Jan Oswaldo Carbajal Aldana

18918L

Pregunta 1:

Sea $f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x)=\sqrt{x}$

① P.D: f es unif. continua.

Demostración: Sea $\varepsilon>0$.

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|^2=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\cdot\left|\,|\sqrt{x}|-|\sqrt{y}|\,\right|,$$

ya que $\sqrt{x}\geqslant 0$ y $\sqrt{y}\geqslant 0$, por lo que $\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|^2\leq\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right|\cdot\left|\sqrt{x}+\sqrt{y}\right|$

lo que implica que $\left|f(x)-f(y)\right|^2\leq|x-y|$.

Tomando $\delta=\varepsilon^2$, si $|x-y|<\delta \Rightarrow \left|f(x)-f(y)\right|^2<\varepsilon^2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\blacksquare$

$\therefore f(x)=\sqrt{x}$ es uniformemente continua.

---

② PD: f no es de lipschitz.

Demostración:

Supongamos que f es de lipschitz, esto es: $\exists\, c>0$ t.q. $\forall x,y\in[0,1]$ se tiene $|f(x)-f(y)|\leq c\,|x-y|$.

En particular si tomamos $x=\frac{1}{n}$, $y=0$ con $n\in\mathbb{N}$ tenemos que:

$$\left|\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}-\sqrt{0}}{\frac{1}{n}-0}\right|\leq c\Rightarrow\left|\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}\right|\leq c\Rightarrow\left|\frac{n}{\sqrt{n}}\right|\leq c\Rightarrow\sqrt{n}\leq c\Rightarrow n\leq c^2$$

lo cual es una contradicción.

$\therefore f$ no es de lipschitz $\blacksquare$