

---

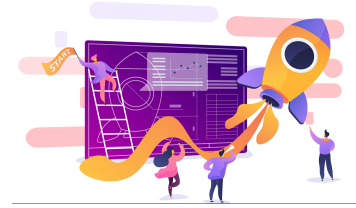
Resolução de exercícios do Curso:

## Física Básica (Veduca)

por

Igo da Costa Andrade

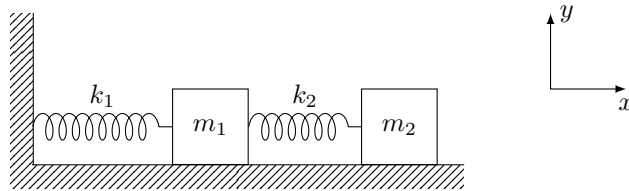
---



## Ondas Mecânicas

### Oscilador Harmônico com Massas Acopladas

Calcule as frequências naturais de um sistema físico aproximado por um modelo de dois graus de liberdade com as seguintes propriedades:  $m_1 = 9$  kg;  $m_2 = 1$  kg;  $k_1 = 24$  N/m;  $k_2 = 3$  N/m.



#### Solução:

As equações do movimento são:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_2 (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 (x_2 - x_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

Em notação matricial, podemos reescrever o sistema de equações como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Podemos propor soluções da forma:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin \omega t \\ x_2 = A_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \omega A_1 \cos \omega t \\ \dot{x}_2 = \omega A_2 \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 A_1 \sin \omega t \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 A_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1 \\ \ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2 \end{cases}$$

Substituindo na equação matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega^2 x_1 \\ -\omega^2 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$
$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2 \omega^2 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Para que o sistema possua solução não trivial, devemos ter que o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix} = 0$$

Primeiro, escrevemos o determinante como:

$$\text{Det} = \begin{vmatrix} -m_1\omega^2 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -m_2\omega^2 + k_2 \end{vmatrix}$$

Usando a fórmula para o determinante de uma matriz  $2 \times 2$ :

$$\text{Det} = (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - (-k_2)(-k_2)$$

Expandimos e simplificamos:

$$\text{Det} = (-m_1\omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2\omega^2 + k_2) - k_2^2$$

$$\text{Det} = (m_1m_2\omega^4 - (k_1 + k_2)m_2\omega^2 - (k_1 + k_2)k_2 + m_1k_2\omega^2 - k_2^2)$$

$$\text{Det} = m_1m_2\omega^4 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2 + k_2^2 - k_2^2$$

$$\text{Det} = m_1m_2\omega^4 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2$$

Para encontrar os valores de  $\omega^2$ , resolvemos a equação quadrática:

$$m_1m_2\omega^4 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\omega^2 + k_1k_2 = 0$$

Seja  $\lambda = \omega^2$ , temos:

$$m_1m_2\lambda^2 - (m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)\lambda + k_1k_2 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática para  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{(m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2) \pm \sqrt{(m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)^2 - 4m_1m_2k_1k_2}}{2m_1m_2}$$

Assim, temos os valores para  $\omega^2$ :

$$\omega^2 = \frac{(m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2) \pm \sqrt{(m_2k_1 + m_2k_2 + m_1k_2)^2 - 4m_1m_2k_1k_2}}{2m_1m_2}$$

ou, mais explicitamente:

$$\omega^2 = \frac{k_1m_2 + k_2m_1 + k_2m_2 \pm \sqrt{k_1^2m_2^2 - 2k_1k_2m_1m_2 + 2k_1k_2m_2^2 + k_2^2m_1^2 + 2k_2^2m_1m_2 + k_2^2m_2^2}}{2m_1m_2}$$

Para calcular os valores de  $\omega$ , substituímos  $m_1 = 9$  kg,  $m_2 = 1$  kg,  $k_1 = 24$  N/m e  $k_2 = 3$  N/m na equação:

$$\omega^2 = \frac{k_1m_2 + k_2m_1 + k_2m_2 \pm \sqrt{k_1^2m_2^2 - 2k_1k_2m_1m_2 + 2k_1k_2m_2^2 + k_2^2m_1^2 + 2k_2^2m_1m_2 + k_2^2m_2^2}}{2m_1m_2}$$

Substituindo os valores:

$$\omega^2 = \frac{(24 \cdot 1 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1) \pm \sqrt{(24 \cdot 1)^2 - 2 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 24 \cdot 3 \cdot 1 + (3 \cdot 9)^2 + 2 \cdot (3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1) + (3 \cdot 1)^2}}{2 \cdot 9 \cdot 1}$$

$$\omega^2 = \frac{(24 + 27 + 3) \pm \sqrt{576 - 1296 + 144 + 729 + 162 + 9}}{18}$$

$$\omega^2 = \frac{54 \pm \sqrt{324}}{18}$$

$$\omega^2 = \frac{54 \pm 18}{18}$$

Portanto, temos dois valores para  $\omega^2$ :

$$\omega_1^2 = \frac{54 + 18}{18} = 4 \quad \text{e} \quad \omega_2^2 = \frac{54 - 18}{18} = 2$$

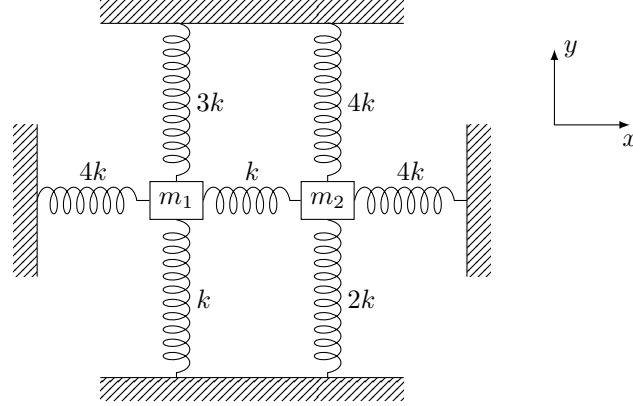
Calculando  $\omega$  a partir desses valores:

$$\omega_1 = \sqrt{4} = 2 \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{2} \approx 1.414$$

Portanto, os valores de  $\omega$  são aproximadamente 2 rad/s e 1.414 rad/s.

## Oscilações Bidimensionais

Determinar as frequências de oscilação  $\omega$  do sistema mostrado na figura abaixo, em que  $m_1 = m_2 = m$ :



### Solução:

Escrevamos as equações de movimento para cada massa:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -4kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -4kx_2 - k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{y}_1 = -3ky_1 - ky_1 \\ m\ddot{y}_2 = -4ky_2 - 2ky_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 = -5kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = -5kx_2 + kx_1 \\ m\ddot{y}_1 = -4ky_1 \\ m\ddot{y}_2 = -6ky_2 \end{cases}$$

Façamos a seguinte mudança de coordenadas:  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = x_2$ ,  $q_3 = y_1$ ,  $q_4 = y_2$ .

Com essa mudança de variável, podemos reescrever o sistema de equações como:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + 5kq_1 - kq_2 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + 5kq_2 - kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_3 + 4kq_3 = 0 \\ m\ddot{q}_4 + 6kq_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow m \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0$$

Podemos propor soluções na forma  $q_i = A_i \sin \omega t$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  e determinemos os valores de  $\omega$  para os quais o sistema possui solução. Então, para cada valor de  $i$ , temos:

$$\begin{aligned} q_i &= A_i \sin \omega t \Rightarrow \dot{q}_i = \omega A_i \cos \omega t \Rightarrow \ddot{q}_i = -\omega^2 A_i \sin \omega t \\ &\Rightarrow \ddot{q}_i = -\omega^2 q_i \end{aligned}$$

Substituindo no sistema de equações acima, obtemos:

$$m \begin{bmatrix} -\omega^2 q_1 \\ -\omega^2 q_2 \\ -\omega^2 q_3 \\ -\omega^2 q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 5k - m\omega^2 & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k - m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = 0$$

Para que o sistema possua solução não trivial, devemos ter que o determinante da matriz dos coeficientes deve ser igual a zero, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} 5k - m\omega^2 & -k & 0 & 0 \\ -k & 5k - m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \\
 & (-1)^{1+1} \cdot (5k - m\omega^2) \cdot \begin{vmatrix} 5k - m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6k - m\omega^2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot (-k) \cdot \begin{vmatrix} -k & 0 & 0 \\ 0 & 4k - m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6k - m\omega^2 \end{vmatrix} + 0 + 0 = 0 \\
 & (5k - m\omega^2) [(5k - m\omega^2)(4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2)] + k [(-k)(4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2)] = 0 \\
 & (5k - m\omega^2)^2 (4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2) - k^2 (4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2) = 0 \\
 & [(5k - m\omega^2) - k^2] (4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2) = 0 \\
 & [(5k - m\omega^2) + k] [(5k - m\omega^2) - k] (4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2) = 0 \\
 & (6k - m\omega^2)(4k - m\omega^2)(4k - m\omega^2)(6k - m\omega^2) = 0 \\
 & (4k - m\omega^2)^2 (6k - m\omega^2)^2 = 0
 \end{aligned}$$

Da última equação, tem-se que:

$$\begin{cases} 4k - m\omega^2 = 0 \text{ ou} \\ 6k - m\omega^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{6k}{m}} \end{cases}$$

Cada solução possui duplicidade 2.