Pregunta 2:

ⓐ una sucesión $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ en un espacio vectorial normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ no converge en $\mathbb{X}$ si y solo si para toda $x^* \in \mathbb{X}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $N \in \mathbb{N}$ existe $n \geq N$ tal que $\|x_n - x^*\| > \varepsilon$.

ⓑ PD: $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a x^* si y solo si: $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ $\ni$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_{n_k} - x^*\| \geq \varepsilon_0$.

Demostración:

$\Rightarrow$]

Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a x^* entonces $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ tal que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists\, n \geq N$ y $\|x_n - x^*\| > \varepsilon_0$.

Tomando $N_{k+1} > \max\{N_k, n_k, k+1\}$ existe $n_{k+1} > N_{k+1}$ tal que: $\|x_{n_{k+1}} - x^*\| > \varepsilon_0$. $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ya que $n_k < n_{k+1}$, por lo que para toda $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\|x_{n_k} - x^*\| > \varepsilon_0$. ▲

$\Leftarrow$]

Si $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ y $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_{n_k} - x^*\| > \varepsilon_0$. Supongamos por reducción al absurdo que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x^*, esto nos dice que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ esta acotada y por el teorema de Bolzano - Weierstrass existe $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a x^*, esto es para $\varepsilon_0 > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq N$, $\|x_{n_k} - x^*\| < \varepsilon_0$. ⚡ lo cual es una contradicción.

$\therefore (x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a x^* ■