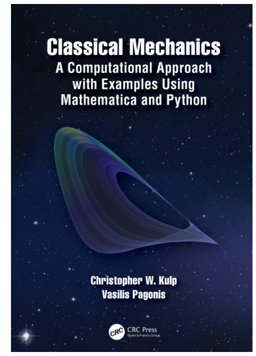
Resolução de Problemas do Livro

Classical Mechanics: A computational approach with python (Kulp, C. W.; Pagonis, V.)



por

Igo da Costa Andrade

Referência
KULP, C. W.; PAGONIS, V.. **Classical Mechanics**: A computational approach with python. Boca Ration, CRC Press, 2021.

Capítulo 1: Os Fundamentos do Movimento e Computação[1]

Exemplos do capítulo

Exemplo 1.1: Velocidade como função do tempo

Considere uma partícula se movendo em linha reta com aceleração constante a. Se no tempo $t = 0$ a velocidade da partícula é v_0, encontre a fórmula para a velocidade da partícula como função do tempo.

Solução:

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = adt &\Rightarrow \int_{v_0}^{v(t)} dv' = \int_0^t adt' \\
&\Rightarrow v(t) - v_0 = at \\
&\Rightarrow v(t) = v_0 + at
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2: Um exemplo de computação simbólica

Usando computação simbólica, resolva a equação diferencial do Exemplo 1.1.

Solução:

```
# Biblioteca importada
import sympy as sp
sp.init_printing()

# Definição das variáveis
v = sp.Function('v')
t = sp.Symbol('t', real=True, positive=True)
a = sp.Symbol('a', real=True)
```

[1]Título original: *The Foundations of Motion and Computations*

```
# Solução
general_soln = sp.dsolve(sp.Derivative(v(t), t) - a, v(t))
print(general_soln.rhs)
```

```
## C1 + a*t
```

■

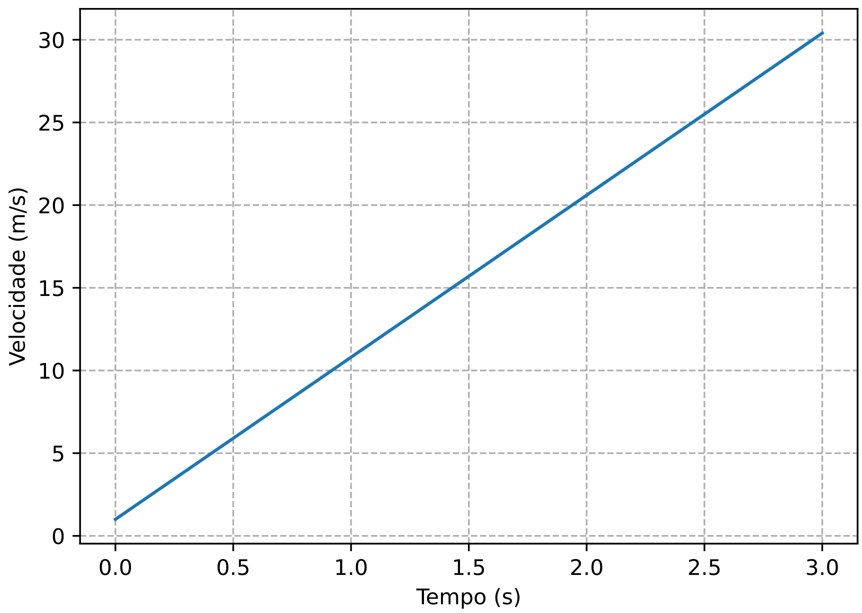
Exemplo 1.3: m exemplo de computação numérica

Usando $a = 9.8$ m/s^2 e uma velocidade inicial de $v(0) = v_0 = 1$ m/s, encontre e construa o gráfico da solução numérica da equação diferencial do Exemplo 1.1.

Solução:

```
# Bibliotecas necessárias
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# Dados
v0 = 1 # m/s

# Equação Diferencial
def velderiv(v, t):
    a = 9.8
    dvdt = a
    return dvdt

# Solução
times = np.linspace(0, 3, 30)
velocity = odeint(velderiv, v0, times)

# Gráfico
plt.plot(times, velocity)
plt.xlabel("Tempo (s)")
plt.ylabel("Velocidade (m/s)")
plt.grid(ls="dashed")
plt.savefig("figure/chap-01/muv.pdf")
plt.close()
```

Figure 1: Velocidade em função do tempo de uma partícula em queda livre



■

1.8 Problemas de fim de capítulo

Seção 1.2: O básico da Mecânica Clássica

1 A posição de uma partícula de 0.50 kg de massa pode ser descrita usando a função vetorial: $\mathbf{r}_0 = 3t\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{j}} + 7t^{-2}\hat{\mathbf{k}}$.

(a) Qual são as unidades de cada um dos coeficientes em cada compoente? Assuma que o tempo é medido em segundos e a posição é medida em metros.

Solução:

$$\begin{aligned}
\text{Coordenada } x: [3t] = [L] &\Rightarrow [3][t] = [L] \Rightarrow [3][T] = [L] \\
&\Rightarrow [3] = \frac{[L]}{[T]} = \text{m/s} \\
\text{Coordenada } y: \left[2t^2\right] = [L] &\Rightarrow [2]\left[t^2\right] = [L] \Rightarrow [2][T]^2 = [L] \\
&\Rightarrow [2] = \frac{[L]}{[T]^2} = \text{m/s}^2 \\
\text{Coordenada } z: \left[7t^{-2}\right] = [L] &\Rightarrow [7][T]^{-2} = [L] \Rightarrow [7] = [L][T]^2 = \text{m}\cdot\text{s}^2
\end{aligned}$$

■

(b) Calcule a velocidade da partícula em $t = 3$ segundos.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} &= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\
&= 3\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} + 7\cdot(-2t^{-3})\hat{\mathbf{k}} \\
&= 3\hat{\mathbf{i}} + 2t\hat{\mathbf{j}} - 14t^{-3}\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_0(3) = 3\hat{\mathbf{i}} + 2\cdot 3\hat{\mathbf{j}} - 14\cdot 3^{-3} = 3\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}} - \frac{14}{27}\hat{\mathbf{k}}$$

■

(c) Calcule a aceleração da partícula em $t = 1$ segundo.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} &= \frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}} \\
&= 0\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 14\cdot(-3t^{-4})\hat{\mathbf{k}} \\
&= 2\hat{\mathbf{j}} + 52t^{-4}\hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_0(1) = 2\hat{\mathbf{j}} + 52\cdot 1^{-4}\hat{\mathbf{k}} = 2\hat{\mathbf{j}} + 42\hat{\mathbf{k}}\ \text{m/s}^2$$

■

2 Considere o vetor posição $\mathbf{r} = 3.0t\hat{\rho}$, onde $\hat{\rho} = \cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\hat{\mathbf{j}}$ e $\phi = \phi(t)$. Determine a velocidade da partícula.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(3.0t)\,\hat{\rho} + 3.0t\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \\
\mathbf{v}(t) &= 3.0\hat{\rho} + 3.0t\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \qquad (1)
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\hat{\mathbf{j}}\right) = -\sin\phi\cdot\frac{d\phi(t)}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\cdot\frac{d\phi(t)}{dt}\hat{\mathbf{j}} \\
\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= -\dot{\phi}\sin\phi\hat{\mathbf{i}} + \dot{\phi}\cos\phi\hat{\mathbf{j}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Substituindo $\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt}$ de (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= 3.0\hat{\rho} + 3.0t\left(-\dot{\phi}\sin\phi\hat{\mathbf{i}} + \dot{\phi}\cos\phi\hat{\mathbf{j}}\right) \\
\mathbf{v}(t) &= 3.0\left(\cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\hat{\mathbf{j}}\right) + 3.0t\left(-\dot{\phi}\sin\phi\hat{\mathbf{i}} + \dot{\phi}\cos\phi\hat{\mathbf{j}}\right) \\
\mathbf{v}(t) &= \left(3.0\cos\phi - 3.0t\dot{\phi}\sin\phi\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(3.0\sin\phi + 3.0t\dot{\phi}\cos\phi\right)\hat{\mathbf{j}} \qquad (3)
\end{aligned}$$

■

3 A posição de uma partícula pode ser dada por $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + R\sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$, onde R e ω são constantes. Descreva a trajetória desta partícula. Qual é a aceleração da partícula como função do tempo?

Solução:
Sejam $x(t) = R\cos(\omega t)$ e $y(t) = R\sin(\omega t)$ as coordenadas cartesianas da trajetória da partícula. Observemos que

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= [R\cos(\omega t)]^2 + [R\sin(\omega t)]^2 \\
&= R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t) \\
&= R^2\left[\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right] \\
&= R^2
\end{aligned}$$

A partícula descreve uma trajetória circular de raio R e centro na origem. A seguir, determinemos a velocidade da partícula:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = -\omega R\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \omega R\cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$

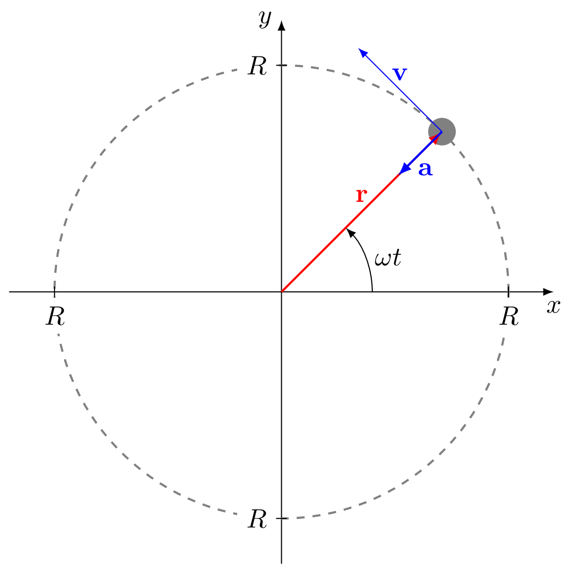
Observemos que o vetor velocidade $\mathbf{v}$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\mathbf{r}$. De fato, o produto escalar desses vetores é nulo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{v} &= \left[R\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + R\sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}\right]\cdot\left[-\omega R\sin(\omega t)\hat{\mathbf{i}} + \omega R\cos(\omega t)\hat{\mathbf{j}}\right] \\
&= -\omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t) + \omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

A aceleração da partícula é dada por:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = -\omega^2 R\cos(\omega t)\hat{\mathbf{i}} - \omega^2 R\sin(\omega t)\hat{\mathbf{j}}$$
$$\mathbf{a}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$$

A aceleração da partícula tem mesma direção e sentido oposto ao vetor posição em qualquer instante, ou seja, o vetor aceleração aponta para o centro da trajetória circular. A figura seguinte mostra a trajetória da partícula e os vetores posição, velocidade e aceleração num dado instante.



■