学号________ 姓名________ 学院________ 任课老师________ 座位号________

密封线以内答题无效

考试方式：一页纸开卷（可携带一张专用的A4开卷考试预备纸）

一、选择题 (每小题 3分，共 30分)

1. 设随机变量X, Y的期望都存在，并且对于任给的x, y，都有$E(Y|X=x)=-2x+5$，$E(X|Y=y)=y+4$。请问$E(X), E(Y)$分别为：(　　)。

   (A) 3, 1；　(B) -3, -1；

   (C) 3, -1；　(D) 条件不够，不能计算。

2. 已知随机变量X的特征函数为$\varphi(u)=\cos u$，$u \in R$，则X的概率分布为：(　　)。

   (A)

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

   ；　(B) 0-1分布

   (C) 二项分布；　(D) 很复杂，不会计算。

3. 关于随机变量的分布，下列说法正确的是(　)。

   (A) 若随机变量X和Y同分布，则$P\{X=Y\}=1$；

   (B) 若$P\{X=Y\}=1$，则若随机变量X和Y同分布；

   (C) 若随机变量X和Y同分布，则X和Y是同一个随机变量；

   (D) 若若$P\{X=Y\}=1$，则X和Y是同一个随机变量。

4. 下列说法错误的是：(　　)。

   A 随机变量X和Y都服从正态分布，则二者不相关可以得出二者独立；

   B $X(t)$为正态过程，则$Y(t)=3X(t)$仍是正态过程;

   C n维非退化的正态随机向量，可转换为一个由独立分量构成的随机向量;

   D 正态过程一定是二阶矩过程。

5. 已知$\{N_1(t), t \geq 0\}$和$\{N_2(t), t \geq 0\}$是相互独立、参数分别为$\lambda_1 > 0$和$\lambda_2 > 0$的泊松过程，则下列说法不正确的是(　)。

(A) $X(t)=N_1(t)+N_2(t)$是泊松过程，参其均值函数为$m_X(t)=(\lambda_1+\lambda_2)t$；

(B) $X(t)=N_1(t)-N_2(t)$是复合泊松过程, 其均值函数为$m_X(t)=(\lambda_1-\lambda_2)t$；

(C) $X(t)=N_1(t)-N_2(t)$不是泊松过程，其方差函数为$D_X(t)=(\lambda_1+\lambda_2)t$；

(D) $X(t)=N_1(t)+N_2(t)$是泊松过程，其自协方差函数为$C_X(s,t)=(\lambda_1+\lambda_2)\min\{s,t\}$。

6. 设在$[0,t]$时间段内，男顾客与女顾客到达商场人数分别独立服从每分钟1人和2人的泊松过程，则在有100人到达商场的条件下，到达的男性顾客数服从(　　)，到达女性顾客数期望约为(　　)。

(A) 参数为1/3的二项分布，约为66.7；　(B) 参数为2/3的二项分布，约为33.3；

(C) 参数为1/3的泊松分布，约为66.7；　(D) 参数为2/3的泊松分布，约为33.3。

7. 下列说法错误的是：(　　)。

(A) 对于齐次泊松过程，W_n-W_{n-1}是独立的随机变量序列；

(B) 维纳过程的增量过程一定是严平稳过程；

(C) 对于齐次泊松过程，$\{N(t)\geq n\}=\{W_n\leq t\}$；

(D) 正态过程的增量过程一定是宽平稳过程。

8. 下面的随机过程中不一定是二阶矩过程的是：(　)

A. 严平稳过程；B. 宽平稳过程；C. 正态过程；D. 泊松过程。

9. 下列随机过程中，既可能是平稳过程，又可能是马氏过程的是(　)。

(A) 平稳独立增量过程；(B)泊松过程；(C) Wiener过程；(D) 正态过程。

10. 设齐次马尔可夫链的一步转移矩阵为$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则其平稳分布为(　)。

(A)$(\frac{2}{3},\frac{1}{3})$；(B)$(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$；(C)$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$；(D)不存在。

二、填空题 (每小题 3分，共 15分)

1. 设随机变量$X\sim U(a,b)$，则X的特征函数$\varphi(u)$ =(^{a} _ 　　　　)。

2. 设随机过程$X(t)=At^2+Bt+C, t\in R$，其中随机变量A、B、C相互独立并且都服从$N(0,\sigma^2)$。$Y(t)=X'(t)$，则$R_Y(s,t)$ =(　　)　　　　)。

3. 设随机过程$X(t)=Bt+2, t\in R$，其中随机变量$B\sim N(1,1)$。$Y(t)=\frac{1}{t}\int_0^t X(u)du, t>0$，则$D_Y(t)=$ _

4. 设$N(t)$是强度为参数$\lambda>0$的泊松过程，泊松过程表示的事件流中第n个事件到达的时间W_n的数学期望是(   )。

5. 设$\{x_n, n\geq n\}$为一个齐次的马尔可夫链，状态空间为$E=\{1,2,3\}$，其一步转移矩阵为$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，则$P_{12}^{(2)}=$ —

三、计算题 (共10分)

设随机过程为$Y(t)=te^X, t>0$，其中X服从参数为$\lambda>0$的指数分布，求$Y(t)$的一维概密度。

解：因为$X\sim Exp(\lambda)$，其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

对于固定的$t>0$，$Y(t)$的一维分布函数为

$$F(y;t)=P\{Y(t)\leq y\}=P\{te^X\leq y\}=\begin{cases} P\{X\leq \ln\frac{y}{t}\}, & y>t \\ 0, & 其它 \end{cases}=\begin{cases} F_X(\ln\frac{y}{t}), & y>t \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

则$Y(t)$的一维概率密度函数为

$$f(y;t)=\begin{cases} \frac{\lambda t^\lambda}{y^{\lambda+1}}, & y>t \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

四、计算题 (共10分)

设$W(t)$是标准的维纳过程，令$X = W(1)$，$Y = W(2)$。

1.写出二维随机变量(X, Y)的协方差矩阵C；

2.求二维随机变量(X, Y)的概率密度$f(x, y)$和特征函数$\varphi(u, v)$。

解：

1.因为$X = W(1) \sim N(0, 1)$，$Y = W(2) \sim N(0, 2)$，所以

$E(X) = E(W(1)) = 0, D(X) = D(W(1)) = 1$。

$E(Y) = E(W(2)) = 0, D(Y) = D(W(2)) = 2$。

$C(X, Y) = C_W(1, 2) = \sigma^2 \min\{1, 2\} = 1$。

故(X, Y)的协方差矩阵 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。

2.(X, Y)为二维正态分布，由（1）可知，(X, Y)的特征特征函数

$\varphi(u, v) = e^{-\frac{1}{2}(u,v)C(u,v)^{\tau}} = e^{-\frac{1}{2}(u^2+2uv+2v^2)}$。

(X, Y)的概率密度

$f(x, y) = \frac{1}{2\pi|C|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x,y)C^{-1}(x,y)^{\tau}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(2x^2-2xy+y^2)}$。

五、计算题 (共10分)

设随机过程$X(t) = A\cos(\omega t + \Theta), t \in R$。其中$A \sim N(0, \sigma^2), \Theta \sim U(0, 2\pi)$，$A$与$\Theta$相互独立，$\omega$是常数。完成下列问题。

1.证明$X(t)$是宽平稳过程。

2.证明$X(t)$均方连续、均方可微、均方可积。

3.证明$X(t)$的均值是均方遍历的。

4.证明$X(t)$的相关函数不是均方遍历的。

解：

1.$m_X(t) = E(A\cos(\omega t + \Theta)) = E(A)E(\cos(\omega t + \Theta)) = 0,$

$$
\begin{aligned}
R_X(t,t+\tau) &= E(A\cos(\omega t+\Theta)A\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)) \\
&= E(A^2)E(\cos(\omega t+\Theta))\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)) \\
&= \sigma^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(\omega t+\theta))\cos(\omega(t+\tau)+\theta))d\theta \\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi}\cos(\omega\tau)
\end{aligned}
$$

因此，$X(t)$是宽平稳过程。

2.$R_X(\tau)$在$\tau = 0$处连续，二阶可导，所以$X(t)$在R均方连续、均方可微、均方可积。

3.因为

$$
\begin{aligned}
< X(t) > &= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}X(t)dt \\
&= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{A}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos(\omega t+\Theta)dt \\
&= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{A}{2T}\int_{-T}^{+T}(\cos\omega t\sin\Theta+\sin\omega t\cos\Theta)dt \\
&= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{A\sin\omega T\sin\Theta}{\omega T} = 0 = m_X
\end{aligned}
$$

所以，$X(t)$的均值是均方遍历的。

4.因为

$$
\begin{aligned}
< X(t)X(t+\tau) > &= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}X(t)X(t+\tau)dt \\
&= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{A^2}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos(\omega t+\Theta)\cos(\omega(t+\tau)+\Theta)dt \\
&= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{+T}[\cos(2\omega t+\tau+2\Theta)+\cos\omega\tau]dt \\
&= \frac{A^2}{2}\cos\omega\tau \neq R_X(\tau)
\end{aligned}
$$

所以，$X(t)$的相关函数不是均方遍历的。

六、计算题 (共10分)

设有四个状态$E=\{0,1,2,3\}$的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

1.画出状态转移图;

2.对状态进行分类;

3.对状态空间进行分解;

4.该马氏链是否有平稳分布？如果有，请求出其平稳分布。

解:

1.状态转移图为

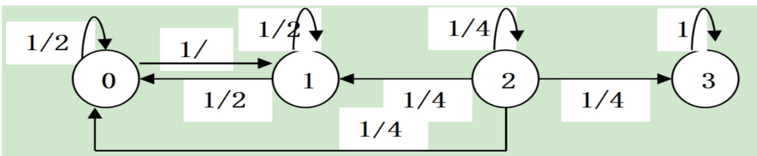

图 1: 状态转移图

2.$p_{33}=1$，而p_{30},p_{31},p_{32}均为零，所以状态3构成一个闭集，它是吸收态，记为$C_1=\{3\}$;

0, 1两个状态互互通，且它们不能到达其它状态，它们构成一个闭集，记为$C_2=\{0,1\}$;

由于状态2可达C_1,C_2中的状态，而C_1,C_2中的状态不可能达到它，故状态2为非常返态，记$N=\{2\}$。

3.状态空间可分解为$E=N\cup C_1\cup C_2$。

4.该马尔可夫链的平稳分布为$(k,k,0,1-2k)$，其中$0\le k\le\frac{1}{2}$。