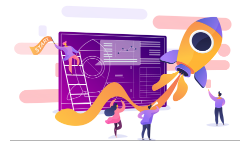
Resolução de Problemas do Curso

Curso de Física Básica (Veduca)



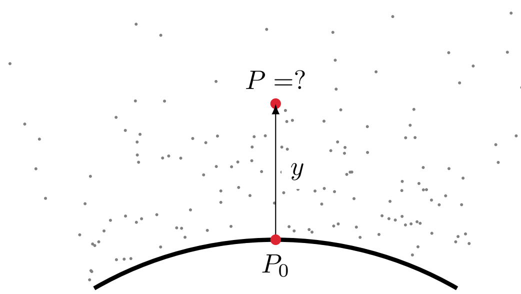
por

Igo da Costa Andrade

Mecânica do Fluidos

Pressão atmosférica

Cálculo da pressão atmosférica P a uma altura y acima do nível do mar, em que a pressão atmosférica é igual a P_0, conforme mostrado na figura abaixo.



Solução:

Consideremos inicialmente a Equação de Clapeyron para os gases ideais:

$$PV = nRT$$

em que:

- P é a pressão do gás;
- V é o volume ocupado pelo gás;
- n é a quantidade de mols;
- T é a temperatura absoluta (em kelvin);
- R é a constante universal dos gases ideais.

Seja m a massa do gás e M a massa molar do material que que é constituído o referido gás. O número de mols é dado por $n = \dfrac{m}{M}$. Substituindo na Equação de Clapeyron, tem-se:

$$PV = \frac{m}{M}RT \Rightarrow P = \rho\frac{RT}{M} \Rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

onde $\rho = \dfrac{m}{V}$ é a densidade do gás.

Consideremos, numa primeira simplificação que a temperatura T é uniforme para qualquer altura y. Então,

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = \text{cte.} \tag{1}$$

Por outro lado, pela lei de Stevin, tem-se:

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \tag{2}$$

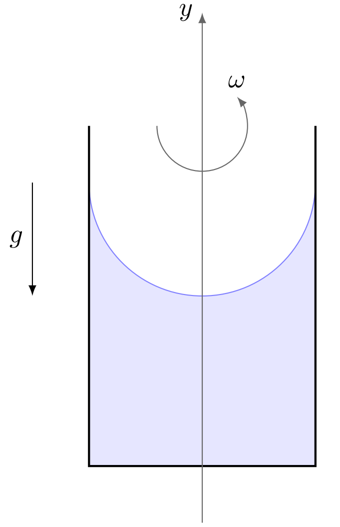
Substituindo ρ de em , obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dy} = -\left(\frac{MP}{RT}\right) g \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) dy \Rightarrow \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) \int_0^y dy \\
\Rightarrow \ln P - \ln P_0 = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) y \Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\left(\frac{Mg}{RT}\right) y \\
\Rightarrow P = P_0 e^{-(Mg/RT)y}
\end{aligned}$$

■

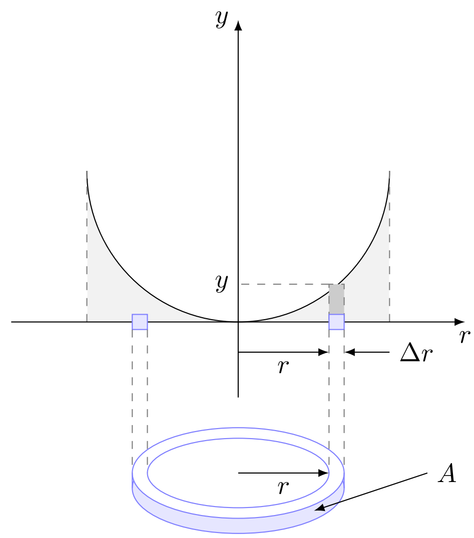
Fluido rodando

Considere um fluido de densidade ρ em um recipiente que gira com velocidade angular ω em torno de seu eixo de simetria, conforme figura abaixo. Determinar a função $y(r)$ que descreve o formato da superfície do fluido em uma seção transversal.



Solução:

A figura seguinte mostra a seção transversão do fluido e o sistema de eixo posicionado o ponto mais baixo da superfície. Consideremos um elemento de massa anelar em $y = 0$ com espessura Δr e área lateral A.



Dado que o fluido rotaciona, existe uma força centrípeta atuando sobre o anel que será dada pela produto diferença de pressão entre as paredes externa e interna do elemento de massa pela área lateral do anel:

$$[P(r + \Delta r) - P(r)]\, A = \Delta m \omega^2 r$$

em que a massa do anel é $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta r$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left[P(r+\Delta r) - P(r)\right] A &= \rho A \Delta r \omega^2 r \\
P(r+\Delta r) - P(r) &= \rho \omega^2 r \Delta r \\
\frac{P(r+\Delta r) - P(r)}{\Delta r} &= \rho \omega^2 r
\end{aligned}
$$

Tomando o limite para $\Delta r \to 0$, obtemos:

$$
\frac{dP}{dr} = \rho \omega^2 r \tag{3}
$$

Sabendo que em $r = 0$ o fluido está submetido à pressão atmosférica, podemos integrar a equação 3 para obter a pressão a uma distância r do centro de rotação:

$$
\begin{aligned}
\int_{P_{\text{atm}}}^{P(r)} dP = \rho \omega^2 \int_0^r r dr &\Rightarrow P(r) - P_{\text{atm}} = \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 \\
&\Rightarrow P(r) = P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, pela lei de Stevin, a pressão sobre o elemento de massa é dada por:

$$
P(r) = P_{\text{atm}} + \rho g y \tag{5}
$$

em que P_{atm} é a pressão atmosférica. Igualando as expressões 4 e 5, obtemos a relação funcional para a forma da superfície do fluido em rotação:

$$
\begin{aligned}
P(r) = P(y) &\Rightarrow P_{\text{atm}} + \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 = P_{\text{atm}} + \rho g y \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 = \rho g y \\
&\Rightarrow y(r) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2
\end{aligned}
$$

Portanto, o fluido assume a forma de um paraboloide cujo eixo de simetria é o eixo de rotação. Note-se que a forma do paraboloide independe da densidade do fluido.

■