

Estudio sobre la cancelación activa de ruido

Ian C. Díaz, Matías Fogg, Lisandro Alvarez, Manuel Dieguez

Abstract—Hoy en día, la cancelación activa de ruido se aplica en los contextos más diversos, desde la industria, hasta la medicina y productos para el consumidor. Este trabajo de investigación hace referencia a los distintos sistemas de cancelación de ruido comúnmente utilizados. Además, analiza los distintos algoritmos adaptativos que pueden ser utilizados para la implementación de éstos sistemas. El trabajo hace énfasis en el sistema de cancelación *Broadband Feedforward* tanto en sus aspectos prácticos como en su implementación. Se explora su implementación con los algoritmos FxLMS y su variante recursiva FxRLS.

I. INTRODUCCIÓN

La cancelación activa de ruido es un método para la eliminación de una onda mediante la adición de otra. Se implementa mediante un sistema electroacústico o electromecánico que aprovecha el fenómeno de interferencia destructiva. Para lograrlo, utiliza una onda con igual amplitud pero fase invertida respecto de la onda del ruido. Consecuentemente, la combinación de ambas ondas resulta en la cancelación de ambos ruidos. Como se discutirá mas adelante, los sistemas de cancelación de ruido o ANC por sus siglas en ingles, son muy efectivos para eliminar ruidos de bajas frecuencias. Esto provoco un gran desarrollo de esta temática en la industria ya que generalmente los sistemas de cancelación de ruido pasivos fallan a la hora de eliminar los ruidos en el rango de las bajas frecuencias.

El ruido puede variar en frecuencia, amplitud, fase, velocidad del sonido y puede ser provocado por una infinidad de fuentes. Esta naturaleza propia del ruido implica que los sistemas ANC deben contar con un filtro adaptativo que permita modificarse a todas las variables anteriormente mencionadas. Los filtros adaptativos ajustan sus coeficientes, generalmente llamados "pesos", para minimizar la señal de error. Los coeficientes pueden ser determinados por varios algoritmos, el mas utilizado es el algoritmo de cuadrados promedio mínimo o LMS por sus siglas en ingles. Adicionalmente, existen otros algoritmos como NLMS, FxLMS, FxRLS, etc. Los mismos se trataran mas adelante. Este tipo de filtros pueden ser realizados con filtros de respuesta finita (FIR) y filtros de respuesta infinita (IIR). Como generalmente se utilizan los filtros FIR, este es el tipo de filtro que se va a utilizar en el presente trabajo.

En este trabajo de investigación se define como ruido a todo sonido indeseable que se quiera eliminar, ruidos generados por maquinas, ruidos ambiente, conversaciones en un café, etc. Es decir, el ruido puede ser generado por cualquier medio.

Los sistemas ANC pueden estar basados en prealimentación o *feedforward*, donde el ruido referencia es muestreado antes de que se propague hasta la segunda fuente,

o en retroalimentación o *feedback* en donde se trata de cancelar el ruido sin una referencia. Es decir, se muestrea la señal después de la inyección de la onda cancelante para corregir el error de cancelación.

Dentro de los sistemas *feedforward* están 1) los sistemas de banda angosta o *Narrowband* que se será presentado en la sección II y 2) los sistemas de banda ancha o *Broadband* que será discutido en la sección II. Por otro lado, dentro de los sistemas *feedback* está el sistema de banda angosta adaptativo o *Narrowband adaptive* que será introducido en la sección III.

En la sección IV, se presentará el concepto de filtros adaptativos Wiener y los criterios que deben tenerse en cuenta para implementarlos correctamente.

En la sección V, se desarrollaran los conceptos y aplicación de varios algoritmos para implementar filtros adaptativos como el LMS. En la sección VI, se desarrollan una serie de simulaciones de un sistema *Broadband Feedforward*.

II. SISTEMAS FEEDFORWARD

A. Sistema *Narrowband Feedforward*

En muchas aplicaciones de ANC las señales de ruido son periódicas. Estas señales pueden ser generadas por máquinas como motores, ventiladores, compresores etc. Este sistema utiliza la periodicidad de éstas señales para cancelar el ruido. Este tipo de sistemas tiene las siguientes ventajas:

- 1) Se evita el *feedback* que proviene desde el parlante que cancela el ruido hasta el micrófono de referencia.
- 2) Se evitan las alinealidades del micrófono de referencia.
- 3) Al ser ruido periódico se elimina la limitación de causalidad.
- 4) La posibilidad de generar señales de referencia permite controlar cada armónico de manera independiente.
- 5) Solo es necesario modelar la función transferencia sobre frecuencias cercanas a la de los armónicos.

En la Fig. 1 se ilustra un diagrama básico de este tipo de sistemas. El sistema cuenta con un sensor que hace de *trigger* del generador de señal. La señal de referencia generada puede ser de dos tipos: 1) un tren de pulsos con período igual a la inversa de la frecuencia fundamental del ruido periódico y 2) ondas senoidales con las mismas frecuencias de los armónicos del ruido periódico. Para implementar el tipo 1) se utiliza el método llamado síntesis de onda mientras que para el tipo 2) se utiliza un filtro *notch* adaptativo. Sin importar que tipo de señal referencia se genera, la misma es procesada por un filtro adaptativo y se envía al parlante. Mediante una señal de error el filtro adaptativo se modifica (gracias a los distintos algoritmos) para minimizar el error.

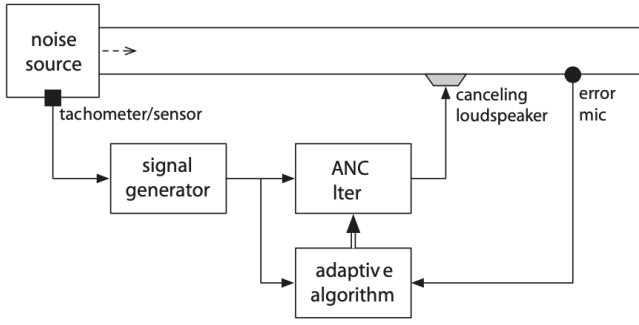


Fig. 1. Representación del sistema *Narrowband Feedforward*

A continuación se explica en mas detalle el método de síntesis. El sensor capta la señal de ruido periódica y se guardan las muestras del ruido. Se define N como la cantidad de muestras en un ciclo de la onda de ruido. Las muestras representan la onda que se debe generar para suprimir el ruido. Las muestras se envían secuencialmente a un conversor digital analógico para producir la señal que se va a reproducir en el parlante de cancelación de ruido. En dicho proceso se encuentra el filtro FIR adaptativo que tiene una longitud igual a un periodo de la señal de ruido o N muestras. El sonido residual es captado por el micrófono de error que esta sincronizado con con los pulsos de la señal de referencia. Subsiguientemente, el filtro adaptativo se modifica para disminuir el error. Se puede probar que la recursion LMS se obtiene como:

$$w(n+1) = w(n) - 2\mu e(n)x(n)$$

Su desarrollo se verá con mas detalle en la sección V. Luego de una serie de pasos matemáticos [1], se obtiene la función transferencia del sistema:

$$H(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - (1 - 2\mu)z^{-N}} \quad (1)$$

(1) es una ecuación interesante ya que relaciona el ruido original, $d(n)$ y su versión suprimida, $e(n)$. Los ceros tienen una amplitud constante de ($|z| = 1$) y son equidistantes en posiciones $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \dots, \frac{2(N-1)\pi}{N}$ en el círculo unitario. Tiene N polos en los mismos ángulos que los ceros, pero en la circunferencia $|Z| = (1 - 2\mu)^{\frac{1}{N}}$. La función transferencia describe un filtro notch que atenúa en las frecuencia fundamental y en las frecuencias de los armónicos del ruido periódico. (1) muestra que μ tiene una limitación en relación con la estabilidad. μ siempre debe satisfacer $0 < \mu < 1$ para un tren de pulsos de amplitud unitaria. El ancho de banda para cada notch esta es $BW \approx 2(1 - 2\mu)^{\frac{1}{N}}$. Notar que, el ancho de banda es proporcional a μ . Por otro lado, la constante de tiempo de la caída de la envolvente de respuesta es aproximadamente $\tau \approx \frac{T}{\mu}$. Consecuentemente, hay un *tradeoff* entre el ancho de banda y la duración de la respuesta transitoria [1]. Finalmente, se debe aclarar que (1) fue calculada sin considerar el camino entre el parlante de

cancelación de ruido y el micrófono de error, comúnmente llamado camino secundario S_2 . Si el mismo se considera, la función transferencia (1) sufre la siguiente modificación:

$$H(z) = \frac{E(z)}{D(z)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - (1 - 2\mu S_2(z)S_2(z^{-1}))z^{-N}} \quad (2)$$

No obstante, no se desarrollarán los resultados que involucra (2) ya que este trabajo de investigación se centra en el sistema *Broadband Feedforward ANC*.

Como comentario final acerca de este tipo de sistemas, se deben considerar los tiempos que demanda el mismo. Es decir, se debe tomar en cuenta el tiempo que tarda la señal en ser procesada por el filtro adaptativo y luego ser enviada al parlante y también el tiempo en que tarda la señal en llegar al micrófono de error. Teniendo estos tiempos en consideración, se puede adecuar apropiadamente el algoritmo que modifica el filtro adaptativo para poder utilizar este tipo de sistemas en una implementación en tiempo real.

B. Sistema *Broadband Feedforward*

Se ilustra el sistema *Broadband Feedforward* en la Fig. 2. El sistema cuenta con un micrófono de referencia que toma la señal de entrada, la señal es procesada por el sistema ANC que reproduce una señal en el parlante de cancelación. Cuenta con un micrófono de error que modifica el comportamiento del filtro adaptativo para minimizar el error del sistema ANC.

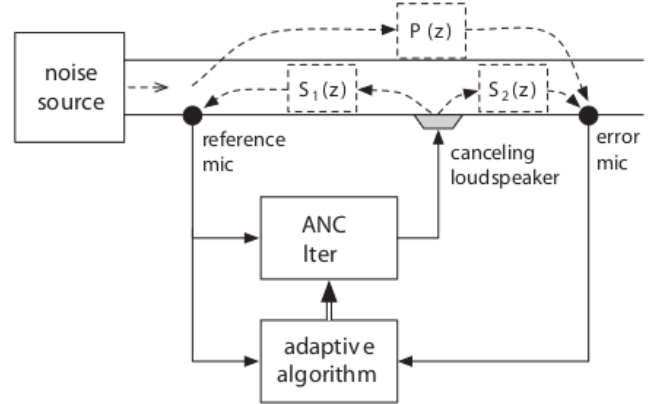


Fig. 2. Representación del sistema *Broadband Feedforward*

El camino primario $P(z)$ se define como el camino acústico entre las coordenadas cercanas al micrófono de referencia y el micrófono de error. También existen dos caminos secundarios que van desde el altavoz de cancelación hasta la señal de referencia $S_1(z)$ por un lado y, hasta el micrófono de error $S_2(z)$ por el otro. El filtro adaptativo $W(z)$ se utiliza para estimar $P(z)$ y de esa manera poder generar una señal que cancele el ruido.

Para clarificar el funcionamiento del sistema, en la Fig. 3 se ilustra un diagrama en bloques del sistema. El micrófono de error esta representado como el módulo sumador cuya señales de entrada son $d(n)$ e $y(n)$. El sistema busca

modificar $W(z)$ de modo que $y(n)$ y $-d(n)$ tengan máxima correlación entre sí. Si se logra esto, al combinar ambas señales, el error residual es $e(n) = d(n) + y(n) \approx 0$ ya que como tienen máxima correlación la salida será ruido blanco gaussiano.

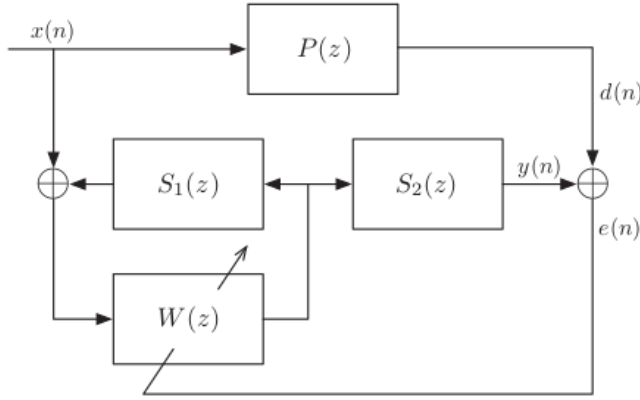


Fig. 3. Representación en bloques del sistema *Broadband Feedforward*

Al evaluar el sistema de la Fig.3 se obtiene la función transferencia de la señal de entrada entre $x(n)$ y la señal de error $e(n)$:

$$\frac{E(z)}{X(z)} = P(z) + \frac{W(z)}{1 - S_1(z) \cdot W(z)} \cdot S_2(z) \quad (3)$$

Como se desea una cancelación de ruido perfecta, $e(n) = 0$ por lo que $E(z) = 0$. A continuación, se obtiene la función transferencia que debe tener el filtro adaptativo:

$$W(z) = \frac{P(z)}{P(z)S_1(z) - S_2(z)} \quad (4)$$

Como se aclaró anteriormente, el filtro adaptativo puede implementarse con un filtro IIR pero su adaptación puede ser problemática porque los polos cercanos al círculo unitario pueden desplazarse fuera del mismo generando la condición de inestabilidad al sistema en el proceso de adaptación. Ergo, se podría pensar que la solución es utilizar un filtro FIR. Sin embargo, la utilización de un filtro FIR como alternativa tiene dificultades en la práctica. Generalmente, el micrófono de error y el altavoz de cancelación se colocan a la misma distancia del micrófono de referencia. Además, el micrófono de error suele colocarse cerca del parlante de cancelación. Este arreglo en los componentes resulta en funciones de transferencia de alto orden para el camino primario $P(z)$ y la primera sección del camino secundario $S_1(z)$, mientras que la segunda sección del camino secundario $S_2(z)$ posee una transferencia de bajo orden. Por consiguiente, (4) solo puede ser aproximado con un filtro FIR de alto orden.

Para solucionar este inconveniente, se podría estimar $S_1(z)$ para remover su efecto digitalmente. Si se introduce una estimación de $S_1(z)$ definida como $\hat{S}_1(z)$, el sistema de la Fig. 3 sufre la siguiente modificación:

Se podría pensar que ya que se estima S_1 se podría estimar S_2 . Esto es lo que inevitablemente debe hacerse ya que

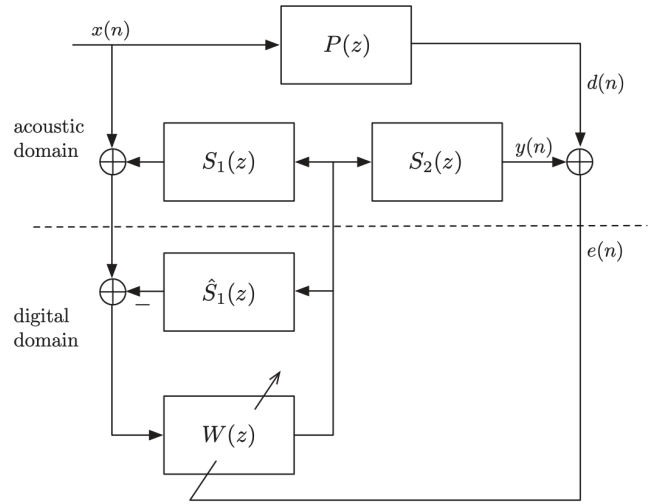


Fig. 4. Representación en bloques del sistema *Broadband Feedforward* utilizando $S_1(z)$

no se conoce de antemano el camino desde el parlante de cancelación de ruido hasta el micrófono de error. Al igual que \hat{S}_1 , \hat{S}_2 se estima utilizando un filtro adaptativo manejado por un algoritmo adaptativo como el LMS. En la Fig. 5 se presenta un sistema con dos modos de operación: 1) procesamiento offline donde la entrada de ruido proviene de dentro del sistema así se obtiene las estimaciones de \hat{S}_1 y \hat{S}_2 , y 2) procesamiento online donde entra en acción el filtro adaptativo $W(z)$ para suprimir un ruido desconocido.

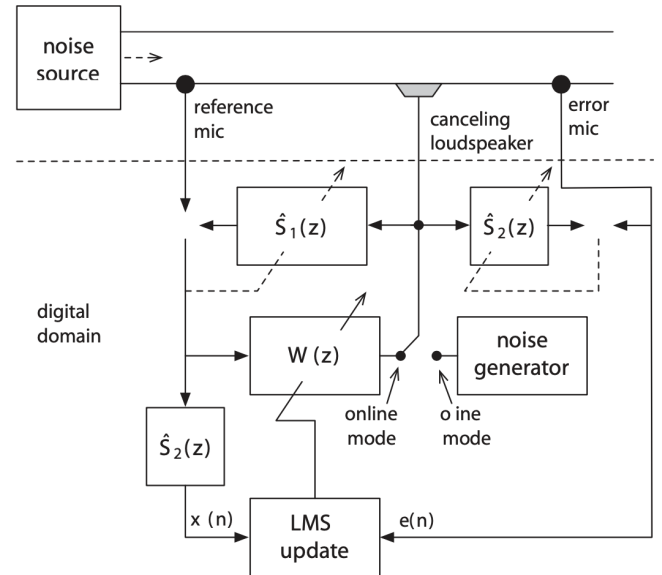


Fig. 5. Representación en bloques del sistema *Broadband Feedforward* con modo de operación *online* y *offline*

Es de utilidad analizar como sería el sistema sin considerar S_1 . En la Fig. 6 se ilustra al sistema sin S_1 . Como se desea que $e(n) = d(n) + y(n) \approx 0$ se debe tomar $W(z) + S_2(z)P(z) = 0$. Por lo tanto, la función transferencia del filtro adaptativo

es :

$$W(z) = -\frac{P(z)}{S_2(z)} \quad (5)$$

Claramente (5) es mas simple que (4). Al igual que (4) el filtro adaptativo se puede aproximar con un filtro FIR manejado por un algoritmo adaptativo.

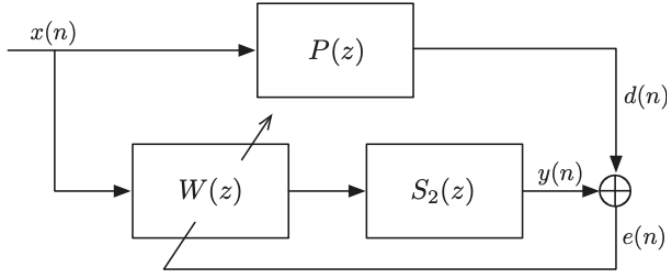


Fig. 6. Representación en bloques del sistema *Broadband Feedforward* sin S_1

Finalizando el estudio de este tipo de sistemas no esta de más mencionar la importancia del tiempo de procesamiento. Después de que el micrófono de referencia toma la señal de entrada, el sistema tiene un tiempo determinado para generar la señal del parlante de cancelación. Si el tiempo que se tarda en generar esta señal (*delay* electrónico) es mayor al tiempo que tarda el ruido en llegar desde el micrófono de referencia hasta el parlante (*delay* acústico), la eficacia del sistema se ve gravemente perjudicada. Esto es porque la respuesta del sistema es no-causal cuando el *delay* electrónico es mayor al *delay* acústico. Cuando se logra la condición de causalidad el sistema es capaz de suprimir ruidos aleatorios. Por lo contrario, si no se logra la condición de causalidad, el sistema solo puede eliminar ruidos periódicos [4]. Como ultima aclaración nótese que este sistema no esta limitado a ruidos periódicos, esto lo hace de alguna forma superior al sistema anterior. Es por ello, que este sistema tiene mas aplicaciones que el sistema *Narrowband Feedforward*

Como conclusión se puede decir que la dificultad en este tipo de sistemas radica en la realización del filtro adaptativo $W(z)$ y consecuentemente, el algoritmo que se va a utilizar para implementarlo. Por este motivo, en la sección V se estudia en mas detalle su implementación en este tipo de sistemas de cancelación de ruido. Del mismo modo, se determina que ese sistema es el que se va a simular en la sección VI ya que en comparación con el resto de los sistemas desarrollados en este trabajo es el que mas aplicaciones practicas posee y por ende el de mas interés.

III. SISTEMA NARROWBAND FEEDBACK

En esta sección se presentan los sistemas *NarrowBand Feedback*. Un diagrama de bloques de un canal de un sistema *Feedback* es ilustrado en la Fig. 7. La señal que adquiere el micrófono de error es procesada por el filtro adaptativo para generar una señal en el parlante de cancelación de ruido. Este tipo de sistemas sintetiza su propia señal de referencia basándose solamente en la entrada del filtro adaptativo y la

señal de error. Es por ello que la idea es estimar el ruido primario y usarlo como referencia del filtro adaptativo.

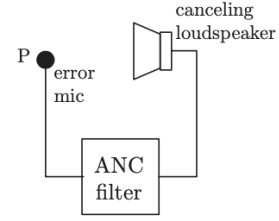


Fig. 7. Representación básica del sistema *Narrowband Feedback*

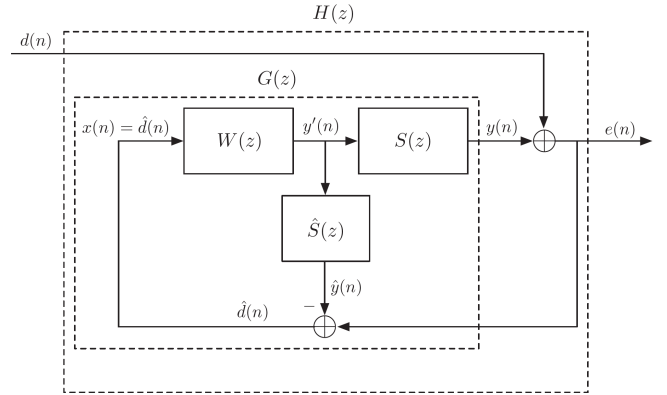


Fig. 8. Representación del sistema *Narrowband Feedback*

Si se define como $S(z)$ como el camino acústico entre el parlante de cancelación de ruido y el micrófono de error, el sistema se puede diagramar como se muestra en la Fig. 8. En dicha configuración se asume que hay una estimación de $S(z)$ llamada $\hat{S}(z)$. Por el mismo pasa la salida de $W(z)$, $y'(n)$ y sale $\hat{y}(n)$. Luego la estimación de $d(n)$ se obtiene como:

$$\hat{d}(n) = e(n) - \hat{y}(n) \quad (6)$$

Luego, cuando $\hat{d}(n)$ es una buena estimación de $d(n)$, para reducir el error $e(n)$ la transferencia del filtro adaptativo debe ser:

$$W(z) = \frac{-1}{\hat{S}(z)} \quad (7)$$

Este escenario conlleva que $y(n) = -\hat{d}(n)$ y, por lo tanto $e(n) = d(n) - \hat{d}(n)$ será una señal de error pequeña cuando $\hat{d}(n)$ sea una buena estimación. La configuración de $W(z)$ puede no ser implementable en la práctica debido a la posibilidad de que $\frac{1}{\hat{S}(z)}$ sea una transferencia no causal. Es debido a esto que en la práctica uno tiene que recurrir a una aproximación $W(z) \approx -1 \frac{1}{\hat{S}(z)}$.

La transferencia $H(z)$ del sistema esta dada por:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1 - G(z)} \\ &= \frac{1 + W(z)\hat{S}(z)}{1 + W(z)(\hat{S}(z) - S(z))} \end{aligned} \quad (8)$$

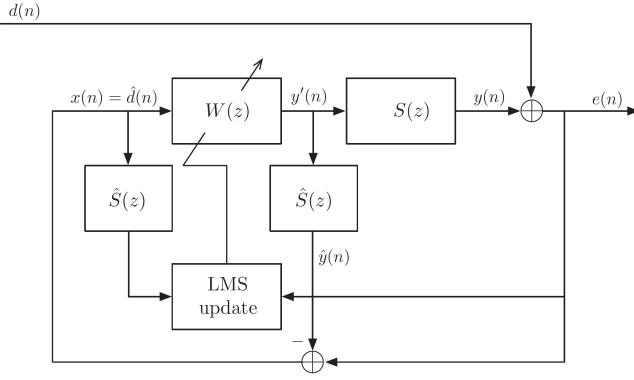


Fig. 9. Sistema Narrowband Feedback

Se observa que si se implementa una buena estimación $\hat{S}(z)$ tal que $\hat{S}(z) = S(z)$, entonces (8) se reduce a

$$H(z) = 1 + W(z)S(z) \quad (9)$$

Además, si $\frac{1}{S(z)}$ es estable y causal, y $W(z)$ se configura en $-1/S(z)$, ocurrirá una supresión perfecta de $d(n)$. Dado que la estabilidad y la causalidad de $1/S(z)$ no puede ser garantizada en la practica, debe tomarse una decisión de compromiso en la determinación de la transferencia $W(z)$ para minimizar el error $e(n)$, es aquí donde entra en juego el algoritmo de FX-LMS desarrollado en la sección V.

La Fig 9 muestra el sistema que incluye el módulo que implementa el algoritmo adaptativo.

IV. FILTRO ADAPTATIVO WIENER

En esta sección se desarrolla el concepto de los filtro Wiener ya que como se vio en las secciones anteriores es el filtro adaptativo que mas se utiliza en los sistemas de cancelación de ruido.

En la Fig. 10 se muestra un diagrama en bloques de un filtro Wiener $W(z)$. Aquí lo que se busca estimar la señal $d(n)$ basándose en la señal $x(n)$. Se asume que tanto $x(n)$ y $d(n)$ son muestras de longitud finita de procesos aleatorios. La señal $e(n)$ determina cuan buena es la estimación, donde, si se maximiza la correlación entre las señales $y(n)$ y $d(n)$, la señal $e(n)$ estará compuesta pura y exclusivamente por ruido blanco gaussiano. Utilizando $e(n)$ el filtro modifica sus coeficientes para minimizar $e(n)$. Los coeficientes son modificados con un algoritmo adaptativo que se discuten en la sección V.

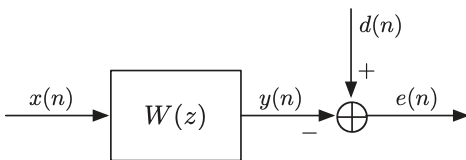


Fig. 10. Representación en bloques de un problema de filtrado

Antes de comenzar con una explicación mas detallada acerca de este tipo de filtros, se introduce el criterio del error cuadrático medio. El mismo surge de la necesidad de determinar que coeficientes del filtro producen el menor error. El mismo esta definido como:

$$\varepsilon = E[|e(n)|^2] \quad (10)$$

Se menciona este concepto debido que sera de gran utilidad a continuación.

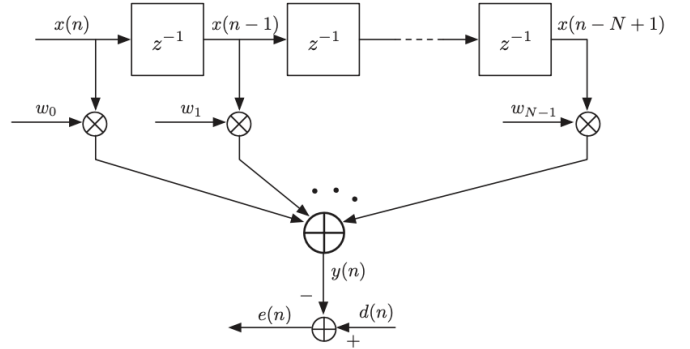


Fig. 11. Representación de filtro transversal

Continuando con una explicación mas detallada sobre este tipo de filtros, en la Fig. 11 se ilustra un filtro transversal. Se asumen que tanto la entrada $x(n)$ y la salida $d(n)$ son valores reales. Los coeficientes del filtro llamados $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{N-1}$ también son reales. El vector de coeficientes y el vector de entrada están definidos de la siguientes forma:

$$\vec{w} = [w_0, w_1, w_2, \dots, w_{N-1}]^T \quad (11)$$

$$\vec{x}(n) = [x(n), x(n-1), x(n-2), \dots, x(n-(N-1))]^T \quad (12)$$

La salida $y(n)$ esta dada por:

$$y(n) = \vec{x}(n)^T \cdot \vec{w} \quad (13)$$

El error esta dado por:

$$\begin{aligned} e(n) &= d(n) - y(n) \\ e(n) &= d(n) - \vec{x}(n)^T \cdot \vec{w} \end{aligned} \quad (14)$$

Utilizando (10) se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E[|e(n)|^2] = E[d^2(n)] - \vec{w}^T E[\vec{x}(n) \cdot d(n)] \\ &\quad - E[d(n) \cdot \vec{x}^T(n)] \cdot \vec{w} + \vec{w}^T E[\vec{x}(n) \cdot \vec{x}^T(n)] \cdot \vec{w} \end{aligned} \quad (15)$$

Si se define el vector correlación cruzada y la matriz de autocorrelacion como:

$$p_n = E[\vec{x}(n) \cdot d(n)] \quad (16)$$

$$R_n = E[\vec{x}(n) \cdot \vec{x}^T(n)] \quad (17)$$

Se obtiene que

$$\varepsilon = E[d^2(n)] - 2 \cdot \vec{w}^T \cdot p_n + \vec{w}^T \cdot R_n \cdot \vec{w} \quad (18)$$

Para obtener los coeficientes que minimizan la función (18) se debe resolver el sistema de ecuaciones que resultan de hacer las derivadas parciales de ε respecto de cada coeficiente igual a cero. Se puede demostrar que se llega a:

$$\vec{w}_0 = R^{-1} \cdot p \quad (19)$$

(19) es conocida como la ecuación *wiener-Hopf* donde se pueden obtener los coeficientes óptimos del filtro. Reemplazando esta última ecuación en 18 se obtiene el mínimo error cuadrático medio:

$$\varepsilon_{min} = E[d^2(n)] - p^T \cdot R^{-1} \cdot p \quad (20)$$

(20) permite escoger los coeficientes óptimos que minimizan el error del filtro adaptativo. Este resultado se utilizara nuevamente en la sección V.

V. ALGORITMOS

Para la implementación de filtros adaptativos de señales, se distingue entre dos categorías de algoritmos utilizados para minimizar el error cuadrático entre la salida y el resultado buscado: aquellos que estiman los parámetros del filtro de forma determinista y aquellos que lo hacen mediante métodos estadísticos.

Los primeros se caracterizan por presentar altas velocidades de convergencia, pero a su vez implican grandes necesidades en capacidad de cómputo: el método de cuadrados mínimos recursivo (en adelante RLS, por sus siglas en inglés) es un ejemplo prominente de esta categoría. Los segundos se basan en métodos estocásticos, por lo que requieren menos recursos: el método de cuadrados promedio mínimos (LMS, por sus siglas en inglés) y sus variantes (NMLS, FX-LMS, etc. son ejemplos de esta categoría).

A continuación se ofrece una breve descripción de los distintos algoritmos relevantes, haciendo énfasis en los estocásticos, ya que su complejidad computacional es relativamente baja.

A. Algoritmo de cuadrados mínimos recursivos: RLS

El algoritmo RLS encuentra recursivamente los coeficientes del filtro para minimizar la función de costo de una regresión lineal ponderada de las señales de entrada: utiliza información de las señales de entrada desde el principio de su operación, es decir, *tiene memoria*. Debido a esto, opera con grandes matrices de información, lo cual implica una gran complejidad matemática. Si bien existen métodos de este tipo diseñados para ser más eficientes computacionalmente, no logran compararse con los filtros estocásticos, que solo tratan con la entrada actual. Es sabido que la familia de algoritmos de cuadrados mínimos presenta problemas de condicionamiento numérico. La implementación de esta familia de algoritmos es muy sensible a errores de redondeo en sistemas de precisión finita [8].

B. Algoritmo de cuadrados medios mínimos: LMS

Partiendo de la base de la teoría de filtros de Wiener, se piensa en filtros con una estructura no recursiva. Por lo tanto, la expresión temporal de la salida del filtro quedará determinada por (21).

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i(n)x(n-i) = a_n^T x_n \quad (21)$$

Siendo,

$$x_n = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T \quad (22)$$

$$a_n = [a_0(n), a_1(n), \dots, a_{N-1}(n)]^T \quad (23)$$

Si se define una función de costo como

$$\Psi(a_n) = E[e^2(n)] \quad (24)$$

$$e(n) = y(n) + d(n) \quad (25)$$

Donde $e(n)$ es el error medido a la salida del sistema. Desarrollando se llega a la expresión,

$$\Psi(a_n) = E[d^2(n)] - 2a_n^T p_n + a_n^T R_n a_n \quad (26)$$

Donde,

$$p_n = E[d(n)x_n] \quad (27)$$

y

$$R_n = E[x_n x_n^T] \quad (28)$$

Siendo p_n la correlación cruzada y R_n la auto-correlación. Teniendo definida la función de costo como se observa en (26), se procede a minimizarla. Para ello, es necesario calcular el gradiente de la función de costo, ya que será útil para saber la dirección de movimiento para minimizar la función. Seguidamente de cierto desarrollo matemático [1], se llega a la siguiente expresión:

$$\nabla \Psi(a_n) = -2p_n + 2R_n a_n \quad (29)$$

A partir de este momento, podría asumirse que bastaría con utilizar la ecuación obtenida del gradiente para aplicar el algoritmo de descenso de gradiente y llegar a un mínimo de la función de costo. Sin embargo, la dependencia del gradiente con p_n y R_n genera problemas, ya que en general esos valores no están disponibles. Es por esta misma razón que se utilizan los estimadores que se observan a continuación:

$$\hat{p}_n = d(n)x_n \quad (30)$$

$$\hat{R}_n = x_n x_n^T \quad (31)$$

Por lo tanto, usando estos estimadores y reemplazando en (29), se obtiene:

$$\nabla \Psi(a_n) = -2e(n)x_n \quad (32)$$

Finalmente, después de este desarrollo matemático, y utilizando la misma lógica en la deducción del algoritmo de descenso de gradiente, se obtiene (33), que es la llamada ecuación del algoritmo LMS.

$$a_{n+1} = a_n + 2\alpha e(n)x(n) \quad (33)$$

1) *Algoritmo F-X LMS*: Como se explicó en la sección II, la transferencia del filtro queda dada por $W(z) = -\frac{P(z)}{\hat{S}_2(z)}$ y luego esta se aproxima a un filtro FIR usando distintos algoritmos. El *Filtered-X Least-Mean-Square*, mas conocido como FX-LMS, es simplemente la versión del algoritmo LMS aplicada a transferencias del tipo FIR.

Por lo tanto, si definimos a $x'(n)$ como la versión filtrada de $x(n)$ se obtiene (34) que es la ecuación del algoritmo FX-LMS [1].

$$a_{n+1} = a_n + 2\alpha e(n)x'(n) \quad (34)$$

Resulta importante aclarar que $x'(n)$ es la anti-transformada de $X'(z) = X(z)\hat{S}_2(z)$. Esto se puede ver claramente en la Fig. 12.

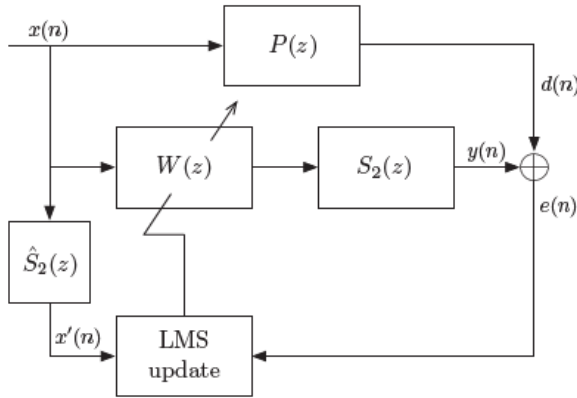


Fig. 12. Implementación de un algoritmo FXLMS

2) *Convergencia*: Si bien no se hará un análisis muy detallado sobre como evaluar y definir los parámetros para que el algoritmo del LMS converja, la condición que se debe cumplir para poder decir *a priori* que el algoritmo converge está dada por (35).

$$0 < \alpha < \frac{1}{NE[x^2(n)]} \quad (35)$$

El limite superior $\frac{1}{NE[x^2(n)]}$ puede no llegar a ser lo suficientemente restrictivo [1]. Esto puede deberse al delay que genera el filtro ANC a la señal de entrada antes de llegar al micrófono de error, que puede generar inestabilidad. Por ende, si el filtro $S_2(z)$ genera un delay significativo a la señal se debe reducir el limite superior de α . Otra alternativa es colocar el micrófono de error más cercano al parlante de cancelación, y así reducir el retraso por el bucle de adaptación.

3) *Algoritmo F-X RLS*: Por otro lado, implementando el algoritmo RLS para señal filtrada, tenemos el sistema que se ve en la Fig. 13. Al igual que el FX LMS la señal de entrada es la señal $x'(s)$ y el error es $e(n)$. Por lo tanto, el ajuste de los coeficientes se hacen con las ecuaciones:

$$k(n) = \frac{P(n-1)x'(n)}{y'^H(n)P(n-1)x'(n) + \lambda} \quad (36)$$

$$P(n) = \lambda^{-1}P(n-1) - \lambda^{-1}k(n)x'^H(n)P(n-1) \quad (37)$$

$$w(n+1) = w(n) + k(n)e(n) \quad (38)$$

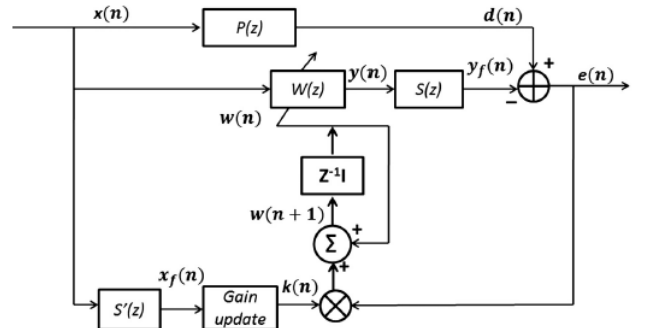


Fig. 3. Block diagram of FxRLS algorithm based ANC system.

Fig. 13. Diagrama del sistema ANC para actualización con el algoritmo FX RLS

Como bien sabemos, utilizar este algoritmo, servirá en una velocidad de convergencia extremadamente mayor, pero a costa de complejidad computacional. Esto genera problemas en nuestro sistema, ya que implementar un algoritmo de estas características en un dispositivo compacto, como puede ser un auricular, sería insuficientemente costoso. Sin embargo, en caso de contar con la capacidad de utilizarlo, se podrá ver a continuación las ventajas del mismo.

VI. SIMULACIÓN DE BROADBAND FEEDFORWARD ANC

Para llevar a cabo la simulación de un sistema de *Broadband Feedforward* se asume lo siguiente: 1) no se considera el camino S_1 , 2) el camino S_2 se define de antemano pero se realiza una estimación del mismo por lo que se puede utilizar \hat{S}_2 o S_2 en la simulación y 3) se utiliza el algoritmo adaptativo FX-LMS discutido en la sección V. De 1) y 2) se desprende que se utiliza el resultado (5) visto en la sección II.

Cabe aclarar que todas las simulaciones se realizan utilizando código de programación *Python*.

A. Simulación de caminos acústicos

Para poder realizar una simulación de todo lo discutido anteriormente, primero se debe contar con los caminos acústicos $P(z)$ y $S_2(z)$. Para esto se hace uso de la librería de *Python pyroomacoustics* que provee una manera simple de simular nuestro sistema. Para el camino acústico $P(z)$ se

lo define como se muestra en la Fig. 14, y su respuesta tiene la forma que se muestra en la Fig. 15

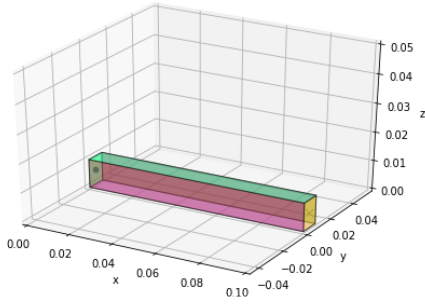


Fig. 14. Diagrama físico del camino $P(z)$

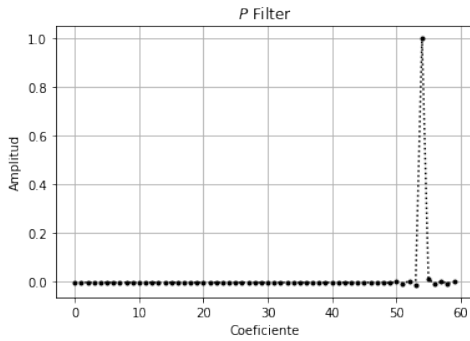


Fig. 15. Respuesta al impulso del camino $P(z)$

Por otro lado, para el camino acústico $S_2(z)$ se intenta hacer la mímica de unos auriculares supraurales definiéndolo como se lo muestra en la Fig. 16, y obteniéndose una respuesta al impulso como se muestra en la Fig. 17.

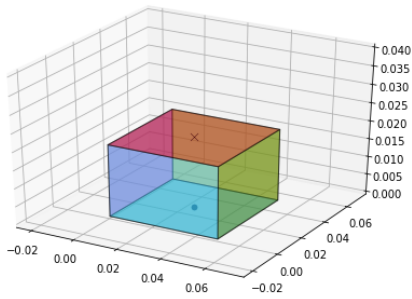


Fig. 16. Diagrama físico del camino $S_2(z)$

B. Simulación con FX LMS

En primer lugar, se simula \hat{S}_2 para estudiar el algoritmo FX-LMS. Para la simulación, se utiliza el algoritmo LMS con el fin de aproximar en modo offline lo mejor posible $\hat{S}_2(z)$ a $S_2(z)$

En la Fig. 18 se ilustra un diagrama de bloques del procedimiento de estimación. La estimación se realiza de la siguiente manera: 1) se coloca en la entrada del sistema

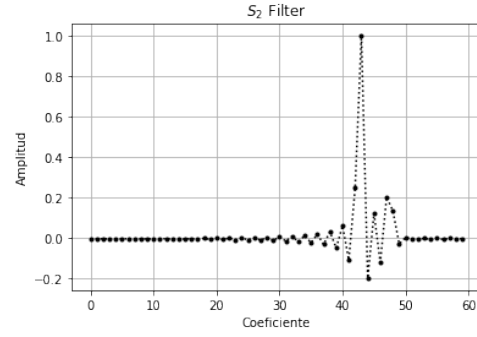


Fig. 17. Respuesta al impulso del camino $S_2(z)$

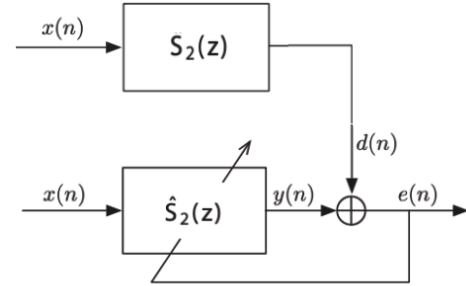


Fig. 18. Representación en bloques del sistema para estimar S_2

$x(n)$ ruido blanco gaussiano con el fin de estimar de la mejor manera el filtro y que no haya predominancia en ciertas frecuencias, 2) define S_2 como se dijo anteriormente y 3) se coloca un filtro adaptativo de Wiener en \hat{S}_2 . Al realizar la simulación, \hat{S}_2 se modificara gradualmente minimizando $e(n)$. En la Fig. 19 se muestra la simulación. Como se puede ver, el error J_s se va atenuando cada vez mas a medida que transcurre el tiempo, esto se traduce a que el filtro adaptativo se parece cada vez mas a lo que quiere estimar, en este caso S_2 . Todo el procedimiento detallado en este párrafo es a lo que se le llamo modo *offline* en la sección II.

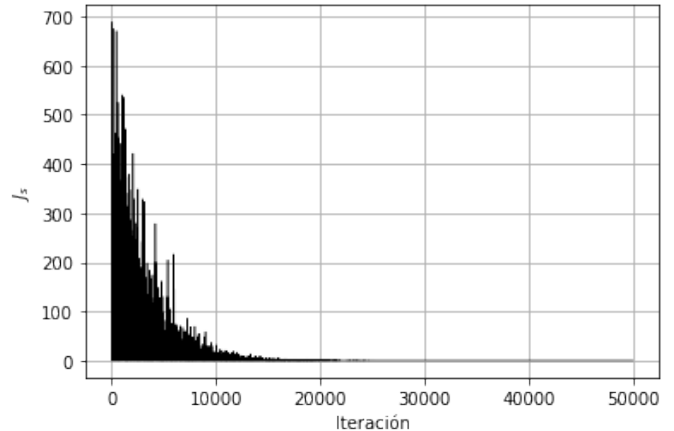


Fig. 19. Simulación del error de estimación de \hat{S}_2 . Se configura como entrada $x(n)$ ruido blanco gaussiano

Al tener la estimación \hat{S}_2 es posible simular el sistema completo. Se comienza la prueba con una señal de ruido periódica. Se selecciono el sonido que se produce en la cabina de un avión. Los resultados se muestran en la Fig. 20. La *Señal de entrada al sistema* es la señal que se inyecta que para ser anulada, en este caso es el ruido ambiente de la cabina, la *Señal de error* es la señal resultante de error $e(n)$ que como se dijo reiteradas veces, se espera que tienda a 0, y es la que escucharía el piloto en sus oídos. Como se puede ver el sistema funciona apropiadamente ya que la señal $e(n)$ tiende a disminuir el sonido velozmente, y esto se traduce a que el algoritmo adaptativo es rápido para modificar el filtro adaptativo, logrando un relativo silencio en los oídos del piloto. En la Fig. 21 se puede observar en un segmento aleatorio de la señal, como la señal generada por el filtro adaptativo intenta obtener la máxima correlación respecto de la señal deseada invertida.

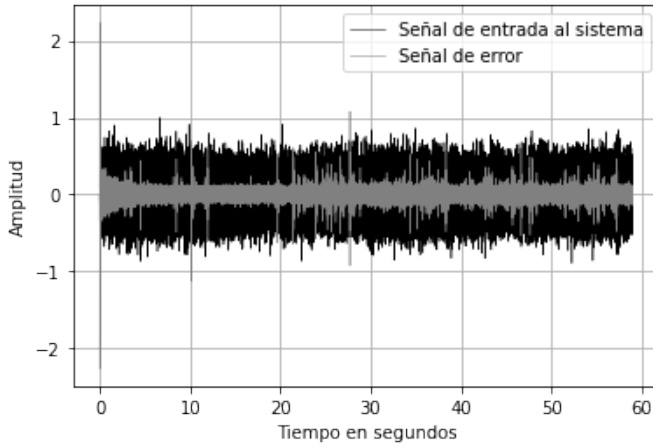


Fig. 20. Simulación del sistema dentro de la cabina de un avión

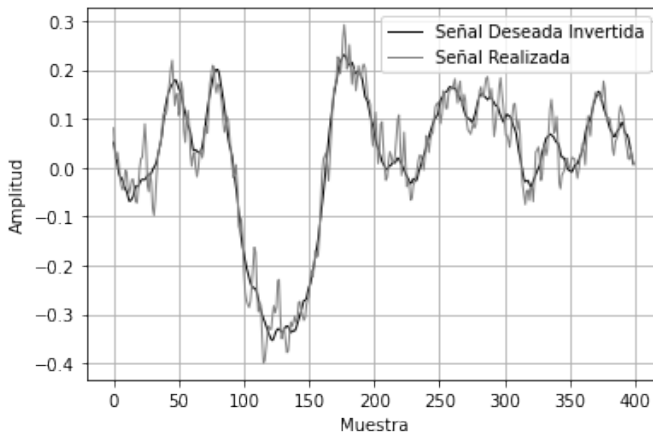


Fig. 21. Muestra de la correlación entre la señal deseada invertida y la señal generada por nuestro sistema para el caso de cabina de avión.

La Fig. 22 muestra el resultado de una simulación con un ruido aleatorio. El ruido que se trata de suprimir es el producido por un ventilador en una fábrica. Nótese, que si bien parece que el algoritmo tarda mas en adecuarse que en

el caso anterior, esto se debe a que la longitud de este audio es menor.

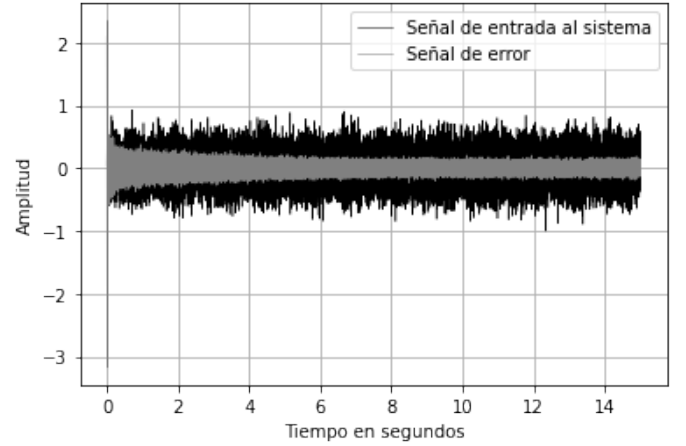


Fig. 22. Simulación del sistema con el ruido de un ventilador de una fábrica

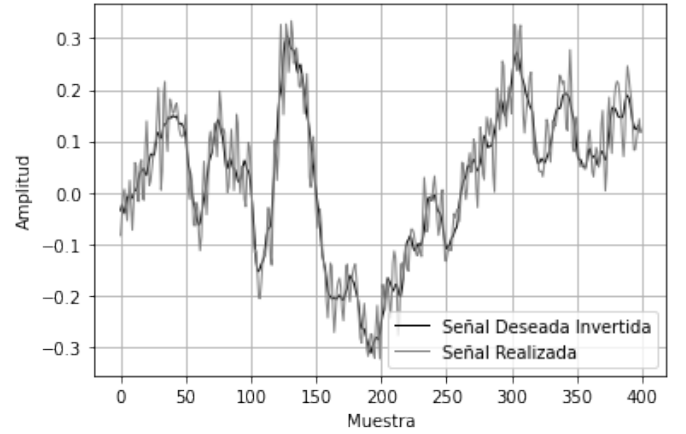


Fig. 23. Muestra de la correlación entre la señal deseada invertida y la señal generada por nuestro sistema para el caso del ventilador de fábrica.

Finalmente, en la Fig. 24 se puede observar como se ajustan los primeros 4 coeficientes del filtro adaptativo convergiendo a sus respectivos valores.

El sistema se comporta apropiadamente bajo entradas de distinta naturaleza. Esto demuestra que es apto para ser utilizado en, por ejemplo, en auriculares de cancelación de ruido.

C. Simulación con algoritmo FX RLS

Al igual que con el FX LMS primero se realizó la estimación del filtro \hat{S}_2 , dando un resultado de J como se puede observar en la Fig. 25

Finalmente, se simularon los mismos ambientes propuestos para el caso del LMS y se llegaron a los resultados que se pueden ver en las Figuras 26 y 27.

VII. CONCLUSIÓN

En este trabajo de investigación se desarrolló la teoría e implementación de tres tipos de sistemas de cancelación de

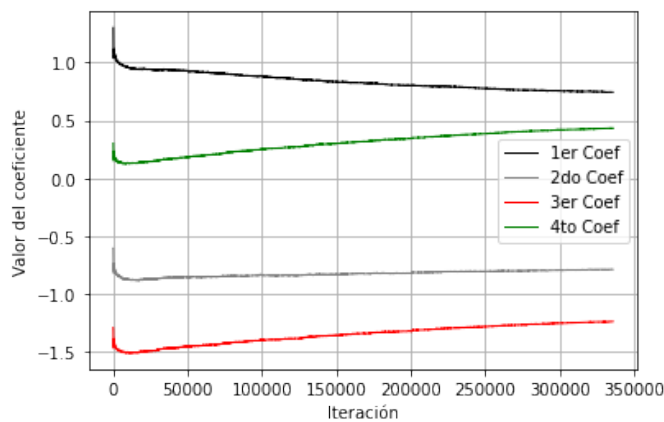


Fig. 24. Ajuste de los primeros 4 coeficientes del filtro adaptativo.

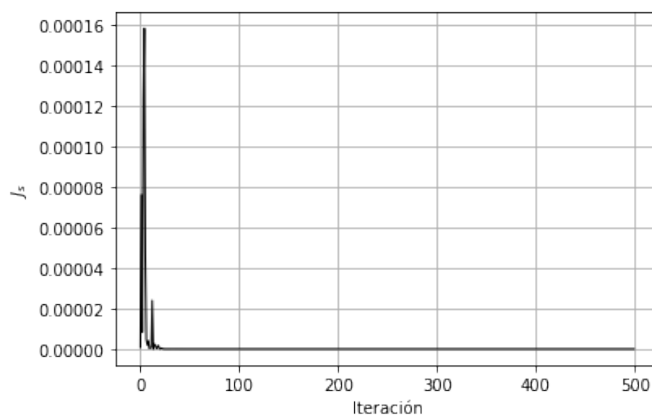


Fig. 25. J_{\min} para la estimación del filtro S_2

ruido. Se encontró que el sistema *Broadband Feedforward* es el que tiene mas aplicaciones prácticas por lo que fue el más detallado. Conjuntamente, se encontró que el algoritmo FX-LMS es el más apropiado para la implementación del filtro adaptativo. Si bien el sistema se pudo simular satisfactoriamente, se sugiere su implementación física para corroborar los resultados obtenidos en las simulaciones.

REFERENCES

- [1] B. Farhang and B. Wiley, Adaptive Filters: Theory and Applications (Book style), 2nd ed, pp. 555.
- [2] Simon Hayking, Adaptive Filter Theory, 5th ed
- [3] D. G. Manolakis, V. K. Ingle and S. M. Kogon, Statistical and Adaptive Signal Processing.
- [4] S. M. Kuo and D. R. Morgan, "Review of DSP Algorithms for Active Noise Control (Presented Conference Paper style)," presented at the International Conference on Control Applications, Anchorage, Alaska, September 25–27, 2000, Paper 90 SM 690-0 PWRs.
- [5] A. Antoniou, Digital Signal Processing: Signals, Systems and Filters (Book style), 1st ed, pp 425
- [6] Sen M. Kuo, Sohini Mitra, and Woon-Seng Gan "Active Noise Control System for Headphone Applications"
- [7] Reshma B and Kiran K A "Active Noise Control System for Headphone Applications"
- [8] On the Numerical Stability and Accuracy of the Conventional Recursive Least Squares Algorithm
- [9] Improving performance of FxRLS algorithm for active noise control of impulsive noise Ayesha Zeb, Alina Mirza, Qasim Umar Khan, Shahzad A. Sheikh Department of Electrical Engineering, College of Electrical

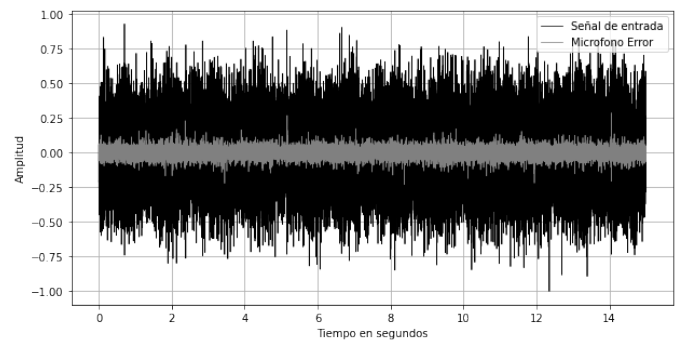


Fig. 26. Simulación de un ventilador en una fábrica con el algoritmo FX RLS

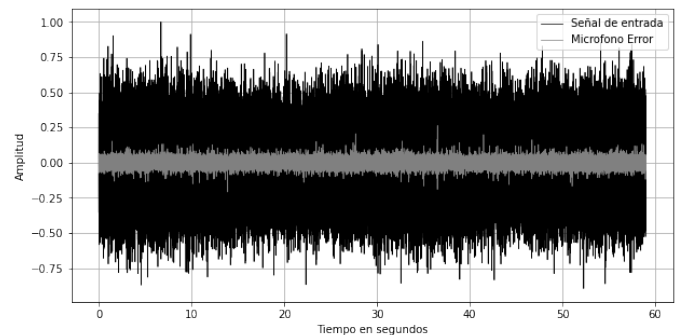


Fig. 27. Simulación de una cabina de un avión con el algoritmo FX RLS

Mechanical Engineering (CEME), National University of Sciences and Technology (NUST), Rawalpindi 46000, Pakistan