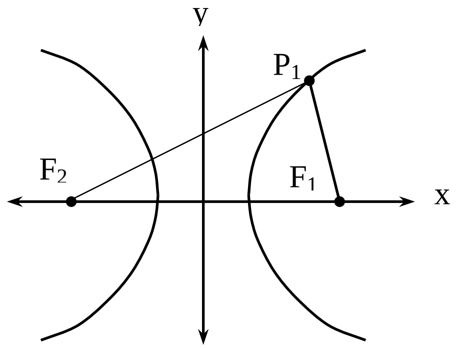
Hipérbola

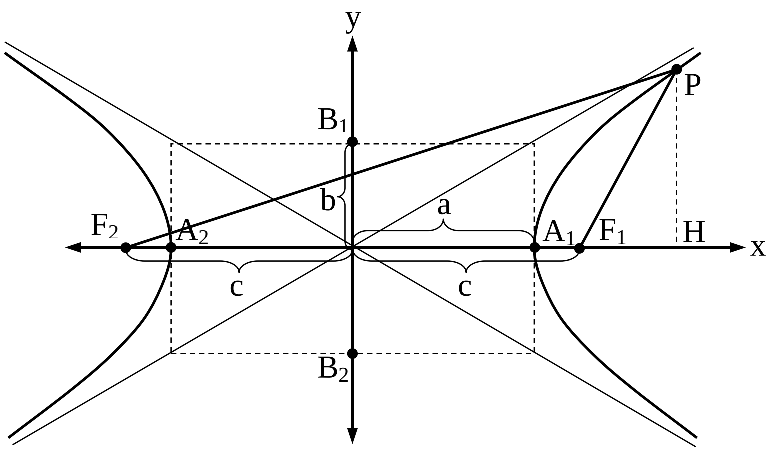
Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. A esta constante la simbolizamos: 2 a



P1 pertenece a la hipérbola si y solo si

$\left|\overline{P_1F_1} - \overline{P_1F_2}\right| = 2a$

Elementos de la hipérbola:



Focos: Son los puntos fijos de la definición. F_1 y F_2
Distancia focal: Es la distancia entre los focos.
Vértices: Son las intersecciones del eje focal con la hipérbola. A_1 y A_2
Eje real: Es el segmento $\overline{A_1A_2} = 2a$

Eje conjugado: Es el segmento $\overline{B_1B_2} = 2b$
Centro: Intersección de los ejes real y conjugado: o (En este caso coincide con el eje de coordenadas).
Excentricidad: es el cociente entre c y a.
$\boxed{e = \frac{c}{a}}$; como en la hipérbola $\boxed{c > a} \Rightarrow \boxed{e > 1}$
Relación entre a, b y c: En la hipérbola se cumple: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$
Entre a y b se pueden dar las siguientes situaciones
$a \geq b \vee a \leq b$
Si a = b la hipérbola se llama equilátera

Deducción de la ecuación:

$\forall$ Punto perteneciente a la hipérbola, por ejemplo P(x , y) se cumple:
$\left|\overline{PF_2} - \overline{PF_1}\right| = 2a$ (1)

Considerando $\overset{\triangle}{PHF_1}$, por teorema de Pitágoras: $\overline{PF_1} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$
Considerando $\overset{\triangle}{PHF_2}$, por teorema de Pitágoras: $\overline{PF_2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

Reemplazando en (1)

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \rightarrow$$ Pasando un $\sqrt{\ }$ al 2° miembro y elevando al cuadrado

$$\left(\cancel{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}\right)^{\cancel{2}}=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$ Resolviendo los cuadrados

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+2.2a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\left(\cancel{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\right)^{\cancel{2}}$$

$$\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}$$

$$4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$ Dividiendo todo por 4 y elevando al cuadrado

$$\left(cx-a^2\right)^2=a^2.\left[\cancel{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}\right]^{\cancel{2}}$$

$$c^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^4=a^2x^2-\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2$$

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right)$$ Recordando $a^2+b^2=c^2$, $c^2-a^2=b^2$

$$x^2.b^2-a^2y^2=a^2.b^2$$

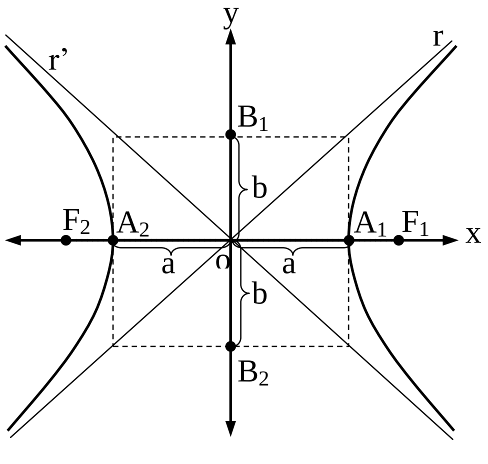
$$\frac{x^2\cancel{b^2}}{a^2\cancel{b^2}}-\frac{\cancel{a^2}y^2}{\cancel{a^2}b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}\Rightarrow\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$ Ecuación Canónica de la Hipérbola

→ Eje focal coincidente con eje x

Si el eje focal es el eje y el término positivo será y

La ecuación: $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$

Asíntotas de las hipérbolas: Son las rectas que incluyen a las diagonales del rectángulo de lados 2a y 2b ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas?



Recordemos que la forma explícita de la ecuación de toda recta es

$$y = mx + h$$

Siendo m la pendiente y h la ordenada al origen

Luego las ecuaciones explícitas de r y r’:

Asíntota r: $y=\frac{b}{a}x$

Asíntota r’: $y=\frac{-b}{a}x$

Ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados

En forma análoga a lo visto en elipse, si el centro de la hipérbola no coincide con el origen de coordenadas, pero el eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados, su ecuación canónica será:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Siendo (h , k) las coordenadas del centro

Resolviendo los cuadrados de los binomios, sacando común denominador e igualando a cero:

$$\frac{b^2(x^2-2hx+h^2)-a^2(y^2-2ky+k^2)}{a^2b^2}=1$$

$$b^2x^2-2b^2hx+b^2h^2-a^2y^2+2a^2ky-a^2k^2-a^2b^2=0$$

$$\underbrace{b^2}_{A}x^2\underbrace{-a^2}_{C}y^2\underbrace{-2b^2h}_{D}x+\underbrace{2a^2k}_{E}y+\underbrace{b^2h^2-a^2k^2-a^2b^2}_{F}=0$$

$\Rightarrow \boxed{Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$ Ecuación General de la Hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados

Vemos que signo A $\neq$ signo C

Ejemplos:

1. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

Variable +: x $\Rightarrow$ focos sobre el eje x

$a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a=3}$

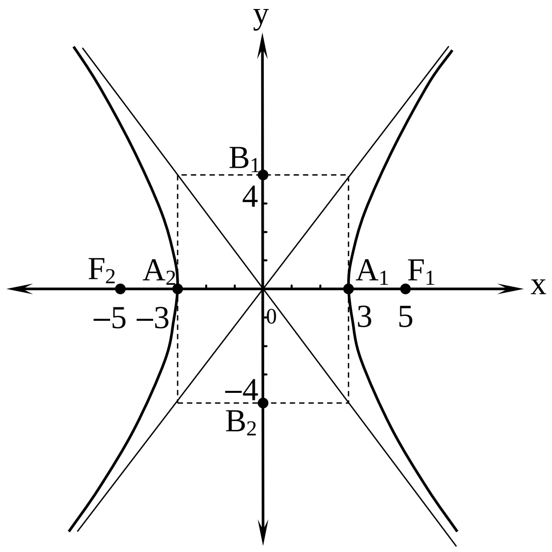
$b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b=4}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow \boxed{c=5}$

Asíntotas: $y=\pm\dfrac{4}{3}x$

Focos: $F_1(5,0)$; $F_2(-5,0)$

Vértices: $A_1(3,0)$; $A_2(-3,0)$ - $B_1(0,4)$; $B_2(0,-4)$



2.

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Variable +: y $\Rightarrow$ focos sobre el eje y

$a^2 = 16 \Rightarrow \boxed{a = 4}$
$b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b = 3}$
$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

Asíntotas: $y = \pm \frac{3}{4}x$

Focos: $F_1(0,5)$; $F_2(0,–5)$
Vértices: $A_1(0,4)$; $A_2(0,–4)$ - $B_1(3,0)$; $B_2(–3,0)$