Resolução de Problemas do Livro

# Cálculo e Álgebra Linear: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve. (Kaplan, W.; Lewis, D. J.)


por

**Igo da Costa Andrade**

**Referência**
KAPLAN, W.; LEWIS, D. J.. **Cálculo e Álgebra Linear**: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve.. Rio de Janeiro, Ed. Univ, de Brasilia, 1972.

## Capítulo 0: Introdução

## PROBLEMAS

**1.** (a) Encontre um inteiro $x$ tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

**Solução:**
Observemos que $10\sqrt{2}$, $x$ e $10\sqrt{3}$ são números positivos. Então:

- Pela primeira desigualdade, temos:

$$10\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (10\sqrt{2})\cdot(10\sqrt{2}) < (10\sqrt{2})\cdot x \\ (10\sqrt{2})\cdot x < x \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 < (10\sqrt{2})\cdot x \\ (10\sqrt{2})\cdot x < x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 200 < x^2$$

- Pela segunda desigualdade, temos:

$$x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot x < (10\sqrt{3})\cdot x \\ (10\sqrt{3})\cdot x < (10\sqrt{3})\cdot(10\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < (10\sqrt{3})\cdot x \\ (10\sqrt{3})\cdot x < 300 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 < 300$$

Combinando os resultados acima, obtemos:

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow 200 < x^2 < 300 \Rightarrow x^2 = 225, 256, 289$$
$$\Rightarrow x = 15, 16, 17.$$

■

(b) Encontre um inteiro $x$ tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

**Solução:**
Observememos que $-5\sqrt{2}$, $x$ e $-3\sqrt{3}$ são todos números negativos.

- Pela primeira desigualdade:

$$-5\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (-5\sqrt{2})\cdot(-5\sqrt{2}) > (-5\sqrt{2})\cdot x \\ (-5\sqrt{2})\cdot x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 > (-5\sqrt{2})\cdot x \\ (-5\sqrt{2})\cdot x > x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 50 > x^2$$

- Pela segunda desigualdade,

$$x < -3\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot (-3\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > 27 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 > 27$$

Combunando os resultados acima, tem-se:

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \Rightarrow 50 > x^2 > 27 &\Rightarrow x^2 = 49 \text{ ou } 36 \\ &\Rightarrow x^2 = (-7)^2 \text{ ou } (-6)^2 \\ &\Rightarrow x = -7 \text{ ou } -6 \end{aligned}$$

■

(c) Encontre um número racional $x$ tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

**Solução:**

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

A título de exemplo, façamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 < x^2 < 3 &\Rightarrow \frac{200}{100} < x^2 < \frac{300}{100} \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{225}{100}, \frac{256}{100}, \text{ ou } \frac{289}{100} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{15}{10}\right)^2, \left(\frac{16}{10}\right)^2, \text{ ou } \left(\frac{17}{10}\right)^2 \\ &\Rightarrow x = \frac{15}{10}, \frac{16}{10}, \text{ ou } \frac{17}{10} \end{aligned}$$

■

(d) Encontre um número racional $x$ tal que $\pi < x < \pi + 0.01$.

**Solução:**
$x = 3,14$

■

**2.** Determine se $x < y$, $x = y$, ou $x < y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3$, $y = -2$
(b) $x = 1$, $y = -2$
(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$
(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

**Solução:**

(a) $x = -3$, $y = -2$

$$x - y = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1 < 0 \Rightarrow x < y$$

(b) $x = 1$, $y = -2$

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} y - x &= (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Como $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

Façamos $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$. Então,

$$\begin{aligned} u - v &= (\sqrt{3} - \sqrt{11}) - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \\ \Rightarrow & u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y \end{aligned}$$

■

**3.** Calcule: (a) $|-3.5|$, (b) $|0,2|$, (c) $||x||$, (d) $|-|x||$, (e) $|x-y| - |y-x|$

**Solução:**

(a) $|-3.5| = 3.5$

(b) $|0,2| = 0,2$

(c) $||x|| = |x|$

(d) $|-|x|| = |-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$

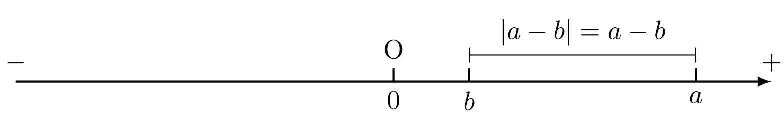
(e) $|x-y| - |y-x| = |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| = 0$

■

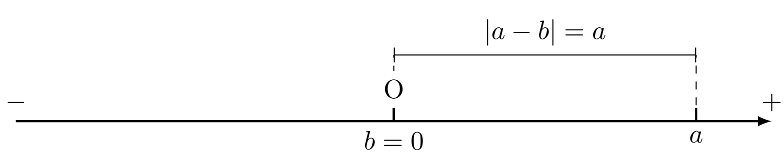
**4.** Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre $a$ e $b$ sobre o eixo dos números.

**Solução:**
No caso em que $a = b$, $|a-b| = 0$ que é a distãncia entre $a$ e $b$. Caso $a > b$:

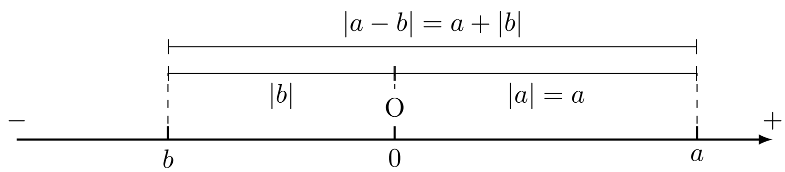
- $a > b > 0 \Rightarrow |a-b| = a - b$



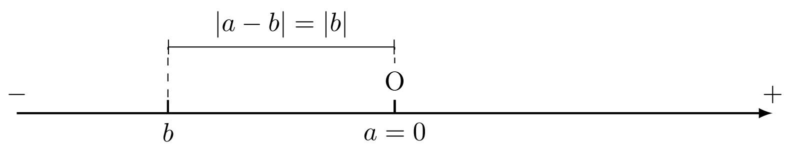

- $a > b = 0 \Rightarrow |a-b| = |a-0| = |a| = a$



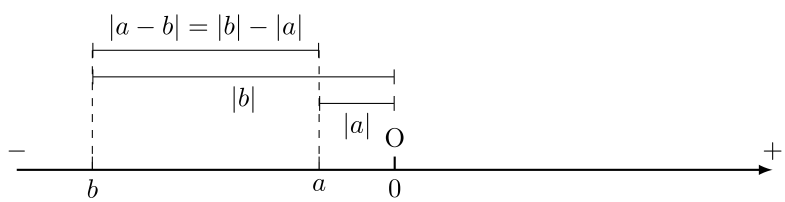
- $a > 0 > b$. Façamos $b = -|b|$, em que $|b|$ é a distância entre $b$ e o zero da reta numérica. Então: $|a-b| = |a-(-|b|)| = |a+|b|| = a+|b|$




- $a = 0 > b$. Então: $|a-b| = |0-b| = |-b| = |b|$, em que $|b|$ é a distância entre $b$ e o zero da reta numérica, que neste caso, é a posição de $a$.




- $0 > a > b$. Façamos $a = -|a|$ e $b = -|b|$. Então: $|a-b| = |-|a|-(-|b|)| = |-|a|+|b|| = ||b|-|a|| = |b|-|a|$, pois $0 < |a| < |b|$.




Os casos em que $b > a$ podem ser determinados de forma análoga, bastando lembrar que $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$ e repetir o aciocínio acima. ■

**5.** Achar $x$ em cada um dps casos: (a) $|x| = 0$, (b) $|x| = 2$, (c) $|x-1| = 2$, (d) $|x+1| = 1$.

**Solução:**

(a) $|x| = 0 \Rightarrow = x = 0$

(b) $|x| = 2 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

(c)

$$|x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2 \\ x-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

(d)

$$|x+1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

■

**6.** O símbolo $\sqrt{x}$ indica 0 se $x = 0$ e a raiz quadrada positiva de $x$, se $x > 0$. Justifique as seguintes regras para todos reais $x$ e $y$.

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$

**Solução:**
Se $x = 0$, a identidade é imediada.
Se $x > 0$, então $\sqrt{x^2} = x = |x|$.
Se $x < 0$, então $-x > 0$. Assim, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$.
Portanto, para todo número real $x$, vale $\sqrt{x^2} = |x|$. ■

(b) $\sqrt{x^4} = x^2$

**Solução:**
Inicialmente, observemos que para todo $x \in \mathrm{R}$, tem-se que $x^2 > 0$. Assim,

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2.$$

■

(c) $(x|x|)^2 = x^4$

**Solução:**
Se $x = 0$ o resultado é imediatamente verdadeiro.
Se $x > 0$, temos que $|x| = x$. Nesse caso,

$$(x|x|)^2 = (x \cdot x)^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$. Nesse caso,

$$(x|x|)^2 = [x \cdot (-x)]^2 = (-x^2)^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

Portanto, para qualquer $x$ real, vale $(x|x|)^2 = x^4$. ■

(d) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$.

**Solução:**
Se $x = y$, a identidade é imediatamente válida.
Se $x > y$ ($\Rightarrow x - y > 0$), então

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x-y)^2} = x - y = |x - y|.$$

Se $x < y$ ($\Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow -(x - y) > 0$), então

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{[-(x-y)]^2} = -(x - y) = |x - y|.$$

Portanto, para quaisquer $x$ e $y$ reais vale $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$. ■

**7.** Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais $a$ e $b$.

**Solução:**

- Regra 20: $|a| = |-a|$.
  Sem perda de generalidade, seja $a > 0$, donde $-a < 0$. Então, $|a| = a$ e $|-a| = -(-a) = a$. Logo, $|a| = |-a|$.
- Regra 21: $|ab| = |a||b|$.
  Caso I: $a \leq 0$ ($\Rightarrow |a| = a$) e $b \leq 0$ ($\Rightarrow |b| = b$). Então:

  $$ab \leq 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|.$$

  Caso II: $a \leq 0$ ($\Rightarrow |a| = a$) e $b < 0$ ($\Rightarrow |b| = -b$). Então:

  $$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a \cdot (-b) = |a||b|.$$

  Caso III: $a < 0$ ($\Rightarrow |a| = -a$) e $b < 0$ ($\Rightarrow |b| = -b$). Então:

  $$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|.$$

  Portanto, para quaisquer reais $a$ e $b$, vale $|ab| = |a||b|$.

■

**8.** (a) $a < b$ implica $a^2 < b^2$?

**Solução:**
Não. Basta tomarmos como contra-exemplo $a = -2$ e $b = -1$, donde $a < b$, mas $a^2 > b^2$. ■

(b) $a < b$ implica $a^3 < b^3$?

(c) $|a| < |b|$ implica $a^2 < b^2$?

**Solução:**
Sim.

$$|a| < |b| \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 < |a||b| \\ |a|||b| < |b|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < |a||b| \\ |a||b| < b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 < |a||b| < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2$$

■

(d) $a \neq b$ implica $|a| \neq |b|$?

**Solução:**
Não. Basta tomarmos $a = 1$ e $b = -1$, donde $|a| = |b| = 1$. ■

(e) $|a| \neq |b|$ implica $a \neq b$?

**Solução:**
Sim. Sem perda de generalidade, consideremos o caso em que $|a| > |b| \geq 0$. A situação em que $|b| = b = 0$ imediatamente implica $a \neq b$ pois, caso contrário $a = b = 0$. Mas isso contradiz o afirmação inicial de que $|a| \neq |b|$. Assim, consideremos a situação $|a| > |b| > 0$. Como $|a| > 0$, então $|a| = a$ e como $|b| > 0$, então $|b| = b$. Portanto,

$$|a| > |b| > 0 \Rightarrow a > b > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \neq b.$$

■

(f) $a < b$ implica $1/a > 1/b$?

**Solução:**
Não. Basta tomar $a$ e $b$ com sinais distintos, ou seja, $ab < 0$. Então,

$$a < b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

■

**9.** Mostrque que, se $x$ e $y$ são racionais, então $xy$ e $x+y$ também serão.

**Solução:**
Se $x$ e $y$ são racionais, então existem inteiros $a$, $b$, $c$ e $d$ tais que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, em que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Então,

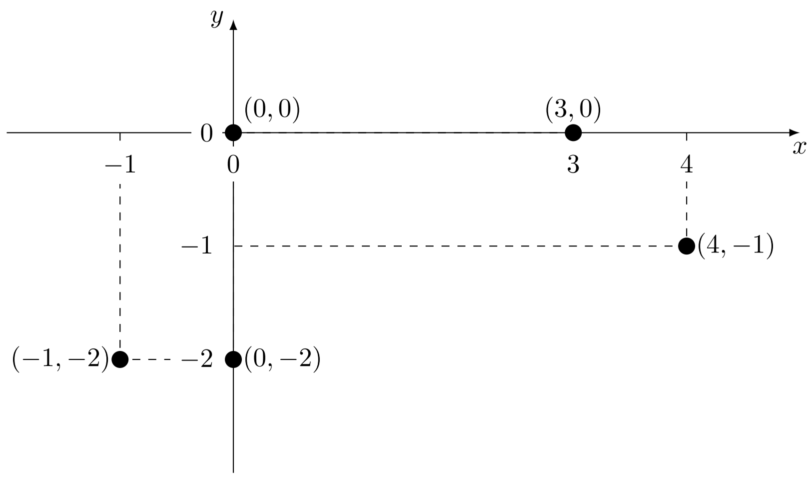
- $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Como $ac$ e $bd \neq 0$ são inteiros, então, $xy = \frac{ac}{bd}$ é racional.
- $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ac+bd}{bd}$. Como $ac + bd$ e $bd \neq 0$ são inteiros, então $x + y = \frac{ac+bd}{bd}$ é racional.

■

## PROBLEMAS (pág. 16)

**1.** No plano $xy$, marque os pontos $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(0, 0)$, $(-1, -2)$, $(4, -1)$.

**Solução:**

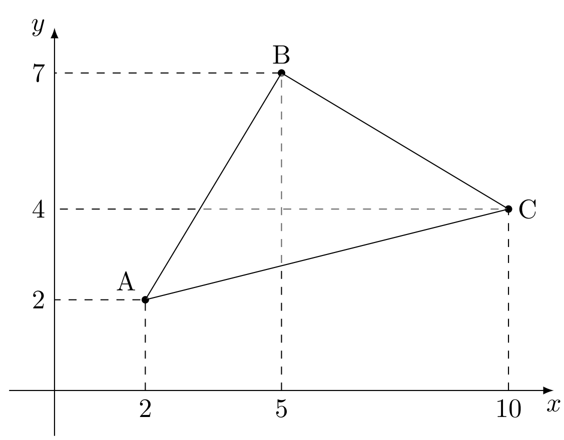



■

**2.** Mostre que o triângulo com vértices $(2, 2)$, $(5, 7)$, $(10, 4)$ é um triângulo retângulo.

**Solução:**

Sejam $A = (2, 2)$, $B = (5, 7)$, $C = (10, 4)$ os vértices do triângulo, conforme mostrado na figura abaixo:




Sejam ainda $a$, $b$ e $c$ as medidas dos lados opostos aos vértices $A$, $B$, e $C$, respectivamente. Temos que:

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(C_x - B_x)^2 + (C_y - B_y)^2} = \sqrt{(10-5)^2 + (4-7)^2} = 5,83$$
$$b = \overline{AC} = \sqrt{(C_x - A_x)^2 + (C_y - A_y)^2} = \sqrt{(10-2)^2 + (4-2)^2} = 8,25$$
$$c = \overline{AB} = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2} = \sqrt{(5-2)^2 + (7-2)^2} = 5,83$$

Observemos que:

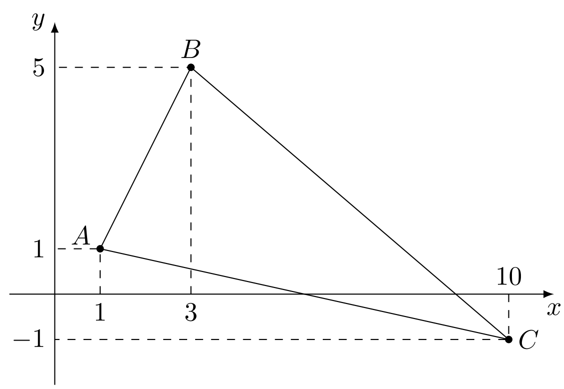
$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5,83^2 + 5,83^2} = \sqrt{68} = 8,25 = b$$

Portanto, o triângulo $ABC$ é retângulo em $B$. ■

**3.** Mostre que o triângulo com vértices $(1,1)$, $(3,5)$ e $(10,-1)$ é isósceles.

**Solução:**

Sejam $A = (1,1)$, $B = (3,5)$, $C = (10,-1)$ os vértices do triângulo, conforme mostrado na figura abaixo:




Sejam ainda $a$, $b$ e $c$ as medidas dos lados opostos aos vértices $A$, $B$ e $C$, respectivamente. Temos que:

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(C_x - B_x)^2 + (C_y - B_y)^2} = \sqrt{(10-3)^2 + (-1-5)^2} = 9,22$$
$$b = \overline{AC} = \sqrt{(C_x - A_x)^2 + (C_y - A_y)^2} = \sqrt{(10-1)^2 + (-1-1)^2} = 9,22$$
$$c = \overline{AB} = \sqrt{(B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (5-1)^2} = 4,47$$

Node $a = b$. Então o triângulo $ABC$ é isósceles. ■

**4.** Mostre que os pontos $(1,2)$, $(2,4)$ e $(4,8)$ localizam-se sobre uma reta.

**Solução:**

Definimos os pontos $A = (1,2)$, $B = (2,4)$ e $C = (4,8)$. Seja $r$ a reta que passa pelos pontos $A$ e $B$. Essa reta possui inclinação $m$ dada por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

A reta $r$ intersecta o eixo $y$ no ponto $b$ dado por:

$$b = -m \cdot x_A + y_A = -2 \cdot 1 + 2 = 0$$

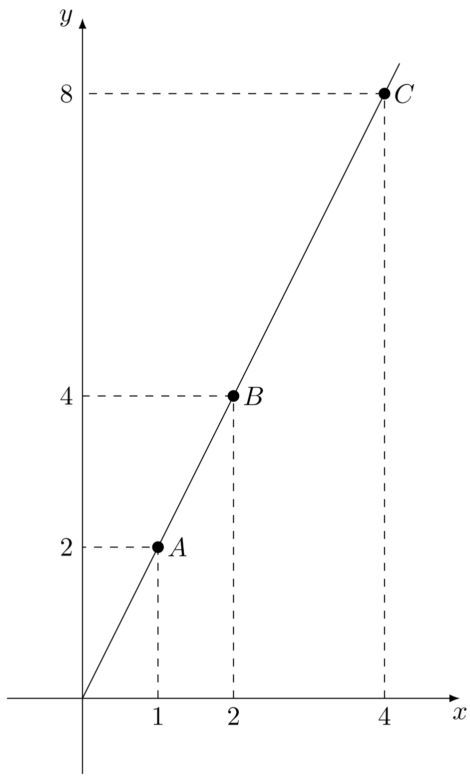
Portanto, a equação da reta que passa por $A$ e $B$ é

$$r : y = 2x + 0$$

Finalmente, verifiquemos se o ponto $C = (4, 8)$ pertence à reta $r$:

$$\begin{aligned} y_C = 2x_C + 0 &\Rightarrow 8 = 2 \cdot 4 + 0 \\ &\Rightarrow 8 = 8 \end{aligned}$$

Logo, os pontos $A$, $B$ e $C$ pertencem à mesma reta, como mostrado na figura abaixo:




■