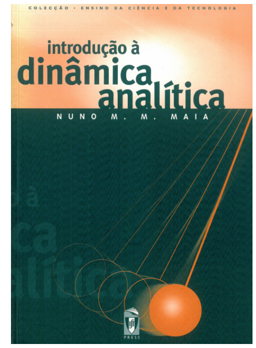
Resolução de Problemas do Livro

Introdução à Mecânica Analítica (Maia, N. M. M)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
MAIA, N. M. M. **Introdução à Mecânica Analítica**. Lisboa, IST Press, 2000.

Capítulo 2: Conceitos Fundamentais

2.8 PROBLEMAS

2.1 Verifique se as seguintes expressões são ou não diferenciais exactas:

a) $dU = x^2ydx + y^2xdy$

Solução:
Sejam $A_x = x^2y$ e $S_y = y^2x$. Temos que dU será uma diferencial exata se, e somente se,

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Façamos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = x^2 \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial y} = y^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} \neq \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Portanto, $dU = x^2ydx + y^2xdy$ não é uma diferencial exata. ■

b) $dU = xy^2dx + x^2ydy$

Solução:
Sejam $A_x = xy^2$ e $A_y = x^2y$. Façamos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A_x}{\partial y} = xy \\ \dfrac{\partial A_y}{\partial x} = xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}$$

Portanto, $dU = xy^2dx + x^2ydy$ é uma diferencial exata, ou seja,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy,$$

em que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = A_x = xy^2$ e $\dfrac{\partial U}{\partial y} = A_y = x^2y$. A fim de determinar $U = U(x,y)$, façamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} = xy^2 &\Rightarrow U(x,y) = \int xy^2 dx = \frac{x^2y^2}{2} \\
&\Rightarrow U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + f(y) \qquad (1) \\
\frac{\partial U}{\partial y} = x^2y &\Rightarrow U(x,y) = \int x^2y dy \\
&\Rightarrow U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + g(x) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Comparando os resultados em (1) e (2), devemos ter:

$$f(y) \equiv g(x) \Rightarrow f(y) = g(x) = \text{cte}.$$

Finalmente,

$$U(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} + \text{cte}.$$

■

2.2 Mostre que as seguintes forças são conservativas:

a) $\mathbf{F} = \dfrac{3}{5}x^2y^5\mathbf{i} + x^3y^4\mathbf{j}$

Solução:
Uma força $\mathbf{F}$ é conservativa quando seu rotacional for identicamente nulo, ou seja, $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{3}{5}x^2y^5 & x^3y^4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3y^4)\right] - \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{5}x^2y^5\right)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3y^4) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{5}x^2y^5\right)\right] \\
&= \mathbf{i}(0-0) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(3x^2y^4 - 3x^2y^4) \\
&= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

■

b) $\mathbf{F} = xy^3\mathbf{i} + \dfrac{3}{2}x^2y^2\mathbf{j}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^3 & \frac{3}{2}x^2y^2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right)\right] + \mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^3) - \frac{\partial}{\partial x}(0)\right] + \mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^2y^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^3)\right] \\
&= \mathbf{i}(0-0) + \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(3xy^2 - 3xy^2) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

■

2.3 Seja uma força $\mathbf{F} = 3x^2yz\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} + 3xyz^2\mathbf{k}$. Calcule a expressão do trabalho elementar efectuado por esta força. Vefifique se esta força é conservativa.

Solução:
Seja $\mathbf{r} = z\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \Rightarrow d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Assim, o trabalho elementar da força dada será:

$$\begin{aligned}\overline{dW} &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \left(3x^2yz\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} + 3xyz^2\mathbf{k}\right) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= 3x^2yzdx + 3xy^2zdy + 3xyz^2dz\end{aligned}$$

Para verificar se a força $\mathbf{F}$ é conservativa, calculemos o seu rotacional:

$$\begin{aligned}\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} &= \mathbf{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial Fz}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \\ &= \mathbf{i}(3xz^2 - 3xy^2) + \mathbf{j}(3x^2y - 3yz^2) + \mathbf{k}(3y^2z - 3x^2z) \\ &= -3x(y^2 - z^2)\mathbf{i} - 3y(z^2 - x^2) - 3z(x^2 - y^2)\end{aligned}$$

Como rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, a força $\mathbf{F}$ não é conservativa. ■

2.4 Mostre que:

a) $\ddot{x}dx = d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)$

Solução:
Sejam $x = x(t)$ e $du = \ddot{x}dx$. Então,

$$\begin{aligned}du = \ddot{x}dx \Rightarrow \frac{du}{dt} = \ddot{x}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = \ddot{x}\dot{x} \Rightarrow \frac{du}{dt} &= \frac{d(\dot{x})}{dt}\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})}{dt}\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})}{dt}\dot{x} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d(\dot{x})}{dt}\dot{x} + \frac{1}{2}\dot{x}\frac{d(\dot{x})}{dt} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}\dot{x}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) \\ \Rightarrow du &= d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right) \\ \Rightarrow \ddot{x}dx &= d\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2\right)\end{aligned}$$

■

b) $d\left(\dot{x}^2\right) = 2\dot{x}\ddot{x}dt$

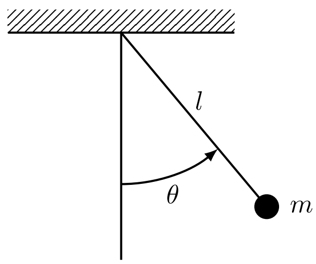
Solução:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2\right) = 2\dot{x}\frac{d}{dt}(\dot{x}) = 2\dot{x}\ddot{x} \Rightarrow d\left(\dot{x}^2\right) = 2\dot{x}\ddot{x}dt$$

■

2.5 Num pêndulo simples (Figura 2.14) mostre que a energia potencial pode ser dada quer por $V = -mgl\cos\theta$, quer por $V = mgl(1-\cos\theta)$. Justifique.

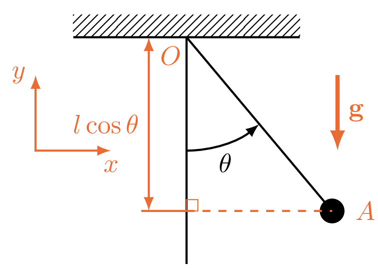
Figura 2.14



Solução:

Caso I: Consideremos inicialmente um referencial cuja origem está situada no ponto de suspensão do pêndulo, conforme mostrado abaixo. Esse ponto coresponderá à origem da energia potencial gravitacional,

Caso I



A energia potencial no ponto A é dada por:

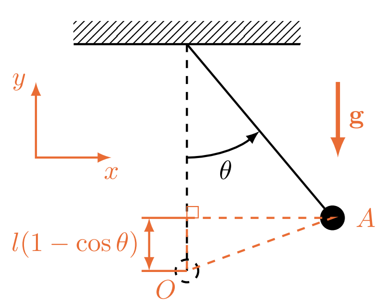
$$V = -\int_O^A dW = -\int_O^A (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

em que $F_x = 0$, $F_y = -mg$ e $F_z = 0$. Portanto,

$$V = -\int_O^A (-mg)\,dy = mg\int_0^{-l\cos\theta} dy$$
$$V = -mgl\cos\theta$$

Caso II: Como segunda opção, podemos fixar os eixos coordenados no ponto de equilíbio do pêndulo, conforme mostrado abaixo. Esse ponto corresponderá ao valor nulo da energia potencial.

Caso II



A energia potencial no ponto A será:

$$V = -\int_O^A dW = -\int_0^{l(1-\cos\theta)} (-mg)\, dy = mg\,[l(1 - cos\theta) - 0]$$
$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

■

2.6 Supondo que $dV = kxdx$, determine:

a) a derivada de V em ordem a x;

Solução:

$$\frac{dV}{dx} = kx\frac{dx}{dx} = kx$$

■

b) a derivada de V em ordem ao tempo;

Solução:

$$\frac{dV}{dt} = kx\frac{dx}{dt} = kx\dot{x}$$

■

c) o valor de dV no intervalo de tempo dt.

Solução:

$$\frac{dV}{dt} = kx\dot{x} \Rightarrow dV = kx\dot{x}dt$$

■