Problema 4

1.

Arătăm că EDGE_BIP $\in NP$: Verificarea unui candidat $\iff$ este echivalentă cu problema *2-col* $= O(n+m) \implies \in NP$.

2. Definim Max-Cut

Input: $G=(V,E)$ graf, $c: E \to \mathbb{R}$ funcție de ponderi, $x \in \mathbb{R}$.
Output: Se găsește o tăietură în G de pondere $\geq k$?

Vom reduce în timp polinomial problema MAX-CUT la EDGE_BIP, pentru a demonstra că EDGE_BIP este NP-completă.

Graful rămâne la fel, singura preprocesare:

$$a = \left(\sum_{e \in E} c(e)\right) - k.$$

Putem demonstra echivalența dintre cele două prin complementaritatea acestora:
Fie 2 mulțimi de noduri A și B:

$$F = \{(i,j) \in E \mid i \in A, j \in B\} = \text{tăietura},$$
$$M = \{(i,j) \in E \mid i \in A \text{ și } j \in A \text{ sau } i \in B \text{ și } j \in B\}.$$

Putem observa că:
1) $F \cup M = E$ și $F \cap M = \emptyset$, partiție a muchiilor.
2) Prin ștergerea tuturor muchiilor din M, graful devine bipartit (A,B,E).
$\implies M$ este mulțimea cerută de EDGE-BIP.

Din 1):

$$\sum_{e \in F} c(e) + \sum_{e \in M} c(e) = \sum_{e \in E} c(e)$$

$$\text{"} => \text{" Dacă ponderea lui } F \geq k:$$

$$\sum_{e \in E} c(e) - \sum_{e \in M} c(e) \geq k$$

$$\implies \sum_{e \in M} c(e) \leq \sum_{e \in E} c(e) - k (= a)$$

$$\text{"} <= \text{" Dacă ponderea lui } M \leq \sum_{e \in E} c(e) - k:$$

$$\implies \text{(similar)} \sum_{e \in F} c(e) \geq k$$

Am demonstrat că MAX-CUT se reduce polinomial la EDGE_BIP.