数学分析复习用

Analysis1

Based on lectures by Prof Leonid Parnovski

第一章 域

Fields

1.1域的定义（1）

域共有9条特性，分别是:

A1	Associativity of addition	A2	Commutativity of addition
A3	$\exists 0 \in X \quad a + 0 = a$	A4	$\exists d \in X \quad a + d = 0$
A5	Associativity of multiplication	A6	Commutativity of multiplication
A7	$\exists 1 \in X \quad a \cdot 1 = a$	A8	$\exists a^{-1} \in X \quad a \cdot a^{-1} = 1$
A9	Distributive law		

其中英文分别是结合律、交换律和分配律。

1.1域的定义（2）

域共有9条特性，分别是：

A1	Associativity of addition	A2	Commutativity of addition
A3	$\exists 0 \in X \quad a + 0 = a$	A4	$\exists d \in X \quad a + d = 0$
A5	Associativity of multiplication	A6	Commutativity of multiplication
A7	$\exists 1 \in X \quad a \cdot 1 = a$	A8	$\exists a^{-1} \in X \quad a \cdot a^{-1} = 1$
A9	Distributive law		

注意：这九条和向量空间的八条不同。一个有序域还有A10-A14五条性质，用于规定ord域必然存在的大小关系，此处略。

1.2常见的集合

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

自然数集$\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$，需要说明的是，在本资料之后的讲述中，0都不是自然数。$\mathbb{N}$不符合域的定义。

整数集$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$。$\mathbb{Z}$不符合域的定义。

有理数集$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$。$\mathbb{Q}$符合域的定义。

实数集$\mathbb{R}$。参照高中教学即可，本资料不对其严谨定义。

1.3基础数学方法

取模（Modulus）可以理解为取绝对值。

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

引理：$\forall a, b \in X$ 若$a, b \geq 0$则$a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$。

$a \leq b \Leftrightarrow |a| \leq |b|$

通过同乘$|a|$、$|b|$的方法，即可得证。

引理：$\forall x, y \in X$: $|x + y| \leq |x| + |y|$。

可以通过开平方的方法得证。

如此，可以推知$\left|\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} |x_k|$。

1.4界、最值（1）

- 对于集合$S \subseteq X$(complete ordered field)，可以有上界（upper bound）H，下界（lower bound）h，上确界（supremum）sup$S$，下确界（infimum）inf$S$，最大值（maximum）max$S$，最小值（minimum）min$S$。

$$\exists H \in X\ \forall x \in S\colon\ x \leq H$$
$$\exists h \in X\ \forall x \in S\colon\ x \geq h$$
$$x \in S \Longrightarrow x \leq \sup S, \text{and } \forall y \in X\colon\ y < \sup S \Longrightarrow \exists x \in S\colon\ x > y$$
$$x \in S \Longrightarrow x \geq \inf S, \text{and } \forall y \in X\colon\ y > \inf S \Longrightarrow \exists x \in S\colon\ x < y$$

可以推知:

S is bounded（其有上、下确界） $\Leftrightarrow \exists M > 0\ \forall x \in S\ |x| \leq M$

关于确界……

- 前面我们提到的complete ordered field的条件就是在序域的基础上满足：若S有界，就有对应方向的确界。

这里我们证明一下有理数集不是一个complete ordered field。

我们考虑$S = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$且$S \subset \mathbb{Q}$。

我们可以通过反证法证明$\sqrt{2}$本身不是有理数。根据其定义若$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$则易得p为偶数，可推得q为偶数。但是p，q当互质（co-prime）所以矛盾（contradicts）。

所以其上界$H > \sqrt{2}$。假设这个H就是上确界，那么$\frac{1}{H-\sqrt{2}} > 0$

关于确界……

- 前面我们提到的complete ordered field的条件就是在序域的基础上满足：若S有界，就有对应方向的确界。

这里我们证明一下有理数集不是一个complete ordered field。

我们考虑$S = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\}$且$S \subset \mathbb{Q}$。

所以其上界$H > \sqrt{2}$那么$\frac{1}{H-\sqrt{2}} > 0$

自然数当是无上界的，因为若其存在，与其本身加一大于它矛盾。

所以必然有自然数$n > \frac{1}{H-\sqrt{2}}$则$H - \frac{1}{n} > \sqrt{2}$。这个数比H小，比$\sqrt{2}$大。

此时发生了矛盾，因为不应该有不属于S的上界值比上确界值小。

所以 $\mathbb{Q}$ 的部分有界子集没有确界，也就不是complete ordered field。

关于确界……

- 前面我们提到的complete ordered field的条件就是在序域的基础上满足：若S有界，就有对应方向的确界。

这里我们证明一下有理数集不是一个complete ordered field。

我们考虑$S=\{x\in\mathbb{Q}: x^2<2\}$且$S\subset\mathbb{Q}$。

所以其上界$H>\sqrt{2}$那么$\frac{1}{H-\sqrt{2}}>0$

自然数当是无上界的，因为若其存在，与其本身加一大于它矛盾。

这里提到的这句话，实际上是阿基米德公理（Archimedean property）。这个公理可以被简单地理解为在数字系统中，无穷大和无穷小不存在。教材认为指的就是“自然数集无上界”。

1.4界、最值（2）

- 对于集合 $S \subseteq X$(complete ordered field)， 有上界（upper bound）H，下界（lower bound）h，上确界（supremum）sup$S$，下确界（infimum）inf$S$，最大值（maximum）max$S$，最小值（minimum）min$S$。

$$\exists \max S \in S: x \in \mathrm{S} \Rightarrow x \leq \max S$$

$$\exists \min S \in S: x \in \mathrm{S} \Rightarrow x \geq \min S$$

若集合有最大值，则其为上确界；若有最小值，则为下确界。但是有确界不代表就有最值。

第二章 数列
Sequence

2.1数列

- 数列$\langle x_n \rangle$相当于一个$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$映射。其中的项叫terms。

Range：$\{x_n \in \mathbb{R}: n \in \mathbb{N}\}$

2.2数列的极限（1）

- 一个数列$\langle x_n \rangle$收敛（converge）于$l \in \mathbb{R}$，当且仅当：

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R} \qquad n > N \ and \ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

所以$\lim_{n \to \infty} x_n = l$

发散（diverge），即不收敛。n. Divergence

例如，对于$x_n = \frac{1}{n}$

$$|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

只要令$N = \frac{1}{\varepsilon}$，就可以证明$\langle x_n \rangle$的极限是0。

2.2数列的极限（2）

- 一个数列$\langle x_n \rangle$收敛（converge）于$l \in \mathbb{R}$，当且仅当：
  $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R} \qquad n > N\ and\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

所以$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$

Sum rule, Product rule, Quotient rule:

$$\lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n \to \infty} (x_n y_n) = xy$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \qquad y \neq 0, y_n \neq 0$$

2.2数列的极限（3）

我们以加法法则为例介绍一下正规的证明过程。

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$$

Proof. Known that

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_x \in \mathbb{R} \qquad n > N_x\ and\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_y \in \mathbb{R} \qquad n > N_y\ and\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Let $N \coloneqq \max\{N_x, N_y\}$. Then

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x)(y_n - y)| \le |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

Hence

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{R} \qquad n > N\ and\ n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$$

2.3 Two policemen theorem

For sequences $\langle x_n \rangle, \langle y_n \rangle, \langle z_n \rangle$, if $\forall n\ x_n \leq y_n \leq z_n\ and \lim x_n = \lim z_n = l$, then $\lim y_n = l$.

练习（1）

证明：若$x > 1, \frac{1}{x^n} \to 0 \ as \ n \to \infty$.

为了方便证明，我们需要先得到一个初步结论

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

它被称作**Bernoulli's inequality**，我们使用数学归纳法，先证明其在n=1时成立，然后证明当其在n=k时成立时，对n=k+1它也成立。

$$(1+x)^1 = 1 + 1 \cdot x$$

且由于$kx^2 \geq 0$

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) \Longrightarrow (1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

练习（1）

证明：若$x > 1, \frac{1}{x^n} \to 0\ as\ n \to \infty$.

为了方便证明，我们需要先得到一个初步结论

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

那么对这道题，我们可以得到

$$x^n = \left(1 + (x-1)\right)^n \geq 1 + (x-1)n$$

根据Quotient rule，可以得到

$$0 < \frac{1}{x^n} < \frac{1}{1 + (x-1)n}$$

我们已经在2.2（1）证明过反比例函数生成的数列极限为0，对x-1>0，总有第三项极限为0，故根据Two policemen theorem，所求式子趋向于0。

练习（2）

证明：$\sqrt[n]{n} \to 1\ as\ n \to \infty$。

使用Bernoulli's inequality，$\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1\ \forall n \in \mathbb{N}\ (1+x)^n \geq 1 + nx$。$(1+x)^n > nx \Longrightarrow \left(1 + (\sqrt[2n]{n} - 1)\right)^n > n(\sqrt[2n]{n} - 1)$。

$(\sqrt[2n]{n})^n > n(\sqrt[2n]{n} - 1) \Longrightarrow \sqrt{n} > n(\sqrt[2n]{n} - 1) \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt[2n]{n} - 1 > 0$

而$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$所以$\lim \sqrt[2n]{n} = 1 \Longrightarrow \lim \sqrt[n]{n} = 1^2 = 1$

2.4 有界数列

- 我们在本文件的1.4已经定义过了确界，对于集合S，我们已经知道有以下关系：

$$S\ is\ bounded\ \Leftrightarrow\ \exists M>0\ \forall x\in S\ |x|\leq M$$

我们试证明这样一个定理：

每一个收敛的数列都是有界的。

Suppose a convergent sequence is $x_n\rightarrow l\in\mathbb{R}$ as $n\rightarrow\infty$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}\qquad n>N\Longrightarrow|x_n-l|<\varepsilon$$
$$\Longrightarrow|x_n|\leq|x_n-l|+|l|<|l|+\varepsilon$$

所以$|x_n|$应该小于或等于第1项到第N项和$|l|+\varepsilon$中的最大值，令其为M也就是$|x_n|\leq M$。Hence it's bounded. q.e.d.

2.5 divergence to $\pm\infty$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n > N \Rightarrow x_n > M$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{R} \text{ s.t. } n > N \Rightarrow x_n < M$$

练习

Show that if $\langle x_n \rangle$ is bounded and $y_n \to +\infty$, then $\mathrm{x_n} + y_n \to +\infty$.

本题的思路如下，$|x_n| < H$，总存在大于一定数的n，y大于任意实数H+M。所以它们的和大于等于y-|x|也就是大于任意实数M。

2.6 单调性、子数列（1）

- 本节将通过尝试解决下面这个问题，来讲清楚其对应的知识点。

我们在1.2中正式定义的最后一个集合是有理数集，是因为其是一个可数集，所以通过枚举0到1之间的分数，可以得到一个数列 $\langle x_n \rangle$。

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots$$

求证：

For any real number $l \in [0,1]$ the sequence $\langle x_n \rangle$ has a subsequence $\langle x_{\mathrm{j}_n} \rangle$ with $x_{\mathrm{j}_n} \to l$.

2.6 单调性、子数列（2）

对数列$\langle x_n \rangle$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots$$

求证：

For any real number $l \in [0,1]$ the sequence $\langle x_n \rangle$ has a subsequence $\langle x_{\mathrm{j}_n} \rangle$ with $x_{\mathrm{j}_n} \to l$.

显然，我们需要先理解在题目中提到的子数列的确切含义。

而子数列的定义本身需要一个概念，也就是单调性。所以我们接下来从定义单调性开始，逐步解决这个问题。

2.6 单调性、子数列（3）

- A sequence $\langle x_n \rangle$ is

$$\text{increasing if } n > m \Longrightarrow x_n \geq x_m$$
$$\text{strictly increasing if } n > m \Longrightarrow x_n > x_m$$
$$\text{decreasing if } n > m \Longrightarrow x_n \leq x_m$$
$$\text{strictly decreasing if } n > m \Longrightarrow x_n < x_m$$
$$\text{monotone if it is increasing or decreasing}$$

- Suppose $\langle x_n \rangle$ is a sequence and $\langle j_n \rangle$ is a strictly increasing sequence of natural number. A sequence $\langle x_{j_n} \rangle$ is called a subsequence of $\langle x_n \rangle$.

2.6 单调性、子数列（4）

对数列$\langle x_n \rangle$

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\cdots$$

求证：

For any real number $l \in [0,1]$ the sequence $\langle x_n \rangle$ has a subsequence $\langle x_{\mathrm{j}_n} \rangle$ with $x_{\mathrm{j}_n} \to l$.

我们回到这个问题，令$\langle j_n \rangle$为1,2,4,7⋯那么$\langle x_{\mathrm{j}_n} \rangle$就是$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots$显然它是原数列的子数列，而我们已经在2.2（1）证明过反比例函数生成的数列极限为0，所以对于$l=0$的情况，我们已经证明完毕。

2.6 单调性、子数列（5）

If $\langle x_n \rangle$ is increasing and bounded above.

Let $M \coloneqq \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ then for all $\varepsilon, M - \varepsilon$ is not an upper bound.

So exist $x_N > M - \varepsilon$.

Since $\langle x_n \rangle$ is increasing, then

$$n > N \Longrightarrow x_n \geq x_N > M - \varepsilon \Longrightarrow M - \varepsilon < x_n \leq M \Longrightarrow |x_n - M| < \varepsilon$$

Hence $\lim x_n = M$

同理，单调递减且有界的数列也收敛。

可以推知，单调有界的数列收敛。

所以对于例题，我们可以期待找到一个以l为上确界的单调递增的数列，使其收敛在l。……

2.6 单调性、子数列（6）

For all n and let N to be sufficient large that $\frac{1}{N} < l$.

There must exist $\frac{p}{N+n} < l$. We choose the largest possible whole number for p for the following. Let $y_n \coloneqq \frac{p}{N+n}$. Obviously, $\langle y_n \rangle$ is the subsequence of $\langle x_n \rangle$.

As p is chosen largest whole number

$$y_n = \frac{p_n}{N+n} < l \leq \frac{p_n + 1}{N+n} \Longrightarrow 0 < l - y_n \leq \frac{1}{N+n}$$

By the fact that $\frac{1}{n} \to 0$ and the policemen theorem, $l - y_n \to 0$.

Hence $y_n \to l$. QED

2.6 单调性、子数列（7）

……

看来由于例题过于简单，我们甚至不用构建一个单调的数列。

但是这一节还有一些重要性质，让我们来证明一下。

- 每一个收敛的数列的子列收敛于同一个数（或发散于无穷）。
  - 如果一个数列有两个收敛于不同数的子列，则原数列发散。
- 所有数列都拥有一个单调子列。
- 所有有界数列都有一个收敛子列。

2.6 单调性、子数列（8）

- 每一个收敛的数列的子列收敛于同一个数（或发散于无穷）。

We may prove $j_n \geq n$ for all n by induction. Then

If $l \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{R} \quad n > N \Rightarrow |x_n - l| < \varepsilon$$

So $\left|x_{j_n} - l\right| < \varepsilon$. Hence $\lim x_{j_n} = l$.

同样，发散于无穷也只需这样类似的一步即可证出。

2.6 单调性、子数列（9）

- 所有数列都拥有一个单调子列。

我们讨论一个集合$S = \{x_n : m > n \Rightarrow x_m \leq x_N\}$

假如存在一个这样的无限的集，那么只要选取这个集合中的所有元素，便得到了一个单调递减的数列。

假如所有这样的集合都是有限的，说明从某一项开始，后面的每一项都大于它。我们选取这一项，并在之后的项中重复此操作，可以得到一个单调递增的数列。

2.6 单调性、子数列（10）

- 所有有界数列都有一个收敛子列。

在本节的（5）中，我们证明了单调有界的数列收敛。

在上一页中，我们证明了所有数列都拥有一个单调子列。

那么有界数列比如拥有一个单调有界子列，那么它必然收敛。

这个结论被称作Bolzano-Weierstrass theorem。

第三章 级数
Series

3.1 级数

- A series is the infinite sum of a sequence

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

- Partial sums

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

- Partial sums form a sequence $\langle S_N \rangle_{N=1}^{\infty}$.

3.2 级数的收敛

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges to $l \in \mathbb{R}$ if $\lim_{n\to\infty} S_N = l$

- 如果一个级数收敛，那其对应的数列趋向于0。
- 如果一个级数收敛，那其尾部（$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n$）倾向于0。

- 几何级数，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-\mathrm{x}}$ if $|x| < 1$。

3.3 作差法（1）

例题 求出下面的级数的值

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n+1)}$$

面对这样的问题时，我们**首先必须考虑裂项**。即考虑

$$\frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-1} + \frac{C}{n+1}$$

通过将其变为多项式解方程问题，代入简单的n值（如-1,0,1）可以很轻松地求出A，B，C的代入值，此处过程略。

$$\frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n-1} + \frac{1/2}{n+1}$$

3.3 作差法（2）

作差法的**第二步**就是要考虑partial sum。根据我们刚刚算出来的结果

$$\frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{-1}{n} + \frac{1/2}{n-1} + \frac{1/2}{n+1}$$

利用错位相减（对不同的题目，都必须自己写出详细步骤，因为很容易出错），可以得到

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n(n-1)(n+1)} = \frac{-1}{3} + \frac{1/2}{2} + \frac{1/2}{3} + \frac{-1}{N} + \frac{1/2}{N} + \frac{1/2}{N+1}$$

3.3 作差法（3）

$$\sum_{n=3}^{N}\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{-1}{3}+\frac{1/2}{2}+\frac{1/2}{3}+\frac{-1}{N}+\frac{1/2}{N}+\frac{1/2}{N+1}$$

因为在N趋向于无穷时，后三项趋向于0。故

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)(n+1)}=\frac{-1}{3}+\frac{1/2}{2}+\frac{1/2}{3}=\frac{1}{12}$$

3.4 级数收敛性判断方法

- 如果对应数列不趋向于0，则级数不收敛。
- 如果每一项都大于0，则考虑使用
  - Comparison test
  - Ratio test
  - Root test
- 检查级数是否绝对收敛。
- Alternating series test
- Give up

3.4.1 如果对应数列不趋向于0，则级数不收敛。

- 这是3.2中的基础定理的逆否命题，是显然成立的，我们用一个例题尝试运用。

For $p \in \mathbb{R}, p > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge if and only if $p > 1$.

对0到1，显然$\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$所以原式显然大于以正整数为分母的级数。而后者大于一连串1/2的累加。故无上界，不收敛。

3.4.1 如果对应数列不趋向于0，则级数不收敛。

For $p \in \mathbb{R}, p > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge if and only if $p > 1$.

对大于1的情况，我们同样按指数数量分组，得到

$$S_{2^M-1} \le 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \frac{8}{8^p} + \cdots + \frac{2^{M-1}}{(2^{M-1})^p}$$

$$= 1 + \frac{2}{2^{p-1}} + \frac{4}{4^{p-1}} + \frac{8}{8^{p-1}} + \cdots + \frac{2^{M-1}}{(2^{M-1})^{p-1}} \le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

显然这是一个底数小于1的几何级数，它收敛，故原式有界，其无限级数收敛。

3.4.2 关于绝对收敛

- 这里我们提前强调一下converges absolutely的问题。绝对收敛指的是级数的每一项取绝对值依然收敛。因为在本节中提到的所有方法是针对全为正的级数的，所以只要它们被证明收敛，则自然地绝对收敛。
- 如果每一项都大于0，则考虑使用 3.4.2
  - Comparison test 3.4.2（1）
  - Ratio test 3.4.2（2）
  - Root test 3.4.2（3）

3.4.2（1）Comparison test

- 如果$0 \le \langle A_\infty \rangle \le \langle B_\infty \rangle$，且$\langle B_\infty \rangle$收敛，那么$\langle A_\infty \rangle$也收敛。
- 反之可以推得，如果A发散B也发散。

- 如果$\frac{a_n}{b_n}$（注意，不是级数）收敛，那么$\langle A_\infty \rangle, \langle B_\infty \rangle$的收敛性互为充要。

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists N_x \in \mathbb{R} \qquad n > N \implies \left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \varepsilon$$

$$\text{Letting } \varepsilon = \frac{l}{2} \text{ gives } \frac{l}{2} b_n < a_n < \frac{3l}{2} b_n$$

因为级数的收敛性与前N项无关，b_n相关级数收敛性相同，故$\langle A_\infty \rangle$也相同。

3.4.2 （2） Ratio test

- Suppose $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$. Then

If $l < 1$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely.
If $l > 1$, then $|a_n| \to +\infty$, so $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
If $l = 1$, then no conclusion.

3.4.2 （3） Root test

- Suppose $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$. Then

If $l < 1$, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely.
If $l > 1$, then $|a_n| \nrightarrow 0$, so $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
If $l = 1$, then no conclusion.

3.4.2（4） Ratio test和Root test的证明

- 虽然不大可能考啦，但考虑到考官完全可以指定一个情况（也就是l和1的大小关系）再问其中一部分证明，所以还是提一下证明方法。

对于Ratio test的两种情况，分别设$\varepsilon=\frac{1-l}{2}$和$\varepsilon=\frac{l-1}{2}$

分别可以得到

$$|a_{N+k}|<(l+\varepsilon)^{k-1}|a_{N+1}|$$

和

$$|a_{N+k}|>(l-\varepsilon)^{k-1}|a_{N+1}|$$

剩余步骤易证。 Root test证明过程类似。

3.4.3 绝对收敛

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely if $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converges.
- If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, but $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges conditionally.

- 如果一个级数绝对收敛，则显然其收敛。

- 对非全正的级数，我们使用3.4.2中的方法，判断其是否绝对收敛，作为判断其是否收敛的第三步。

3.4.4 Alternating series test

- 对一个全正的单调递减级数，若对应数列极限为0，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

收敛。

证明方法是：构造两个partial sum，B_N, C_N 前者取到加为止，后者取到减为止。由于B往后取是先减一个大数再加，所以是递减的；C反之，是递增的。而对于同一组的BC，C多一个减，所以C应该小于B。我们在2.6（5）中证明过，单调有界的数列是收敛的，BC显然单调，且相互为界，故均收敛，故整个级数收敛。

（其他要用数学语言写出来，蓝的那句话可以聪明一点，不是这一章的内容，当然只要提到这个定理就行了。）

3.5 幂级数（1）

- Power series 有下面的通式

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

- 例如Taylor series，其中有

$$\exp(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- 它实际上就是指数函数e^x，自然拥有指数函数的运算性质，但是我们还没有定义过指数函数，它的一切运算性质是需要证明的。（上课没有证过，大概率不考。指数函数在下一章讲）

3.5 幂级数（2）

$$\exp(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- 这里我们先证明一下它确实收敛。

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

所以$l = 0 < 1$，根据ratio test，它确实是收敛的。

第四章 函数
Functions

4.1 极限

- 这里我想分享一个小故事，以前搞物竞的时候，老师说要学高数，我就买了同济大学的那本绿书。当时我并不知道这本书里的那些东西和物竞中要用的微积分有什么关系，唯一的感觉就是“再不跑就要死了”。
- 如果我没记错的话，函数的极限就是那本书的第一个知识点。

4.1 极限

- For function $f:(a,c)\cup(c,b)\to\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to c} f(x)=l$ if

$$\lim_{x\to c+} f(x)=\lim_{x\to c-} f(x)=l$$

Equivalent to

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ s.t.\ 0<|x-c|<\delta\Longrightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

- 如果只有单侧有定义也是差不多的，此处略
- For function $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ if

$$\forall H\in\mathbb{R}\ \exists h\in\mathbb{R}\ s.t.\ x>h\Longrightarrow f(x)>H$$

剩下的就是这两段定义的排列组合。

4.2 连续性

- 有鉴于我的痛苦过去，我打算用中文记这一节。
- 在某点具有连续性，是指在有定义的方向上的极限等于这个点的值。
- 那么如果一个点没有定义，讨论它是否连续是无意义的。
- 函数连续指的是定义域内所有点连续。
- 如果函数在某些点上没有定义，不影响其连续。
- 对于连续的定义域，画出的连续函数的图像应该是相连的，注意到无穷不是数字系统的符号，定义域内部的点不能等于无穷，“趋向于”无穷的情况只能出现在定义域两端。

4.3 连续函数数列极限

- Function $f: S \to \mathbb{R}, c \in S$ is continuous

if and only if

- whenever there is a sequence $\langle x_n \rangle$ such that

$$x_n \in S, \lim_{n\to\infty} x_n = c$$

then

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$$

- 这个B定理的名字就叫做The theorem about limit of functions and sequences
- 证明如下

4.3 连续函数数列极限

- f is continuous at c so
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; s.t. |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$
- $\lim_{n \to \infty} x_n = c$ so
$$\exists N \in \mathbb{R} \; \forall n > N \; |x_n - c| < \delta$$
- So $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \exists N \in \mathbb{R}$
$$n > N \Longrightarrow |x_n - c| < \delta$$

and that $x_n \in S$ so
$$|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$$
- Therefore $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(c)$. So the theorem is true forwards.

4.3 连续函数数列极限

- Let f be not continuous at c then
$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in S\ s.t. |x - c| < \delta \text{ and } |f(x) - f(c)| \geq \varepsilon$$
- So for $x \coloneqq x_n$
$$\exists\varepsilon > 0\ \forall n > 0\ \exists x_n \in S\ s.t. |x_n - c| < \frac{1}{n} \text{ and } |f(x_n) - f(c)| \geq \varepsilon$$
$$|x_n - c| < \frac{1}{n} \Leftrightarrow c - \frac{1}{n} < x_n < c + \frac{1}{n}$$
- So by policemen theorem, $\lim x_n = c$.
- However, since $|f(x_n) - f(c)| \geq \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(c)$. So the theorem is true backwards.（逆否命题成立）

4.4 极限的运算法则

- 加法、乘法、除法都可以正常使用，不要除0。
- 可以证明函数值夹逼的，两侧函数在某点极限相同，中间函数亦相同。（two policemen theorem对函数适用）

4.5 复合函数的连续性

- 如果g在c处连续，f在g(c)处连续，那么fg(x)=f(g(x))在c处连续。

练习

- 这里我们尝试证明指数函数是一个连续函数。在前面我们定义过它

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

对任意的c，都可以指定一个趋向于它的数列。则$x_n - c \to 0$。

$$\exp(x_n) = \exp\big((x_n - c) + c\big) = \exp(x_n - c)\exp(c)$$

根据4.3的定理，和4.4的法则，只要能证明$\exp(x_n - c) \to 1$就相当于证明了它是连续函数。

练习

- 只要能证明$\exp(x_n - c) \to 1$就相当于证明了它是连续函数。
- 即证$\exp(0) = 1$

因为

$$1 + x \le \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} \le \frac{1}{1 - x}$$

- 即证$\exp(x) \ge 1 + x$
- 即证

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ge 0$$

练习

- 求证

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 0$$

- 对$x \geq 0$显然成立。
- 对$x \leq -1$，由于

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$$

显然后者分母为正数，故其为正数，大于必为负的$1 + x$ 。

练习

- 求证，对$x \in (-1,0)$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 0$$

我们可以两两一组进行分析，发现前一项是正数，后一项是负数，负数多除一个自然数，绝对值更小，所以和为正。

- 至此所有情况讨论完毕
- 结论：自然指数函数是一个连续函数
- 注：e的定义是exp（1），是直到现在才被定义的。

补充

- 自然指数函数是一个双射（我非常确信，这门课压根没定义过bijection这个词，只会在代数里考的。）
- 其反函数被定义为自然对数函数。$\ln: (0, \infty) \to \mathbb{R}$
- $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- $\exp(x) = e^x$
- $a^x \coloneqq \exp(x \cdot \ln a)$

4.6 有界性

- 函数的值域叫image。
- 所有定义域为闭区间的连续函数有界。因为每一个函数值都是具体的，不可能趋向于无穷。
- Compact set是指由它生成的数列，都包含一个极限在集合内的子数列。显然对这门课来讲它只能是闭区间，因为开区间存在极限为确界的数列。
- 所有定义域是闭区间的连续函数都有最大值、最小值（attains its maximum and minimum）。如第二条，闭区间函数不存在趋向。

4.6 有界性

- 取连续函数的非边界一点，这点的周边区域存在且依然大于小于该点的值（因为可以取无限小，而用于比较的值是具体的）。
- 连续函数的两个取值之间的所有值均可取。定义域为闭区间的连续函数，它的值域也是一个闭区间。

4.7 求导

- 函数的可导性的定理都很好证的，记得凡事从定义出发就行。

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

若处处可导，称函数可导。

例子：$f(x) = x^2$ at all points (c, c^2)

$$f'(c) = \lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(c+h)^2-c^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{c^2+2ch+h^2-c^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2c+h) = 2c$$

4.8 导数的运算法则

- 加正常加，乘法前导后不导加后导前不导。

$$\exists m \in \mathbb{R}\ \exists R(h)\ s.t.\ f(c+h) = f(c) + mh + R(h)h \text{ and } \lim_{h\to 0} R(h) = 0$$

简言之对于可导函数的每个点都可以用一个包含余项的三项表达式表示，将两个这样的表达式相乘，找到没有余项、h仅有一次的项，就是乘法法则的结论。

- Chain rule

$$(f\circ g)'(c) = f'\big(g(c)\big)\cdot g'(c)$$

证明方法类似。

4.8 导数的运算法则

- 仨警察定理在导数领域比较严格:

- 三个函数可以被证明有大小关系。
- 在所求点两侧值相等。
- 在所求点两侧导数值相等。

- 则可以证明中间的函数在此处可导，且与两侧函数导数值相等。

4.9 反函数

- 如果函数是个双射，在a处可导且导数不为0。那设其在反函数中对应b=f(a)处，它们的导数值互为倒数。

- 当你以为这玩意是用定义法证的时候，你就会发现还有更简单的办法。两个函数的复合函数的导数值应该是1，用chain rule可以迅速得到结论。（别忘了b=f(a)）

4.10 极值

- 最值又叫global extrema。
- 相对的局部最大值就是local extrema。
  $\exists\delta > 0, (c-\delta, c+\delta) \subset S\ s.t.\ x \in (c-\delta, c+\delta) \Rightarrow f(x) \le f(c)$
  极小值的定义类似。
- 极值点若可导，导数值为0。
- 可以不可导，比如绝对值函数。
- 最后提醒一下我们在1.4就讲过这些都不一定存在。

4.11 中值定理

- 本节默认定义域完整且函数连续，考试记得写。
- 引理：两等值点间必存在导数为0的点。

如果这段区间的最大值=最小值，那么函数值恒定，导数值恒为0。

如果不等，那就比如存在极值点，在这点上导数值为0。

4.11 中值定理

- 引理：两等值点间必存在导数为0的点。

令$m := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 和 $g(x) := f(x) - mx$

可以得到（省略了计算过程）

$$g(a) = g(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$$

那必然存在一处$g'(c)$导数值为0，等于$f'(c) - m$

- 必然存在一处导数值等于$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

练习

- Find critical points of $f(x) = e^x(x^2 - 3)$ and classify them as local maximum or local minimum or neither.

$$f'(x) = e^x(x^2 - 3) + e^x \cdot 2x = e^x(x - 1)(x + 3)$$

So there are critical points on x=1 and x=-3.

$$f''(x) = e^x(x^2 + 4x - 1)$$

$$f''(1) > 0 \quad f''(-3) < 0$$

Therefore, x=1 is a local minimum, x=-3 is a local maximum.