

---

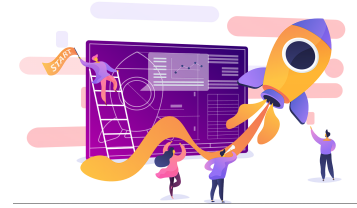
Resolução de exercícios do Curso:

## Física Básica (Veduca)

por

Igo da Costa Andrade

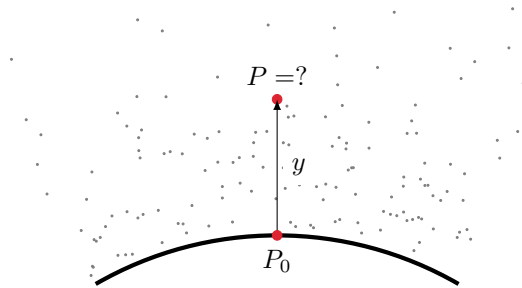
---



## Mecânica dos Fluidos

### Pressão atmosférica

Cálculo da pressão atmosférica  $P$  a uma altura  $y$  acima do nível do mar, em que a pressão atmosférica é igual a  $P_0$ , conforme mostrado na figura abaixo.



### Solução:

Consideremos inicialmente a Equação de Clapeyron para os gases ideais:

$$PV = nRT$$

em que:

- $P$  é a pressão do gás;
- $V$  é o volume ocupado pelo gás;
- $n$  é a quantidade de mols;
- $T$  é a temperatura absoluta (em kelvin);
- $R$  é a constante universal dos gases ideais.

Seja  $m$  a massa do gás e  $M$  a massa molar do material que é constituído o referido gás. O número de mols é dado por  $n = \frac{m}{M}$ . Substituindo na Equação de Clapeyron, tem-se:

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow P = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

onde  $\rho = \frac{m}{V}$  é a densidade do gás.

Consideremos, numa primeira simplificação que a temperatura  $T$  é uniforme para qualquer altura  $y$ . Então,

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = \text{cte.} \quad (1)$$

Por outro lado, pela lei de Stevin, tem-se:

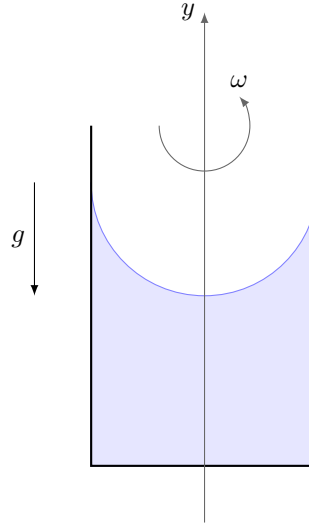
$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (2)$$

Substituindo  $\rho$  de em , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= -\left(\frac{MP}{RT}\right)g \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)dy \Rightarrow \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) \int_0^y dy \\ &\Rightarrow \ln P - \ln P_0 = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)y \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\left(\frac{Mg}{RT}\right)y \\ &\Rightarrow P = P_0 e^{-(Mg/RT)y} \end{aligned}$$

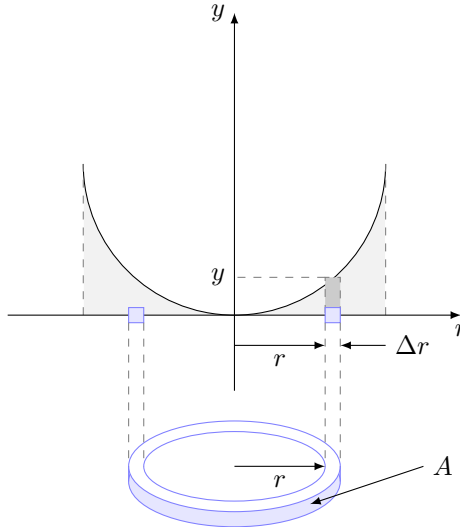
## Fluido rodando

Considere um fluido de densidade  $\rho$  em um recipiente que gira com velocidade angular  $\omega$  em torno de seu eixo de simetria, conforme figura abaixo. Determinar a função  $y(r)$  que descreve o formato da superfície do fluido em uma seção transversal.



### Solução:

A figura seguinte mostra a seção transversão do fluido e o sistema de eixo posicionado o ponto mais baixo da superfície. Consideremos um elemento de massa anelar em  $y = 0$  com espessura  $\Delta r$  e área lateral  $A$ .



Dado que o fluido rotaciona, existe uma força centrípeta atuando sobre o anel que será dada pela produto diferença de pressão entre as paredes externa e interna do elemento de massa pela área lateral do anel:

$$[P(r + \Delta r) - P(r)] A = \Delta m \omega^2 r$$

em que a massa do anel é  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta r$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
[P(r + \Delta r) - P(r)] A &= \rho A \Delta r \omega^2 r \\
P(r + \Delta r) - P(r) &= \rho \omega^2 r \Delta r \\
\frac{P(r + \Delta r) - P(r)}{\Delta r} &= \rho \omega^2 r
\end{aligned}$$

Tomando o limite para  $\Delta r \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r \quad (3)$$

Sabendo que em  $r = 0$  o fluido está submetido à pressão atmosférica, podemos integrar a equação 3 para obter a pressão a uma distância  $r$  do centro de rotação:

$$\begin{aligned}
\int_{P_{\text{atm}}}^{P(r)} dP &= \rho \omega^2 \int_0^r r dr \Rightarrow P(r) - P_{\text{atm}} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 \\
\Rightarrow P(r) &= P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2
\end{aligned} \quad (4)$$

Por outro lado, pela lei de Stevin, a pressão sobre o elemento de massa é dada por:

$$P(r) = P_{\text{atm}} + \rho g y \quad (5)$$

em que  $P_{\text{atm}}$  é a pressão atmosférica. Igualando as expressões 4 e 5, obtemos a relação funcional para a forma da superfície do fluido em rotação:

$$\begin{aligned}
P(r) = P(y) &\Rightarrow P_{\text{atm}} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 = P_{\text{atm}} + \rho g y \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 &= \rho g y \\
\Rightarrow y(r) &= \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} r^2
\end{aligned}$$

Portanto, o fluido assume a forma de um paraboloide cujo eixo de simetria é o eixo de rotação. Note-se que a forma do paraboloide independe da densidade do fluido.