Juan Oswaldo Carbajal Aldana
189186

Pregunta 1!

Sea $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n'(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

PD: si $f_n \xrightarrow[n \to \infty]{} g$ puntualmente entonces g es continua.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$.

$$|f_n'(x)| \leq 1 \Rightarrow \int_y^x |f_n'(x)|\, dx \leq \int_y^x dx \Rightarrow \int_y^x |f_n'(x)|\, dx \leq (x-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_y^x f_n'(x)\, dx \right| \leq (x-y) \Rightarrow \left| f_n(x) - f_n(y) \right| \leq (x-y) \leq |x-y|$$

tomemos $\delta = \varepsilon$. si $|x-y| < \delta$ entonces:

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y| < \delta = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

$\therefore$ todas las $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $|f_n'(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ son uniformemente continuas.

Además, como $f_n \longrightarrow g$ puntualmente tenemos que:

$$|g(x) - g(y)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |f_n(y) - g(y)| + |f_n(x) - f_n(y)| \leq 3\varepsilon$$

$\therefore$ g es uniformemente continua $\Rightarrow$ g es continua ∎