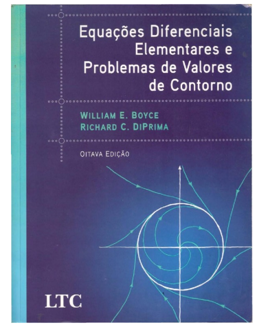
Resolução de Problemas do Livro

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.)



por

Igo da Costa Andrade

Referência
BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2013.

Capítulo 1: Introdução

Nos problemas de 1 a 6, desenha um campo de direções para a equação diferencial dada. Determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quando $t = 0$, descreva essa dependência.

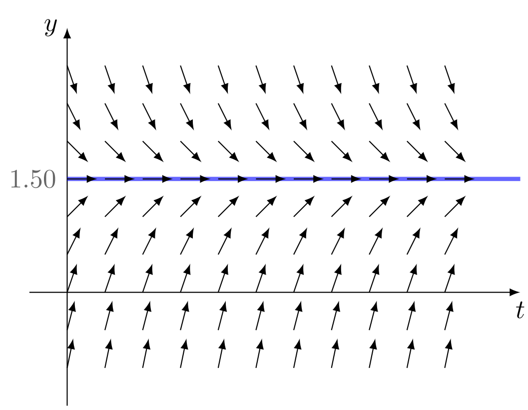
1 $y' = 3 - 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 3 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



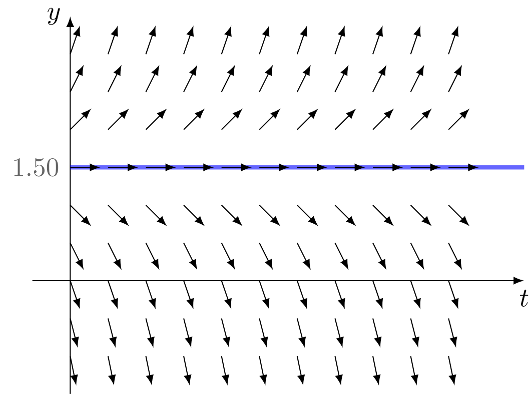
2 $y' = 2y - 3$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



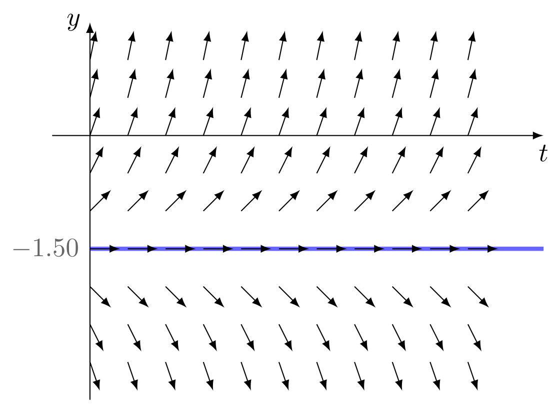
3 $y' = 3 + 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 3 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} = -1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



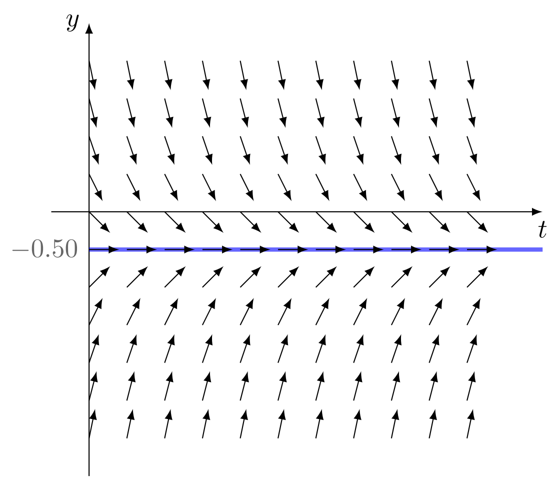
4 $y' = -1 - 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow -1 - 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} = -0.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



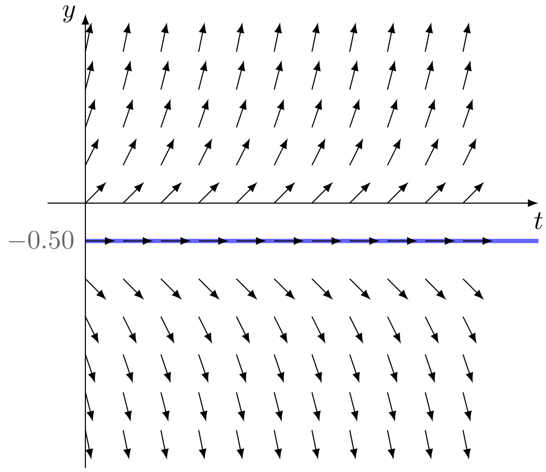
5 $y' = 1 + 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} = -0.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se da solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



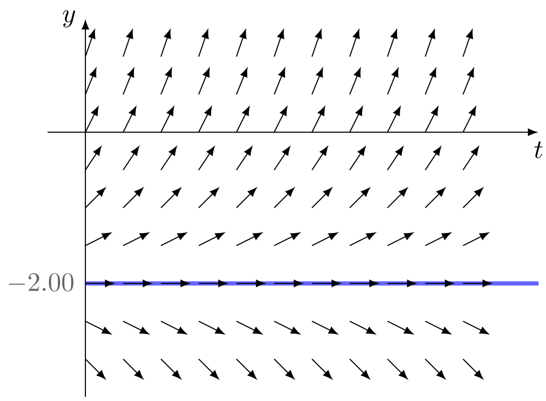
6 $y' = y + 2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se da solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



Em cada um dos problemas de 7 a 10, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay+b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$.

7 Todas as soluções tendem a $y = 3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 9 - 3y$$

■

8 Todas as soluções tendem a $y = 2/3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - 3y$$

■

9 Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 4y - 8$$

■

10 Todas as soluções se afastam de $y = 1/3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 1$$

■

Nos problemas de 11 a 14, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quando $t = 0$, descreva essa dependência. Note que nesses problemas, as equações não são da forma $y' = ay + b$, e o comportamento das soluções é um pouco mais complicado do que o das equações no texto.

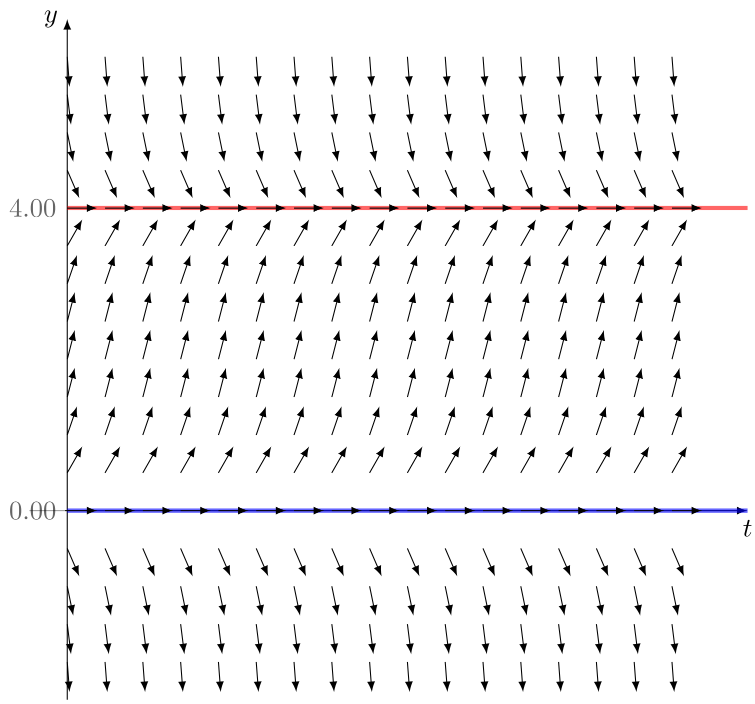
11 $y' = y(4 - y)$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y(4-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ e $y = 4$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim\limits_{t \to \infty} y = -\infty$.

- Soluções em que $y_0 > 4$ tendem à solução de equilíbrio $y = 4$. Ou seja, $\lim\limits_{t \to \infty} y = 4$.

- Soluções em que $0 < y_0 < 4$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem à solução $y = 4$. Ou seja, $\lim\limits_{t \to \infty} y = 4$.

■

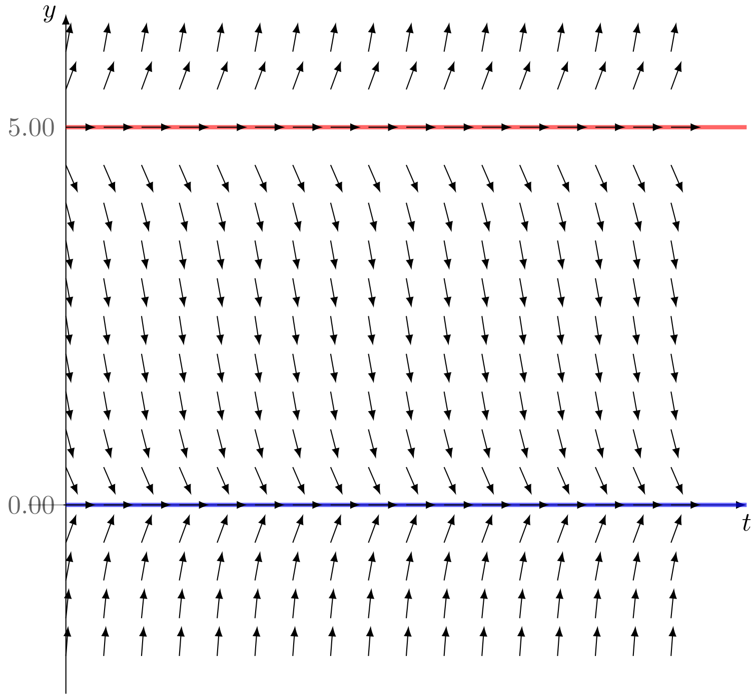
12 $y' = -y(5 - y)$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow -y(5-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ 5 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ e $y = 5$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ tendem à solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = 0$.
- Soluções em que $y_0 > 5$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 5$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = \infty$.
- Soluções em que $0 < y_0 < 5$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 5$ e tendem à solução $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = 0$.

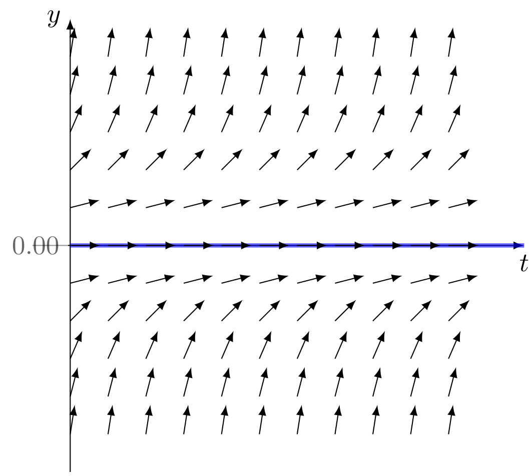
13 $y' = y^2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Observemos que existe uma solução de equilíbrio: $y = 0$, destacada no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ tendem à solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim\limits_{t \to \infty} y = 0$.
- Soluções em que $y_0 > 0$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim\limits_{t \to \infty} y = \infty$.

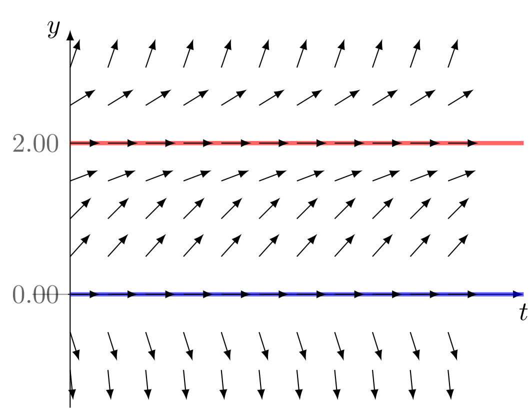
14 $y' = y(y-2)^2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y(y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ $y = 2$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Para $y_0 < 0$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem a $-\infty$.
- Para $y_0 > 2$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 2$ e tendem a $+\infty$.
- Para $0 < y_0 < 2$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem à solução $y = 2$.

■