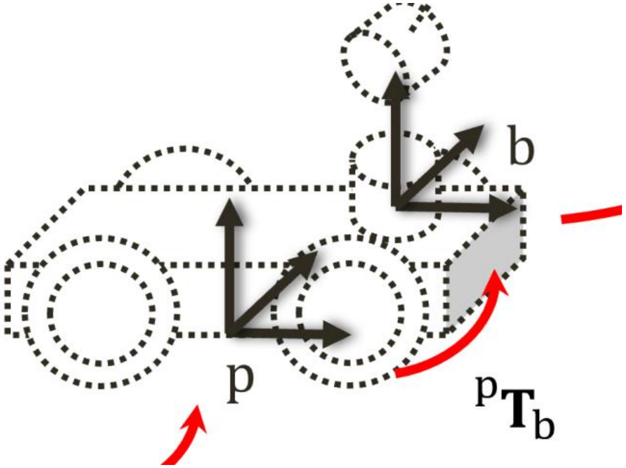
$$\mathbf{p}_{base} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ \theta_b \end{bmatrix}$$

Podemos construir la transformación homogénea ${}^{w}\mathbf{T}_{p}$ como

$${}^{w}\mathbf{T}_{p} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & -\sin(\theta_b) & 0 & x_b \\ \sin(\theta_b) & \cos(\theta_b) & 0 & y_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cinemática directa (continuación)

Para calcular ${}^{p}\mathbf{T}_{b}$ debemos consultar la hoja de datos del fabricante o medir físicamente la posición del manipulador con respecto a la base móvil.



Cinemática directa (continuación)

Para calcular la matriz homogénea ${}^{b}\mathbf{T}_{e}$ debemos resolver la cinemática directa del manipulador.

La cinemática directa la podemos calcular utilizando

- La convención de Denavit-Hartenberg (DH)
- Método geométrico

Por conveniencia se propone utilizar la convención DH.

Cinemática directa (continuación)

Podemos calcular la cinemática directa de un manipulador como

$$ {}^{0}\mathbf{T}_{\mathrm{n}}(\mathbf{q}_{arm}) = {}^{0}\mathbf{T}_{1}(q_1)\ {}^{1}\mathbf{T}_{2}(q_2)\ {}^{2}\mathbf{T}_{3}(q_3)\ \cdots {}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{T}_{\mathrm{n}}(q_{\mathrm{n}}) $$

donde ${}^{0}\mathbf{T}_{\mathrm{n}}$ representa la pose del actuador final y n es el total de DOF.

El vector de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}_{arm}$ contiene la configuración de las articulaciones del manipulador

$$ \mathbf{q}_{arm} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad \cdots \quad q_n]^T $$

donde

$$ q_i = \begin{cases} \theta_i & \text{si } i \text{ es rotacional} \\ d_i & \text{si } i \text{ es prismática} \end{cases} $$

Cinemática directa (continuación)

La matriz homogénea ${}^{i-1}\mathbf{T}_i$ se calcula de la siguiente manera

$$
{}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) & a_i\sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

donde se considera una rotación θ_i en el eje z_i, translaciones a_i, d_i en los ejes x_i y z_i respectivamente, y una rotación α_i en el eje x_i.

Finalmente, tenemos que ${}^{\mathrm{b}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}} = {}^{0}\mathbf{T}_{\mathrm{n}}(\mathbf{q}_{arm})$.

Cinemática inversa

La cinemática inversa se puede resolver con alguno de los siguientes métodos:

- Cinemática diferencial
- Método geométrico

Podemos calcular la cinemática inversa para un manipulador móvil con base en su cinemática diferencial. La cinemática diferencial esta definida como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

Además, despejando el valor de $\dot{\mathbf{q}}$ tenemos

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{x}}$$

donde $\dot{\mathbf{x}}$ representa el vector de velocidades de variables de actuación.

Cinemática inversa (continuación)

Si definimos la velocidad del actuador final como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}$, tenemos

$$\mathbf{e} = (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_i)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)^{-1}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)^{-1}\mathbf{e} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)^{-1}(\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_i)$$

donde

- $\mathbf{x}_d$ es la posición deseada para el actuador final del manipulador móvil
- $\mathbf{x}_i$ es la posición actual para el actuador final
- $\dot{\mathbf{q}}$ y $\mathbf{q}$ es la velocidad y la posición de las articulaciones del manipulador móvil, respectivamente.

Cinemática inversa (continuación)

Es conveniente definir una matriz definida positiva $\mathbf{K}$ (usualmente, diagonal) para ponderar las velocidades del actuador final, es decir

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)^{-1}(\mathbf{Ke})$$

Si la matriz $\mathbf{K}$ cumple con ser definida positiva, entonces el error $\mathbf{e}$ tiende a cero, es decir $\mathbf{Ke} = 0$. Por lo tanto, se dice que el sistema es asintóticamente estable.

Recordemos que:

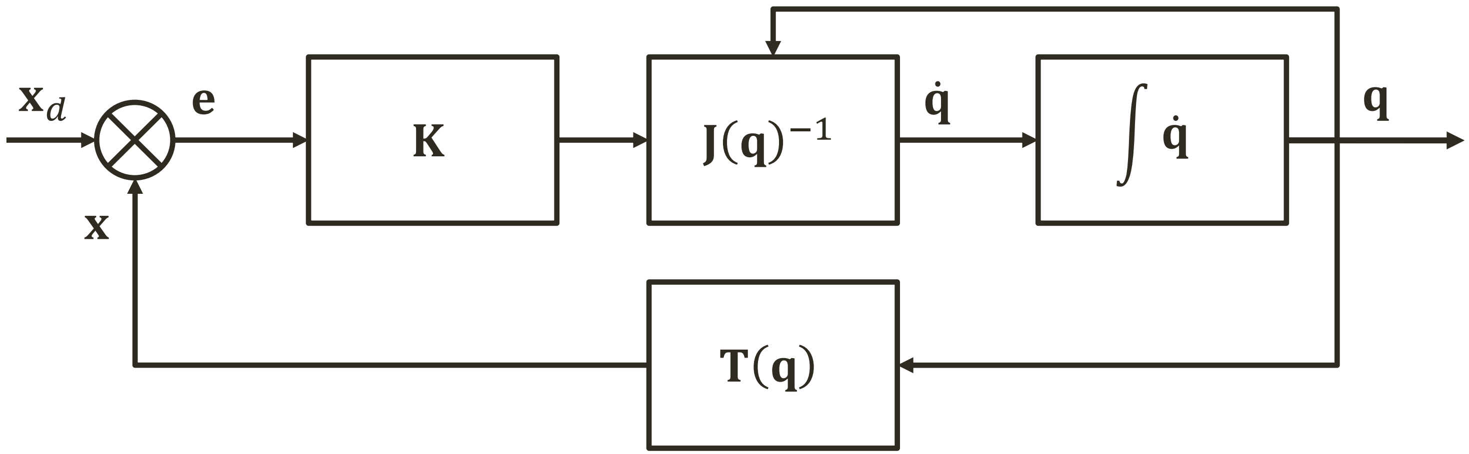
Una matriz $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con valores reales es definida positiva si

- $\mathbf{x}^T\mathbf{M}\mathbf{x} > 0 \; \forall \; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$
- Los valores propios λ_i de $\mathbf{M}$ son positivos

Asintóticamente estable – Las condiciones iniciales convergen al punto de equilibrio

Cinemática inversa (continuación)

El algoritmo de cinemática inversa se muestra en el siguiente diagrama de bloques.



Debemos tener en cuenta que si $\mathbf{J}(\mathbf{q})^{-1}$ no es cuadrada, entonces es conveniente utilizar la Pseudo inversa de Moore-Penrose.

Cinemática inversa (continuación)

Resumen Algoritmo Cinemática Inversa

Paso 1: Definir lo siguiente $\mathbf{x}_d, \mathbf{q}_0, t, \mathbf{K}$

Paso 2: Calcular la posición actual $\mathbf{T}(\mathbf{q}_i)$ (cinemática directa)

Paso 3: Calcular el error $\mathbf{e} = (\mathbf{x}_d - \mathbf{x}_i)$

Paso 4: Resolver cinemática diferencial $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}(\mathbf{q}_i)^{-1}(\mathbf{Ke})$

Paso 5: Resolver paso de integración $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i + \dot{\mathbf{q}}t$

Paso 6: Repetir pasos **2**-**5** hasta que el error $\mathbf{e}$ tienda a un valor cercano a cero, es decir $\mathbf{Ke} \rightarrow 0$

Aplicabilidad

Ejemplo 1: Considere un manipulador compuesto por una plataforma omnidireccional y un manipulador de 3 DOF antropomórfico.

Definimos la siguiente transformación para la plataforma móvil

$$
{}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{p}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_b) & -\sin(\theta_b) & 0 & x_b \\ \sin(\theta_b) & \cos(\theta_b) & 0 & y_b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{p}_{base} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ \theta_b \end{bmatrix}
$$

Aplicabilidad (continuación)

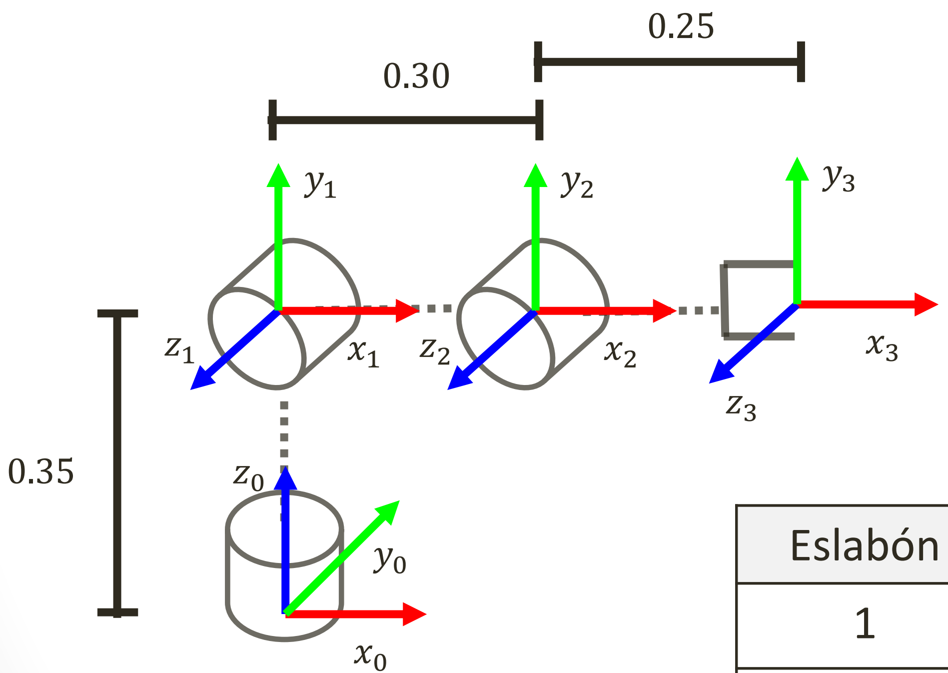
Se propone utilizar la siguiente transformación para definir la posición del manipulador con respecto a la base móvil.

$$^{p}\mathbf{T}_{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz contiene los ajustes necesarios para encontrar la transformación homogénea entre los marcos de referencia ‘p’ y ‘b’.

Aplicabilidad (continuación)

Respecto al manipulador antropomórfico, tenemos lo siguiente



$$\mathbf{q}_{arm} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Eslabón	a	α	d	θ
1	0	$\pi/2$	0.35	θ_1
2	0.30	0	0	θ_2
3	0.25	0	0	θ_3

Aplicabilidad (continuación)

Por lo tanto, podemos construir las siguientes matrices homogéneas

$$^{0}\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & 0 & -\cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.35 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{1}\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0.30\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0.30\sin(\theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^{2}\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0.25\cos(\theta_3) \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0.25\sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicabilidad (continuación)

Dado que ${}^{\mathrm{b}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}}$ representa la cinemática directa del manipulador, entonces tenemos que

$$ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}} = {}^{0}\mathbf{T}_{3} = {}^{0}\mathbf{T}_{1}(\theta_1)\ {}^{1}\mathbf{T}_{2}(\theta_2)\ {}^{2}\mathbf{T}_{3}(\theta_3) $$

La cinemática directa para el manipulador móvil se calcula como

$$ {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{p}}(\mathbf{p}_{base})\ {}^{\mathrm{p}}\mathbf{T}_{\mathrm{b}}\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}}(\mathbf{q}_{arm}) $$

donde

$$ \mathbf{p}_{base} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \qquad \mathbf{q}_{arm} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} $$

Aplicabilidad (continuación)

Para el calculo de la cinemática inversa, partimos de la cinemática diferencial definida como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

donde

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ \theta_b \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Aplicabilidad (continuación)

La matriz Jacobiana la podemos calcular como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

donde las funciones t_x, t_y y t_z las podemos obtener a partir de

$${}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicabilidad (continuación)

Podemos calcular la cinemática inversa del manipulador móvil teniendo en cuenta lo siguiente

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

† pseudo inversa

Aplicabilidad (continuación)

Expresamos la cinemática inversa del manipulador móvil en función de un error

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ z_d - z \end{bmatrix}$$

donde (x_d, y_d, z_d) es una referencia y (x, y, z) es la posición actual del actuador final.

Aplicabilidad (continuación)

Agregamos a la cinemática inversa del manipulador móvil una matriz para la controlabilidad del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ z_d - z \end{bmatrix}$$

donde k_1, k_2 y k_3 son ganancias positivas.

Aplicabilidad (continuación)

Finalmente, utilizamos el modelo del omnidireccional para mapear las velocidades $(\dot{x}_b, \dot{y}_b, \dot{\theta}_b)$ a cada una de las velocidades de las ruedas de la plataforma.

Modelo omnidireccional de 4 ruedas:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -(L+l) \\ 1 & 1 & (L+l) \\ 1 & 1 & -(L+l) \\ 1 & -1 & (L+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$

o también,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sin(\alpha) & -\sqrt{2}\cos(\alpha) & -(L+l) \\ \sqrt{2}\cos(\alpha) & \sqrt{2}\sin(\alpha) & (L+l) \\ \sqrt{2}\cos(\alpha) & \sqrt{2}\sin(\alpha) & -(L+l) \\ \sqrt{2}\sin(\alpha) & -\sqrt{2}\cos(\alpha) & (L+l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \theta + {}^{\pi}/_{4}$$

Aplicabilidad (continuación)

Modelo omnidireccional de 3 ruedas:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{2\pi}/_{3}\right) & L \\ -\sin\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & \cos\left(\theta + {}^{4\pi}/_{3}\right) & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$

Aplicabilidad (continuación)

Ejemplo 2: Considere un manipulador compuesto por una plataforma modelo monociclo y un manipulador de 3 DOF antropomórfico.

En este caso, la cinemática directa se define igual que el caso de la plataforma omnidireccional.

$$ {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}} = {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\mathrm{p}}(\mathbf{p}_{base})\ {}^{\mathrm{p}}\mathbf{T}_{\mathrm{b}}\ {}^{\mathrm{b}}\mathbf{T}_{\mathrm{e}}(\mathbf{q}_{arm}) $$

Sin embargo, es necesario considerar las restricciones del modelo monociclo para limitar el movimiento de la plataforma.

Aplicabilidad (continuación)

Dada la restricción no-holonómica del monociclo y expresada de manera vectorial, tenemos

$$\dot{x}_b \sin(\theta) - \dot{y}_b \cos(\theta) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix} = 0$$

Aplicabilidad (continuación)

Utilizando le modelo Jacobiano e incluyendo la restricción no-holonómica en la matriz Jacobiana, expresamos la cinemática diferencial como

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

Aplicabilidad (continuación)

Finalmente, agregamos a la cinemática inversa del manipulador móvil una matriz para la controlabilidad del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_x}{\partial x_b} & \frac{\partial t_x}{\partial y_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_x}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_y}{\partial x_b} & \frac{\partial t_y}{\partial y_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_y}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial t_z}{\partial x_b} & \frac{\partial t_z}{\partial y_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_b} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_1} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_2} & \frac{\partial t_z}{\partial \theta_3} \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\dagger} \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ z_d - z \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde k_1, k_2 y k_3 son ganancias positivas.

Aplicabilidad (continuación)

Finalmente, utilizamos el modelo del monociclo para mapear las velocidades $(\dot{x}_b, \dot{y}_b, \dot{\theta}_b)$ a cada una de las velocidades (v, w) de la plataforma.

Modelo monociclo

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$