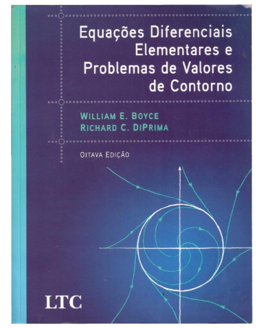
Resolução de Problemas do Livro

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno (Boyce, W. E.; DiPrima, R. C.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro, LTC, 2013.

Capítulo 1: Introdução

Nos problemas de 1 a 6, desenha um campo de direções para a equação diferencial dada. Determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quando $t = 0$, descreva essa dependência.

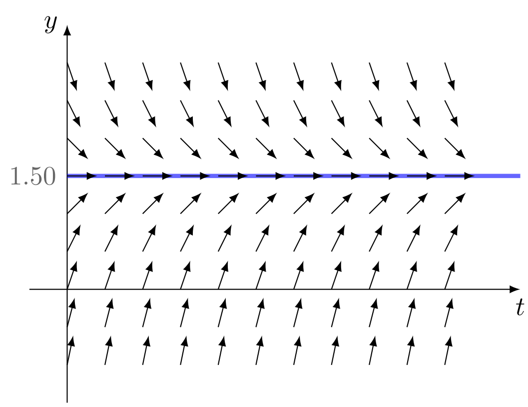
1 $y' = 3 - 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 3 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

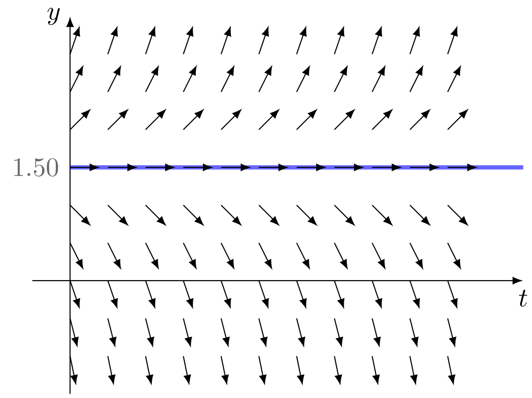
2 $y' = 2y - 3$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 2y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} = 1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

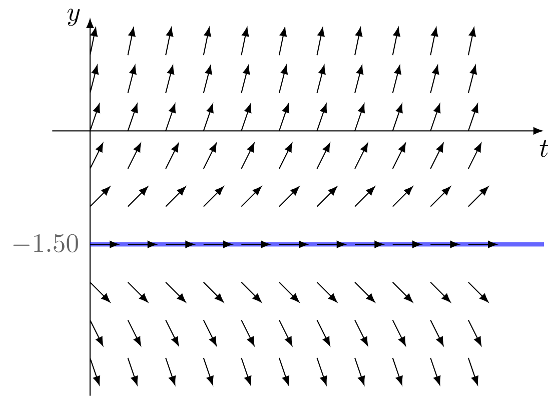
3 $y' = 3 + 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 3 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} = -1.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

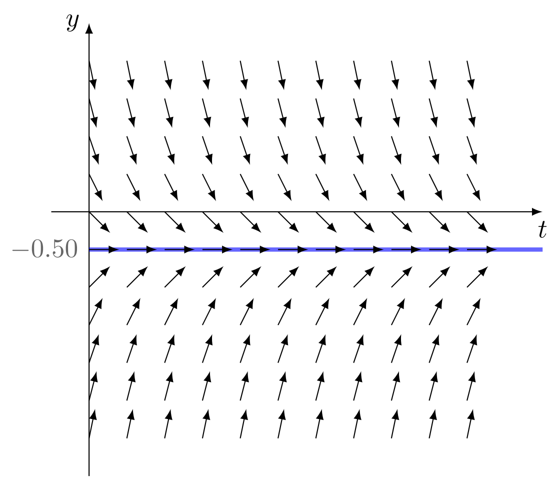
4 $y' = -1 - 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow -1 - 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} = -0.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções tendem à solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

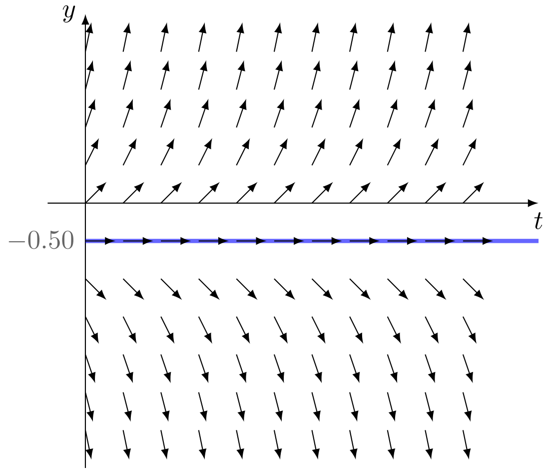
5 $y' = 1 + 2y$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow 1 + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} = -0.50$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se da solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

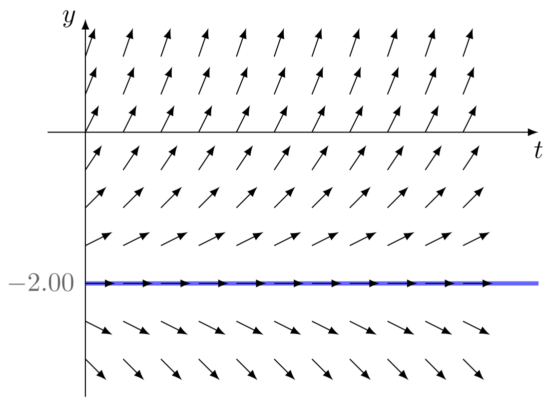
6 $y' = y + 2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

Como ilustra o campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se da solução de equilíbrio quando $t \to \infty$.



■

Em cada um dos problemas de 7 a 10, escreva uma equação diferencial da forma $dy/dt = ay + b$ cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$.

7 Todas as soluções tendem a $y = 3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 9 - 3y$$

■

8 Todas as soluções tendem a $y = 2/3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 2 - 3y$$

■

9 Todas as soluções se afastam de $y = 2$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 4y - 8$$

■

10 Todas as soluções se afastam de $y = 1/3$.

Solução:

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 1$$

■

Nos problemas de 11 a 14, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y quando $t = 0$, descreva essa dependência. Note que nesses problemas, as equações não são da forma $y' = ay + b$, e o comportamento das soluções é um pouco mais complicado do que o das equações no texto.

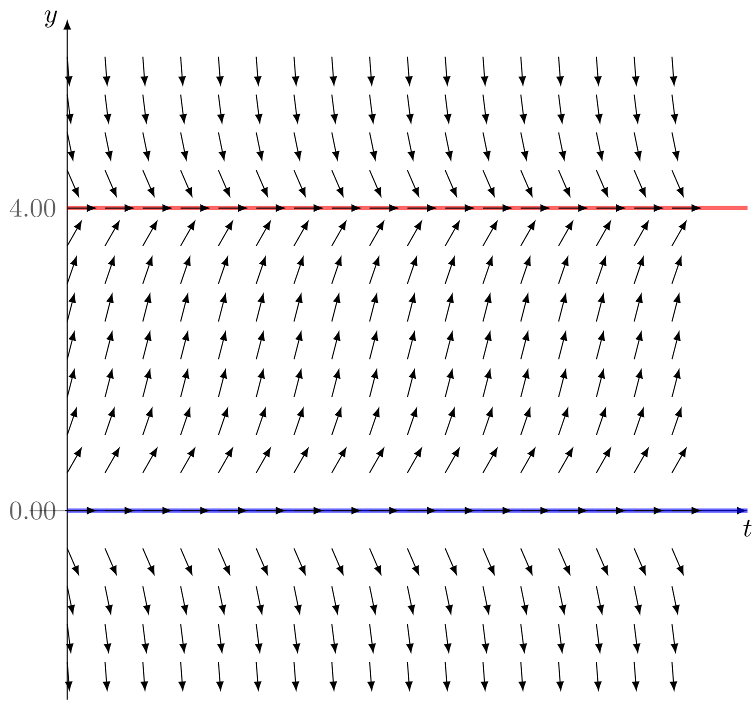
11 $y' = y(4 - y)$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y(4-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ e $y = 4$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = -\infty$.

- Soluções em que $y_0 > 4$ tendem à solução de equilíbrio $y = 4$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = 4$.

- Soluções em que $0 < y_0 < 4$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem à solução $y = 4$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = 4$.

■

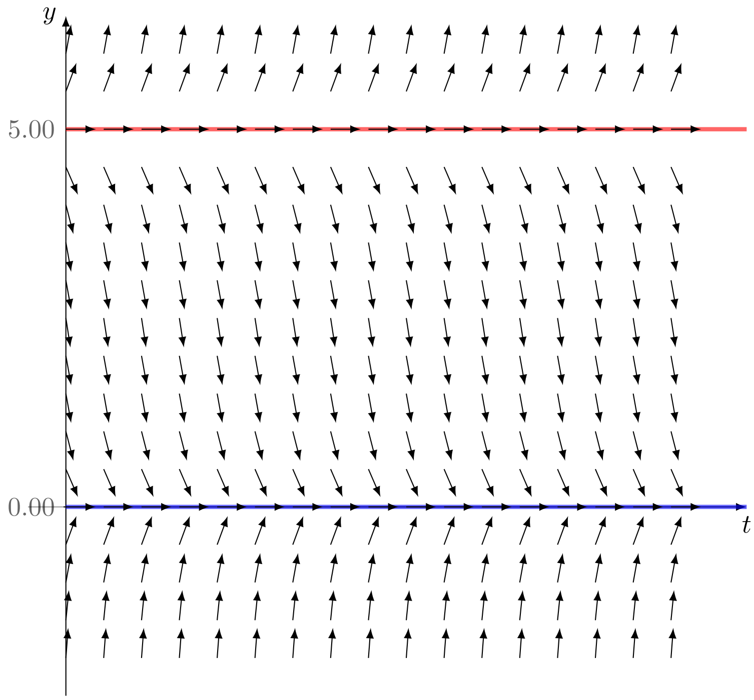
12 $y' = -y(5 - y)$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow -y(5-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ 5 - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 5 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ e $y = 5$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ tendem à solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t \to \infty} y = 0$.
- Soluções em que $y_0 > 5$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 5$. Ou seja, $\lim_{t \to \infty} y = \infty$.
- Soluções em que $0 < y_0 < 5$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 5$ e tendem à solução $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t \to \infty} y = 0$.

■

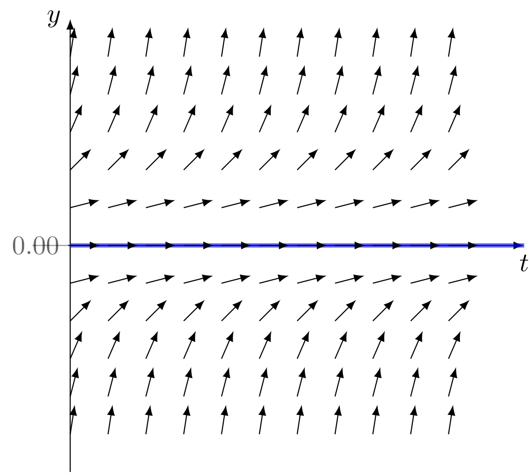
13 $y' = y^2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

Observemos que existe uma solução de equilíbrio: $y = 0$, destacada no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Soluções em que $y_0 < 0$ tendem à solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = 0$.
- Soluções em que $y_0 > 0$ afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$. Ou seja, $\lim_{t\to\infty} y = \infty$.

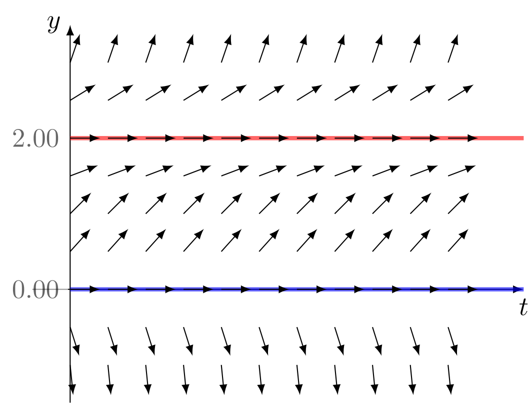
14 $y' = y(y-2)^2$

Solução:

Inicialmente, determinemos a solução de equilíbrio:

$$y' = 0 \Rightarrow y(y-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Observemos que existem duas soluções de equilíbrio: $y = 0$ $y = 2$, destacadas no campo de direções abaixo.



Como ilustra o campo de direções acima, o comportamento das soluções quando $t \to \infty$ depende do valor inicial de y em $t = 0$. De fato, seja a condição inicial $y_0 = y(t = 0)$. Então

- Para $y_0 < 0$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem a $-\infty$.
- Para $y_0 > 2$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 2$ e tendem a $+\infty$.
- Para $0 < y_0 < 2$, as soluções afastam-se da solução de equilíbrio $y = 0$ e tendem à solução $y = 2$.

■

21 Um pequeno lago contém, inicialmente, 1.000.000 galões (aproximadamene 1.550.000 litros) de água e uma quantidade deswconhecida de um produto químico indesejável. O lago recebe água contendo 0,01 grama dessa subtância por gação a uma taxa de 300 galões por hora. A mistura sai à mesma taxa, de modo que a quantidade de água no lago permanece constante. Suponha que o produto esteja distribuído uniformemente no lago.

(a) Escreva uma equação diferencial para a quantidade de produto químico no lago em um instante qualquer.

Solução:
Seja $Q(t)$ a quantidade da substância presente no lago no instante de tempo t. ■

(b) Qual a quantidade de produto químico que estará no lago após um período muito longo de tempo? Essa quantidade-limite depende da quantidade presente inicialmente?

22 Uma gota de chuva esférica evapora a uma taxa proporcional à sua área de superfície. Escreva uma eequação diferencial para o volume de uma gota de chuva em função do tempo.

Solução:

Se a gota evapora a uma taxa proporcional à sua área superficial, temos:

$$\frac{dV}{dt} = -cS$$

em que V é o volume da gota, S é a área superficial e c é uma constante positiva que depende das condições do problema. O sinal negativo indica que a gota perde volume enquanto evapora.

Sabendo que a gota possui formato esférico, temos:

$$\begin{cases} V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \\ S = 4\pi r^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V^2}{S^3} = \frac{\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)^2}{(4\pi r^2)^3} = \frac{\dfrac{16}{9}\pi^2 r^6}{64\pi^3 r^6} = \frac{1}{36\pi} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow S^3 = 36\pi V^2$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{36\pi} V^{2/3}$$

Substituindo na equação diferencial acima, tem-se:

$$\frac{dV}{dt} = -kV^{2/3}$$

em que $k = \sqrt{36\pi} \cdot c$. ■

23 A lei do resfriamento de Newton dz que a temperatura de um objeto varia a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do meio em que está inserido (a temperatura do ambiente, na maior parte dos casos). Suponha que a temperatura ambienete é 70°F (cerca de 21°C) e que a taxa é de 0,05 por minuto. Escreva uma equação diferencial para a temperatura do objeto em qualquer instante t

Solução:

Seja $T(t)$ a temperatura do objeto no instante t. Definimos ainda $T_a = 70°\text{F}$ a temperatura do ambiente e $k = 0,05$ a taxa de proporcionalidade. Seja ainda $\frac{dT}{dt}$ a taxa de variação da temperatura do objeto. Façamos algumas considerações:

- Se $T(t) = T_a$ (ou $T - T_a = 0$), não há troca de calor entre o objeto e o ambiente e a temperatura do objeto não sofre variação. Nesse caso, $\frac{dT}{dt} = 0$.
- Se $T(t) > T_a$ (ou $T - T_a > 0$), o objeto perde calor e sua temperatura tende a diminuir. Nesse caso, $\frac{dT}{dt} < 0$.
- Se $T < T_a$ (ou $T - T_a < 0$) o objeto recebe calor do ambiente e sua temperatura tende a aumentar. Nesse caso, $\frac{dT}{dt} > 0$.

Assim, observamos que o sinal da taxa de variação $\frac{dT}{dt}$ é sempre contrário ao sinal da diferença $T - T_a$. Portanto, a equação diferencial que descreve o fenômeno é:

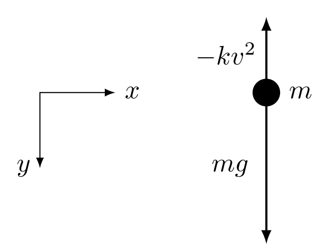
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

■

25 Para pequenos objetos, caino devagar, a hipótese feita no texto sobre a resistência do ar ser proporcional à velocidade é boa. Para objetos maiores, caindo mais rapidamente, é mais preciso supor que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

(a) Escreva uma equação diferencial para a velocidade de um objeto em queda de massa m se a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

Solução:
O diagrama abaixo mostra as forças envolvidas durante o movimento de queda:



Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos a seguinte equação diferencial para a velocidade v durante a queda:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v^2$$

■

(b) Determine a velocidade-limite após um longo período de tempo.

Solução:
Durante a queda, a velocidade do objeto tende a aumentar, devido à ação da aceleração da gravidade

g. Por sua vez, a resistência do ar $-kv^2$ também cresce em módulo, mas somente até atingir o equilíbrio com a força peso mg. Assim, a velocidade-limite será dada por:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow g - \frac{k}{m}v_{lim}^2 = 0$$
$$\Rightarrow v_{lim}^2 = \frac{mg}{k}$$
$$\Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}}$$

■

(c) Se $m = 10$ kg, encontre o coeficiemtende resistência do ar de modo que a velocidade-limite seja 49 m/s.

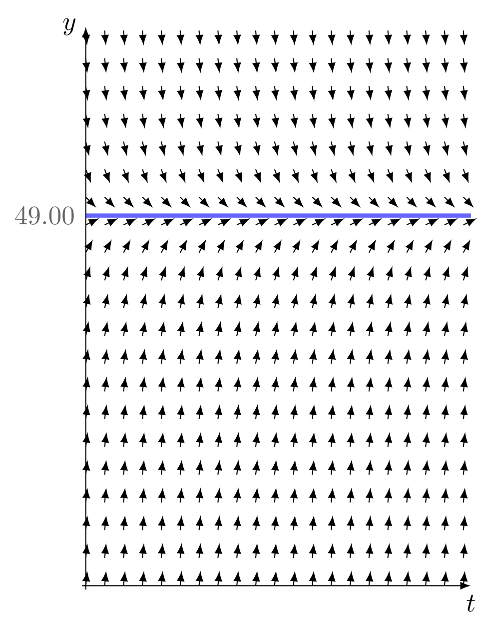
Solução:

$$\Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \Rightarrow k = \frac{mg}{v_\infty^2}$$
$$\Rightarrow k = \frac{10 \cdot 9,8}{49^2} = \frac{2}{49}\text{‘kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$$

■

(d) Usando os dados em (c), desenhe um campo de direções e compare-o com a Fig. 1.13.

Solução:



■

Nos problemas de 26 a 33, desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em $t = 0$, descreva essa dependência. Note que a expressão depende de t, além de depender de y; portanto, suas soluções podem exibir um comportamento mais complicado do que as do texto.

26 $y' = -2 + t - y$

Solução:

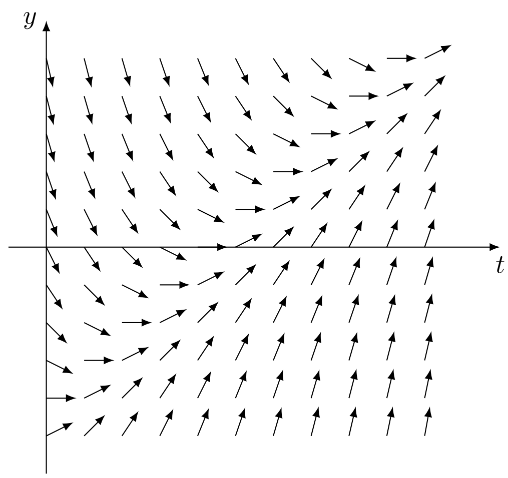
Soluções de Equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow -2 + t - y = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = t - 2$$

Quando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y_{eq}(t) = \lim_{t\to\infty} t - 2 = +\infty$$

De fato, como mostrado no campo de direções abaixo, todas as soluções tendem ao infinito após um longo período de tempo, independentemente da condição inicial em $t = 0$.



■

27 $y' = te^{-2t} - 2y$

Solução:

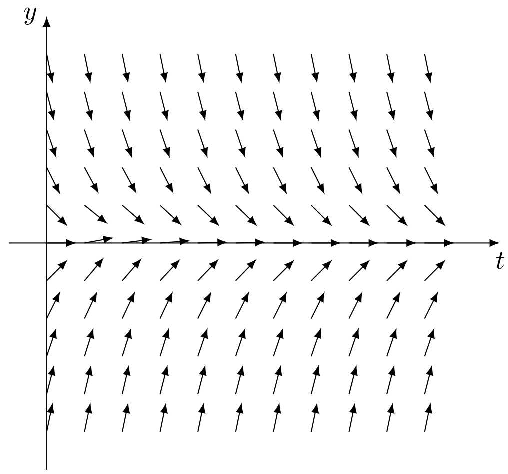
Soluções de Equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow te^{-2t} - 2y = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = \frac{1}{2}te^{-2t}$$

Quando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y_{eq}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}te^{-2t} = 0$$

De fato, como mostrado no campo de direções abaixo, todas as soluções tendem a zero após um longo período de tempo, independentemente da condição inicial em $t = 0$.



■

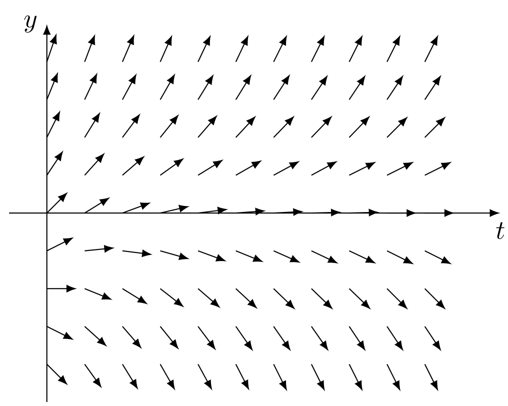
28 $y' = e^{-t} + y$

Solução:

Solução de Equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow e^{-t} + y = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = -e^{-t}$$

Como mostrado no campo de direções abaixo, todas as soluções afastam-se de $y = 0$ após um longo período de tempo. Para a condição inicial $y(t = 0) > 0$, as soluções tendem a $+\infty$. Para a condição inicial $y(t = 0) < 0$, as soluções tendem a $-\infty$.



■

29 $y' = t + 2y$

Solução:

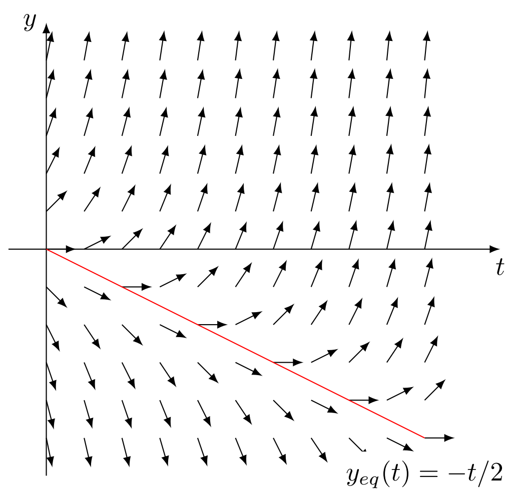
Solução de Equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow t + 2y = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = -\frac{t}{2}$$

Quando $t \to \infty$:

$$\lim_{t\to\infty} y_{eq}(t) = \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{2} = -\infty$$

Observemos que as soluções afastem-se da solução de equilíbrio. Assim, caso $y > 0$ em $t > 0$, as soluções tendem a $+\infty$. Caso contrário, as soluções tendem a $-\infty$.



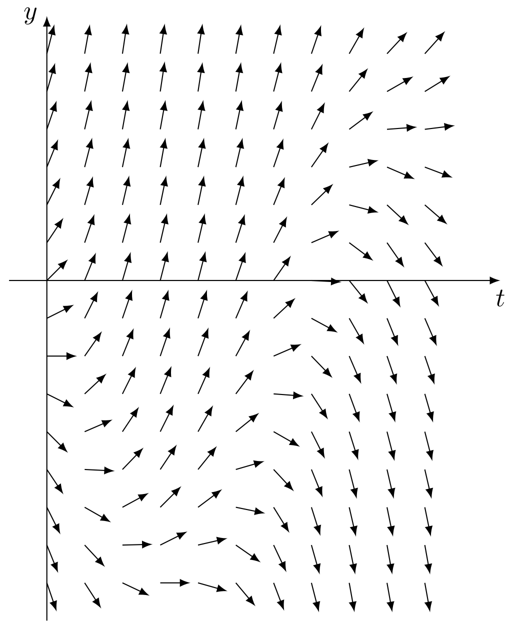
■

30 $y' = 3\sin t + 1 + y$

Solução:

Solução de equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow 3\sin t + 1 + y = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = -1 - 3\sin t$$



■

%%%%

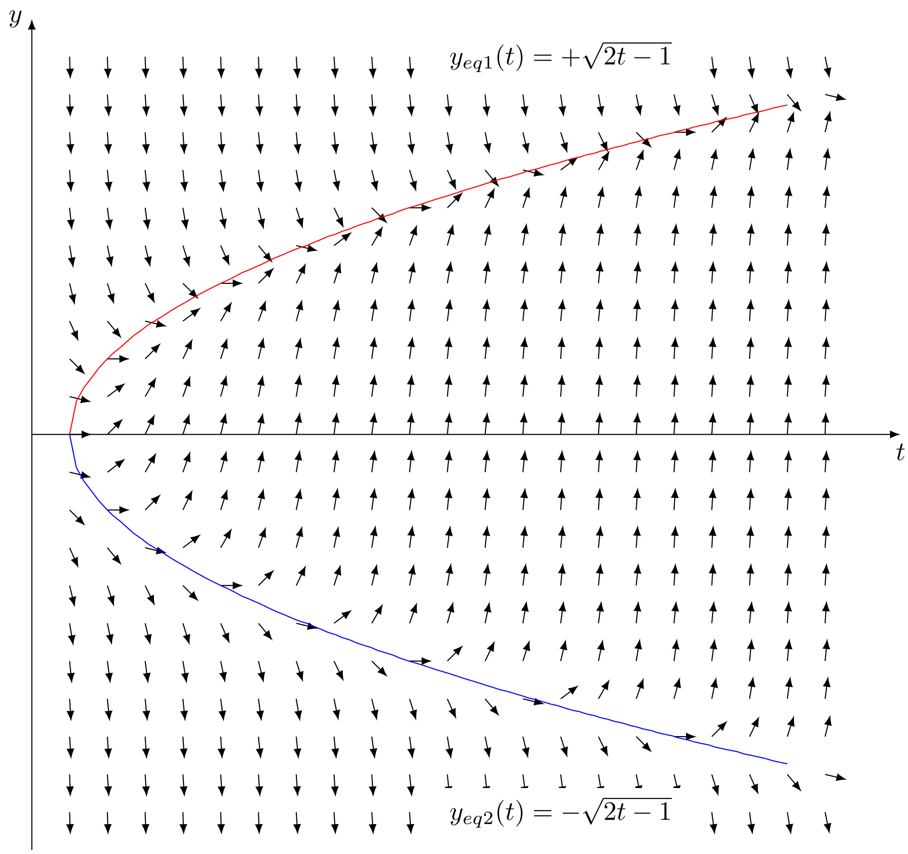
31 $y' = 2t - 1 - y^2$

Solução:

Solução de equilíbrio ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow 2t - 1 - y^2 = 0 \Rightarrow y_{eq}(t) = \begin{cases} +\sqrt{2t-1} & \text{, se } t > 0; \\ -\sqrt{2t-1} & \text{, se } t < 0; \end{cases}$$

Como ilustrado no campo de direções abaixo, as soluções aproximan-se da solução de equilíbrio $y_{eq1} = +\sqrt{2t-1}$ e afastam-se da solução de equilíbrio $y_{eq2} = -\sqrt{2t-1}$.



■

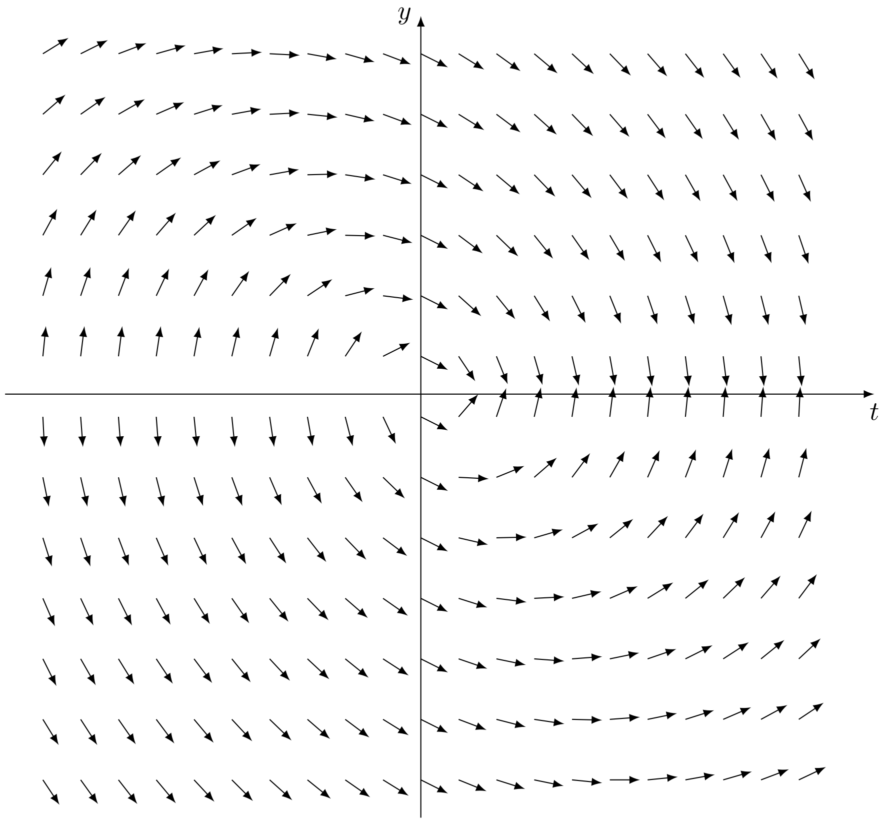
32 $y' = -(2t + y)/2y$

Solução:

Solução estacionária ($y' = 0$):

$$y' = 0 \Rightarrow -(2t + y)/2y = 0 \Rightarrow 2t + y = 0 \Rightarrow y_e q(t) = -2t$$

Campo de direções:

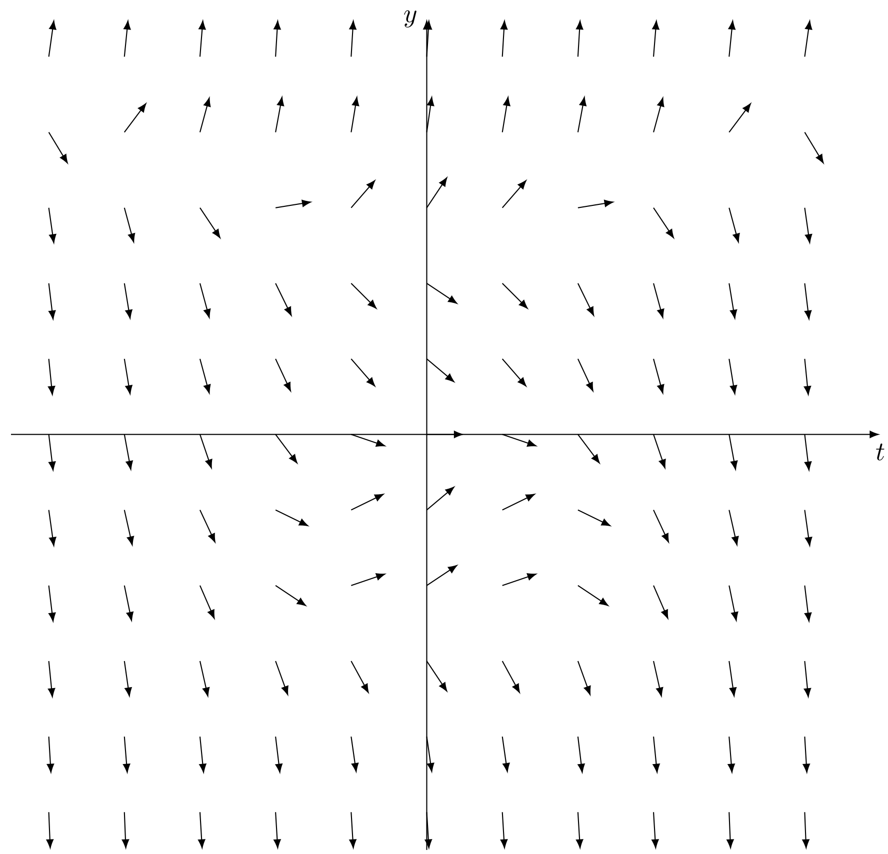


■

33 $y' = \dfrac{y^3}{6} - y - \dfrac{t^2}{3}$

Solução:

Campo de direções:



y
t