# Math Note

ianaesthetic

September 19, 2017

# 1 空间几何

## 1.1 点法式方程

在知道一个在平面上的点$M(x_0,\ y_0,\ z_0)$和法向量$\mathbf{n}=(A,\ B,\ C)$时，通过这个平面上任意一个向量与法向量垂直可以得出这个平面为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

## 1.2 平面的一般方程

$$Ax+By+Cz=0$$

其中法向量为 $(A,\ B,\ C)$

# 2 多元微分学

## 2.1 偏导数在几何中的应用

### 2.1.1 空间曲线的切线和法平面

空间曲线的一般参数形式为：$\begin{cases} x= & x(t) \\ y= & y(t) \\ z= & z(t) \end{cases}$ 讨论一般空间曲线的切线方程。

$$\frac{x-x_0}{x(t)-x(t_0)}=\frac{y-y_0}{y(t)-y(t_0)}=\frac{z-z_0}{z(t)-z(t_0)}$$

$$\frac{x-x_0}{\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}}=\frac{y-y_0}{\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}}=\frac{z-z_0}{\frac{z(t)-z(t_0}{t-t_0}}$$

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \tag{1}$$

所以切向量和法平面为

$$(x^{'}(t),\ y^{'}(t),\ z^{'}(t)) \tag{2}$$

$$x^{'}(t)(x-x_0)+y^{'}(t)(y-y_0)+z^{'}(t)(z-z_0)=0 \tag{3}$$

注意，在这个公式出现可能的$\frac{0}{0}$时，需要写成其他形式如：

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{x'(t)}= & \dfrac{y-y_0}{y'(t)} \\ z= & z_0 \end{cases}$$

还有的曲线方程形如：$y=f(x),z=g(x)$, 直接将$x$看作参数，套用上面的公式。

如果是两曲面交的形式$F(x,y,z)=0,G(x,y,z)=0$，则使用隐函数推导得到$y,z$对于$x$的导数。推导方式就是对两边同时求$x$的偏导，然后解一个线性方程。

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

定理：曲线 $\begin{cases}F(x,\ y,\ z)= & 0\\ G(x,\ y,\ z)= & 0\end{cases}$在$P_0$的发平面是由梯度向量**grad**$F(P_0)$ 和**grad**$G(P_0)$张成的过$P_0$的平面。

证明思路：由于雅各布矩阵满秩证明线性无关，并证明两个梯度向量与切向量垂直。