Resolução de exercícios do Livro:

Cálculo e Álgebra Linear (Wilfred Kaplan, Donald L. Lewis)

por

Igo da Costa Andrade

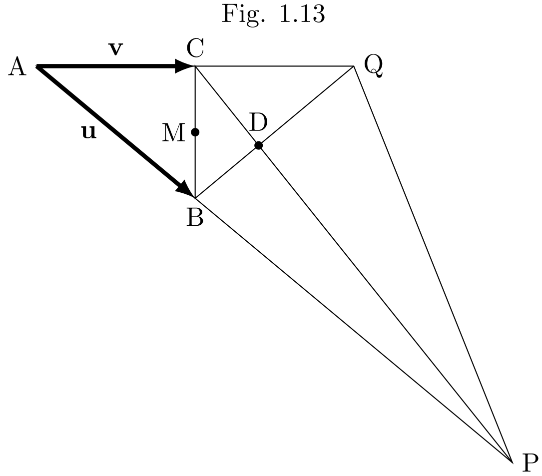
Referência
KAPLAN, W.; LEWIS, D. L. **Cálculo e Álgebra Linear**: Vetores no plano e funções de uma variável. Vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

Capítulo 1: Geometria vetorial em duas dimensões

PROBLEMAS

1.1 Seja dado o triângulo ABC. Seja $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$ e $\overrightarrow{AC} = \mathbf{v}$, e sejam os pontos P, Q escolhidos de modo que $\overrightarrow{AP} = 3\mathbf{u}$, $\overrightarrow{AQ} = 2\mathbf{v}$, como na Fig. 1.13.

Fig. 1.13



Exprima os seguintes vetores em função de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$: (a) $\overrightarrow{BC}$, (b) $\overrightarrow{PB}$, (c) $\overrightarrow{PQ}$, (d) $\overrightarrow{PC}$, (e) $\overrightarrow{BQ}$, (f) $\overrightarrow{AM}$, onde M é o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$, (g) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$.

Solução:

(a) $\overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\\ &\Rightarrow \overrightarrow{BC} = \mathbf{v} - \mathbf{u}\end{aligned}$$

(b) $\overrightarrow{PB}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} &\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{PB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PB} = \mathbf{u} - 3\mathbf{u} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PB} = -2\mathbf{u}\end{aligned}$$

(c) $\overrightarrow{PQ}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP} &\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{PQ} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = 2\mathbf{v} - 3\mathbf{u}\end{aligned}$$

(d) $\overrightarrow{PC}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} &\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PC} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{PC} = \mathbf{v} - 3\mathbf{u}\end{aligned}$$

(e) $\overrightarrow{BQ}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} &\Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{BQ} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}\end{aligned}$$

(f) $\overrightarrow{AM}$, onde M é o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$ Podemos escrever $\overrightarrow{AM}$ das seguintes formas:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \text{ ou} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\end{cases}$$

Como M é o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$, devemos ter $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BM}$. Assim, substituindo nas expressões acima, tem-se:

$$\begin{aligned}\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BM}\end{cases} &\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{2}\end{aligned}$$

(g) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ}$

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{BQ} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$$

■