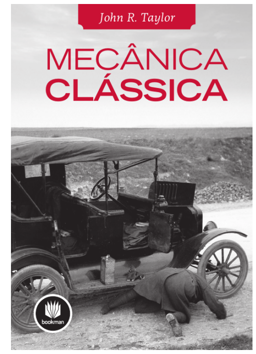
Resolução de Problemas do Livro

Mecânica Clássica (Taylor, J. R.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
TAYLOR, J. R.. **Mecânica Clássica**. Porto Alegre, Bookman, 2013.

Capítulo 1: Leis de Newton do Movimento

PROBLEMAS

Seção 1.2 Espaço e Tempo

1.1 Dados dois vetores $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$, determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= 5(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + 2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = 5\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}} = 7\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

■

1.2 Dois vetores são dados como $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$. (Lembre-se de que essas declarações são uma forma compacta de fornacer as componentes dos vetores.) Determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

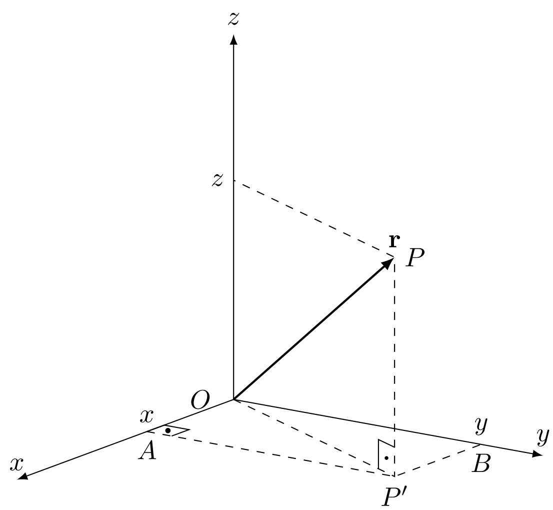
Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (1 + 3, 2 + 2, 3 + 1) = (4, 4, 4) = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3, 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = (5 + 6, 10 + 4, 15 + 2) = (11, 14, 17) = 11\hat{\mathbf{x}} + 14\hat{\mathbf{y}} + 17\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 4 + 3 = 10 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -4\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}
$$

■

1.3 Aplicando o teorema de Pitágorás (a versão comum bidimensional) duas vezes, mostre que o comprimento r de um vetor tridimensional $\mathbf{r} = (x, y, z)$ satisaz $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução:



Conforme figura acima, consideremos o vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ localizado no ponto P, tal que sua projeção ortogonal no plano xy é ponto $P' = (x, y, 0)$. No plano xy, tomamos o triângulo OAP', retângulo no ponto $A = (x, 0, 0)$ e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

EM seguida, consideremos o triânguloa $OP'P$, reto em P' e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2 \Rightarrow \overline{OP}^2 &= \overline{OP'}^2 + z^2 \\ \Rightarrow r^2 &= \overline{OP'}^2 + z^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo $\overline{OP'}^2$ de (1) em (2), obtemos:

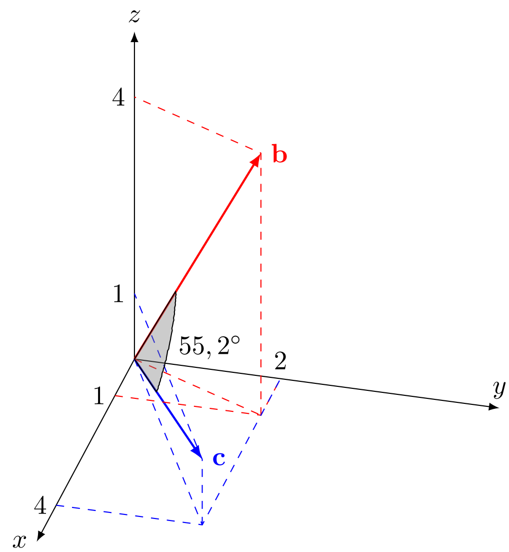
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

■

1.4 Um dos muitos usos do produto escalar é na determinação do ângulo entre dois vetores dados. Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$ e $\mathbf{c} = (4, 2, 1)$ através do cálculo do produto escalar entre eles.

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc\cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{bc} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{4}{7}\right) = 55,2^\circ \end{aligned}$$



■

1.5 Determine o ângulo entre a diagonal do corpo de um cubo e qualquer das diagonais de suas faces. [*Sugestão*: escolha um cubo de lado 1 e com um dos vértices em O e o vértice oposto $(1, 1, 1)$. Escreva o vetor que representa uma diagonal do corpo e o outro que represente a diagonal de uma face, e então determine o ângulo entre elas conforme o Problema 1.4.]

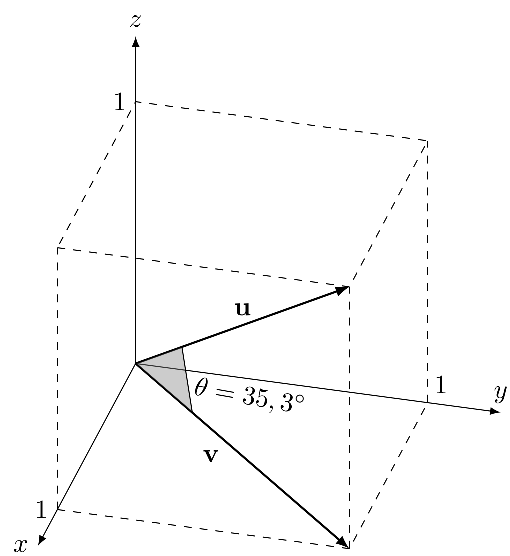
Solução:

Sem perda de generalizade, consideremos os vetores $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$, tais que:

$$\begin{cases} u = |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ v = |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{uv} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = 35,3^\circ \end{aligned}$$

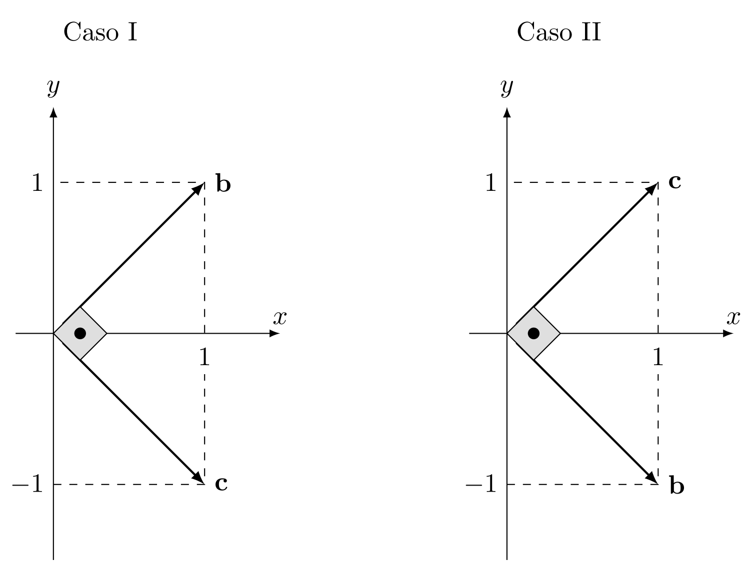


■

1.6 Utilizando o produto escalar, determine os valores do escalar s para os quais os vetores $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}$ são ortogonais. (Lembre-se de que dois vetores são ortogonais se e somente se o produto escalar entre eles é zero.) Explique sua resposta esboçando um gráfico.

Solução:

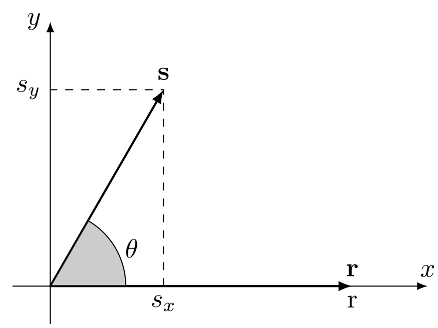
$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0 \Rightarrow (\hat{\mathbf{x}} + s\hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} - s\hat{\mathbf{y}}) = 0 \Rightarrow 1 - s^2 = 0 \Rightarrow s^2 = 1 \Rightarrow s = \pm 1$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}} \pm \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} \mp \hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$



■

1.7 Mostre que as duas defnições do produto escalar $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ como $rs\cos\theta$ (1.6) e $\sum r_i s_i$ (1.7) são iguais. Uma maneira de mostrar é escolher o eixo x ao longo da direção $\mathbf{r}$. [Estritamente falando, voccê deve primeiro se assegurar de que a definição (1.7) é independente da escolha dos eixos. Se você gosta de dar atenção a essas sutilezas, veja o Problema 1.16.]

Solução:
Sem perda de generalidade, consideremos o plano xy definido como o plano formado pelos vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, e tal que o eixo x aponta na mesma direção do vetor $\mathbf{r}$, como mostrado na figura abaixo:



Então, aplicando a definição (1.7) para o produto escalar, temos:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s} = (r\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}}) \cdot (s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}}) = rs_x = rs\cos\theta$$

que corresponde à definição (1.6) do produto escalar. Portanto, as definições (1.6) e (1.7) para o produto escalar são equivalentes. ■

1.8 (a) Use a definição (1.7) para mostrar que o produto escalar é distributivo, isto é, $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}$.

Solução:
Sejam os vetores:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{u} &= u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{v} &= v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x\hat{\mathbf{x}} + u_y\hat{\mathbf{y}} + u_z\hat{\mathbf{z}}) + (v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}})] \\
&= (r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}) \cdot [(u_x+v_x)\hat{\mathbf{x}} + (u_y+v_y)\hat{\mathbf{y}} + (u_z+v_z)\hat{\mathbf{z}}] \\
&= r_x(u_x+v_x) + r_x(u_x+v_y) + r_z(u_z+v_z) \\
&= r_xu_x + r_xv_x + r_yu_y + r_yv_y + r_zu_z + r_zv_z \\
&= (r_xu_x + r_yu_y + r_zu_z) + (r_xv_x + r_yv_y + r_zv_z) \\
&= \mathbf{r}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}
\end{aligned}$$

■

(b) Se $\mathbf{r}$ e *vets* são vetores que dependem do tempo, mostre que a regra do produto para derivação de produtos se aplica a $\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}$, ou seja, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s}.$$

Solução:
Sejam os vetores $\mathbf{r} = r_x\hat{\mathbf{x}} + r_y\hat{\mathbf{y}} + r_z\hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{s} = s_x\hat{\mathbf{x}} + s_y\hat{\mathbf{y}} + s_z\hat{\mathbf{z}}$, então:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \frac{d}{dt}(r_xs_x + r_ys_y + r_zs_z) &= \frac{d}{dt}(r_xs_x) + \frac{d}{dt}(r_ys_y) + \frac{d}{dt}(r_zs_z) \\
&= r_x\frac{ds_x}{dt} + \frac{dr_x}{dt}s_x + r_y\frac{ds_y}{dt} + \frac{dr_y}{dt}s_y + r_z\frac{ds_z}{dt} + \frac{dr_z}{dt}s_z \\
&= \left(r_x\frac{ds_x}{dt} + r_y\frac{ds_y}{dt} + r_z\frac{ds_z}{dt}\right) + \left(\frac{dr_x}{dt}s_x + \frac{dr_y}{dt}s_y + \frac{dr_z}{dt}s_z\right) \\
&= \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s}
\end{aligned}$$

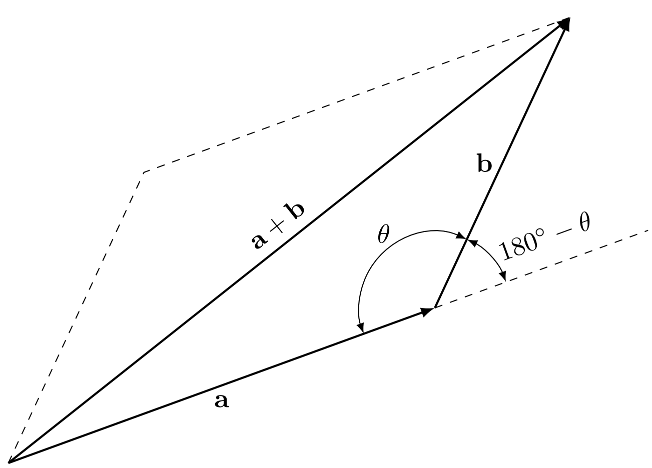
■

1.9 Em trigonometria elementar, você provavelmente aprendeu a lei dos cossenos para um triângulo de lados a, b e c, tal que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$, onde θ é o ângulo entre os lados a e b. Mostre que a lei dos cossenos é uma consequência imediata da identidade $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Solução:
Sejam os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, cujos comprimentos valem, respectivamente, $a = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$ e $b = \sqrt{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}$. Temos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\
&= a^2 + b^2 + 2ab\cos(180-\theta) \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta
\end{aligned}$$

onde $180° - \theta$ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, conforme mostrado na figura abaixo:



■