Ivan Oswaldo Carbajal Aldana
189186

pregunta 1:

$B(D) = \{ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ esta acotada$\}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Donde:

$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in D \}$

① PD: $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(D)$.

Demostración: Sean $f, g \in B(D)$.

ⓐ $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D\}$, como $|f(x)| \geq 0$ para toda $x \in D$ entonces $\|f\|_\infty \geq 0$, para toda $f \in B(D)$.

ⓑ Si $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup\{|f(x)| \mid x \in D\} = 0 \iff |f(x)| = 0 \iff$
$\iff f(x) = 0$, ya que $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{R}$.

ⓒ $\|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup\{|\lambda \cdot f(x)| \mid x \in D\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)| \mid x \in D\} =$
$= |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| \mid x \in D\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

ⓓ

$\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| \mid x \in D\} \leq \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in D\}$, ya que se cumple la desigualdad del triangulo con el valor absoluto. Además como $\sup\{A+B\} = \sup A + \sup B$ entonces:

$$\|f+g\|_\infty \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in D\} + \sup\{|g(x)| \mid x \in D\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$\therefore$ $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en $B(D)$.

② P.D: $\forall x \in D$, $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ con $g \in B(D)$.

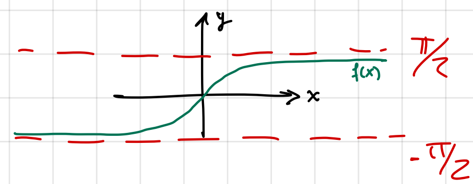
Demostración: Sea $g \in B(D)$.

como $\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| \mid x \in D\}$ entonces sabemos que por definición se cumple: $\|g\|_\infty \geq z$, $\forall z \in \{|g(x)| : x \in D\}$

y $\|g\|_\infty$ es la mínima cota superior del conjunto. Por lo que podemos asegurar que $\|g\|_\infty \geq |g(x)|$, $\forall x \in D$. ⊠

Ejemplo:

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ; $f(x) = \tan^{-1}(x)$.




Podemos ver que $f \in B(\mathbb{R})$, ya que $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

en particular $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \|f\|_\infty = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore |f(x)| < \|f\|_\infty, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

---

③ No necesariamente, ya que si tomas distintos puntos del Dominio D. No se puede garantizar que la norma sea mayor o igual, ya que en la norma se toman los mismos puntos.

Si $x = y$ entonces tenemos el caso anterior y si es verdad que $|f(x) - g(y)| \leq \|f - g\|_\infty$, $\forall x, y \in D$.

(4) Sabemos que $B_1^{\|\cdot\|_\infty}(I) = \{ g \in B(D) \mid \|g - I\|_\infty < 1 \}$

Ejemplo: $D = [0,1]$

Sea $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $g(x) = x^2$ , $g \in B(D)$ , ya que $0 < x^2 < 1$ en $D$.

como $x^2 - x$ tiene un mínimo en $x = \frac{1}{2}$ , ya que

$\frac{d}{dx}[x^2 - x] = 2x - 1$ . igualado a cero tenemos que $x = \frac{1}{2}$ .

y por el test de la segunda derivada $\frac{d^2}{dx^2}\left[x^2 - x\right] = 2 > 0$.

$\therefore x = \frac{1}{2}$ es un mínimo.

evaluamos y tenemos que $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ donde $f(x) = x^2 - x$ .

y es por esto que podemos decir que $\|g - I\|_\infty = \frac{1}{4} < 1$ .

y como $g$ es acotada en $D$ entonces $g \in B_1^{\|\cdot\|_\infty}(I)$