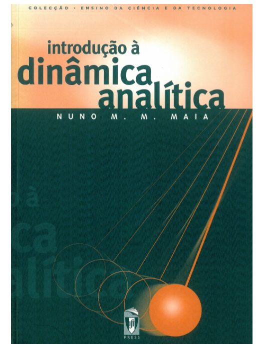
Resolução de Problemas do Livro

Introdução à Mecânica Analítica (Maia, N. M. M)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
MAIA, N. M. M. **Introdução à Mecânica Analítica**. Lisboa, IST Press, 2000.

Capítulo 2: Conceitos Fundamentais

2.8 PROBLEMAS

2.1 Verifique se as seguintes expressões são ou não diferenciais exactas:

a) $dU = x^2ydx + y^2xdy$

Solução:
Sejam $A_x = x^2y$ e $S_y = y^2x$. Temos que dU será uma diferencial exata se, e somente se,

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Façamos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial y} = y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} \neq \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Portanto, $dU = x^2ydx + y^2xdy$ não é uma diferencial exata. ■

b) $dU = xy^2dx + x^2ydy$

Solução:
Sejam $A_x = xy^2$ e $A_y = x^2y$. Façamos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = xy \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} = xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Portanto, $dU = xy^2dx + x^2ydy$ é uma diferencial exata, ou seja,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

em que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = A_x = xy^2$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = A_y = x^2y$. A fim de determinar $U = U(x, y)$, façamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} = xy^2 \Rightarrow U(x,y) &= \int xy^2 dx = \frac{x^2y^2}{2} \\
\Rightarrow U(x,y) &= \frac{x^2y^2}{2} + f(y) \qquad (1) \\
\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y \Rightarrow U(x,y) &= \int x^2y dy \\
\Rightarrow U(x,y) &= \frac{x^2y^2}{2} + g(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Comparando os resultados em (1) e (2), devemos ter:

$$f(y) \equiv g(x) \Rightarrow f(y) = g(x) = \text{cte}.$$

Finalmente,

$$U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \text{cte}.$$

■

2.2 Mostre que as seguintes forças são conservativas:

a) $\mathbf{F} = \dfrac{3}{5}x^2y^5\mathbf{i} + x^3y^4\mathbf{j}$

Solução:

Uma força $\mathbf{F}$ é conservativa quando seu rotacional for identicamente nulo, ou seja, $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3}{5}x^2y^5 & x^3y^4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3y^4)\right] - \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{5}x^2y^5\right)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^4) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{5}x^2y^5\right)\right] \\
&= \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(3x^2y^4 - 3x^2y^4) \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

■

---

b) $\mathbf{F} = xy^3\mathbf{i} + \dfrac{3}{2}x^2y^2\mathbf{j}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^3 & \frac{3}{2}x^2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^3) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^3)\right] \\
&= \mathbf{i}(0-0) + \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(3xy^2 - 3xy^2) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

■
