Resolução de Problemas do Livro

Cálculo e Álgebra Linear: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve. (Kaplan, W.; Lewis, D. J.)

por

Igo da Costa Andrade

Referência

KAPLAN, W.; LEWIS, D. J.. **Cálculo e Álgebra Linear**: Vol 1: Vetores no plano e funções de uma variáve.. Rio de Janeiro, Ed. Univ, de Brasilia, 1972.

Capítulo 0: Introdução

PROBLEMAS

1. (a) Encontre um inteiro x tal que $10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3}$.

Solução:
Observemos que $10\sqrt{2}$, x e $10\sqrt{3}$ são números positivos. Então:

- Pela primeira desigualdade, temos:

$$10\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (10\sqrt{2}) \cdot (10\sqrt{2}) < (10\sqrt{2}) \cdot x \\ (10\sqrt{2}) \cdot x < x \cdot x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 < (10\sqrt{2}) \cdot x \\ (10\sqrt{2}) \cdot x < x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 200 < x^2$$

- Pela segunda desigualdade, temos:

$$x < 10\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x < (10\sqrt{3}) \cdot x \\ (10\sqrt{3}) \cdot x < (10\sqrt{3}) \cdot (10\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < (10\sqrt{3}) \cdot x \\ (10\sqrt{3}) \cdot x < 300 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 < 300$$

Combinando os resultados acima, obtemos:

$$10\sqrt{2} < x < 10\sqrt{3} \Rightarrow 200 < x^2 < 300 \Rightarrow x^2 = 225, 256, 289$$
$$\Rightarrow x = 15, 16, 17.$$

■

(b) Encontre um inteiro x tal que $-5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3}$.

Solução:
Observememos que $-5\sqrt{2}$, x e $-3\sqrt{3}$ são todos números negativos.

- Pela primeira desigualdade:

$$-5\sqrt{2} < x \Rightarrow \begin{cases} (-5\sqrt{2}) \cdot (-5\sqrt{2}) > (-5\sqrt{2}) \cdot x \\ (-5\sqrt{2}) \cdot x > x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 50 > (-5\sqrt{2}) \cdot x \\ (-5\sqrt{2}) \cdot x > x^2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 50 > x^2$$

- Pela segunda desigualdade,

$$x < -3\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > (-3\sqrt{3}) \cdot (-3\sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > (-3\sqrt{3}) \cdot x \\ (-3\sqrt{3}) \cdot x > 27 \end{cases}$$
$$\Rightarrow x^2 > 27$$

Combunando os resultados acima, tem-se:

$$\begin{aligned} -5\sqrt{2} < x < -3\sqrt{3} \Rightarrow 50 > x^2 > 27 &\Rightarrow x^2 = 49 \text{ ou } 36 \\ &\Rightarrow x^2 = (-7)^2 \text{ ou } (-6)^2 \\ &\Rightarrow x = -7 \text{ ou } -6 \end{aligned}$$

■

(c) Encontre um número racional x tal que $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$.

Solução:

$$\sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 < x^2 < (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 2 < x^2 < 3$$

A título de exemplo, façamos:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} < x < \sqrt{3} \Rightarrow 2 < x^2 < 3 \Rightarrow \frac{200}{100} < x^2 < \frac{300}{100} \\ \Rightarrow x^2 = \frac{225}{100}, \frac{256}{100}, \text{ ou } \frac{289}{100} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{15}{10}\right)^2, \left(\frac{16}{10}\right)^2, \text{ ou } \left(\frac{17}{10}\right)^2 \\ \Rightarrow x = \frac{15}{10}, \frac{16}{10}, \text{ ou } \frac{17}{10} \end{aligned}$$

■

(d) Encontre um número racional x tal que $\pi < x < \pi + 0.01$.

Solução:
$x = 3,14$

■

2. Determine se $x < y$, $x = y$, ou $x < y$ para cada um dos seguintes casos:

(a) $x = -3$, $y = -2$
(b) $x = 1$, $y = -2$
(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$
(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

Solução:

(a) $x = -3$, $y = -2$

$$x - y = -3 - (-2) = -3 + 2 = -1 < 0 \Rightarrow x < y$$

(b) $x = 1$, $y = -2$

$$x - y = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3 > 0 \Rightarrow x > y$$

(c) $x = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, $y = \sqrt{7} - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} y - x &= (\sqrt{7} - \sqrt{2}) - (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{5} + \sqrt{3} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Como $\sqrt{7} - \sqrt{5} > 0$ e $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, então:

$$(\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0 \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y > x \Rightarrow x < y$$

(d) $x = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{11}}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{13}}$

Façamos $u = \dfrac{1}{x} = \sqrt{3} - \sqrt{11}$ e $v = \dfrac{1}{y} = \sqrt{3} - \sqrt{13}$. Então,

$$\begin{aligned} &u - v = (\sqrt{3} - \sqrt{11}) - (\sqrt{3} - \sqrt{13}) = \sqrt{3} - \sqrt{11} - \sqrt{3} + \sqrt{13} = \sqrt{13} - \sqrt{11} > 0 \\ \Rightarrow &u > v \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y} \Rightarrow x < y \end{aligned}$$

■

3. Calcule: (a) $|-3.5|$, (b) $|0,2|$, (c) $||x||$, (d) $|-|x||$, (e) $|x - y| - |y - x|$

Solução:

(a) $|-3.5| = 3.5$

(b) $|0,2| = 0,2$

(c) $||x|| = |x|$

(d) $|-|x|| = |-1| \cdot |x| = 1 \cdot |x| = |x|$

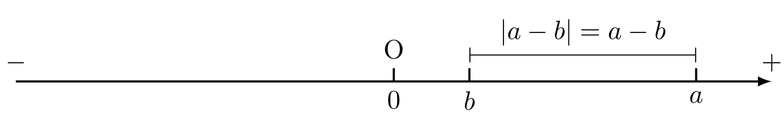
(e) $|x - y| - |y - x| = |x - y| - |-(x - y)| = |x - y| - |-1| \cdot |x - y| = |x - y| - |x - y| = 0$

■

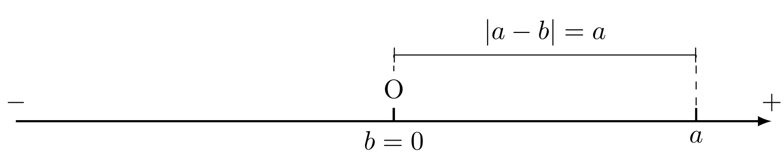
4. Mostre que $|a - b|$ pode ser interpretado como a distância entre a e b sobre o eixo dos números.

Solução:
No caso em que $a = b$, $|a - b| = 0$ que é a distãncia entre a e b. Caso $a > b$:

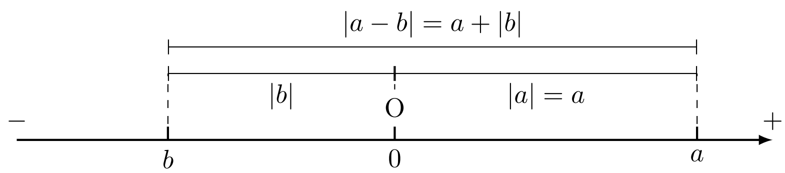
- $a > b > 0 \Rightarrow |a - b| = a - b$



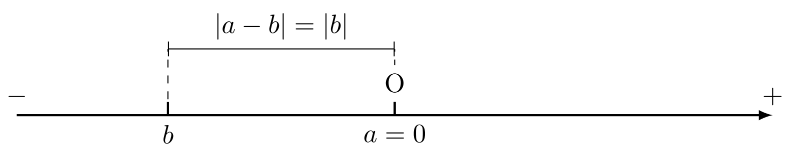
- $a > b = 0 \Rightarrow |a - b| = |a - 0| = |a| = a$



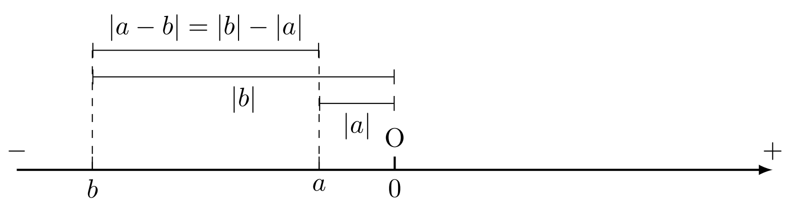
- $a > 0 > b$. Façamos $b = -|b|$, em que $|b|$ é a distância entre b e o zero da reta numérica. Então: $|a-b| = |a-(-|b|)| = |a+|b|| = a+|b|$



- $a = 0 > b$. Então: $|a-b| = |0-b| = |-b| = |b|$, em que $|b|$ é a distância entre b e o zero da reta numérica, que neste caso, é a posição de a.



- $0 > a > b$. Façamos $a = -|a|$ e $b = -|b|$. Então: $|a-b| = |-|a|-(-|b|)| = |-|a|+|b|| = ||b|-|a|| = |b|-|a|$, pois $0 < |a| < |b|$.



Os casos em que $b > a$ podem ser determinados de forma análoga, bastando lembrar que $|a-b| = |-(b-a)| = |b-a|$ e repetir o aciocínio acima. ■

5. Achar x em cada um dps casos: (a) $|x| = 0$, (b) $|x| = 2$, (c) $|x-1| = 2$, (d) $|x+1| = 1$.

Solução:

(a) $|x| = 0 \Rightarrow= x = 0$

(b) $|x| = 2 \Rightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

(c)

$$|x-1| = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2 \\ x-1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

(d)

$$|x+1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

■

6. O símbolo $\sqrt{x}$ indica 0 se $x = 0$ e a raiz quadrada positiva de x, se $x > 0$. Justifique as seguintes regras para todos reais x e y.

(a) $\sqrt{x^2} = |x|$

Solução:
Se $x = 0$, a identidade é imediada.
Se $x > 0$, então $\sqrt{x^2} = x = |x|$.
Se $x < 0$, então $-x > 0$. Assim, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x = |x|$.
Portanto, para todo número real x, vale $\sqrt{x^2} = |x|$. ■

(b) $\sqrt{x^4} = x^2$

Solução:
Inicialmente, observemos que para todo $x \in \mathrm{R}$, tem-se que $x^2 > 0$. Assim,

$$\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = x^2.$$

■

(c) $(x|x|)^2 = x^4$

Solução:
Se $x = 0$ o resultado é imediatamente verdadeiro.
Se $x > 0$, temos que $|x| = x$. Nesse caso,

$$(x|x|)^2 = (x \cdot x)^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

Se $x < 0$, temos que $|x| = -x$. Nesse caso,

$$(x|x|)^2 = [x \cdot (-x)]^2 = (-x^2)^2 = (x^2)^2 = x^4.$$

Portanto, para qualquer x real, vale $(x|x|)^2 = x^4$. ■

(d) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$.

Solução:
Se $x = y$, a identidade é imediatamente válida.
Se $x > y$ ($\Rightarrow x - y > 0$), então

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{(x - y)^2} = x - y = |x - y|.$$

Se $x < y$ ($\Rightarrow x - y < 0 \Rightarrow -(x - y) > 0$), então

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = \sqrt{[-(x - y)]^2} = -(x - y) = |x - y|.$$

Portanto, para quaisquer x e y reais vale $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = |x - y|$. ■

7. Mostre que as regras 20 e 21 são válidas para todos os números reais a e b.

Solução:

- Regra 20: $|a| = |-a|$.
  Sem perda de generalidade, seja $a > 0$, donde $-a < 0$. Então, $|a| = a$ e $|-a| = -(-a) = a$. Logo, $|a| = |-a|$.
- Regra 21: $|ab| = |a||b|$.
  Caso I: $a \leq 0$ $(\Rightarrow |a| = a)$ e $b \leq 0$ $(\Rightarrow |b| = b)$. Então:

  $$ab \leq 0 \Rightarrow |ab| = ab = |a||b|.$$

  Caso II: $a \leq 0$ $(\Rightarrow |a| = a)$ e $b < 0$ $(\Rightarrow |b| = -b)$. Então:

  $$ab < 0 \Rightarrow |ab| = -(ab) = a \cdot (-b) = |a||b|.$$

  Caso III: $a < 0$ $(\Rightarrow |a| = -a)$ e $b < 0$ $(\Rightarrow |b| = -b)$. Então:

  $$ab > 0 \Rightarrow |ab| = ab = (-a)(-b) = |a||b|.$$

  Portanto, para quaisquer reais a e b, vale $|ab| = |a||b|$.

■

8. (a) $a < b$ implica $a^2 < b^2$?

Solução:
Não. Basta tomarmos como contra-exemplo $a = -2$ e $b = -1$, donde $a < b$, mas $a^2 > b^2$. ■

(b) $a < b$ implica $a^3 < b^3$?

(c) $|a| < |b|$ implica $a^2 < b^2$?

Solução:
Sim.

$$|a| < |b| \Rightarrow \begin{cases} |a|^2 < |a||b| \\ |a|||b| < |b|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < |a||b| \\ |a||b| < b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2 < |a||b| < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2$$

■

(d) $a \neq b$ implica $|a| \neq |b|$?

Solução:
Não. Basta tomarmos $a = 1$ e $b = -1$, donde $|a| = |b| = 1$. ■

(e) $|a| \neq |b|$ implica $a \neq b$?

Solução:
Sim. Sem perda de generalidade, consideremos o caso em que $|a| > |b| \geq 0$. A situação em que $|b| = b = 0$ imediatamente implica $a \neq b$ pois, caso contrário $a = b = 0$. Mas isso contradiz o afirmação inicial de que $|a| \neq |b|$. Assim, consideremos a situação $|a| > |b| > 0$. Como $|a| > 0$, então $|a| = a$ e como $|b| > 0$, então $|b| = b$. Portanto,

$$|a| > |b| > 0 \Rightarrow a > b > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a \neq b.$$

■

(f) $a < b$ implica $1/a > 1/b$?

Solução:
Não. Basta tomar a e b com sinais distintos, ou seja, $ab < 0$. Então,

$$a < b \Rightarrow a \cdot \frac{1}{ab} > b \cdot \frac{1}{ab} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

■

9. Mostrque que, se x e y são racionais, então xy e $x + y$ também serão.

Solução:
Se x e y são racionais, então existem inteiros a, b, c e d tais que $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, em que $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Então,

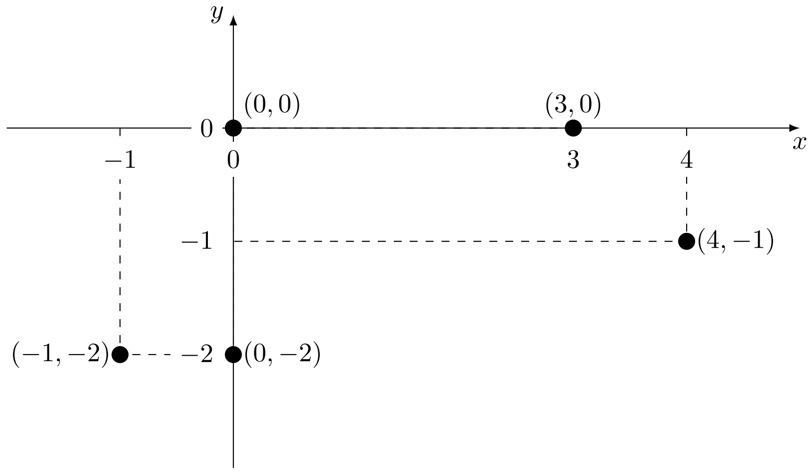
- $xy = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Como ac e $bd \neq 0$ são inteiros, então, $xy = \frac{ac}{bd}$ é racional.
- $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ac + bd}{bd}$. Como $ac + bd$ e $bd \neq 0$ são inteiros, então $x + y = \frac{ac + bd}{bd}$ é racional.

■

PROBLEMAS (pág. 16)

1. No plano xy, marque os pontos $(3,0)$, $(0,-2)$, $(0,0)$, $(-1,-2)$, $(4,-1)$.

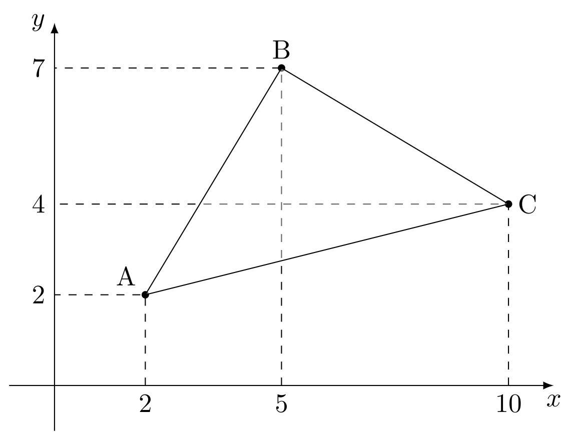
Solução:



2. Mostre que o triângulo com vértices $(2,2)$, $(5,7)$, $(10,4)$ é um triângulo retângulo.

Solução:

Sejam $A=(2,2)$, $B=(5,7)$, $C=(10,4)$ os vértices do triângulo, conforme mostrado na figura abaixo:



Sejam ainda a, b e c as medidas dos lados opostos aos vértices A, B, e C, respectivamente. Temos que:

$$a=\overline{BC}=\sqrt{(C_x-B_x)^2+(C_y-B_y)^2}=\sqrt{(10-5)^2+(4-7)^2}=5,83$$

$$b=\overline{AC}=\sqrt{(C_x-A_x)^2+(C_y-A_y)^2}=\sqrt{(10-2)^2+(4-2)^2}=8,25$$

$$c=\overline{AB}=\sqrt{(B_x-A_x)^2+(B_y-A_y)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(7-2)^2}=5,83$$

Observemos que:

$$\sqrt{a^2 + c^2} = \sqrt{5,83^2 + 5,83^2} = \sqrt{68} = 8,25 = b$$

Portanto, o triângulo ABC é retângulo em B. ∎

3. Mostre que o triângulo com vértices $(1,1)$, $(3,5)$ e $(10,-1)$ é isósceles.

Solução:

Sejam $A = (2,2)$, $B = (5,7)$, $C = (10,4)$ os vértices do triângulo, conforme mostrado na figura abaixo:

∎