专业团队 29

考试时间：**2** 小时 **30** 分钟
如果考试时间不够，但你没有做爽，可以接着做。

考试规则：本卷共有 **8** 道题目，请从中选择 **5** 题作答，每题 **20** 分。做本卷时，请**不要使用计算器**。
本卷共有 **22** 页。

因为时间和不能用计算器的缘故，本卷的压力显然是大的，做这张卷子的当天不要做其他烧脑活动，确保能正常发挥全部实力。
最好一次性做完。
没选的题也可以看一看，都蛮不错的。

第一题 代数

(a) （14 分）

(i) 将 1 表示为 173 和 201 以整数为系数的线性组合（linear combination）。

(ii) 对于用乘法构建的有限群$\mathbb{Z}_{201}^{*}$，求元素$\overline{173}^{-1}$。

(iii) 证明 1 可以表示为任意两个互质数字以整数为系数的线性组合（linear combination）。

(b) 判断下列群是否是阿贝尔群（Abelian group，交换群，commutative group）（6 分）

(i) 置换群S_2。

(ii) 置换群S_3。

(iii) 循环群C_4。

第二题 代数

(a) 通过求出特征值（eigenvalue）和特征向量（eigenvector），将下面的矩阵对角化（diagonalization）（10 分）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

你可以在这一页继续写对 2(a)的解答。

(b) 定义一个*连续的(adjacent)*三轮换(3-cycle)指的是置换(permutation)$(i, i+1, i+2)$，其中i为任意正整数。证明任意的偶置换(even permutation)都可以被表示为一系列的*连续的*三轮换。(10 分)

在本题中，你无须证明对于一个 m 轮换$(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1})$有如下法则

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}) = (a_0, a_1)(a_1, a_2) \ldots (a_{m-2}, a_{m-1})$$

而可以直接使用。

提示：在本题中，你可能需要证明

$$(a, b, c) = (a, b, b+1)(b, b+1, c)^2$$

其中$b+1 \neq a \neq c$。

你可以在这一页继续写对 2(b)的解答。

第三题 集合、逻辑

(a) 在本题中你可能需要了解下面符号的含义（3 分）

$$\{a_1, \ldots, a_n\}\text{集合} \quad |X|\text{基数（集合中元素的数量）}$$

(i) 请写出$\{\{2\},2\}$的所有子集。

(ii) 是否存在一个集合$X = \{|X|, 2\}$？请给出例子或者证明其不存在。

(b) 在本题中你可能需要了解下面符号的含义（9 分）

$$\exists\text{存在} \quad \forall\text{对于所有} \quad \Longrightarrow \text{条件} \quad \Longleftrightarrow \text{双条件（等价）}$$

(i) 定义一个逻辑运算符↑，关于$p \uparrow q$的真值表如下

p	q	$(p \uparrow q)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

令G为如下表达式

$$\forall x \in X\ \forall y \in Y\ \Big(\big(P(x) \uparrow Q(y)\big) \Longrightarrow R(x, y)\Big)$$

写出一个不含∀,↑且与$\neg G$逻辑等价的表达式。

(ii) 对于一套一阶逻辑语法（first-order language），它仅包含谓词（predicate）=，代表相等，不包含函数符号或常数符号（constants or function symbols）。要表示"'一个断言（sentence）在一个解释（structure）M中恒成立'当且仅当'这个解释M的论域（domain）恰好有n个元素'"至少需要多少个变量（variable）？

(c) 在本题中你可能需要了解下面符号的含义（8 分）

$$\square \textit{必然性} \quad \diamond \textit{可能性（不知道为什么这个diamond特别小）}$$

我们称一个模态框架（modal logic frame）$M = (W, R)$是对称的（Symmetric）来表示

$$Rxy \Longrightarrow Ryx$$

证明模态框架对称与下面这个表达式等价。

$$A \to \square \diamond A$$

第四题 信息技术、概率论

本题基于这段 Python 代码

```python
import random

def DFA(q,inpcha):
    dictionary = {
        (0,"A"):1,(0,"B"):5,(1,"A"):2,(1,"B"):5,
        (2,"A"):2,(2,"B"):3,(3,"A"):4,(3,"B"):5,
        (4,"A"):4,(4,"B"):4,(5,"A"):6,(5,"B"):5,
        (6,"A"):7,(6,"B"):5,(7,"A"):2,(7,"B"):8,
        (8,"A"):8,(8,"B"):8
        }
    inp = (q,inpcha)
    return dictionary[inp]

def AB():
    q=0
    while True:
        randomChar = random.choice("AB")
        q=DFA(q,randomChar)
        if q==4:
            return 1
        elif q==8:
            return 2
```

(a) 请说明这段代码中的自动机（automaton）识别的两种字符串。(10 分)

(b) 运行函数 `AB()`，返回 1、2 的可能性分别是多少？（10 分）

第五题 解析几何

(a) 证明所有的抛物线都相似。（3 分）

(b) 本问题将证明笛卡尔坐标系和极坐标系中的二阶微分算子的关系。其中

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

考虑用x, y表示函数$z = f(x, y)$（17 分←连“专业团队”都觉得这个话题出 7 分并不妥）

(i) 证明

$$dz = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)dy$$

(ii) 证明

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$$

和

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}$$

(iii) 证明

$$f_{xx} + f_{yy} = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta}$$

你可以在这一页继续写对 5(b)的解答。

第六题 我是大极（限）佬

(a) 若级数A_n收敛，数列b_n是有界的。判断$a_n b_n$对应的级数是否一定收敛。若一定收敛，请证明；反之请举出反例。(5 分)

提示："级数（series）"指的是数列的和。说一个无穷级数或数列是"有界的（bounded）"指的是它们不趋向于无穷。

(b) 证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2+x^4+x^6} dx = \frac{\pi}{2}$$

（8 分）

(c) 讨论

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,dt}{x}$$

（7 分）

第七题 我是方程大师

(a) 求方程

$$2^x = i$$

的解。(5 分)

(b) 对于二阶微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

证明对于任意两个解y_1, y_2，它们的线性组合都仍是这个方程的解。(5 分)

(c) 在本题中你可以使用关于极限的夹逼定理。（10 分）

(i) 证明

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2022^n+2023^n+2024^n}=2024$$

(ii) 设f在$[a,b]$上非负连续，严格单增，且存在$x_n\in[a,b]$使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{\int_a^b[f(x)]^n dx}{b-a}$$

写出$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的值。

第八题 我是大积（分）佬

(a) 求解

$$\int_0^n [2^x]dx$$

其中n为正整数，中括号为向下取整符号。(5 分)

(b) 求

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-2x} \cdot |\sin x| \, dx$$

（15 分）

本卷到此结束

本卷到此结束