Iván Osvaldo Carbajal Aldana.
189186

pregunta 1:

$(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ e.v.n / $\mathbb{R}$.

Sea $Y = \mathcal{P}_1([0,1]) = \{ p : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : p$ es polinomio de grado a lo más $1 \}$

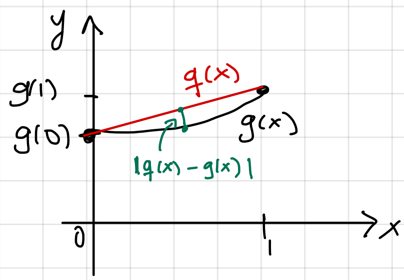
Sea $g \in C([0,1])$ ; $g(x) = \sqrt{1+x^2}$

Sea $q(x) \in \mathcal{P}_1([0,1])$ tal que $q(0) = g(0)$ y $q(1) = g(1)$

como $g(0) = 1 \neq \sqrt{2} = g(1)$ entonces

$q(x) > g(x)$ si $x \in (0,1)$, ya que

$q \in \mathcal{P}_1([0,1])$.




Sea $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = q(x) - g(x)$

$h$ es una función continua, ya que es la resta de 2 funciones continuas, además como $g(x) < q(x)$ para toda $x \in (0,1)$ entonces $h(x) > 0$, $\forall x \in (0,1)$. Tenemos que:

$$h(0) = q(0) - g(0) = g(0) - g(0) = 0$$

$$h(1) = q(1) - g(1) = g(1) - g(1) = 0$$

$$\therefore \; h(0) = 0 = h(1)$$

Por el ejemplo visto en clase sabemos que el conjunto de mejores aproximantes de $h$ es $MA(h) = \left\{ \frac{\|h\|_\infty}{2} \right\}$.

esto es:

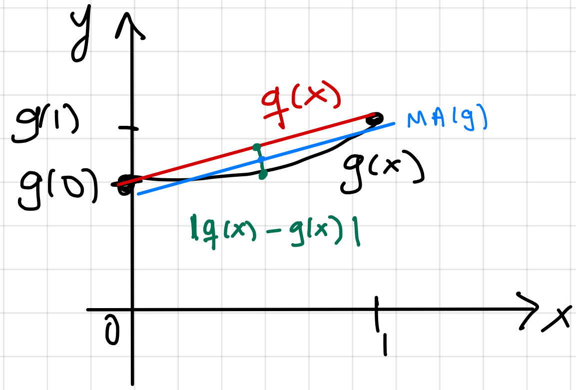
$$h(x) \approx \frac{\|h\|_\infty}{2}$$

$\Rightarrow$

$$q(x) - g(x) \approx \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$$

$\Rightarrow$

$$g(x) \approx q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$$




$$\therefore\ MA(g) = \left\{ q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2} \right\}$$

## Pregunta 2:

Sea $p^* = q(x) - \frac{\|q-g\|_\infty}{2}$ donde $q \in \mathbb{P}_1([0,1])$, $q(0) = g(0)$, $q(1) = g(1)$

Calculamos $q$ explícitamente y obtenemos que:

$$q(x) - g(1) = (g(1) - g(0))(x - 0)$$

$\Rightarrow$

$$q(x) - 1 = (\sqrt{2} - 1)x$$

$\Rightarrow$

$$q(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1$$

Por lo que:

$$q(x) - g(x) = (\sqrt{2} - 1)x + 1 - \sqrt{1 + x^2}$$

calculamos los puntos críticos:

$$\frac{d}{dx}[q(x)-g(x)]=0 \iff \sqrt{2}-1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0 \iff (\sqrt{2}-1)\sqrt{1+x^2}=x \iff$$

$$\iff (\sqrt{2}-1)^2(1+x^2)=x^2 \iff [(\sqrt{2}-1)^2-1]x^2+(\sqrt{2}-1)^2=0 \iff$$

$$\iff x^2=\frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{[(\sqrt{2}-1)^2-1]} \iff |x|=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{\frac{-1}{[(\sqrt{2}-1)^2-1]}}$$ el cual

esta bien definido, ya que $1>(\sqrt{2}-1)^2\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow [(\sqrt{2}-1)^2-1]<0 \Rightarrow \frac{-1}{[(\sqrt{2}-1)^2-1]}>0$$

solo nos interesa el punto:

$$x^*=(\sqrt{2}-1)\cdot\sqrt{\frac{-1}{[(\sqrt{2}-1)^2-1]}}\approx 0.45508986$$ , ya que $x\in[0,1]$

Calculamos la segunda derivada

$$\frac{d^2}{dx^2}[q(x)-g(x)]=\frac{-1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(\sqrt{1+x^2})^2}=\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2})}$$

evaluamos y tenemos que:

$$\frac{d^2}{dx^2}[q-g](x^*)\approx -.48528163<0$$

$x^*$ es un máximo y como $q-g$ son continuas en un compacto entonces:

$$\|q-g\|_\infty=(q-g)(x^*)\approx .0898202 8$$

$$\therefore \quad p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + 1 - \frac{.08982028}{2} = (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$

El mejor aproximante en $\mathbb{P}_1([0,1])$ de $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ esta dado por:

$$p^* \approx (\sqrt{2}-1)x + .95508986$$

Para calcular el error podemos utilizar el mismo punto $x^*$. $E_1(g) = \|p^* - g\|_\infty \approx (p^* - g)(x^*) =$

$$= (\sqrt{2}-1)(0.45508986) + .95508986 - \sqrt{1 + (0.45508986)^2} \approx .04491014$$

$$\therefore \; E_1(g) \approx .04491014$$