Resolução de Problemas do Livro

Cálculo e Álgebra Linear: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve. (Kaplan, W.; Lewis, D. J.)

por

Igo da Costa Andrade

Referência

KAPLAN, W.; LEWIS, D. J.. **Cálculo e Álgebra Linear**: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve.. Rio de Janeiro, Ed. Univ, de Brasilia, 1972.

Capítulo 0: Introdução

PROBLEMAS

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução:
Observemos que $10\sqrt{2}$, x e $10\sqrt{3}$ são números positivos. Então:

- Pela primeira desigualdade, temos:

$$10\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (10\sqrt{2}) \cdot (10\sqrt{2}) < (10\sqrt{2}) \cdot x \\ (10\sqrt{2}) \cdot x < x \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 < (10\sqrt{2}) \cdot x \\ (10\sqrt{2}) \cdot x < x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 200 < x^2$$

- Pela segunda desigualdade, temos:

$$x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x < (10\sqrt{3}) \cdot x \\ (10\sqrt{3}) \cdot x < (10\sqrt{3}) \cdot (10\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < (10\sqrt{3}) \cdot x \\ (10\sqrt{3}) \cdot x < 300 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 < 300$$

Combinando os resultados acima, obtemos:

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow 200 < x^2 < 300 \Rightarrow x^2 = 225, 256, 289$$
$$\Rightarrow x = 15, 16, 17.$$

■

(b) Encontre um inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução:
Observememos que $-5\sqrt{2}$, x e $-3\sqrt{3}$ são todos números negativos.

- Pela primeira desigualdade:

$$-5\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (-5\sqrt{2}) \cdot (-5\sqrt{2}) > (-5\sqrt{2}) \cdot x \\ (-5\sqrt{2}) \cdot x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 > (-5\sqrt{2}) \cdot x \\ (-5\sqrt{2}) \cdot x > x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 50 > x^2$$

- Pela segunda desigualdade,

$$x < -3\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot (-3\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > 27 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 > 27$$

Combunando os resultados acima, tem-se:

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \Rightarrow 50 > x^2 > 27 &\Rightarrow x^2 = 49 \text{ ou } 36 \\ &\Rightarrow x^2 = (-7)^2 \text{ ou } (-6)^2 \\ &\Rightarrow x = -7 \text{ ou } -6 \end{aligned}$$

■

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução:

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

A título de exemplo, façamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 < x^2 < 3 &\Rightarrow \frac{200}{100} < x^2 < \frac{300}{100} \\ &\Rightarrow x^2 = \frac{225}{100}, \frac{256}{100}, \text{ ou } \frac{289}{100} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{15}{10}\right)^2, \left(\frac{16}{10}\right)^2, \text{ ou } \left(\frac{17}{10}\right)^2 \\ &\Rightarrow x = \frac{15}{10}, \frac{16}{10}, \text{ ou } \frac{17}{10} \end{aligned}$$

■

(d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0.01$.

Solução:
$x = 3,14$

■

2. Determine se $x < y$, $x = y$, ou $x < y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3$, $y = -2$
(b) $x = 1$, $y = -2$
(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$
(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

Solução:

(a) $x = -3$, $y = -2$

$$x - y = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1 < 0 \Rightarrow x < y$$

(b) $x = 1$, $y = -2$

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} y - x &= (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Como $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

Façamos $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$. Então,

$$\begin{aligned} &u - v = (\sqrt{3} - \sqrt{11}) - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \\ \Rightarrow &u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3. Calcule: (a) $|-3.5|$, (b) $|0,2|$, (c) $||x||$, (d) $|-|x||$, (e) $|x-y| - |y-x|$

Solução:

(a) $|-3.5| = 3.5$

(b) $|0,2| = 0,2$

(c) $||x|| = |x|$

(d) $|-|x|| = |-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$

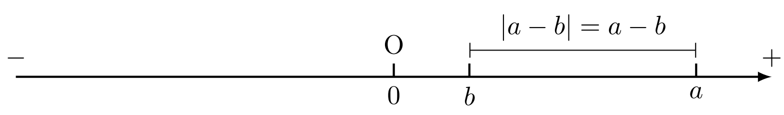
(e) $|x-y| - |y-x| = |x-y| - |-(x-y)| = |x-y| - |-1| \cdot |x-y| = |x-y| - |x-y| = 0$

$\blacksquare$

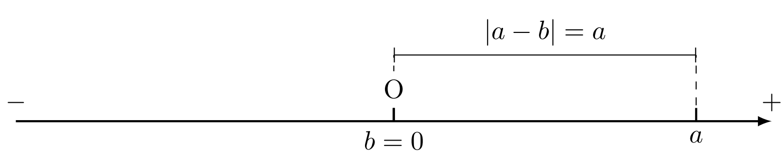
4. Mostre que $|a-b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.

Solução:
No caso em que $a = b$, $|a-b| = 0$ que é a distãncia entre a e b. Caso $a > b$:

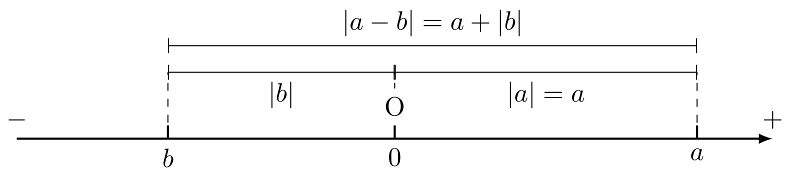
- $a > b > 0 \Rightarrow |a-b| = a - b$



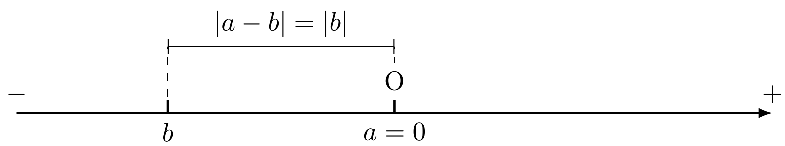
- $a > b = 0 \Rightarrow |a-b| = |a-0| = |a| = a$



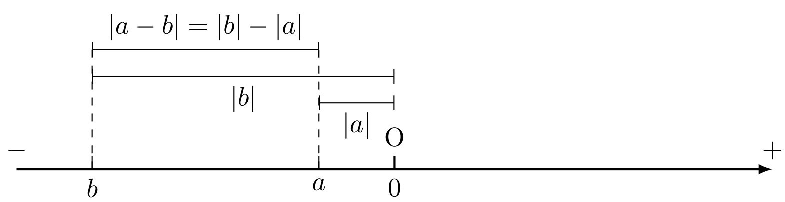
- $a > 0 > b$. Façamos $b = -|b|$, em que $|b|$ é a distância entre b e o zero da reta numérica. Então: $|a - b| = |a - (-|b|)| = |a + |b|| = a + |b|$



- $a = 0 > b$. Então: $|a - b| = |0 - b| = |-b| = |b|$, em que $|b|$ é a distância entre b e o zero da reta numérica, que neste caso, é a posição de a.



- $0 > a > b$. Façamos $a = -|a|$ e $b = -|b|$. Então: $|a-b| = |-|a|-(-|b|)| = |-|a|+|b|| = ||b|-|a|| = |b| - |a|$, pois $0 < |a| < |b|$.



Os casos em que $b > a$ podem ser determinados de forma análoga, bastando lembrar que $|a - b| = |-(b - a)| = |b - a|$ e repetir o aciocínio acima. ■