

1

可能性为0的时间不一定是不可能事件，设想：在圆内找随机找到任意一个点的概率都为0，但是不是不可能事件，
给定一个随机试验，对于这个试验的样本空间的描述不止一种。

2 条件概率与事件的独立性

定义：设A，B为两个事件，且 $P(A) > 0$ 则称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为事件A发生条件下B发生的条件概率

注意 $P(AB)$ 和 $P(B|A)$ 的差别。并且注意这两种情况的不同措辞。

计算方法：如果A发生之后，样本空间能够重新很清楚的得出，那么就用古典概型来计算。否则使用公式来进行计算（公式中的所有值都是依照于原来的样本空间来计算的）。条件概率同样适用于概率的性质，是已知原因寻求结果。

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$$

上面的式子就是概率的乘法定理，用来计算复杂事件的概率，下面时推广。

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cdots A_{n-1})$$

波利亚罐子模型：两种球，取球时会加入某数量个同色球。这是一个简化的传染病模型。注意在这个模型中复杂事件中使用惩罚概率。

在描述事件的时候要尽量做到周全完善，比如「所取两件中至少有一件是不合格品」而不是「所取的两件中有一件是不合格品」。

2.1 事件的独立性

当A，B是随机事件的时候， $P(A) > 0$,

$$P(B) = P(B|A)$$

则称事件B独立于事件A。

独立性是相互的，及A独立于B则B也独立与A，以此为基础定义A和B相互独立，当且仅当以下条件满足：

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

注意当 $P(A) = 0$ 的时候，则一定A和B相互独立。判断A B事件是否相互独立，一定要按照定义进行计算。相互独立的本质是一个事件的发生对于另外一个事件发生的概率没有任何影响。

如果A，B相互独立，则 \bar{A} 与B，A与 \bar{B} ， \bar{A} 和 \bar{B} 相互独立，可以通过这个互相判断是否事件是否相互独立。

注意「A B相互独立」和「A B互不相容」的区别：互不相容是集合关系，表示交集为空。相互独立表示的是一个数值相等的概率关系。

$$\text{if } P(A) > 0, P(B) > 0, AB = \phi$$

$$P(AB) = 0, P(A) \cdot P(B) \neq 0$$

2.1.1 多个事件独立性

n 个事件要相互独立，则要求所有的任意两个事件之间都相互独立。

3 全概率公式和

3.1 分割

定义：设 A_1, A_2, \dots, A_n 满足

$$A_i A_j = \phi, P(A_i) = 0, i \neq j$$

3.2 全概率公式

公式：设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个分割， B 为任意一个事件，则

$$B = \bigcup_{i=1}^n A_i B$$

显然 $A_i B$ 互不相容，于是

$$P(B) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

全概率公式是一个概率加法定理和乘法定理的结合，可以将事件进行分解成简单概率的总和。全概率事件的实质是不同事件 A_1, A_2, \dots, A_n 导致了 B 事件发生的概率的综合。

在知道概率递推公式的情况下，可以使用数学归纳法取证明。如使用数学归纳法计算抽签模型的概率的时候：

设定事件 A_i 为「在第 i 次抽取到白球」，而数学归纳法假定 $P(A_i) = \frac{a}{a+b}$

$$P(A_{i+1}) = P(A_{i+1}|A_i) + P(A_{i+1}|\bar{A}_1)$$

$$P(A_{i+1}|A_1) = P(A_2|A_1), \quad P(A_{i+1}|\bar{A}_1) = P(A_2|\bar{A}_1)$$

3.3 Bayes 公式

设 A_1, A_2, \dots, A_n 是一个分割， B 为任意一个事件， $P(B) > 0$ ，则

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

内涵：全概率公式的逆用，相当于分割其中的某一个事件相比于所有事件对于事件 B 的贡献的占比。表示结果一定的情况下，求导致原因的概率。不用执着于直接看出来是Bayes公式，在计算条件概率的时候会自然想到全概率公式。在公式之中，我们认为 $P(A_i)$ 是验前概率， $P(A_i|B)$ 是验后概率，是对于新信息出现时对于概率的修正(例子：用Bayes公式解释狼来了)。

重要的例子：习题集 P29, 13; P27, 7;