Iván Osvaldo Carbajal Aldana.
189186

<u>pregunta 1:</u>

$(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e.v.n / $\mathbb{R}$.

Sea $Y = \mathcal{P}_1([0,1]) = \{ p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : p$ es polinomio de grado a lo más $1 \}$

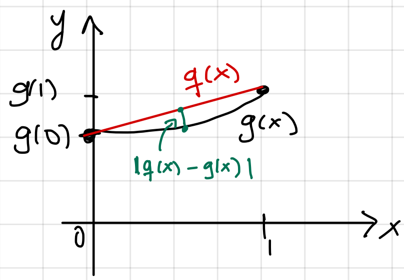
Sea $g \in C([0,1])$; $g(x) = \sqrt{1+x^2}$

Sea $q(x) \in \mathcal{P}_1([0,1])$ tal que $q(0) = g(0)$ y $q(1) = g(1)$

como $g(0) = 1 \neq \sqrt{2} = g(1)$ entonces

$q(x) > g(x)$ si $x \in (0,1)$, ya que

$q \in \mathcal{P}_1([0,1])$.



Sea $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = q(x) - g(x)$

h es una función continua, ya que es la resta de 2 funciones continuas, además como $g(x) < q(x)$ para toda $x \in (0,1)$ entonces $h(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$. Tenemos que:

$$h(0) = q(0) - g(0) = g(0) - g(0) = 0$$

$$h(1) = q(1) - g(1) = g(1) - g(1) = 0$$

$$\therefore h(0) = 0 = h(1)$$

Por el ejemplo visto en clase sabemos que el conjunto de mejores aproximantes de h es $MA(h) = \left\{ \frac{\|h\|_\infty}{2} \right\}$.

esto es:

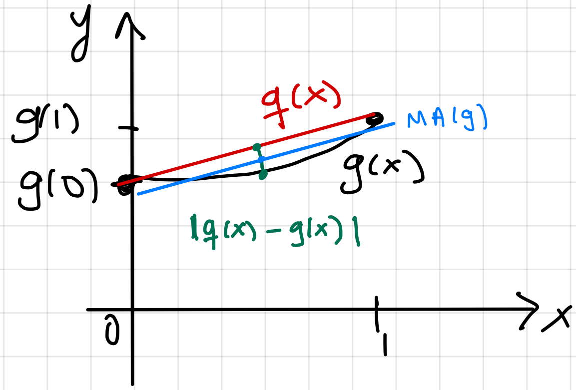
$$h(x) \approx \frac{\|h\|_\infty}{2}$$

$\Rightarrow$

$$q(x) - g(x) \approx \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$$

$\Rightarrow$

$$g(x) \approx q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$$



$$\therefore \; MA(g) = \left\{ q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2} \right\}$$

<u>Pregunta 2:</u>

Sea $p^* = q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$ donde $q \in P_1([0,1])$, $q(0) = g(0)$, $q(1) = g(1)$

Calculamos q explícitamente y obtenemos que:

$$q(x) - g(1) = (g(1) - g(0))(x-0)$$

$\Rightarrow$

$$q(x) - 1 = (\sqrt{2} - 1)x$$

$\Rightarrow$

$$q(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$$

Por lo que:

$$q(x) - g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{1+x^2}$$

calculamos los puntos críticos:

$$\frac{d}{dx}\left[q(x) - g(x)\right] = 0 \iff \sqrt{2}-1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \iff (\sqrt{2}-1)\sqrt{1+x^2} = x \iff$$

$$\iff (\sqrt{2}-1)^2(1+x^2) = x^2 \iff \left[(\sqrt{2}-1)^2 - 1\right]x^2 + (\sqrt{2}-1)^2 = 0 \iff$$

$$\iff x^2 = \frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{\left[(\sqrt{2}-1)^2-1\right]} \iff |x| = (\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{\frac{-1}{\left[(\sqrt{2}-1)^2-1\right]}}$$ el cual

esta bien definido, ya que $1 > (\sqrt{2}-1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[(\sqrt{2}-1)^2-1\right] < 0 \Rightarrow \frac{-1}{\left[(\sqrt{2}-1)^2-1\right]} > 0 .$$

solo nos interesa el punto:

$$x^* = (\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{\frac{-1}{\left[(\sqrt{2}-1)^2-1\right]}} \approx 0.45508986$$, ya que $x \in [0,1]$

Calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[q(x)-g(x)\right] = \frac{-1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$$

evaluamos y tenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[q-g\right](x^*) \approx -.48528163 < 0$$

x^* es un máximo y como $q-g$ son continuas en un compacto entonces:

$$\|q-g\|_\infty = (q-g)(x^*) \approx .08982028$$

$$\therefore \quad p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + 1 - \frac{.08982028}{2} = (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$

El mejor aproximante en $\mathbb{P}_1([0,1])$ de $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ esta dado por:

$$p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$