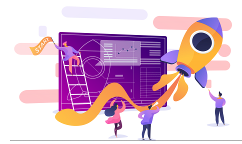
Resolução de Problemas do Curso

Curso de Física Básica (Veduca)



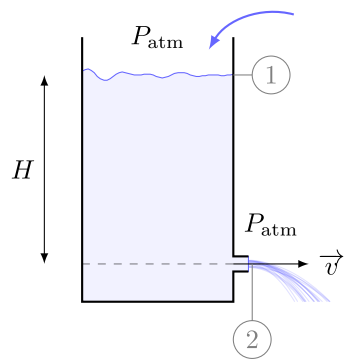
por

Igo da Costa Andrade

Dinâmica do Fluidos

Escoamento por um orifício

Caso I: Nível constante



Consideremos inicialmente o caso em que o nível de fluido no ponto 1 é mantido constante por algum sistema que fornece fluido continuamente.

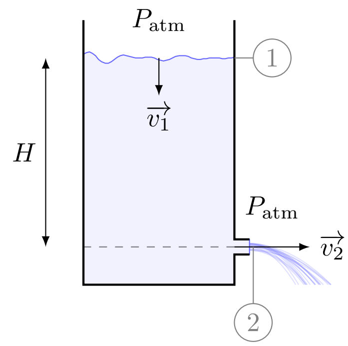
Podemos aplicar o Teorema de Bernoulli:

$$P = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{cte.}$$

Como o nível em 1 não se altera, a velocidade do fluido nesse ponto deve ser nula, ou seja, $v_1 = 0$. Então,

$$\begin{aligned}
P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 &= P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \\
P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 + \rho g H &= P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \cdot 0 \\
\rho g H &= \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gH}
\end{aligned}$$

Caso II: Nível Variável



Nesse nova configuração, o Teorema de Bernoulli fornece:

$$\begin{aligned} P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g \cdot 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \\ &\Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = 2gH \end{aligned} \tag{1}$$

Por outro lado, sendo o fluido incompressível, a vazão no ponto 1 deve ser igual à vazão em 2, ou seja:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 &\Rightarrow v_1 S_1 = v_2 S_2 \\ &\Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} \end{aligned} \tag{2}$$

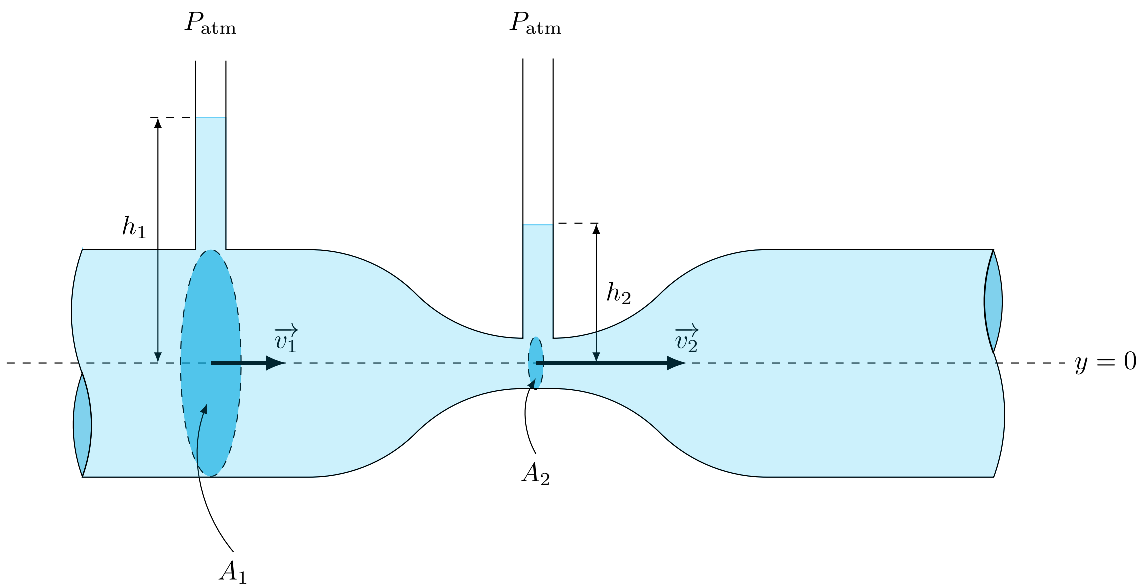
em que S_1 e S_2 são, respectivamente, as áreas de seção transversão nos pontos 1 e 2. Substuindo v_1 da Equação (2) na Equação (1), obtemos:

$$\begin{aligned} v_2^2 - v_1^2 = 2gH &\Rightarrow v_2^2 - \left(v_2 \frac{S_2}{S_1}\right)^2 = 2gH \\ &\Rightarrow v_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] = 2gH \\ &\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \end{aligned} \tag{3}$$

Supondo $S_2 \ll S_1$, podemos aplicar uma aproximação por série de Taylor ao denominador de (3):

$$\begin{aligned} v_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} &\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH}\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]^{-1/2} \\ &\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gH}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 + \cdots\right] \\ &\Rightarrow v_2 \approx \sqrt{2gH}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Tubo de Venturi



A figura acima mostra uma tubulação de seção transversal cuja área é igual a A_1 e dentro da qual escoa um fluido de densidade ρ. A fim de determinar a velocidade com que o fluido escoa dentro da tubulação, produz-se uma pequena constrição em uma parte do tubo de forma que a área de seçã transversal nessa parcela do tubo vale $A_2 < A_1$. Dado que a vazão do fluido deve se manter constante, tem-se:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_2 &\Rightarrow v_1 A_1 = v_2 A_2 \\ &\Rightarrow v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \end{aligned} \tag{5}$$

Em cada região do tubo, adiciona-se um tubo, de tal forma que a coluna de fluido é determinada pela pressão na respectiva região da tubulação.

Podemos aplicar o Teorema de Benoulli para os pontos 1 e 2, conforme mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 &\Rightarrow \frac{1}{2}v_1^2 + g h_1 = \frac{1}{2}v_2^2 + g h_2 \\ &\Rightarrow v_1^2 - v_2^2 = -2g(h_1 - h_2) \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo v_2 da Equação (5) na Equação (6), obtemos:

$$\begin{aligned} v_1^2 - v_2^2 = -2g(h_1 - h_2) &\Rightarrow v_1^2 - \left(v_1 \frac{A_1}{A_2}\right)^2 = -2g(h_1 - h_2) \\ &\Rightarrow v_1^2 = \frac{-2g(h_1 - h_2)}{1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2} \\ &\Rightarrow v_1^2 = \frac{2g(h_1 - h_2)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1} \end{aligned}$$