

Jan Osvaldo Carbajal Aldana.
189186

Pregunta 1:

$(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e.v.n / \mathbb{R} .

Sea $\mathcal{V} = \mathcal{P}_1([0,1]) = \{ p: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ es polinomio de grado a lo más } 1 \}$

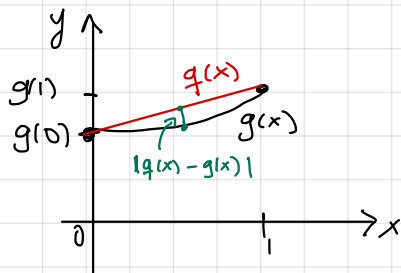
Sea $g \in C([0,1])$; $g(x) = \sqrt{1+x^2}$

Sea $q(x) \in \mathcal{P}_1([0,1])$ tal que $q(0) = g(0)$ y $q(1) = g(1)$

como $g(0) = 1 \neq \sqrt{2} = g(1)$ entonces

$q(x) > g(x)$ si $x \in (0,1)$, ya que

$q \in \mathcal{P}_1([0,1])$.



Sea $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = q(x) - g(x)$

h es una función continua, ya que es la resta de 2 funciones continuas, además como $g(x) < q(x)$ para toda $x \in (0,1)$ entonces $h(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$. Tenemos que:

$$h(0) = q(0) - g(0) = g(0) - g(0) = 0$$

$$h(1) = q(1) - g(1) = g(1) - g(1) = 0$$

$$\therefore h(0) = 0 = h(1)$$

Por el ejemplo visto en clase sabemos que el conjunto de mejores aproximantes de h es $\mathcal{MA}(h) = \left\{ \frac{\|h\|_\infty}{2} \right\}$.

esto es:

$$h(x) \approx \frac{\|h\|_\infty}{2}$$

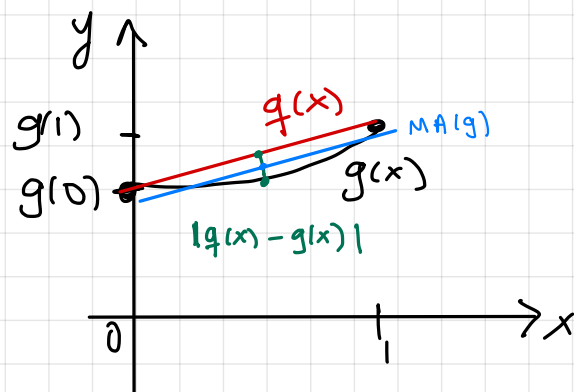
\Rightarrow

$$q(x) - g(x) \approx \frac{\|q - g\|_\infty}{2}$$

\Rightarrow

$$g(x) \approx q(x) - \frac{\|q - g\|_\infty}{2}$$

$$\therefore q(x) - \frac{\|q - g\|_\infty}{2} \in MA(g)$$



Pregunta 2:

Sea $p^* = q(x) - \frac{\|q - g\|_\infty}{2}$ donde $q \in \mathcal{P}_1([0,1])$, $g(0) = g(0)$, $g(1) = g(1)$

Calcular q explícitamente y obtener que:

$$q(x) - g(x) = (g(1) - g(0))(x - 0)$$

\Rightarrow

$$q(x) - 1 = (\sqrt{2} - 1)x$$

\Rightarrow

$$q(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$$

Por lo que:

$$q(x) - g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{1+x^2}$$

Calcular los puntos críticos:

$$\frac{d}{dx} [q(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1) \sqrt{1+x^2} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2} - 1)^2 (1+x^2) = x^2 \Leftrightarrow [(\sqrt{2} - 1)^2 - 1] x^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{-(\sqrt{2} - 1)^2}{[(\sqrt{2} - 1)^2 - 1]} \Leftrightarrow |x| = (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{\frac{-1}{[(\sqrt{2} - 1)^2 - 1]}} \quad \text{el cual}$$

está bien definido, ya que $1 > (\sqrt{2} - 1)^2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [(\sqrt{2} - 1)^2 - 1] < 0 \Rightarrow \frac{-1}{[(\sqrt{2} - 1)^2 - 1]} > 0$$

solo nos interesa el punto:

$$x^* = (\sqrt{2} - 1) \cdot \sqrt{\frac{-1}{[(\sqrt{2} - 1)^2 - 1]}} \approx 0.45508986, \quad \text{ya que } x \in [0, 1]$$

Calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2} [q(x) - g(x)] = \frac{-1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}$$

evaluamos y tenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2} [q - g](x^*) \approx -0.48528163 < 0$$

x^* es un máximo y como $q - g$ son continuas en un compacto entonces:

$$\|q - g\|_{\infty} = (q - g)(x^*) \approx 0.08982028$$

$$\therefore p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + 1 - \frac{.08982028}{2} = (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$

El mejor aproximante en $P_1([0,1])$ de $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ está dado por:

$$p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$

Para calcular el error podemos utilizar el mismo punto

$$x^*, E_1(g) = \|p^* - g\|_{\infty} \approx (p^* - g)(x^*) =$$

$$= (\sqrt{2}-1)(0.45508986) + .95508986 - \sqrt{1 + (0.45508986)^2} \approx .04491014$$

$$\therefore E_1(g) \approx .04491014$$

