1/4/2025

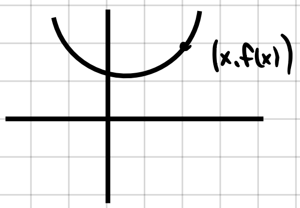
CAMPOS ESCALARES Y VECTORIALES

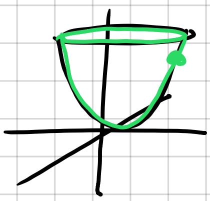
* Gráfica de una función escalar

- Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

La gráfica de una función escalar es: $G_f = \{ (x_1 \dots x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} / (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge y = f(x_1 \dots x_n) \}$

↪ Cuando grafico, aumenta una dimensión mas: ⟶ Agrego una var ⟶ imagen de la función





$f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$G_f \subseteq \mathbb{R}^3$

$\vec{x} = (x, y, f(x,y))$

* Conjunto de nivel

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, el conjunto nivel k de f se define como $N_k(f) = L_k(f)$

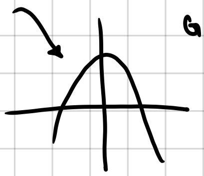
$N_k = \{ x \in \mathbb{R}^n / x \in D \wedge f(x) = k \} \Rightarrow \{ x \in D / f(x) = k \}$

- Ejemplo: Hallar conjunto Nivel 0 de $f(x,y) = 4y - y^2 - yx^2$ ⟶ Dom $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

Entonces ⟶ $N_0 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4y - y^2 - yx^2 = 0 \}$

Se puede simplificar $\underset{y \neq 0}{\Rightarrow}$ $4y - y^2 = y x^2 \Rightarrow x^2 = 4 - y \Rightarrow \boxed{y = 4 - x^2}$ una Parábola

Reescribimos $N_0 f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{matrix} y = 4 - x^2 \\ y \neq 0 \end{matrix} \}$

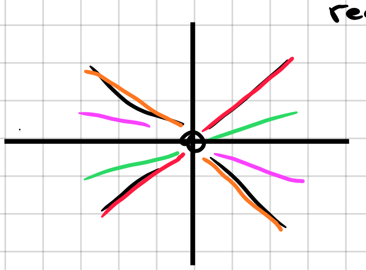


Gráfica de Conj nivel no es gráfica del campo escalar

- Ejemplo 2: Hallar conj nivel k $f(x,y) = y/x$

① $\Rightarrow$ Dom $= \mathbb{R}^2 - \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0 \}$

② $\Rightarrow N_k(f) = \{ (x,y) \in D / \frac{y}{x} = k \} \Rightarrow \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \underbrace{y = kx}_{\text{rectas}} \wedge x \neq 0 \}$



* Límite funciones varias variables

Sea $f = D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n > 1$ y sea A un punto de acumulación (interior/frontera) de D

Definición formal

Decimos que $\lim_{x \to A} f(x) = L$ si $\forall B(L, \varepsilon)$ existe $B^*(A, \delta)$ / si $x \in D \cap B^*(A,\delta) \to f(x) \in B(L,\varepsilon)$

Si $\boxed{m>1} \longrightarrow f(x) = (f_1(x) \dots f_m(x)) \to \lim_{x \to A} f(x) = L = (L_1 \dots L_m)$, donde $\lim_{x \to A} f_i(x) = L_i \quad \forall i \in [1, m]$

<u>Ejemplo</u>

- $\lim_{(x,y) \to (0,1)} \left[x^2 y + \cos(x)(y-2)^2 \right]$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 0}{(x^2 y)} + \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 1}{\cos(x)} \lim_{(x,y)\to(0,1)} \overset{\to 1}{[(y-2)^2]} = 0 + 1 = 1$$

- $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)}{x^4 + (y-1)^2} \Rightarrow$ Indet $\frac{0}{0} \longrightarrow$ No se puede simplificar con <u>L'Hopital</u> → para funciones de una sola variable

---

① PROBAR INEXISTENCIA DE LÍMITES POR CURVAS

↪ como el punto de tendencia es en $\mathbb{R}^2$ (en este caso) escojo hay infinitas formas de acercarme pero elijo una familia de curvas (rectas, parábolas) que pasen por el punto

↪ Este método sólo puede demostrar la inexistencia de un límite → No prueba la existencia de lim

<u>Ejemplo</u>

- fam rectas que pasan por $(0,1) \Rightarrow y = mx + 1$

- Evaluar puntos cerca de recta $\quad f(x, mx+1) = \dfrac{x^2(mx+1-1)}{x^4 + (mx+1-1)} = \dfrac{x^2 m x}{x^4 + m^2 x^2} = \dfrac{x^2 x m}{x^2(x^2 m^2)}$

- Evaluar límite en puntos de recta cerca del punto $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\overset{\to 0}{x^2 x m}}{x^2(x^2+m^2)} = 0 \Rightarrow$ si acerco con rectas el lim existe y es 0

- fam parábolas que pasan por $y = mx^2 + 1$

- Evaluar func en parábola $\quad f(x, mx^2+1) = \dfrac{x^2(mx^2+1-1)}{x^4 + (mx^2+1-1)^2} = \dfrac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4}$

- Ver límite en puntos de parábola cerca del punto $\quad \lim_{x\to 0} f(x, mx^2+1) = \lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 m x^2}{x^4 + m^2 x^4} = \lim_{x \to 0} \dfrac{m}{1+m^2}$ → CONST $\in \mathbb{R}$

pero $m \geq 0$ y $m < 0$?

Ambas parábolas dan un límite distinto ← $\begin{cases} f(x, x^2+1) = \frac{1}{2} \\ f(x, -x^2+1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ dan lím distinto $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$

Si el límite existe es único ←

* FUNCIONES ACOTADAS ⇒ sirve para calcular límite de forma 0 × acotado

(En gral) Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ decimos que f es acotada si $\exists M \in \mathbb{R} \wedge M > 0$

tal que $\|f(x)\| \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

y sea $S \subset D$ Decimos que f es acotada en S si existe $M > 0$ tal que $\|f(x)\| \le M \ \forall x \in S$

- Ejemplo $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ ⇒ acotada en toda bola reducida en $(0,0)$

$$x^2 \le x^2 \Rightarrow x^2 \le x^2 + \underbrace{y^2}_{\ge 0} \wedge (x,y) \ne (0,0) \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{M}$$

por lo tanto f es acotada $B^*(r,(0,0))$

⇒ En general si m y p son pares, $f(x,y) = \frac{x^m}{x^m+y^p}$, $g(x,y) = \frac{y^p}{x^m+y^p}$ son f. acotadas en toda bola abierta red con $c=(0,0)$

- Ej. $\lim_{x\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^6} = \lim_{x,y\to(0,0)} \underbrace{x^2}_{\to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^6}}_{\text{acotado}} = 0 \qquad \exists \lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^4}{x^2+y^6} = 0$

* Límite de campos vectoriales → se calc misma forma

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\underbrace{\frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f_1}, \underbrace{e^{x+y}}_{f_2}\right)$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1, \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2\right) = (0,1)$

demo acotado $x^2 \le x^2+y^2 \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{x+y} = 1.$
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\to 0}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{acotado}} \underbrace{y}_{\to 0} = 0$

* Continuidad de campos (escalar y vectorial)

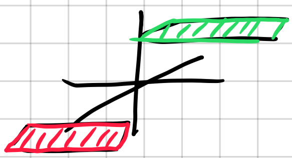
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con D abierto y $A \in D$ punto de acumulación,

decimos que f continua en A si $\exists \lim_{x\to A} f(x) = \exists f(A)$

f es continua en $S \subseteq D$ si es continua en todos los puntos de S

⇒ Ejemplos ① $f(x,y,z) = x^2 - yz$ → continua porque es polinomio

② $f(x,y) = \begin{cases} 1 & y \ge 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases}$



no es continua

* Derivada de Campos

- Derivadas de campos escalares

Sea $f = D \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $A \in D$ y $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$,

La derivada de f en A según $\vec{r}$ se define como $f'(A, \vec{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A + h\vec{r}) - f(A)}{h}$

- (caso versor $\check{r}$)

Si $\|\vec{r}\| = 1$ el lim anterior nos da la derivada direccional $f(A, \check{r}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A, \check{r}) - f(A)}{h}$

- (caso canónico $\check{r} = \check{e}_k$), $\check{e}_k = (\underbrace{0 \dots 1}_{k} \dots 0)$

→ en particular si se usa vector canónico, se lo llama derivada parcial de f en A respecto de x_k

$$f'(A, \check{e}_k) = \frac{df}{dx_k}(A)$$

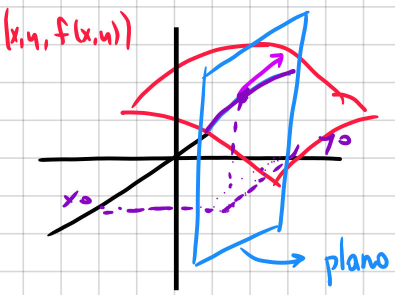
- propiedades

→ Si existe la derivada de un campo f en A según vector $\vec{r}$.

entonces existe la derivada en A según $\lambda\vec{r}$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar) y se cumple $f'(A, \lambda\vec{r}) = k f'(A, \vec{r})$

→ Si $\vec{r} \neq \vec{0}$. $\check{r} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \Rightarrow \vec{r} = \|\vec{r}\| \check{r} \Rightarrow f'(A, \vec{r}) = \|\vec{r}\| f'(A, \check{r})$

* Interpretación Geométrica de Derivada Parcial



$$\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (h, 0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{df}{dy}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

curva = [plano ∩ superficie]

Derivada parcial → pendiente de la recta tg al punto de la curva formada por la intersección del plano y la superficie (gráfico)

* Ejemplos prácticos

$$f(x, y, z) = xy + z^2$$

→ Cuando derivo respecto a una var. dejo las otras dos variables constantes

$\frac{d}{dx} f(x, y, z) = y \qquad \frac{d}{dy} f(x, y, z) = x \qquad \frac{d}{dz} f(x, y, z) = 2z$