COMP0009

Logic

1. 前情提要

1.1 Propositional formula (fm)

not, negation　　or, disjunction　　and, conjunction

$$fm ::= prop \mid \neg fm \mid (fm \vee fm) \mid (fm \wedge fm)$$
$$\mid (fm \to fm) \mid (fm \leftrightarrow fm)$$

implies, implication　　iff, two-way implication

1.2 Valuation

A valuation is a function v from the propositions into $\{\top, \bot\}$

A formula ϕ is valid if $\forall$ valuations v : $v(\phi) = \top$

note by $\models \phi$

A formula ϕ is satisfiable if $\exists$ valuation v: $v(\phi) = \top$

1.3 First Order Language

$L(C, F, P)$

C, constant symbols

F, function symbols　f^n　arity　例如 $\{+, \times\}$

P, predicate symbols　p^n　例如 $\{=, >\}$

V, variable symbols

注，小写字母属于大写范围

$$term = c \mid v \mid f(term_0, \cdots, term_{n-1})$$

$$atom = p^n(term_0, \cdots, term_{n-1})$$

$$fm = atom \mid \neg fm \mid (fm_0 \vee fm_1) \mid \exists v\, fm$$

1.4 Domain ?

$$S = (D, I), \quad I = (I_c, I_f, I_p)$$

$C \to D$ $D^n \to D$ D^n

例: $I_p(=)$ 等于 $\{(d,d) : d \in D\}$

1.5 Variable Assignment

valuation, note by A

$$c^{S,A} = I_c(c) \qquad v^{S,A} = A(v)$$

$$S, A \models p^n(t_0, \cdots, t_{n-1}) \Leftrightarrow (t_0^{S,A}, \cdots, t_{n-1}^{S,A}) \in I_p(P^n)$$

validity $S \models \phi$ satisfiability $S, A \models \phi$

1.6 省流

一般有 propsitional letters	(p, q, r, s)
connectives	$(\neg, \wedge, \vee)$
variables	(x, y, z, w)
function symbols	$(+, -, \times, /)$
predicates	$(=, <, P, Q)$
Quantifiers	$(\exists, \forall)$

2. Tableaus

这个词应该译作"表"…吧。

课件中的表述是：A tableau T is a type of binary tree where every node is labelled by a formula.

2.1 Hilbert System

$$\frac{\phi \qquad (\phi \to \psi)}{\psi}$$ （这个画线的意思叫可推出）

证明一个结论 ϕ 要一系列的公式

$S_0, S_1, \dots, S_n = \phi$

若存在这种证明，记

$\vdash \phi$

Soundness of a logical system （可靠性）

All axioms are valid and all inference rule has the properties: if both premises are valid then conclusion is also valid.

If $\vdash \phi$ then $\vDash \phi$

如果结论可以被证明，那么一定是有效的

Completeness of the system （完备性）

If $\vDash \phi$ then $\vdash \phi$

证明 satisfiability: If $\neg\phi$ is valid then ϕ is not satisfiable

$$\frac{\phi(x)}{\forall x\, \phi(x)}$$

由此可以进入 FOL 的证明，其系统同样可靠且完备.

但是，证明的长度可能是无上限的，

2.2 Tableau Method

我看网上也有叫分析表的，考虑到"表"比"树"笔划少，就叫分析表吧。

其核心规则如下：

1. 从 root 开始将所求公式 ϕ 展开直到 it is completed.
2. 如果得到 open tableau 则 ϕ is satisfiable
3. 反之 ϕ is not satisfiable.
4. 展开 $\neg\phi$ 以确定 validity

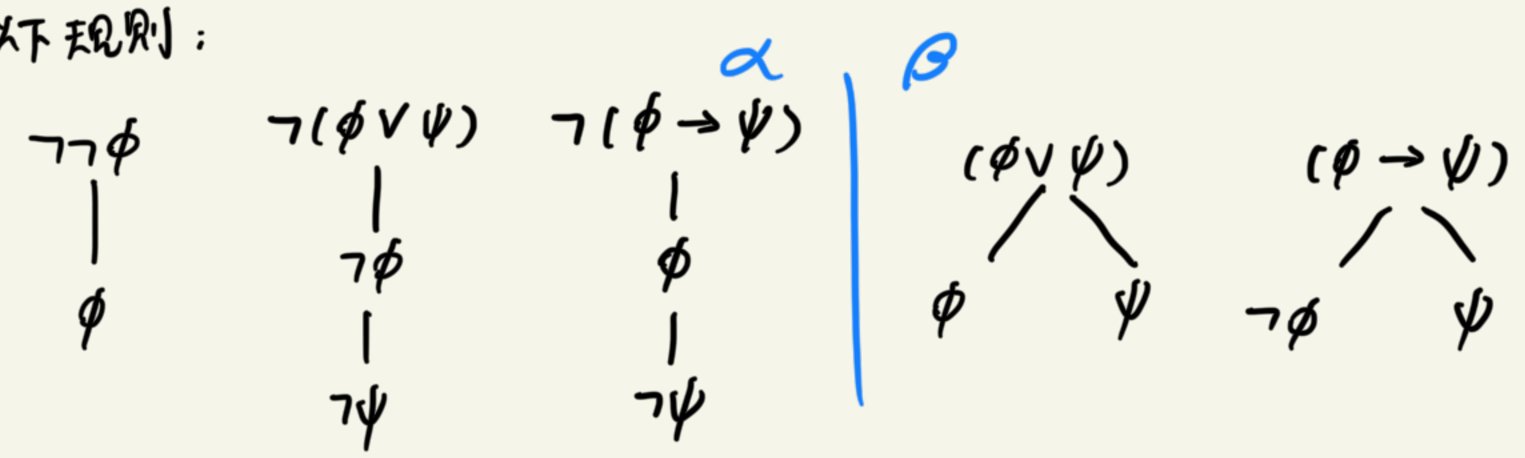
4. 展开 ¬φ 以确定 validity

2.3 Propositional Expand

只有 propositional letter 及其 negation 无法再展开。

它们被称为 literals

有以下规则：



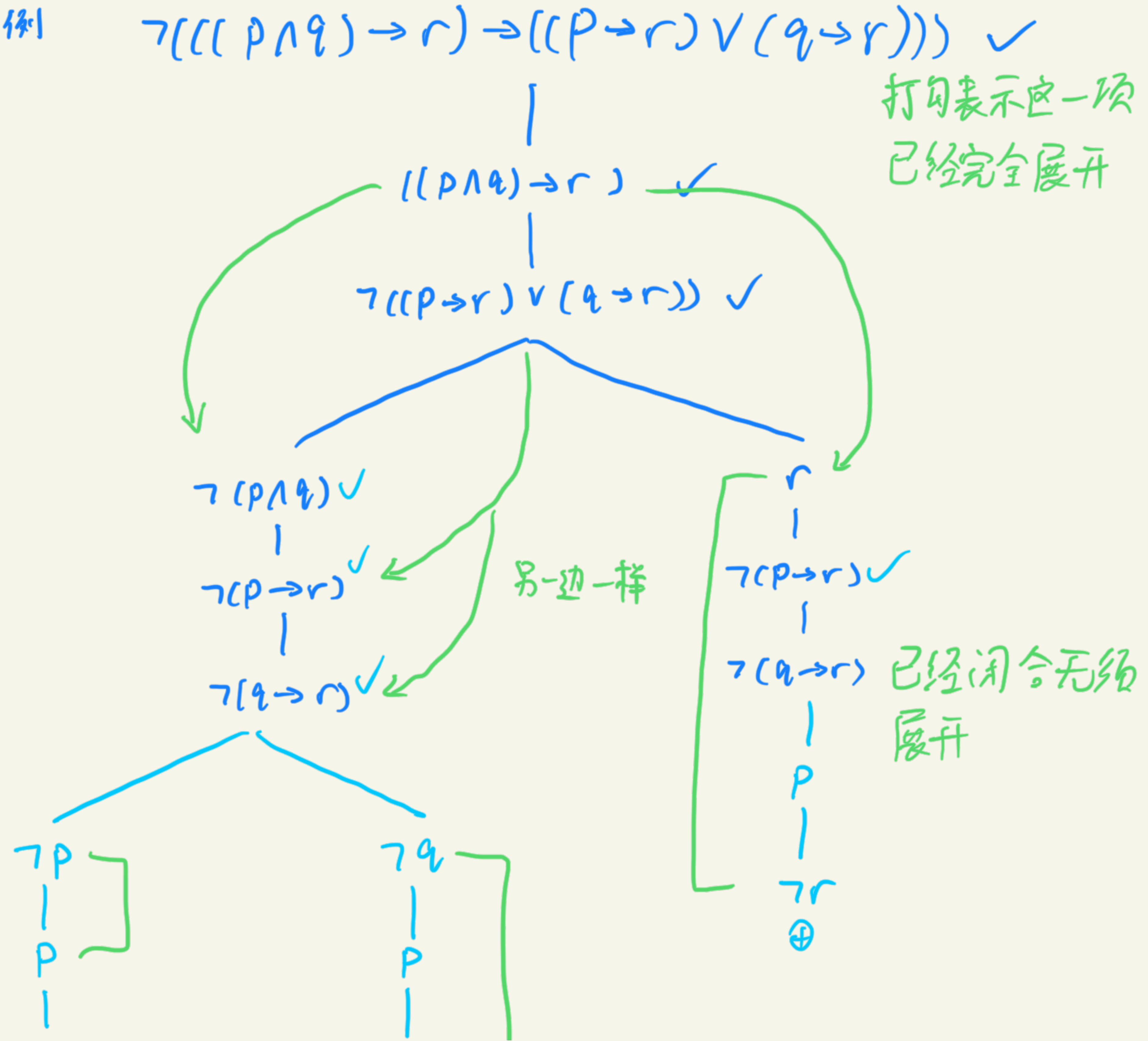
当某个 branch 包含 P 和 $\neg P$ 这样的内容后，其为 closed，反之 open.

若所有 branches 都闭合则整个分析表 closed，反之 open.

A complete open tableau (Has open branch) : satisfiable

A complete closed tableau (All branches closed): unsatisfiable

例



$\neg r$ $\neg r$

已经闭合，
无须展开最后一项

$\oplus$

$|$

q

$|$

$\neg r$

$\oplus$

closed tableau - root formula is unsatisfiable

Hence $(((p \wedge q) \to r) \to ((p \to r) \vee (q \to r)))$ is valid

Propositional Tableaus 具有可靠性和完备性。

① 画好的分析表指示的结果是一定正确的

② 对任何 fm 都一定能画出符合结果的分析表

对于②，课上有对 termination 的证明（不考）。propositional Tableaus are finite.

步数不超过 $2^{2|\phi|}$ ← 考虑肯否

考虑展开

析表法是基于DNF绘制的

$\wedge$ = And，$\vee$ = 不是 and，or

对于 disjunction，就要开成两个 branch.

否定的 disjunction，画成同一列的两个 negation.

蕴含指 "前提不成立" 或 "结论成立" 故 $\equiv \neg\phi \vee \psi$

close 指某种可能不存在，故要 p，$\neg p$ 判定

branches 之间是或关系，故均 closed 才能证明整表 closed.

等价于 unsatisfiable. 反之，某种可能中或关系里一项成立，satisfiable.

2.4 Predicate Expand

在FOL中，literal 是 atom or its negation. 也就是 $p^n(t_1, \dots, t_n)$ 等.

A closed term 是没有 variables 的 term，c 或 $f(c)$.

对 Predicate Tableaus，要新增以下两类公式：

γ δ

$\forall x \phi$ （不打勾）　　$\neg\exists x\phi$　　$\exists x \phi$ ✓　　$\neg\forall x\phi$ ✓

$|$　　$|$　　$|$　　$|$

$\phi(t/x)$　　$\neg\phi(t/x)$　　$\phi(c/x)$　　$\neg\phi(c/x)$

任意 closed term　　　　　　未用过的 constant

例: $\neg(\forall x\, \neg P(x) \to \neg \exists y\, P(y))$ ✓

(2) $\forall x\, \neg P(x)$ ✓

$\neg\neg \exists y\, P(y)$ ✓

(4) $\exists y\, P(y)$

$\delta(4, c)$

$P(c)$

$\gamma(2, c)$

$\neg P(c)$

$\otimes$

Closed tableau - root formula is unsatisfiable.
Hence $(\forall x\, \neg P(x) \to \neg \exists y\, P(y))$ is valid.

例2: $\forall x(Gx \to Hx) \wedge \forall x(Hx \to Fx) \wedge Ga \wedge \neg\exists x(Gx \wedge Fx)$ ✓

(3) $\forall x(Gx \to Hx)$

(4) $\forall x(Hx \to Fx)$

Ga

(6) $\neg\exists x(Gx \wedge Fx)$

$\gamma(6, a)$

$\neg(Ga \wedge Fa)$ ✓

Left branch: $\neg Ga$

$\otimes$

Right branch: $\neg Fa$

$\gamma(4, a)$

$Ha \to Fa$ ✓

$\neg Ha$ $\qquad\qquad$ Fa

$\quad | \ \gamma(3,a)$ $\qquad\qquad \oplus$

$Ga \to Ha$ ✓

$\neg Ga$ $\quad$ Ha

$\oplus$ $\quad$ $\oplus$

Closed tableau.

例3： 对于 $\neg\exists x\,\forall y\,\neg(x<y)$

可以不断地获得

$\neg\forall y\,\neg(c<y)$ ✓ $\qquad\qquad$ $\neg\forall y\,\neg(d<y)$ ✓

$\quad|\qquad\qquad\qquad\qquad|$

$\neg\neg(c<d)$ $\qquad\qquad$ $\neg\neg(d<e)$

将永远不会 close，故其为 open tableau.

对 prop fm，我们强调其 tableau 是有限的。显然 例3 satisfiable，也可以通过归纳法证明，但其完整分析表无法画出。

故对于 FOL，可能存在无限循环的 tableau，用纯粹分析表法无法分辨其真伪。

Gamma 和 Delta 分别用于 all 和 exist

δ 为内部公式替换未使用的常数，即 $\exists x\,\phi(x) \to \phi(c)$

γ 为内部公式替换 close term，即 $\forall x\,\phi(x) \to \phi(t)$

由于这种原因，我们先展开所有 δ，然后展开所有 γ 并仅使用在归纳法的 base case 中必须的变量数量尝试，

故 predicate tableaus 既正确（satisfiable 的永不闭合）

又完备（not satisfiable 的会在有限步闭合）

2.5 Rank

predicate

$$Rk(P(t_0,\cdots,t_{k-1})) = 1$$

$$Rk(\neg\phi) = 1 + Rk(\phi)$$

$$Rk(\neg\phi) = 1 + Rk(\phi)$$

$$Rk((\phi \circ \psi)) = 1 + Rk(\phi) + Rk(\psi)$$

$$Rk(\exists x \phi) = 1 + Rk(\phi)$$

$$Rk(\forall x \phi) = 1 + Rk(\phi)$$

2.6 Herbrand Models

$(p \neq q) \wedge \forall z((z = p) \vee (z = q))$ ✓

$p \neq q$

$\forall z(z = p \vee z = q)$ ✓

$(p = p \vee p = q)$

$(q = p \vee q = q)$

(continue)

$p = p$ | $p = q$ ⊕

$q = p$ ⊕ | $q = q$

open, root formula is satisfiable

所以它的 Herbrand Structure 包含了 p, q 两个元素。

III Modal Logic

3.1 Syntax & Semantics

$prop ::= p \mid q \mid r \mid \cdots$

$\phi ::= prop \mid \neg\phi \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \to \phi) \mid \Diamond\phi \mid \Box\phi$

$M, v \models \Diamond\phi \Leftrightarrow$ there is $w \in W\ (v, w) \in R$ and $M, w \models \phi$

possible　　与其相邻至少有一格有 ϕ

$M, v \models \Box\phi \Leftrightarrow$ for all $w \in W$ if $(v, w) \in R$ then $M, w \models \phi$

necessary, $\Box p = \neg\Diamond\neg p$　　与其相邻所有格都有 ϕ

W = worlds　R = relations　V = valuations

3.2 Validity

Valid in a model:

$(W, R, V) \models \phi \Leftrightarrow$ for all $v \in W\ (W, R, V), v \models \phi$

Valid in a frame:

$(W, R) \models \phi \Leftrightarrow$ for all valuations $V\ (W, R, V) \models \phi$

Validity ⇒ validity in M ⇒ satisfiability in M ⇒ satisfibility

3.3 P-morphism

这是一种映射 $f: W \to W'$:

① $\forall v, w \in W$: if $(v,w) \in R$ then $(f(v), f(w)) \in R'$

② $\forall v \in W$ $\forall u \in W'$: if $(f(v), u) \in R'$ then

$\exists w \in W : f(w) = u$ and $(v, w) \in R$

Reflexive ⇔ $M \models \Box A \to A$

Transitive ⇔ $M \models \Box A \to \Box\Box A$

3.4 Modal Tableau

$K = \{$all valid formulas over all frames$\}$

而 $\phi \in K \iff \neg\phi$ is not satisfiable

从 T_0 开始:

空集,指暂无关联,与之前的phi不同

$T_0 = [((\{w_0\}, \varnothing), \lambda_0)]$ ← list 形式更适合 Modal logic

$\lambda: W \to Form$, Form是所有formulas的集合

$\lambda_0(w_0) = \{\neg\phi\}$

这里的每一项都叫 labelled frame (F, λ). 其closed的条件是存在一个世界w和命题P满足 $\{P, \neg P\} \subseteq \lambda(w)$。当一个labelled frame is closed,就可以从list 里面删去。

选择任一 alternative labelled frames 和 non-literal formula $\psi \in \lambda(w)$ for some world w in the frame.

有以下四种展开规则:

α : $(\neg\neg\phi, \neg(\phi \vee \psi), \neg(\phi \to \psi))$ replace α by α_1 and α_2

$\lambda(w)$ 对应的 forms 去掉 α 加上分解结果

β : $(\phi \vee \psi, \phi \to \psi)$ 把 (F, λ) 替换为两个 alternative labelled frames. 一个把 β 换成 β_1,另一个换成 β_2.

这是唯一一种会让 list 变长的

γ: $(\Box\theta)\ \gamma'=\theta$ $\quad(\neg\Diamond\theta)\ \gamma'=\neg\theta$

根据选中的 $\gamma\in\lambda(w)$，对所有 w' where $(w,w')\in R$，将 γ' 加入 $\lambda(w')$

δ: $(\Diamond\theta)\ \delta'=\theta$ $\quad(\neg\Box\theta)\ \delta'=\neg\theta$

新增一个 $w'\notin W$ 并令 $\lambda(w')=\{\delta'\}$ 并新增一条从 w 到 w' 的联系。

例: $\Diamond P\wedge\Box(P\rightarrow\Diamond P)$

$[((\{x\},\phi),\ \lambda(x)=\{\Diamond P\wedge\Box(P\rightarrow\Diamond P)\})]$

$[((\{x\},\phi),\ \lambda(x)=\{\Diamond P,\ \Box(P\rightarrow\Diamond P)\})]$

$[((\{x,y\},\{(x,y)\}),\ \lambda(x)=\{\Box(P\rightarrow\Diamond P)\},\lambda(y)=\{P\})]$

$[((\{x,y\},\{(x,y)\}),\ \lambda(y)=\{P,\ P\rightarrow\Diamond P\})]$

$[((\{x,y\},\{(x,y)\}),\ \lambda(y)=\{P,\neg P\}),((\{x,y\},\{(x,y)\}),\ \lambda(y)=\{P,\Diamond P\})]$

$[((\{x,y,z\},\{(x,y),(y,z)\}),\ \lambda(y)=\{P\},\ \lambda(z)=\{P\})]$

所以对原式，有 $W=\{x,y,z\}$，$R=\{(x,y),(y,z)\}$，$V(P)=\{y,z\}$，在 x 处成立。

3.5 Temporal Logic

$\underline{F}\approx\Diamond$ means at some time in the future

$\underline{G}\phi=\neg\underline{F}\neg\phi$ $\quad\underline{G}$ means at all times in the future

$\underline{P}\approx\Box$ means at some time in the past

$\underline{H}\phi=\neg\underline{P}\neg\phi$

3.6 Propositional Dynamic Logic (PDL)

存在多种 relations，$\overline{R}=(R_0,\dots,R_{k-1})$

$(W,\overline{R}),V,w\models\Diamond_i\phi$ $\Leftrightarrow$ There is some $w'\in W$ with $(w,w')\in R_i$ and $(W,\overline{R}),V,w'\models\phi$

$(W,\overline{R}),V,w\models\Box_i\phi$ $\Leftrightarrow$ Whenever $(w,w')\in R_i$ there is $(W,\overline{R}),V,w'\models\phi$

IV Entailment, Compactness and Incompleteness

4.1 Compactness

对FOL中的一个句子集，若其任意有限子集都有模型，则其本身也有。

通常，要证明一个概念无法用FOL定义，要先假设其可以，但它与所有非自己的集合（$P = P_1 \cup \cdots \cup P_n$，则 $\{P, \neg P_1, \dots, \neg P_n\}$）显然应该有一个模型，也即它成立但不在任何情况下成立，得出矛盾。

Let $\phi_k = \cdots$. Suppose for contradiction that theory Σ exists and consider $\Sigma \cup \{\phi_k : k = 1, 2, 3 \cdots\}$. Every finite subset has a model. By compactness, there is a model of $\Sigma \cup \{\phi_k : k = 1, 2, 3 \cdots\}$. … a contradiction.

4.2 Completeness

哥德尔不完备性定理证明了（蕴含自然数（…）的）系统中总存在不可被证明的真命题。总是无法证明其自身的自恰。

$$\exists \phi \ \neg(\models \phi \rightarrow \vdash \phi)$$

但若所有子集均自洽，根据compactness，整体也自洽。

V Algebraic Logic

5.1 Boolean Algebra

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad --a = a$$

$$a + b = b + a \qquad a + \overline{a} = 1$$

$$a + a = a \qquad -1 = 0$$

$$0 + a = a \qquad -(a + b) = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad a + (a \cdot b) = a$$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$$- : \quad 0 \mapsto 1, \quad 1 \mapsto 0$$

$$(B, 0, 1, +, \cdot, -)$$

这里0和1之外的小写字母就是B中的元素

5.2 Representation

power set

An isomorphism $\theta : B \to P(X)$

$$0^\theta = \phi \qquad 1^\theta = X \qquad (a+b)^\theta = a^\theta \cup b^\theta$$

$$(a \cdot b)^\theta = a^\theta \cap b^\theta \qquad (-a)^\theta = X \setminus a^\theta$$

布尔代数可以映射到一个幂集(某个集合子集的集合)，在4.5中再讲

5.3 Boolean Order

$$a \le b \iff a+b=b$$

5.4 Atom

a is an atom of B if

① $0 \neq a$

② for all $b \in B$ if $0 < b \le a$ then $b = a$

5.5 Stone's Theorem

Every boolean algebra is representable onto a field of sets.

这里的 field of sets 就是 power set algebra $P(X)$，或者是

$(P(X), \phi, X, \cup, \cap, \setminus)$，也就是4.2中说的幂集。

5.6 Relation algebra

$Id_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$

$$(P, \phi, U, \underbrace{\cup}_{\text{并集}}, \cap, \setminus, Id_X, ^{\smile}, ;)$$

composition $(x,y) \in (R;S) \iff \exists z \in X((x,z) \in R \wedge (z,y) \in S)$

universal relation $U \subseteq X \times X$

converse $R^{\smile} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$

Representation: isomorphism $\theta: A \to P(X \times X) \leftarrow Rel(X)$

relation

5.7 Forbidden Triples

(a,b,c) where $a;b \cdot c^{\smile} = 0$

也即对 $(x,y) \in a$，$(y,z) \in b$，不存在 $(x,z) \in c$

例如

;	1'	#
1'	1'	#
#	#	1 (=1'+#)

其有3个 forbidden triples

$(1', 1', \#)$ $(1', \#, 1')$ $(\#, 1', 1')$

$\# \not\subseteq 1';1' = 1'$ $1' \not\subseteq 1';\# = \#$ $1' \not\subseteq \#;1' = \#$

5.8 Equivalence Relation

Reflexivity: $x \sim x$

Symmetry: $a \sim b \iff b \sim a$

Transitivity: $a \sim b \wedge b \sim c \to a \sim c$