Calcularea constantei gravitaționale din mișcarea pendulurilor gravitaționale

Dragomir Ioan, Prelipcean Marius
11B

Constantineanu Raluca
Prof. Coordonator

Cristian, Bolea, Turcilă

1 Sinopsis

Folosind date experimentale măsurate de mai multe grupe de elevi în cadrul orei de fizică și noțiuni teoretice clasice despre gravitație, forța elastică și pendulul gravitațional construim un model ce aproximează mișcările unui pendul cu un oscilator liniar armonic pe care îl folosim pentru a aproxima constanta gravitațională din zona Bucureștiului. În final arătăm și că metoda de calcul prin regresie liniară este mult mai precisă decât luarea mediei aritmetice a constantelor gravitaționale rezultate din mai multe experimente independente.

2 Introducere

Forța gravitațională este aproximată pe Pământ ca

$G = mg$

unde G este mărimea forței gravitaționale, m este masa obiectului atras de pământ și g este constanta gravitațională.

Scopul acestui studiu este deducerea valorii constantei gravitaționale din măsurători experimentale.

Folosind niște greutăți de cântar și niște sfori, grupele de elevi au construit penduluri gravitaționale. Cum oscilația unui pendul gravitațional la unghiuri mici[1] e aproximată de un oscilator liniar armonic, am calculat modelul OLA-ului teoretic corespunzător fiecărui pendul construit și am folosit analogia OLA — pendul pentru a extrage o relație între datele măsurate în experimente și constanta gravitațională, astfel calculând-o.

După calcularea unei valori aproximale pentru g se vor discuta posibile surse de erori în acest proces și soluții pentru creșterea preciziei răspunsului.

3 Obținerea datelor experimentale

Fiecare grupă a primit de la profesor câte o sfoară de iută cu lungimi între 20-50cm (not. l) și câte o greutate cu mase între 200-500g (not. m). Acestea au fost folosite pentru a construi un pendul gravitațional a cărui masă și lungime sunt cunoscute.

După construirea pendulelor, grupele au efectuat mai multe teste în care lăsau pendulul să oscileze cu un unghi maxim ”mic” și măsurau: 1) durata totală a oscilațiilor (not. t); 2) numărul

[1] Se consideră ”unghiuri mici” unghiurile $< 5°$

Gr.	l	t	n	$T = \frac{t}{n}$	$\overline{T}$	$\Delta T = \lvert T - \overline{T} \rvert$	$\overline{\Delta T}$
G1	33.5cm	27.735s	20	1.136s	1.137s	0.001s	0.001s
		27.77s	20	1.138s		0.001s	
	25cm	9.57s	10	0.957s	0.972s	0.0155s	0.015s
		14.72s	15	0.981s		0.0095s	
		19.57s	20	0.978s		0.006s	
G2	40cm	11.21s	9	1.245s	1.242s	0.003s	0.007s
		12.40s	10	1.240s		0.002s	
		14.80s	12	1.238s		0.004s	
		18.69s	15	1.246s		0.004s	
		24.96s	20	1.248s		0.006s	
		31.35s	25	1.254s		0.012s	
		36.65s	30	1.220s		0.022s	

Table 1: Rezultate experimentale de la grupele G1, G2

de oscilații (not. n). Din aceste date se poate calcula pentru fiecare test: 3) perioada medie a unei oscilații (not. T); și pentru toate testele: 4) media perioadelor medii ale oscilațiilor (not. $\overline{T}$); 5) eroarea perioadei medii a fiecărui test (not. ΔT); 6) eroarea medie peste toate testele (not. $\overline{\Delta T}$).

Pentru a face acest studiu am folosit datele experimentale de la grupele conduse de Dragomir Ioan (notată G1) și Prelipcean Marius (notată G2). În Tabelul **??** (pag. **??**) apar cele 12 teste înregistrate de cele două grupe, variabilele de pe coloane având semnificația din paragraful trecut.

4 Aproximarea unui pendul cu un OLA

În Figura **??** (pag. **??**) sunt notate:

A = punctul de susținere al pendulului
B = capătul liber al pendulului de masă m
G = greutatea
G_t = greutatea tangențială (componenta perpendiculară pe fir)
G_n = greutatea normală (componenta pe direcția firului)
O = poziția de echilibru
α = unghiul dintre poziția curentă și cea de echilibru
l = lungimea pendulului

Și notăm B' proiecția lui B pe AO și B_x lungimea segmentului $[B'B]$.

Cum capătul liber se poate mișca doar tangențial cercului de rază l, G_t nu efectuează deloc lucru mecanic și toată mișcarea e dictată doar de G_n, variabilă a cărei valoare este:

$G_n = mg \sin \alpha$

Datorită restricției că $\alpha < 5°$, putem folosi aproximările:

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

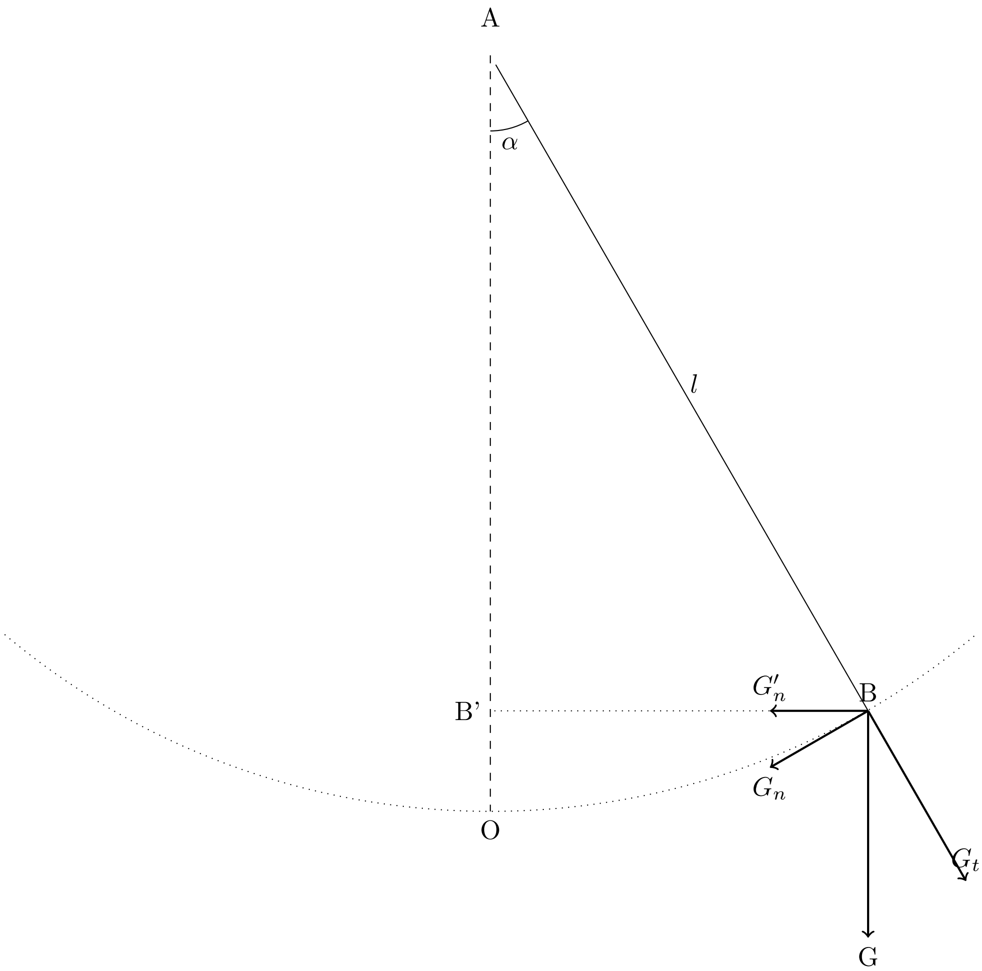

Figure 1: Pendul gravitațional

$$\cos\alpha \approx 1$$
$$B_x = l\sin\alpha \approx l\alpha$$
$$G_n \approx mg\alpha \approx mg\frac{B_x}{l}$$

Ultimul pas pentru a ”găsi” OLA-ul ce aproximează mișcarea pendulului este să considerăm doar mișcarea pe axa orizontală, deoarece la unghiuri mici mișcarea pe axa verticală este nesemnificativă:

$$G'_n \approx G_n\cos\alpha \approx mg\frac{B_x}{l}\cos\alpha$$

Formula aceasta în care forța care acționează asupra unui corp (G'_n) depinde de poziția corpului (B_x) este analogul formulei forței elastice din Legea lui Hooke:

$$F_e = -k\Delta l$$

În acest caz, putem deduce constanta elastică:

$$k = \frac{mg}{l}$$

Acum cunoaștem parametrii unui OLA care imită cât se poate de bine oscilațiile pendulului. Perioada unui OLA cu k cunoscut este:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

5 Calcularea constantei gravitaționale

Care în acest caz devine:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\frac{mg}{l}}{m}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Această formulă demonstrează faptul că perioada de oscilație a unui pendul e independentă de masa acestuia, însă, mai mult, ne dă o relație clară între perioada oscilațiilor, lungimea pendulului și constanta gravitațională.

O posibilitate de a proceda în acest stadiu este să se calculeze g pentru fiecare test în parte și să se considere media aritmetică a g-urilor rezultante ca valoarea finală, însă o metodă mai precisă este estimarea constantei gravitaționale prin regresie liniară pe perechi (T^2, l).

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}$$

Astfel luăm fiecare din cele 12 teste și le calculăm perechea (T^2, l) (Tabelul **??** pag. **??**), apoi desenăm graficul acelor perechi (Figura **??** pag. **??**).

Dreapta care aproximează cel mai aproape perechile de (T^2, l) culese este $l = 0.25T^2 + 0.01410$, deci g rezultat este:

$$g = 4\pi^2\frac{l}{T^2} \approx 39.478 \cdot 0.25$$
$$g \approx 9.86$$

T	$\frac{T^2}{s^2}$	l
1.136s	1.2905	0.335m
1.138s	1.2950	0.335m
0.957s	0.9158	0.25m
0.981s	0.9623	0.25m
0.978s	0.9564	0.25m
1.245s	1.5500	0.4m
1.240s	1.5376	0.4m
1.238s	1.5326	0.4m
1.246s	1.5525	0.4m
1.248s	1.5575	0.4m
1.254s	1.5725	0.4m
1.220s	1.4884	0.4m

Figure 2: Perechile (T^2, l) de la fiecare test

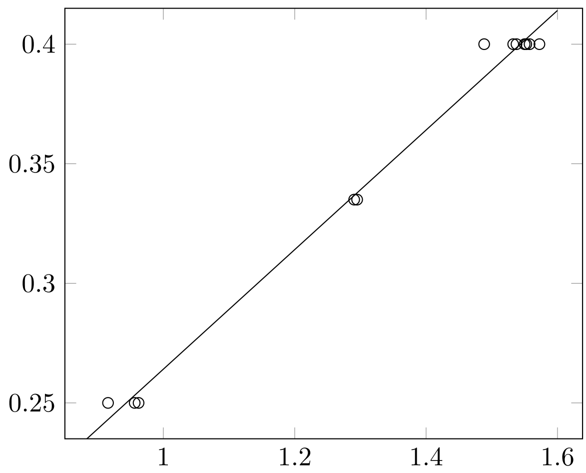

Figure 3: Graficul perechilor (T^2, l)

6 Comparație cu metoda naivă

Acest rezultat este mai precis decât rezultatele obținute independent de fiecare grupă prin metoda în care se calcula g pentru fiecare test și se ia media aritmetică a acelor rezultate. Rezultatul după regresia liniară este la doar 0.5% de valoarea corectă de 9.81, pe când grupelor le-au dat rezultatele 10.89 (11% distanța de la valoarea corectă) și 10.43 (4% distanța).

7 Surse de eroare

Deși rezultatul obținut este foarte satisfăcător, acesta e tot destul de departe de valoarea reală. În această secțiune vor fi analizate mai multe motive pentru care acesta este cazul și voi propune soluții pentru a obține rezultate și mai precise în experimentele din viitor.

În primul rând, datorită lipsei de unelte de precizie, măsurătorile au fost făcute "dupa ochi". Lungimile firelor au fost aproximate în funcție de dimensiunile telefoanelor și caiatelor și cronometrarea a suferit mult datorită reflexelor umane încete.

În al doilea rând, modelul OLA-ului fără frecare e departe de realitate. Pe de o parte apare frecarea cu aerul care duce la perioade de oscilație medii mai lungi, deci la rezultate pentru constanta gravitațională mai mici, iar pe de alta există un defect la nivel conceptual deoarece un OLA nu poate imita perfect un pendul, ci doar îl poate aproxima. Oricărui studiu care se bazează pe o astfel de aproximare îi este predestinată eroarea datorită diferenței subtile dinte un pendul și un OLA, chiar și într-un mediu fără frecare.

Pentru a rezolva prima problemă sugerez dotarea cu unelte de precizie pentru măsurarea lungimii sforii (rigle cu milimetri) și o soluție automată, posibil electronică, pentru măsurarea timpului de oscilație. Pentru a doua problemă soluția ar fi schimbarea totală a metodologiei experimentului, folosirea unor formule mai complexe pentru mișcarea pendulului pentru a evita aproximările de genul $sin(x) \approx x$.

8 Concluzie

În concluzie, calcularea constantei gravitaționale locale este un experiment plauzibil, ușor de efectuat și fără echipamente de precizie și, în opinia mea, distractiv, la care dacă sunt folosite metode bune de calcul precum regresia liniară în locul altor soluții mai naive se poate ajunge la rezultate foarte precise. Experimentul are un mare dezavantaj, insă, deoarece acesta se bazează pe aproximarea unui pendul cu un OLA. Această aproximare e destul de bună incât să se poată ajungă la reultate satisfăcătoare, insă nu este decât o aproximare.