Pregunta 2:

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

PD: f no es uniformemente continua $\Longleftrightarrow$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, existen $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en D tales que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$

Demostración: $\Rightarrow$)

Como f no es uniformemente continua entonces $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, x, y \in D$ tal que $\|x - y\| < \delta$ y $\|f(x) - f(y)\| \geq \varepsilon_0$.

Si tomamos $\delta = 1$ entonces por definición existen $x_1, y_1 \in D$ tales que $\|x_1 - y_1\| < 1$ y $\|f(x_1) - f(y_1)\| \geq \varepsilon_0$.

Si tomamos $\delta = \frac{1}{2}$ entonces por definición existen $x_2, y_2 \in D$ tales que $\|x_2 - y_2\| < \frac{1}{2}$ y $\|f(x_2) - f(y_2)\| \geq \varepsilon$.

En general al tomar $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ por definición existen $x_n, y_n \in D$ tales que $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$

Definimos $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ como las sucesiones que toman los valores anteriores. Entonces $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ tales que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$.

$\Leftarrow$) contrapositivo Sea $\varepsilon_0 > 0$.

Supongamos que f es uniformemente continua entonces por definición sabemos que $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall\, x, y \in D$,
$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon_0$.

Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en D tales que $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ entonces sabemos que $x_n - y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

y por definición sabemos que $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_0$, $\|x_n - y_n\| < \delta$

y como f es uniformemente continua entonces;

$$\|x_n - y_n\| < \delta \Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| < \varepsilon_0.$$

Por lo tanto:

f unif. continua $\Rightarrow \forall\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ se tiene que
$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \|f(x_n) - f(x_n)\| < \varepsilon_0.$$

$\therefore$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0, \exists\, (x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty}$ t.q. $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ y $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow$

f no es uniformemente continua.

$\blacksquare$