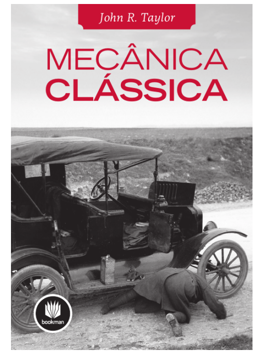
Resolução de Problemas do Livro

Mecânica Clássica (Taylor, J. R.)

por

Igo da Costa Andrade



Referência
TAYLOR, J. R.. **Mecânica Clássica**. Porto Alegre, Bookman, 2013.

Capítulo 1: Leis de Newton do Movimento

PROBLEMAS

Seção 1.2 Espaço e Tempo

1.1 Dados dois vetores $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}$ e $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$, determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}} = 2\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= 5(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) + 2(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = 5\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{x}} + 2\hat{\mathbf{z}} = 7\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \cdot (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}) = \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

■

1.2 Dois vetores são dados como $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$ e $\mathbf{c} = (3, 2, 1)$. (Lembre-se de que essas declarações são uma forma compacta de fornacer as componentes dos vetores.) Determine $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $5\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

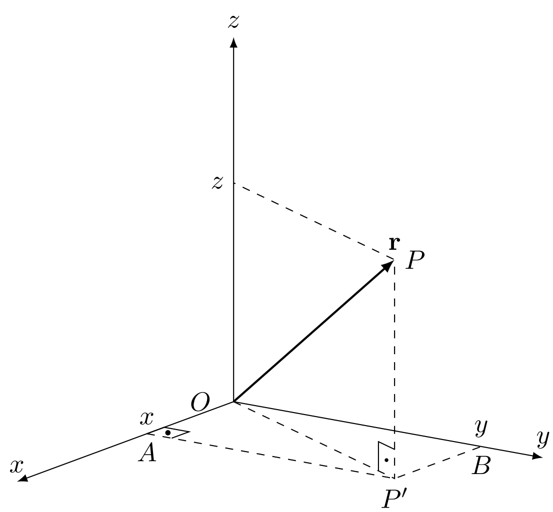
Solução:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} + \mathbf{c} &= (1 + 3, 2 + 2, 3 + 1) = (4, 4, 4) = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}} \\
5\mathbf{b} + 2\mathbf{c} &= (5 \cdot 1 + 2 \cdot 3, 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2, 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1) = (5 + 6, 10 + 4, 15 + 2) = (11, 14, 17) = 11\hat{\mathbf{x}} + 14\hat{\mathbf{y}} + 17\hat{\mathbf{z}} \\
\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} &= 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 4 + 3 = 10 \\
\mathbf{b} \times \mathbf{c} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{x}} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \hat{\mathbf{y}} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \hat{\mathbf{z}} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \hat{\mathbf{x}}(2 \cdot 1 - 2 \cdot 3) - \hat{\mathbf{y}}(1 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + \hat{\mathbf{z}}(1 \cdot 2 - 3 \cdot 2) = -4\hat{\mathbf{x}} + 8\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

■

1.3 Aplicando o teorema de Pitágorás (a versão comum bidimensional) duas vezes, mostre que o comprimento r de um vetor tridimensional $\mathbf{r} = (x, y, z)$ satisaz $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Solução:



Conforme figura acima, consideremos o vetor $\mathbf{r} = (x, y, z)$ localizado no ponto P, tal que sua projeção ortogonal no plano xy é ponto $P' = (x, y, 0)$. No plano xy, tomamos o triângulo OAP', retângulo no ponto $A = (x, 0, 0)$ e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\overline{OP'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP'}^2 = x^2 + y^2. \tag{1}$$

EM seguida, consideremos o triânguloa $OP'P$, reto em P' e apliquemos o teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}\overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + \overline{P'P}^2 &\Rightarrow \overline{OP}^2 = \overline{OP'}^2 + z^2 \\ &\Rightarrow r^2 = \overline{OP'}^2 + z^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

Substituindo $\overline{OP'}^2$ de (1) em (2), obtemos:

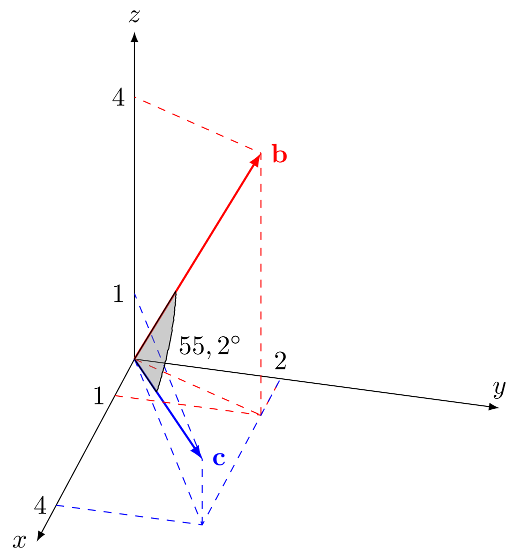
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

■

1.4 Um dos muitos usos do produto escalar é na determinação do ângulo entre dois vetores dados. Determine o ângulo entre os vetores $\mathbf{b} = (1, 2, 4)$ e $\mathbf{c} = (4, 2, 1)$ através do cálculo do produto escalar entre eles.

Solução:

$$\begin{aligned}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = bc \cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}}{bc} = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2}\sqrt{4^2 + 2^2 + 1^2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{12}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{4}{7}\right) = 55,2^\circ\end{aligned}$$



■

1.5 Determine o ângulo entre a diagonal do corpo de um cubo e qualquer das diagonais de suas faces. [*Sugestão*: escolha um cubo de lado 1 e com um dos vértices em O e o vértice oposto $(1,1,1)$. Escreva o vetor que representa uma diagonal do corpo e o outro que represente a diagonal de uma face, e então determine o ângulo entre elas conforme o Problema 1.4.]

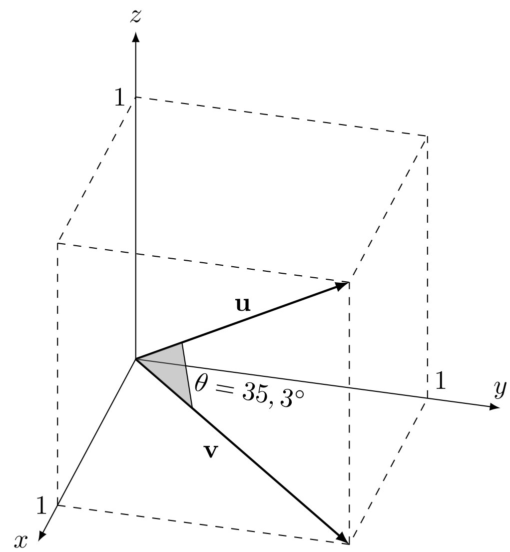
Solução:

Sem perda de generalizade, consideremos os vetores $\mathbf{u} = (1,1,1)$ e $\mathbf{v} = (1,1,0)$, tais que:

$$\begin{cases} u = |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3} \\ v = |\mathbf{v}| = \sqrt{1^2+1^2+0^2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = uv\cos\theta \Rightarrow \cos\theta &= \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{uv} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \\ \Rightarrow \cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} \\ \Rightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{2\sqrt{6}}{6}\right) = 35,3^\circ \end{aligned}$$


z
1
u
θ = 35, 3°
1
y
v
1
x