

## Problema 3:

a)

---

**Algorithm 1** Determinarea unui subgraf  $p$ -minimal-cromatic din  $G$ 

---

```
1:  $p\_min\_crom \leftarrow G$ 
2: while  $\chi(G) == p$  do
3:    $p\_min\_crom \leftarrow G$ 
4:    $G \leftarrow G \setminus v, v \in V(G)$ 
5: end while
6: return  $p\_min\_crom$ 
```

---

Algoritmul returnează subgraful  $p$ -minimal-cromatic generat din  $G$ .

Dacă  $G$  nu este minimal cromatic, atunci  $\exists v$  a.i.  $\chi(G - v) = p$ . Algoritmul va elimina nodurile  $v$  și muchiile lor  $e \in E(G)$ , eventual reducându-se la un subgraf.

Algoritmul are finalitate și va merge până la subgraful cu  $n = p$  noduri (imposibil de a colora  $p$  noduri cu mai puțin de  $p$  culori).

b)

$G$   $p$ -minimal-cromatic

**P.P. R.A.**  $\delta(G) < p - 1 \iff \delta(G) \leq p - 2$   
 $\implies \exists v \in V, |N_G(v)| \leq p - 2$ .

Fie nodul  $v$  un nod cu gradul cel mai mic și o  $p$ -colorare în care nodul  $v$  are culoarea  $c$ . Vecinii lui  $v$  sunt colorați în maxim  $p - 2$  culori, deci  $v$  și  $N_G(v)$  în maxim  $p - 1$  culori diferite. Deoarece  $G$  este  $p$ -minimal-cromatic, el este colorat în  $p$  culori.

$\implies \exists$  cel puțin  $u \in V$  a.i.  $(u, v) \notin E$ , pentru care  $col(u) \neq col(v)$  și  $col(u) \neq col(N_G(v))$ .

$\implies$  Am putea reduce numărul de colorări la  $p - 1$  colorând pe  $v$  în  $col(u)$

$\implies \chi(G) = p - 1$ .

$\implies$  (Absurd)  $G$  nu este  $p$ -minimal-cromatic  $\longrightarrow$  contradicție: P.p. inițială este falsă  $\implies \delta(G) \geq p - 1$ .

c)

" $\Rightarrow$  (\*1)"

$G$  3-minimal-cromatic

1.

$$\delta(G) \geq 2, \quad \max(d_G(v)) < 3.$$

$$\Rightarrow d_G(v) = 2, \quad \forall v \in V \Rightarrow G \text{ circuit indus.}$$

Dacă  $G$  este circuit par indus, atunci  $\chi(G) = 2$ , deoarece se poate colora astfel:

$$\begin{aligned} \text{col}(N_G(v)) = \text{col}(v) * (-1), \quad \text{col}(v) = 1, \quad \forall v \in V &\Rightarrow G \text{ nu este 3-min-crom (absurd).} \\ &\Rightarrow G \text{ circuit impar indus (*1).} \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$  (\*2)

$G$  circuit impar indus.

1.  $G$  2-min-crom?

$$\text{col}(v_i) = \text{col}(N_G(v_{i+1})) \Rightarrow \text{col}(v_1) = \text{col}(v_{k+1}),$$

$$\begin{aligned} \text{iar cum } G \text{ este circuit impar indus de forma } (v_1, v_2, \dots, v_{k+1}, v_1) &\Rightarrow \\ (v_{k+1}, v_1) \in E &\Rightarrow \text{Fals. Nu se poate colora așa.} \end{aligned}$$

2.  $G$  3-min-crom?

Adevărat (din ipoteza " $\Leftarrow$ ").

3.  $G$  4-min-crom?

$$\delta(G) \geq 4 - 1 \text{ (de la b) ) } \Rightarrow \delta(G) \geq 3.$$

$$\text{Cum } G \text{ este circuit impar indus } \Rightarrow \delta(G) = 2 \Rightarrow \text{Fals.}$$

$$\Rightarrow G \text{ 3-min-crom (*2).}$$

Din (\*1) și (\*2)  $\Rightarrow G$  3-min-crom  $\Leftrightarrow G$  circuit impar indus.