Juan Osvaldo Carbajal Aldana

189186

Pregunta 1:

Sean $f \in C([a,b])$, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ y $\varepsilon > 0$.

PD: $\exists\ p \in \mathbb{P}([a,b]) \ni \| p - f \|_\infty < \varepsilon$ y $p(x_k) = f(x_k)$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$.

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$.

Por el teorema de aproximación de Weierstrass sabemos que existe $q(x) \in \mathbb{P}([a,b])$ tal que $\| q - f \|_\infty < \varepsilon$.

Consideremos $r(x) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - q(x_k)) \cdot \ell_k(x)$ donde $\ell_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$.

Entonces tenemos que $r(x_k) = f(x_k) - q(x_k)$ para toda $1 \leq k \leq n$.

Además tenemos que $\| r \|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} | f(x_k) - q(x_k) | \cdot \| \ell_k \|_\infty$ por la desigualdad del triangulo. Por lo que $\| r \|_\infty < M \cdot \varepsilon$ donde $M = \sum_{k=1}^{n} \| \ell_k \|_\infty$ y M sólo depende de $x_1, \ldots, x_n$.

Sea $p(x) = r(x) + q(x)$, entonces como $r(x_k) = f(x_k) - q(x_k)$ para toda $1 \leq k \leq n$, tenemos que:

$$p(x_k) = r(x_k) + q(x_k) = f(x_k) + q(x_k) - q(x_k) = f(x_k)$$

$\Rightarrow$

$$p(x_k) = f(x_k) \text{ para toda } 1 \leq k \leq n$$

Además tenemos que:

$$\| p - f \|_\infty \leq \| r \|_\infty + \| q - f \|_\infty < M \cdot \varepsilon + \varepsilon = (1 + M)\varepsilon$$

$\blacksquare$