Ivan O. Carbajal Aldana
189186

Pregunta 1:

PD: si $f \in C([0,1])$ entonces f puede aproximarse uniformemente por polinomios cuyos coeficientes son números racionales.

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $P_{\mathbb{Q}}([0,1]) = \{ P : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$: P es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q} \}$

si tomamos $\mathcal{A} = P_{\mathbb{Q}}([0,1])$ es facil ver que $\mathcal{A} \subseteq C([0,1])$, ya que los polinomios son continuos. Además se cumple que:

① $P(x) = 1$, $x \in [0,1]$, $P \in P_{\mathbb{Q}}([0,1]) = \mathcal{A}$.

② $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $C([0,1])$ sobre $\mathbb{Q}$.

Demostración:

ⓐ $0 \in P_{\mathbb{Q}}([0,1]) = \mathcal{A}$.

ⓑ para $p, q \in P_{\mathbb{Q}}([0,1])$ al tomar:

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \quad , \quad q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

tenemos que:

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \cdots$$

y como $a_i, b_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow a_i + b_i \in \mathbb{Q}$ entonces tenemos que $p + q \in P_{\mathbb{Q}}([0,1])$

$$\therefore \quad p, q \in \mathcal{A} \Rightarrow p + q \in \mathcal{A}. \quad //$$

(c) si $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{Q}$ entonces

$$\alpha p = \alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots$$

y como $\alpha, a_i \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha a_i \in \mathbb{Q}$ entonces $\alpha p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1])$.

$\therefore$ $p \in \mathcal{A}$, $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \alpha p \in \mathcal{A}$.

$\therefore$ $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $C([0,1]) \setminus \mathbb{Q}$

(3) $\mathcal{A}$ es un álgebra de funciones.

Demostración:

Sean $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1])$, como el producto de números racionales es un número racional y el producto de polinomios es un polinomio entonces $p.q \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1])$.

$\therefore$ si $p, q \in \mathcal{A} \Rightarrow p.q \in \mathcal{A}$.

(4) si $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$ entonces $\exists\, p \in \mathcal{A}$ tal que $p(x) \neq p(y)$.

Demostración: Sea $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1])$, $x, y \in [0,1]$.

Sea $p(x) = p(y) \Rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = a_1 y + a_2 y^2 + \cdots \Rightarrow a_1(x-y) + a_2(x^2 - y^2) + \cdots = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^n - y^n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. o $a_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow x = y$ o $a_i = 0$, $i = 1, \ldots$

$\therefore$ $x \neq y \Rightarrow \exists\, p \in \mathcal{A} \ni p(x) \neq p(y)$.

Como se cumplen las propiedades ①, ②, ③, ④ entonces por el teorema de Stone-Weierstrass sabemos que:

$$\mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1]) \text{ es } \|\cdot\|_\infty\text{-denso en } C([0,1])$$

o bien,

$$\forall f \in C([0,1]),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists p \in \mathcal{P}_{\mathbb{Q}}([0,1]) \text{ tal que } \|p - f\|_\infty < \varepsilon.$$

$\Rightarrow$

si $f \in C([0,1])$ entonces f puede aproximarse uniformemente por polinomios con coeficientes racionales.

<u>Pregunta 2:</u>

PD: si $g \in C([-1,1])$ es par. i.e. $g(-x) = g(x)$ entonces g puede aproximarse uniformemente por polinomios de la forma $\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^{2k}$.

<u>Demostración:</u> Sea $\varepsilon > 0$.

Como $g \in C([-1,1])$ entonces por el teorema de aproximación de Weierstrass sabemos que $\exists p \in P([-1,1])$ tal que $\|p - g\|_\infty < \varepsilon$. esto es, $|p(x) - g(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [-1,1]$. Es fácil ver que si $x \in [-1,1]$ entonces $-x \in [-1,1]$, por lo que se cumple que:

$$|p(-x) - g(-x)| < \varepsilon$$

como g es una función par entonces $g(-x) = g(x)$. Por lo que:

$$|p(-x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Sumando ambas desigualdades tenemos que:

$$|p(x) - g(x)| + |p(-x) - g(x)| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\left(|p(x) - g(x)| + |p(-x) - g(x)|\right) < \varepsilon$$

Por la desigualdad del triangulo tenemos que:

$$\frac{1}{2}\left[\left| (p(x) + p(-x)) - (g(x) + g(-x)) \right| \right] < \varepsilon$$

$\Rightarrow$

$$\left| \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)) - \frac{1}{2}(g(x) + g(-x)) \right| < \varepsilon$$

Como g es par entonces $g(-x) = g(x)$, lo que implica que:

$$\left| \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)) - g(x) \right| < \varepsilon \quad , \forall x \in [-1, 1]$$

$\Rightarrow$

$$\left\| \frac{1}{2}(p(x) + p(-x)) - g(x) \right\|_{\infty} < \varepsilon$$

Como $p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ entonces tenemos que

<u>Caso I</u>: n es par

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n$$

$$+ \quad p(-x) = b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots + b_n x^n$$

$$p(x) + p(-x) = 2b_0 + 2b_2 x^2 + 2b_4 x^4 + 2b_n x^n$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}(p(x) + p(-x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^n \qquad a_k = b_{2k}$$

Caso II: n es impar

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n$$

$$+ \quad p(-x) = b_0 - b_1 x + b_2 x^2 - b_3 x^3 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} - b_n x^n$$

$$p(x) + p(-x) = 2b_0 + 2b_2 x^2 + 2b_4 x^4 + 2b_{n-1} x^{n-1}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(p(x) + p(-x)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k \, , \qquad a_k = b_{2k}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(p(x) + p(-x)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k \, , & n \text{ es par.} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \cdot x^{k-1} \, , & n \text{ es impar.} \end{cases}$$

$\therefore$ g puede aproximarse uniformemente por polinomios de la forma $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^{2k}$.

$\blacksquare$