PRÁCTICA 1

FUNCIONES REALES

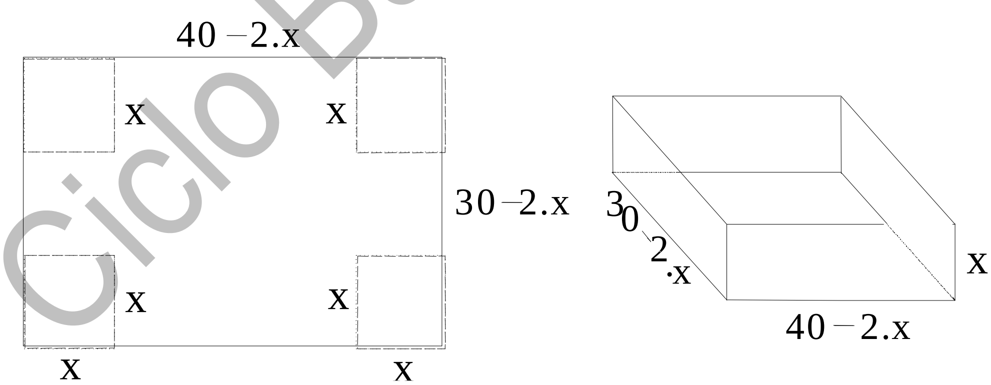
LAS FUNCIONES DESCRIBEN FENÓMENOS

EJERCICIO 1: Haga un gráfico que refleje la evolución de la temperatura del agua a lo largo del tiempo atendiendo a la siguiente descripción:

"Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo. Al principio, la temperatura bajó con rapidez, de modo que a los 5 minutos estaba en 60°. Luego fue enfriándose con más lentitud. A los 20 minutos de haberla sacado estaba a 30° y 20 minutos después seguía teniendo algo más de 20°, temperatura de la cual no bajó, pues era la temperatura que había en la cocina".

¿Es el gráfico que hizo, el único que respeta las consignas anteriores?

EJERCICIO 2: Con una lámina rectangular de 40 por 30 queremos hacer una caja como muestra la figura:



(a) Busque la expresión del volumen de la caja en función de *x*.

(b) ¿Cuál es el dominio?

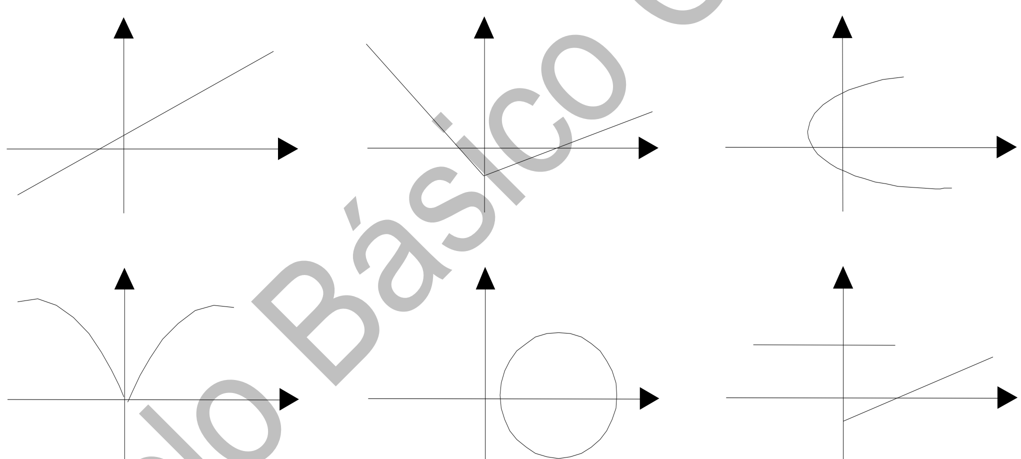
(c) Haga un gráfico aproximado a partir de una tabla de valores.

EJERCICIO 3: Entre todos los rectángulos de perímetro 20, halle la función que relaciona la base x con la altura y. Haga un gráfico que la represente. ¿Cuál es el dominio?

EJERCICIO 4: Halle el área de un triángulo rectángulo isósceles en función del cateto. Dibuje el gráfico de la función hallada a partir de una tabla de valores. Indique cuál es el dominio.

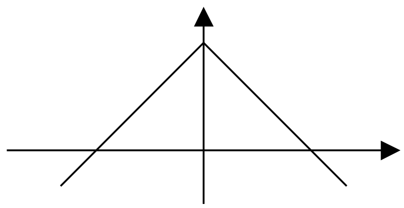
GRÁFICO DE FUNCIONES

EJERCICIO 5: Dados los siguientes conjuntos del plano, determine, en cada caso, si existe una función cuyo gráfico sea el dado

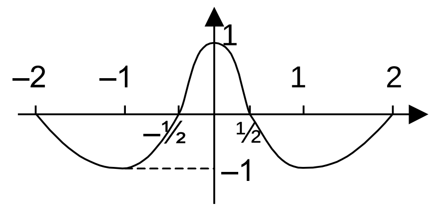


EJERCICIO 6: Dados los siguientes gráficos de funciones, determine, en cada caso, en qué intervalos es creciente, en qué intervalos es decreciente, en qué punto alcanza su máximo, cuál es dicho valor máximo, en qué punto alcanza su mínimo y cuál es el valor mínimo.

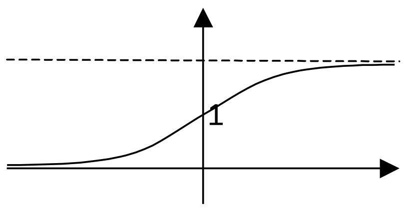
a)



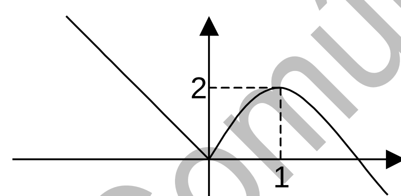
b)



c)



d)



EJERCICIO 7: Dibuje una función que sea creciente en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(2,+\infty)$. Además que el valor máximo sea 4 y se alcance en $x = -1$ y que el valor mínimo sea -3 y se alcance en $x = 2$.

LAS FUNCIONES MÁS USUALES

EJERCICIO 8:

(a) Encuentre en cada caso, una función lineal que satisfaga:

1. $f(1) = 5$; $f(-3) = 2$
2. $f(-1) = 3$; $f(80) = 3$
3. $f(0) = 4$; $f(3) = 0$
4. $f(0) = b$; $f(a) = 0$ $\quad$ a y b fijos.

(b) Calcule en 1. y en 2. $f(0)$. Calcule en 3. $f(-2)$

(c) Encuentre la pendiente de las rectas que son gráficas de las funciones lineales dadas en **(a)**. Haga un gráfico de tales rectas.

EJERCICIO 9: Halle la ecuación de la recta de pendiente *m* que pasa por el punto *P*, siendo:

(a) *P = (2 , 3)* *m = 1* **(b)** *P = (1 , 5)* *m = 0*

(c) *P = (3 , -4)* *m = -2* **(d)** *P = (0 , b)* *m = 1*

Haga el gráfico de cada una de ellas. Decida cuáles son crecientes y cuáles son decrecientes.

EJERCICIO 10: Encuentre la función lineal *g* que da la temperatura en grados Farenheit, conocida la misma en grados Celsius, sabiendo que 0°C = 32°F y 100°C = 212°F. Recíprocamente, encuentre la función *h* que da la temperatura en grados Celsius, conocida la misma en grados Farenheit. Compruebe que *g(h(x)) = h(g(x)) = x.*

EJERCICIO 11: Trace el gráfico de las siguientes funciones cuadráticas:

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $f(x) = -2x^2$

(c) $f(x) = x^2 - 3$ **(d)** $f(x) = -(x-5)^2$

Determine en cada caso, el conjunto imagen.

EJERCICIO 12: Para las siguientes funciones cuadráticas determine en qué intervalo crece, en qué intervalo decrece, dónde es positiva, dónde es negativa, en qué puntos se anula y en qué punto alcanza su extremo:

(a) $f(x) = -2x^2$ **(b)** $f(x) = -2x(x-3)$

(c) $f(x) = -2x^2 + x$ **(d)** $f(x) = x^2 + 2x + 1$

(e) $f(x) = -2(x+3)(x-5)$

EJERCICIO 13: Se arroja una pelota desde el suelo y la altura, en metros, viene dada por la función $h(t) = -5t^2 + 10t$, siendo *t* el tiempo medido en segundos.

¿Cuándo alcanza la altura máxima?

¿Cuál es dicha altura?

EJERCICIO 14: Represente gráficamente las siguientes funciones

(a) $f(x) = x^3$ **(b)** $f(x) = (x-2)^3$

(c) $f(x) = x^3 - 1$ **(d)** $f(x) = x^4$

Analice en cada caso, la monotonía.

EJERCICIO 15: Represente gráficamente las siguientes funciones

(a) $f(x) = \frac{4}{x}$ **(b)** $f(x) = -\frac{4}{x}$

(c) $f(x) = \frac{4}{x-3}$ **(d)** $f(x) = \frac{4}{x-3} + 2$

(e) $f(x) = \frac{4x+5}{x-2}$ **(f)** $f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Indique también en qué intervalos es creciente y en qué intervalos es decreciente.

EJERCICIO 16: Represente gráficamente las siguientes funciones

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ **(b)** $f(x) = -\sqrt{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x+3}$ **(d)** $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

Indique en cada caso, el dominio de la función. Analice la monotonía.

EJERCICIO 17: Halle el dominio de las siguientes funciones

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ **(b)** $f(x) = \sqrt{x-8}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ **(d)** $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. FUNCIÓN INVERSA

EJERCICIO 18: Considere las funciones reales definidas por las fórmulas

$$f(x) = 2x^2 + 5x \qquad g(x) = \frac{1}{x+3} \qquad h(x) = 2x - 6$$

(a) Calcule, si es posible:

$$(f \circ f)(-1) \qquad (f \circ h)(1) \qquad (g \circ f)(-1) \qquad (h \circ g)(2)$$

(b) Halle fórmulas para las composiciones que se indican a continuación.

$$f \circ g \qquad g \circ f \qquad (f \circ g) \circ h \qquad f \circ h \qquad f \circ f$$

(c) ¿ $f \circ g$ y $g \circ f$ son la misma función?

EJERCICIO 19: Halle la función inversa de:

(a) $f(x) = 3x - 5$

(b) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \geq 0$

(c) $f(x) = 3 - \sqrt{x+5}$

(d) $f(x) = x^3$

(e) $f(x) = x^2 - 6x + 4$, $x \geq 3$

(f) $f(x) = x^2 - 6x + 4$, $x \leq 3$

EJERCICIO 20: Pruebe que la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$ satisface $f(\frac{1}{x}) = \sqrt{x}\, f(x)$ para todo *x* positivo.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

EJERCICIO 21: Dada las funciones exponenciales $f(x) = r^x$ (*r = 2* , $\frac{1}{2}$, *3* , $\frac{1}{3}$),

(a) Haga el gráfico de cada una de ellas.

(b) Determine el dominio y la imagen.

(c) Analice la monotonía.

EJERCICIO 22: Si notamos $\log_r(x)$ a la función inversa de r^x $(r>0\ ,\ r\neq 1)$

(a) Haga el gráfico de $y=\log_r(x)$ para *r = 2* , $\frac{1}{2}$, *3* , $\frac{1}{3}$.

(b) Determine el dominio y la imagen.

(c) Analice la monotonía.

EJERICICIO 23: Encuentre el dominio de las siguientes funciones

(a) $f(x)=\ln(2x)$ **(b)** $f(x)=\ln(3x^2+2x)$

En cada caso determine los valores de *x* para los cuales $f(x)=1$

EJERCICIO 24: Halle la función inversa de:

(a) $f(x)=\ln(2x)$ **(b)** $f(x)=\ln(x^2+4)$

(c) $f(x)=\ln(x^2-1)$ **(d)** $f(x)=2^{\sqrt{x}}+5$

(e) $f(x)=e^{x+3}$ **(f)** $f(x)=e^{x^2}$, $x>0$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 25: A partir de los gráficos de $g(x)=\operatorname{sen}x$ y $h(x)=\cos x$ haga el gráfico de

(a) $f(x)=\operatorname{sen}(x-\pi)$ **(b)** $f(x)=\cos(2x)$

(c) $f(x)=\cos(2x+\pi)$ **(d)** $f(x)=\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})$

EJERICICIO 26: Determine todos los valores de $x\in R$ tales que

(a) $\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}$ **(b)** $\cos x=\frac{3}{2}$

(c) $\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x=1$ **(d)** $\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1$

(e) $\operatorname{sen}(2x)=2\operatorname{sen}x\cdot\cos x$ **(f)** $\cos(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\operatorname{sen}x)$

EJERCICIO 27: Haga el gráfico de las funciones inversas de $g(x) = \operatorname{sen} x$ y $h(x) = \cos x$. Determine los valores de $x \in R$ tales que

(a) $\operatorname{arcsen} x = \dfrac{\pi}{4}$ **(b)** $\arccos x = \pi$

(c) $\cos(\operatorname{arcsen} x) = \sqrt{1 - x^2}$

OTRAS FUNCIONES

EJERCICIO 28: Represente las siguientes funciones

(a) $f(x) = |x + 5|$ **(b)** $f(x) = |x - 5|$

(c) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ **(d)** $f(x) = |e^x|$

EJERCICIO 29:

(a) Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & si \quad x \le -1 \\ -x & si \quad -1 < x \le 1 \\ 3x - 4 & si \quad 1 < x \end{cases}$, calcule $f(-3)$, $f(1)$ y $f(4)$. Determine para qué valores de *y* la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. ¿Cuándo es única?

(b) Idem para la función $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & si \quad x < -4 \\ \dfrac{1}{x + 2} & si \quad x \ge -4 \end{cases}$

EJERCICIO 30: El impuesto a la riqueza es igual al 0,50 pesos por cada mil pesos por encima de 100 mil pesos y de 1 peso por cada mil pesos por encima de 200 mil pesos. Escriba el monto del impuesto en función de la riqueza. ¿Cuál es la riqueza de alguien que paga 530 pesos de impuesto?

PROBLEMAS VARIOS

PROBLEMA1: La función *f* es lineal y la función *g* es cuadrática. Los gráficos de ambas funciones se cortan en los puntos *P* = (-1,2) y *Q* = (2,0). Además *g* se anula en *x = -2.* Halle las fórmulas de *f* y *g* y encuentre el conjunto de los *x* tales que *f(x)* es mayor que *g(x)*. Haga un gráfico.

PROBLEMA 2: Se definen $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Pruebe que

(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

(b) Los gráficos de ambas funciones no se cortan.

PROBLEMA 3: Un cántaro vacío con capacidad para 20 litros pesa 2550 gramos.

(a) Represente la función que da el peso total del cántaro en función de la cantidad de agua, en litros, que contiene. Halle su fórmula. ¿Cuál es el dominio?

(b) Si disponemos de 3 litros de mercurio, cuyo peso total es 40,8 kg, repita el ítem anterior sustituyendo el agua por el mercurio.

(c) Si se representan las funciones de **(a)** y **(b)** en los mismos ejes, ¿qué significa el punto de intersección?

(d) ¿Es cierto que a doble cantidad de líquido corresponde doble peso total?

PROBLEMA 4: Si $f(n) = \dfrac{2^{3n}}{4n+1}$, calcule $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ y obtenga su valor numérico para *n = 1, 2, 3, 4 y 5.*

PRÁCTICA 2

NÚMEROS REALES

LA RECTA REAL

EJERCICIO 1: Represente en la recta numérica:

(a) $-5;-1;3;6;\frac{3}{8};1+\frac{2}{5};1-\frac{2}{5};-\sqrt{2};\sqrt{2}+1;\sqrt{2}-1;-\sqrt{2}+1;-\sqrt{2}-1$

(b) $-3;-2;-1;0;1;2;3;-\pi;-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2};3{,}14;-3{,}14$

EJERCICIO 2: Represente en la recta numérica los siguientes conjuntos. Escríbalos como intervalos o como unión de intervalos.

(a) Todos los números reales mayores que *–1*.

(b) Todos los números reales menores o iguales que *2.*

(c) Todos los números reales que distan del 0 menos que *3*.

(d) $\{x \in R / 2x-3>5\}$

(e) $\{x \in R / -3<x\leq 3\}$

(f) $\{x \in R / 1<2x-3<5\}$

(g) $\{x \in R / x(2x-3)>0\}$

(h) $\{x \in R / x^2-36<0\}$

(i) $\{x \in R / x^3-x<0\}$

(j) $\left\{x \in R / 1+\frac{2}{x}<3\right\}$

(k) $\left\{x \in R / \frac{1}{x}<\frac{4}{x}\right\}$

(l) $\{x \in R / |x|<3\}$

(m) $\{x \in R / |x-2|<3\}$

(n) $\{x \in R / |x+2|<3\}$

(ñ) $\{x \in R / |x|>3\}$

EJERCICIO 3: Represente en la recta los siguientes conjuntos

(a) $[2,4]\cap[3,6]$ **(b)** $[2,4]\cup[3,6]$

(c) $(-\infty,3)\cap(1,+\infty)$ **(d)** $(-1,3)\cap[3,+\infty)$

(e) $(-1,3)\cup[3,+\infty)$ **(f)** $(-1,3)\cup(3,5)$

EJERCICIO 4: Represente en la recta los siguientes conjuntos

(a) $\{n\in N / 4\leq n<6\}$ **(b)** $\{n\in N / n<13\}$

(c) $\left\{x=\dfrac{n}{n+1} / n\in N\wedge n<6\right\}$ **(d)** $\left\{x=\dfrac{n}{n+1} / n\in N\right\}$

NÚMEROS IRRACIONALES

EJERCICIO 5: Demuestre que $\sqrt{3}$ no es racional.

EJERCICIO 6: Dados los números *3,14* y π

(a) Halle un número racional comprendido entre ambos.

(b) Halle un número irracional comprendido entre ambos (Ayuda: escriba su desarrollo decimal).

SUPREMO E INFIMO

EJERCICIO 7: Considere los siguientes conjuntos

$A=\left\{\dfrac{1}{n}:\ n\in N\right\}$ $B=\left\{\dfrac{n}{n+1}:\ n\in N\right\}$ $C=(0,7)$

$D=N$ $E=\left\{n-\dfrac{1}{n^2}:\ n\in N\right\}$ $F=\{1,2,3,4\}$

$G=\{5;5{,}9;5{,}99;5{,}999;\ldots\}$ $H=\{x\in R / |x-2|<1\}$ $I=\{x\in R / |x|>3\}$

En cada caso:

(a) Determine si *7* es una cota superior.

(b) Determine si 0 es una cota inferior.

(c) Decida si está acotado superiormente.

(d) Decida si está acotado inferiormente.

(e) En caso afirmativo, encuentre el supremo y/o el ínfimo del conjunto. Decida si alguno de ellos es el máximo y/o el mínimo del conjunto correspondiente.

EJERCICIO 8: Considere el conjunto *B* del ejercicio anterior.

(a) Muestre que *1* es cota superior de *B*.

(b) Exhiba un elemento *b* de *B* que satisfaga *0,9 < b < 1.*

(c) Exhiba un elemento *b* de *B* que satisfaga *0,99 < b < 1.*

EJERCICIO 9: Considere el conjunto $P = \left\{ \frac{2n-1}{n+2} :\ n \in N \right\}$

(a) Muestre que *2* es una cota superior de *P*.

(b) Exhiba un elemento *p* de *P* que satisfaga *1,99 < p < 2*.

(c) Muestre que si *t < 2* existe un elemento *p* de *P* que satisface *t<p<2.* Deduzca entonces que sup *P = 2*.

EJERCICIO 10: Muestre que existe un número natural *n* que satisface $\frac{1}{n} < 0{,}001$. En general, muestre que, cualquiera sea *x* positivo, existe un número natural *n* que satisface $\frac{1}{n} < x$. Deduzca de aquí que $\inf \left\{ \frac{1}{n} : n \in N \right\} = 0$

EJERCICIO 11: Sean *A* y *B* dos conjuntos de números reales no vacíos y acotados de modo que $A \subset B$. Ordene de menor a mayor los siguientes números:

sup *A* , sup *B* , inf *A* , inf *B*

Exhiba un ejemplo donde sup *A* = sup *B* y otro donde la desigualdad es estricta.

EJERCICIO 12: Determine, en caso de que existan, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los siguientes conjuntos:

(a) $A = \{x \in R :\ x^2 - 3x + 2 < 0\}$

(b) $B = \{y = x^2 - 3x + 2 \ ,\ x \in (0,2)\}$

(c) $C = \{y = x^2 - 3x + 2 \ ,\ x \in R\}$