Jan O. Carbajal A.
189186

Se define recursivamente la sucesión $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ así:

$$P_0(x) = 0 \quad \text{y} \quad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left[x - (P_n(x))^2\right]$$

Pregunta 1: PD: P_n es un pol para $n \in \mathbb{N}$.

Base inducción: $n=1$

$$P_1(X) = P_0(X) + \frac{1}{2}\left[X - (P_0(X))^2\right] = 0 + \frac{1}{2}(X - 0) = \frac{1}{2}X.$$

$\therefore$ $P_1(x)$ es un polinomio.

Hipótesis de inducción: $n = K-1$

Supongamos que $P_{K-1}(x)$ es un polinomio.

P.D: $P_K(x)$ es un polinomio.

Prueba:

Por definición sabemos que $P_K(x) = P_{K-1}(x) + \frac{1}{2}\left(x + (P_{K-1}(x))^2\right)$.

como $P_{K-1}(x)$ es un polinomio por hipotesis de inducción entonces $(P_{K-1}(x))^2$ es un polinomio por ser una composición de polinomios, por lo que $\frac{1}{2}\left(x + (P_{K-1}(x))^2\right)$ es un polinomio por ser la suma de 2 polinomios, y finalmente tenemos que: $P_{K-1}(x) + \frac{1}{2}\left(x + (P_{K-1}(x))^2\right)$ es un polinomio por ser una suma de polinomios. Por lo que $P_K(X)$ es un polinomio.

$\therefore$ $P_n(x)$ es un polinomio, $\forall n \in \mathbb{N}$.

como $P_0(X) = 0$ es el polinomio constante cero, entonces $P_n(x)$ es un polinomio para $n = 0, 1, 2, \ldots$ ∎

pregunta 2: PD: si $x\in[0,1] \Rightarrow P_n(x)\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Base de inducción: $n=0$.

$$P_0(x)=0 \text{ por definición } \Rightarrow 0\leq P_0(x)\leq 1, \quad x\in[0,1]$$

Hipotesis de inducción: $n=K-1$.

Supongamos que $0\leq P_{K-1}(x)\leq 1$ es verdadero para $x\in[0,1]$.

PD: $0\leq P_K(x)\leq 1$, $x\in[0,1]$.

Prueba:

$$P_K(x)=P_{K-1}(x)+\frac{1}{2}\left(x-\left(P_{K-1}(x)\right)^2\right) \quad \text{por construcción.}$$

como $P_{K-1}(x)\leq 1$ por hipótesis de inducción entonces

$$P_K(x)\leq 1+\frac{1}{2}(x-1)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1, \text{ ya que } x\in[0,1]$$

ademas como $P_{K-1}(x)\geq 0$ por hipótesis de inducción entonces

$P_K(x)\geq\frac{1}{2}x>0$, ya que $x\in[0,1]$

$$\therefore\ 0\leq P_n(x)\leq 1, \quad x\in[0,1], \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

$\blacktriangle$

Sea $t\in[0,1]$, entonces sabemos que:

$$0\leq P_n(t)\leq 1, \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Por construcción del polinomio sabemos que:

$$P_n(t)-P_{n+1}(t)=P_n(t)-\left(P_n(t)+\frac{1}{2}\left(t-\left(P_n(t)\right)^2\right)\right)=-\frac{1}{2}\left(t-\left(P_n(t)\right)^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\left[P_n(t)\right]^2\leq-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

esto es: $P_n(t)-P_{n+1}(t)\leq 0 \Rightarrow P_n(t)\leq P_{n+1}(t)$.

$$\therefore\ 0\leq P_n(t)\leq P_{n+1}(t), \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

PD: $P_n(t) \leq \sqrt{t}$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Demostración:

Base de inducción: $n=0$

si $t \in [0,1]$ entonces $P_0(t) = 0 \leq \sqrt{t}$.

Hipotesis de inducción: $n = k-1$

supongamos que $P_{k-1}(t) \leq \sqrt{t}$ es verdadero.

Prueba:

$$\sqrt{t} - P_k(t) = \sqrt{t} - P_{k-1}(t) - \frac{1}{2}\left(t - \left(P_{k-1}(t)\right)^2\right) = \left(\sqrt{t} - P_{k-1}(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_{k-1}(t)\right)\right)$$

como $P_{k-1}(t) \leq \sqrt{t}$ por hipotesis de inducción y $t \in [0,1]$ entonces:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_{k-1}(t)\right) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} + P_{k-1}(t)\right) \geq 0.$$

$$\therefore \sqrt{t} - P_k(t) \geq \left(\sqrt{t} - P_{k-1}(t)\right) \cdot 0 = 0.$$

$$\Rightarrow P_k(t) \leq \sqrt{t}$$

$$\therefore P_n(t) \leq \sqrt{t}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Por el resultado anterior podemos afirmar que:

$$0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad t \in [0,1].$$

$\blacksquare$

Pregunta 3:

P.D: $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.

Demostración:

Sea $t \in [0,1]$ fijo. Como $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t) \leq \sqrt{t}$ entonces $(P_n(t))_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente y acotada y por el teorema de convergencia monotona $(P_n(t))_{n=0}^{\infty}$ converge.

$\therefore$ $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ converge puntualmente a $p(x)$.

Y se satizface que:

$$p(x) = p(x) + \frac{1}{2}\left(t - (p(x))^2\right) \Rightarrow 0 = t - (p(x))^2 \Rightarrow p(x) = \sqrt{x}.$$

$\therefore$ $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{x}$. , $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ converge puntualmente a $\sqrt{x}$.

Pregunta 4:

P.D: $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} \sqrt{x}$.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$.

Como los polinomios son funciones continuas entonces: $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas, además por la pregunta 2 sabemos que $P_n(x) \leq P_{n+1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $x \in [0,1]$ como $\sqrt{x}$ es continua en $[0,1]$, ya que cuando $|x-a| < \varepsilon\sqrt{a}$. tenemos que $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| \leq \left|\frac{x-a}{\sqrt{a}}\right| < \frac{\varepsilon\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \varepsilon$. Entonces por el Teorema de Dini podemos afirmar que:

$$P_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} \sqrt{x}$$

$\blacksquare$

Pregunta 5:

Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $q_n(x) = P_n(x^2)$, $x \in [-1,1]$.

PD: $q_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{u} |x|$, $x \in [-1,1]$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$.

Como $P_n \xrightarrow[n\to\infty]{u} \sqrt{x}$ entonces existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall n \geq N_\varepsilon$, $\sup_{x\in[0,1]} \{ |P_n(x) - \sqrt{x}| \} < \varepsilon$.

Sea $h : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$; $h(x) = x^2$

Sea $y \in [-1,1]$ entonces $h(y) \in [0,1]$. Como $h(y) \in [0,1]$ tenemos que:

$$|P_n(h(y)) - \sqrt{h(y)}| < \varepsilon \quad , \forall y \in [-1,1]$$

lo que implica:

$$|P_n(y^2) - \sqrt{y^2}| = |q_n(y) - |y|| < \varepsilon \quad , \forall y \in [-1,1].$$

$$\Rightarrow \sup_{y\in[-1,1]} \{ |q_n(y) - |y|| \} < \varepsilon$$

$$\therefore \quad q_n(y) \xrightarrow[n\to\infty]{u} |y|$$

$\blacksquare$