Pregunta 1:

(a) un subconjunto de A de un espacio vectorial normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es no acotado si y solo si para todo $M>0$ existe $a\in A$ tal que $\|a\|>M$.

(b) P.D: $\forall M>0, \exists a\in A \ni \|a\|>M \iff \forall n\in\mathbb{N}, \exists a_n\in A \ni \|a_n\|>n$.

demostración: $\Rightarrow)$

Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado y sea $A\subseteq\mathbb{X}$ un conjunto no acotado, esto quiere decir que $\forall M>0, \exists a\in A$ tal que $\|a\|>M$, si tomamos $n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$, como $n\geq 1>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ tenemos que $\forall n\in\mathbb{N}, \exists a_n\in A$ tal que $\|a_n\|>n$.

$\Leftarrow)$ Sea $A\subseteq\mathbb{X}$ y $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un e.v.n. donde $\forall n\in\mathbb{N}, \exists a_n\in A \ni \|a_n\|>n$

Supongamos que A es acotado, esto es:

$$\exists M>0 \ni \forall a\in A, \|a\|\leq M.$$

Por la propiedad arquimediana sabemos que $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $M<n$, lo que implica que $\|a\|<n$, $\forall a\in A$, lo cual contradice nuestra hipótesis de que $\forall n\in\mathbb{N}, \exists a_n\in A$ t.q. $\|a_n\|>n$.

Por lo que A no es acotado, o bien:

$$\forall M>0, \exists a\in A \ni \|a\|>M.$$

∎

(c) PD: Si $\mathbb{X}\neq\{0\}$ entonces $\mathbb{X}$ contiene algún subconjunto no acotado.

Demostración: Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado sobre $\mathbb{R}$.

Si $\mathbb{X}\neq\{0\}$ entonces como $\mathbb{X}\neq\emptyset$, por definición de espacio vectorial, tenemos que $\exists\vec{x}\in\mathbb{X}$ tal que $\vec{x}\neq\vec{0}$. Definimos el conjunto $A=\{t\cdot\vec{x}\in\mathbb{X} \mid t\in\mathbb{R}, \|\vec{x}\|>1\}$

es fácil ver que $A \subseteq X$ por construcción. Además A no es un conjunto acotado, ya que $\forall M > 0$, existe $\vec{a} = M \cdot \vec{x} \in A$ tal que $\|\vec{a}\| = \|M \cdot \vec{x}\| = |M| \|\vec{x}\| > |M| = M$.

$\therefore X$ contiene algún subconjunto no acotado. ■