電磁気学特論　　2019/10/30

『電磁界の有限要素解析』

美舩　（松尾研）

本スライド資料：

http://bit.do/denjiki

小テスト：

https://forms.gle/DkGgz75ceTD7Vms27

（シラバスより）

「前半に，特殊相対性理論とマクスウェルの電磁気学理論の関係等について講述する。
後半は，微分形式による電磁界の記述と，その計算電磁気学への応用に関して講述する。」

電磁現象のコンピュータによるシミュレーション

電磁界解析を利用した設計・開発

- 電気・電力機器
  - モータ，発電機，トランス，電磁アクチュエータ，超電導磁石，...
- 電子情報機器
  - 集積回路，ディスプレイ，HDD，MRI，...
  - ワイヤレスLAN，スマートフォン，...
- 先端的な材料・デバイス
  - 電磁メタマテリアル，...

電磁界数値解析の手法(実際には区分が曖昧な場合も多い)

- 微分方程式に基づく手法
  - 有限差分法
    - FDTD (Finite Difference Time Domain)法
  - 有限要素法(FEM, Finite Element Method)
  - 有限積分法
- 積分方程式に基づく手法
  - 境界要素法

商用ソフト：JMAG(JSOL),
ANSYS(ANSYS),
etc.

今日の内容

- 前提の確認
  - マクスウェル方程式
- 電磁界 FEM の基礎 I
  - １次元の練習問題
  - ２次元静電界 FEM
- 電磁界 FEM の基礎 II
  - ベクトルポテンシャルの導入
  - ベクトル変数の扱い（→辺要素）
- 辺要素 FEM
  - ベクトル補間関数
  - ３次元静磁界 FEM

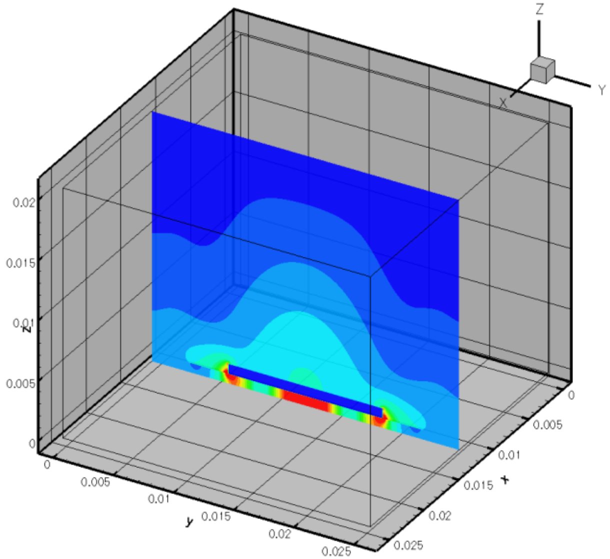
具体例に沿って FEMによる電磁界解析の概要を説明

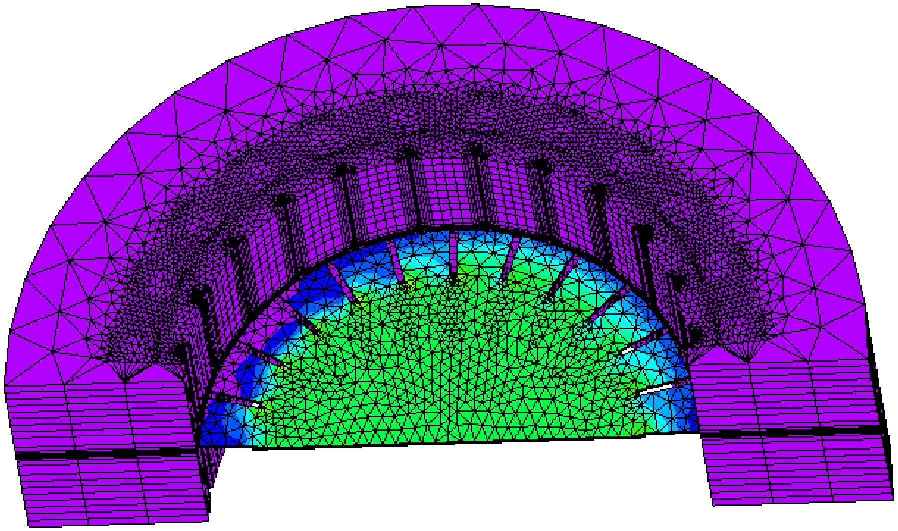
手短に

＋α（時間があれば）

- 行列解法について

前提の確認


Z
Y
X
0.02
0.015
0.01
0.005
0
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
y
0
0.005
0.01
0.015
0.02
0.025
x



電磁界のベクトルと構成方程式（媒質の電磁気学的特性）

- $\boldsymbol{E}$: 電界の強さ
- $\boldsymbol{D}$: 電束密度
- $\boldsymbol{H}$: 磁界の強さ
- $\boldsymbol{B}$: 磁束密度

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}$$

ε : 誘電率

μ : 透磁率

現実の媒質は、非線形性などの複雑な特性を持つ

ベクトル解析の基本の演算

- 勾配（gradient）

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

- 発散（divergence）

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- 回転（rotation）

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

ナブラ：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

マクスウェル方程式（微分形）

$$
\begin{cases}
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0
\end{cases}
$$

ファラデー

アンペール

ガウス

静電界の方程式

ファラデーの法則の時間微分項を無視

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$\Rightarrow$ 電位 V が定義できる（詳細は省略）

$$\boldsymbol{E} = -\nabla V$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\nabla V$$

静電界の方程式

$$-\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho$$

前提のまとめ

マクスウェル方程式

$$
\begin{cases}
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0
\end{cases}
$$

構成方程式（媒質の特性）

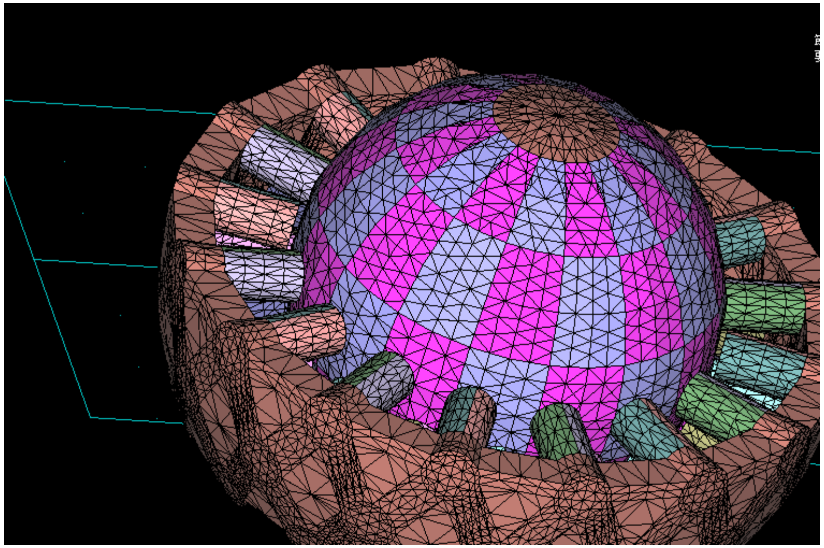
$$
\begin{cases}
\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}
\end{cases}
$$

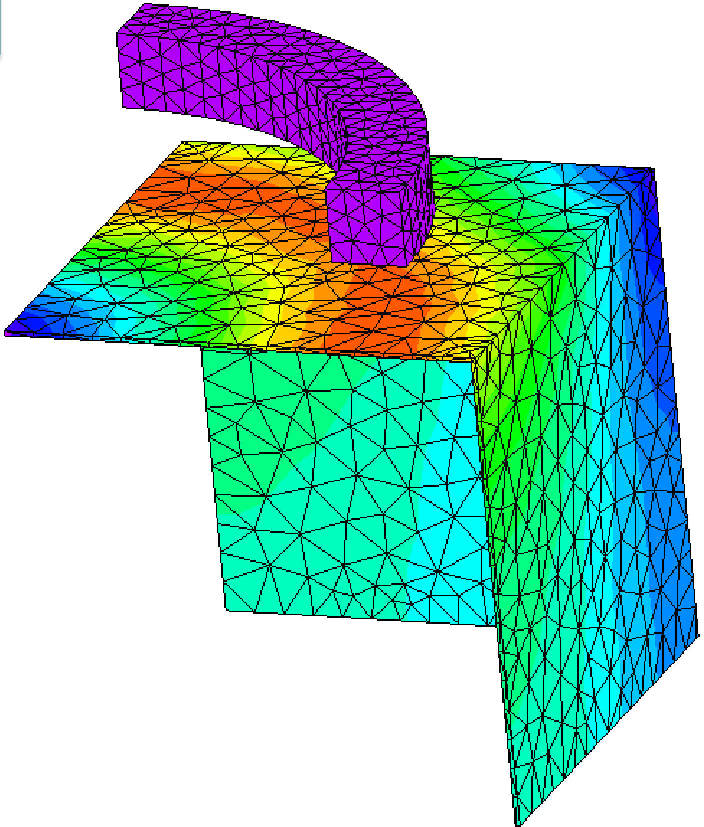
静電界については

$$
-\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho
$$

と簡単化される

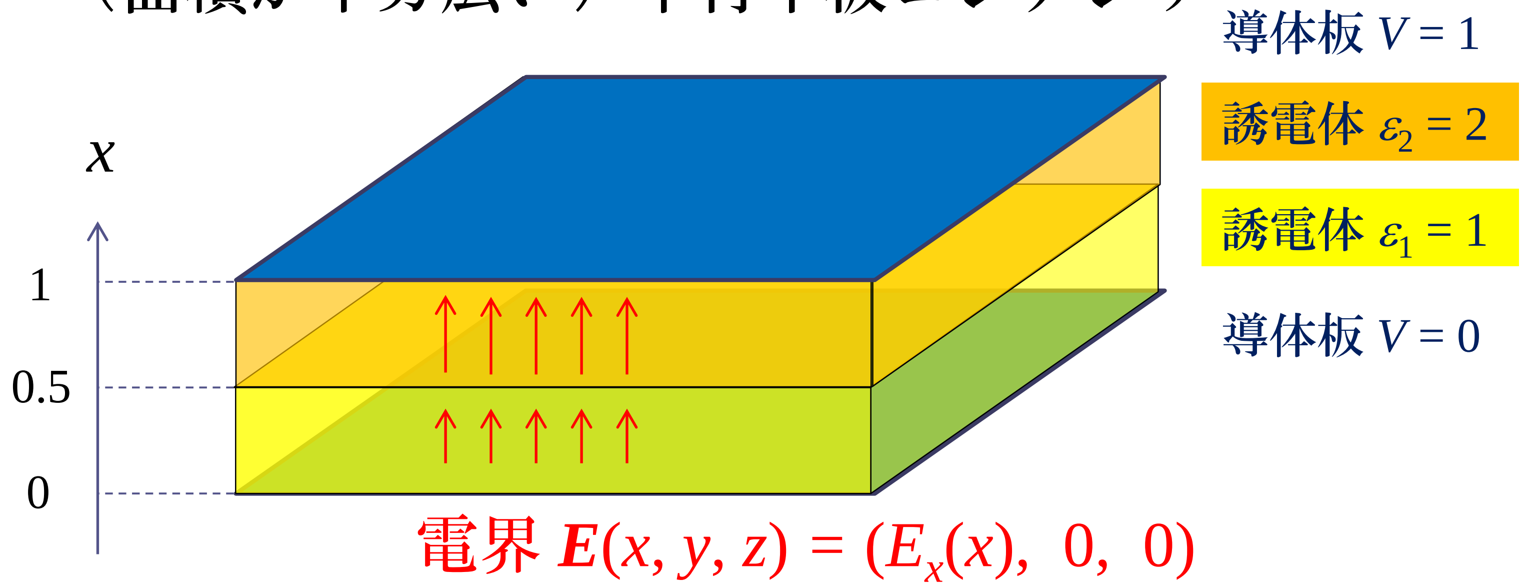
電磁界FEMの基礎 I





1次元の練習問題（手計算で）

（面積が十分広い）平行平板コンデンサ



静電界の方程式

$$-\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{-\frac{d}{dx}\left(\varepsilon \frac{dV}{dx}\right) = 0}$$

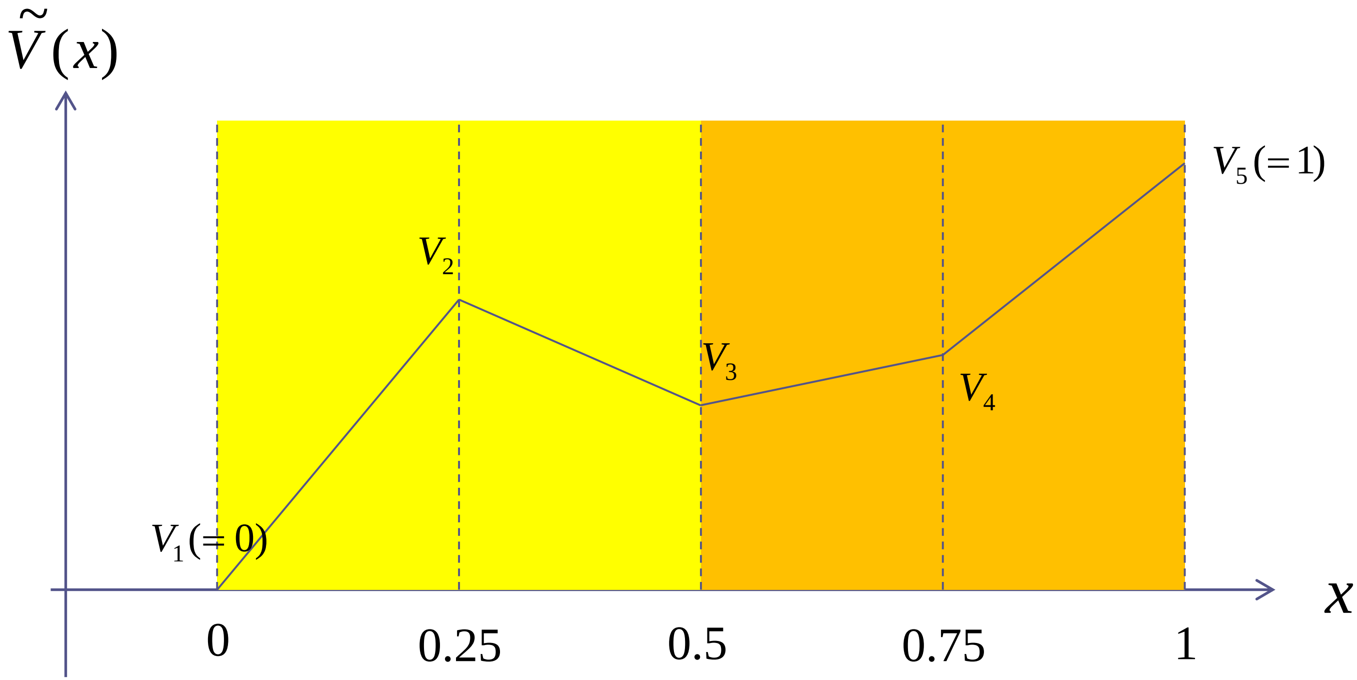
有限要素法の基本

1. 補間関数による近似解の表現（次スライド）
2. 離散化された方程式の導出
   a. 変分法（解析力学と親和性が高い）
      - 作用積分（汎関数）の停留化に基づく
      - 最も基本的な考え方
   b. ガラーキン法（ベクトル解析の記述から導入しやすい）
      - 重み付き残差法で、重み関数＝補間関数
      - 変分法と等価
      - 汎関数を見つけるのが難しいときも適用可能

（基本１）

近似解の候補となる関数 $\tilde{V}(x)$ を、以下のように考える

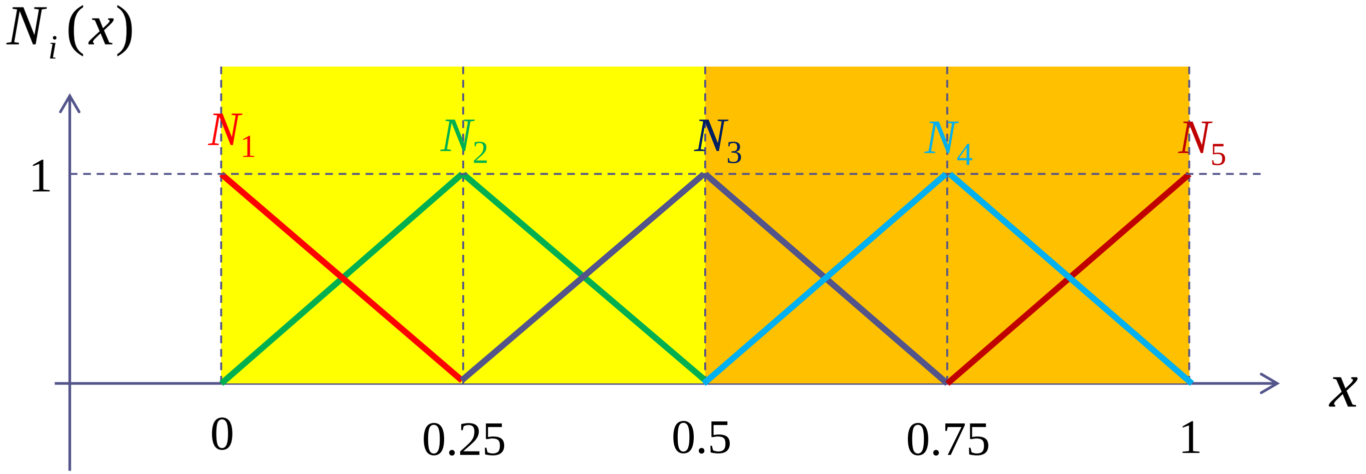
- 解析領域 [0, 1] を 4 分割
- 各節点の電位を未知数とする（V_1 ～V_5）
- 節点と節点の間は、一次関数で補間



（基本１）

補間関数 $N_i(x)$ を、以下のように定義する

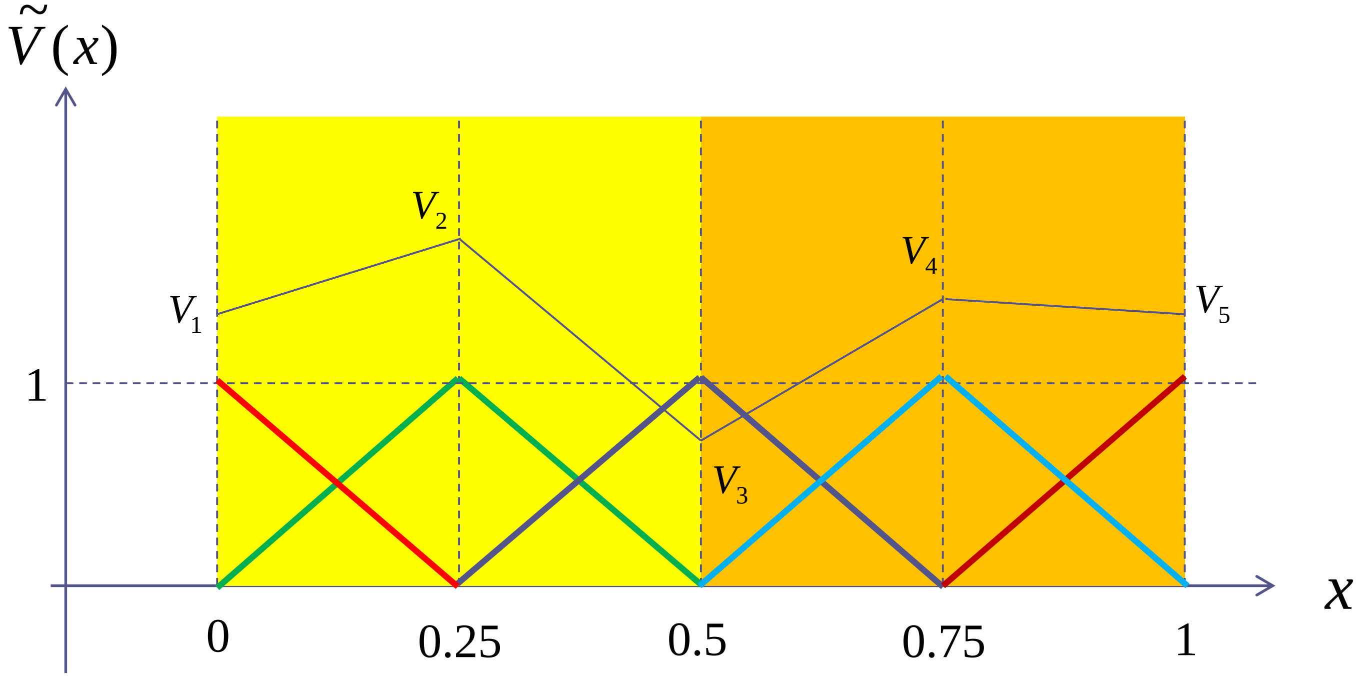
- N_i は，節点 i で１, 他の節点では０
- 節点と節点の間は、１次関数で補間



（基本１）

考えている近似解は，以下のように表される

$$\boxed{\tilde{V}(x) = \sum_i V_i N_i(x)}$$

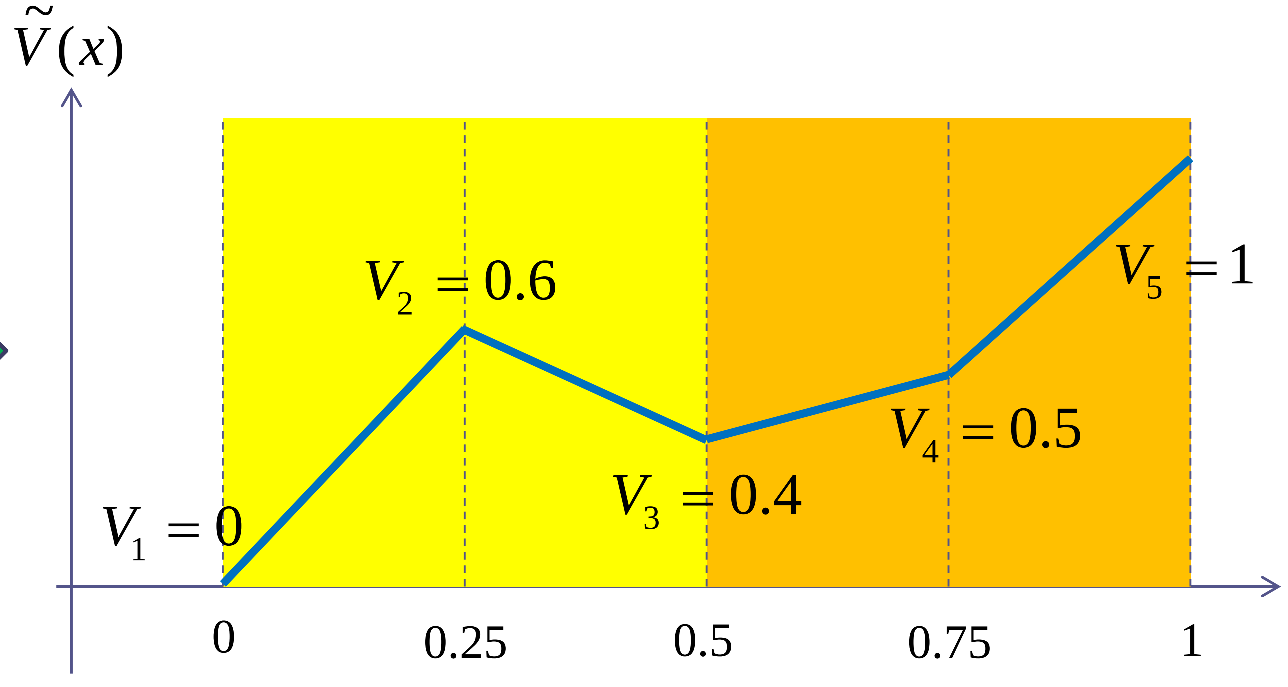


（基本１）

※ 重要ポイント ※

近似解（1次元の関数）とベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}V_1\\V_2\\V_3\\V_4\\V_5\end{pmatrix}$ が１対１の対応

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\0.6\\0.4\\0.5\\1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$



（基本２）

離散化された方程式の ガラーキン法による導出

基礎方程式に「重み関数（＝補間関数）を乗じて積分」した形で立式

$$\boxed{-\int_0^1 N_i \frac{d}{dx}\left(\varepsilon \frac{dV}{dx}\right) dx = 0 \quad (i = 1, \ldots, 5)}$$

⇩ 部分積分の公式を使用（弱形式）

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dN_i}{dx} \varepsilon \frac{dV}{dx} dx - \left[N_i \varepsilon \frac{dV}{dx} \right]_0^1 = 0 \quad (i = 1, \ldots, 5)}$$

$\tilde{V}(x) = \sum V_j N_j$ で置き換えて．．．

（基本２）

導かれた連立方程式

$$
\begin{cases}
A_{11}V_1 + A_{12}V_2 + A_{13}V_3 + A_{14}V_4 + A_{15}V_5 + (\text{境界項}) = 0 \\
A_{21}V_1 + A_{22}V_2 + A_{23}V_3 + A_{24}V_4 + A_{25}V_5 = 0 \\
A_{31}V_1 + A_{32}V_2 + A_{33}V_3 + A_{34}V_4 + A_{35}V_5 = 0 \\
A_{41}V_1 + A_{42}V_2 + A_{43}V_3 + A_{44}V_4 + A_{45}V_5 = 0 \\
A_{51}V_1 + A_{52}V_2 + A_{53}V_3 + A_{54}V_4 + A_{55}V_5 + (\text{境界項}) = 0
\end{cases}
$$

$$
\boxed{A_{ij} = \int_0^1 \varepsilon \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx}
$$

（境界項を含む式を計算する意味は乏しいが，プログラム上は，他の式と同列に扱う場合が多い）

（基本２）

行列・ベクトルによる記述

$$
\begin{pmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{42} & A_{45} \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} (\text{境界項}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\text{境界項}) \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

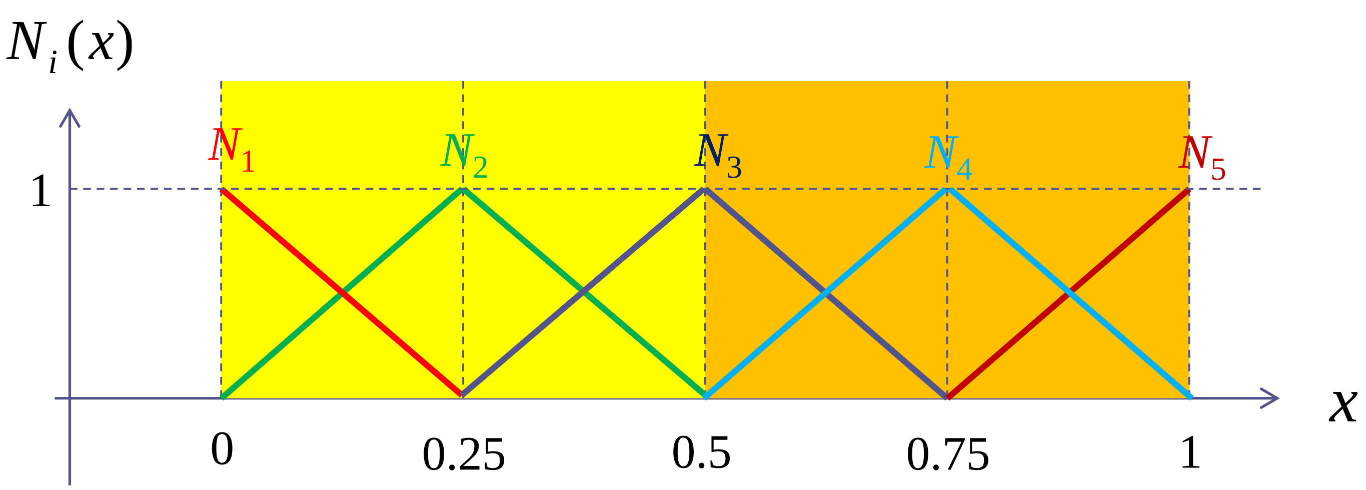
$$
\boxed{A_{ij} = \int_0^1 \varepsilon \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx}
$$

（基本２）

係数の計算

例えば $$A_{12} = \int_0^1 \varepsilon \frac{dN_1}{dx}\frac{dN_2}{dx}dx = \int_0^{0.25} \varepsilon_1 \frac{-1}{0.25}\frac{1}{0.25}dx = -4$$

$$A_{33} = \int_0^1 \varepsilon \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx = \int_{0.25}^{0.5} \varepsilon_1 \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx + \int_{0.5}^{0.75} \varepsilon_2 \frac{dN_3}{dx}\frac{dN_3}{dx}dx = 12$$



（基本２）

係数の計算

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & & & \\ -4 & 8 & -4 & & \\ & -4 & 12 & -8 & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

$\int_0^{0.25}$ の項　$\int_{0.25}^{0.5}$ の項　$\int_{0.5}^{0.75}$ の項　$\int_{0.75}^{1}$ の項

要素行列

（基本２）

境界条件の考慮

$$
\begin{array}{llllll}
V_1 & & & & = & 0 \\
\left\{
\begin{array}{llll}
\cancel{4V_1} & \cancel{-4V_2} & & \\
-4V_1 & 8V_2 & -4V_3 & \\
 & -4V_2 & 12V_3 & -8V_4 \\
 & & & \\
 & & & \cancel{}
\end{array}
\right. & & & &
\begin{array}{l}
\cancel{=} \\ = \\ = \\ = \\ \cancel{=}
\end{array} &
\begin{array}{l}
\cancel{\text{（境界項）}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{\text{（境界項）}}
\end{array} \\
 & & & V_5 & = & 1
\end{array}
$$

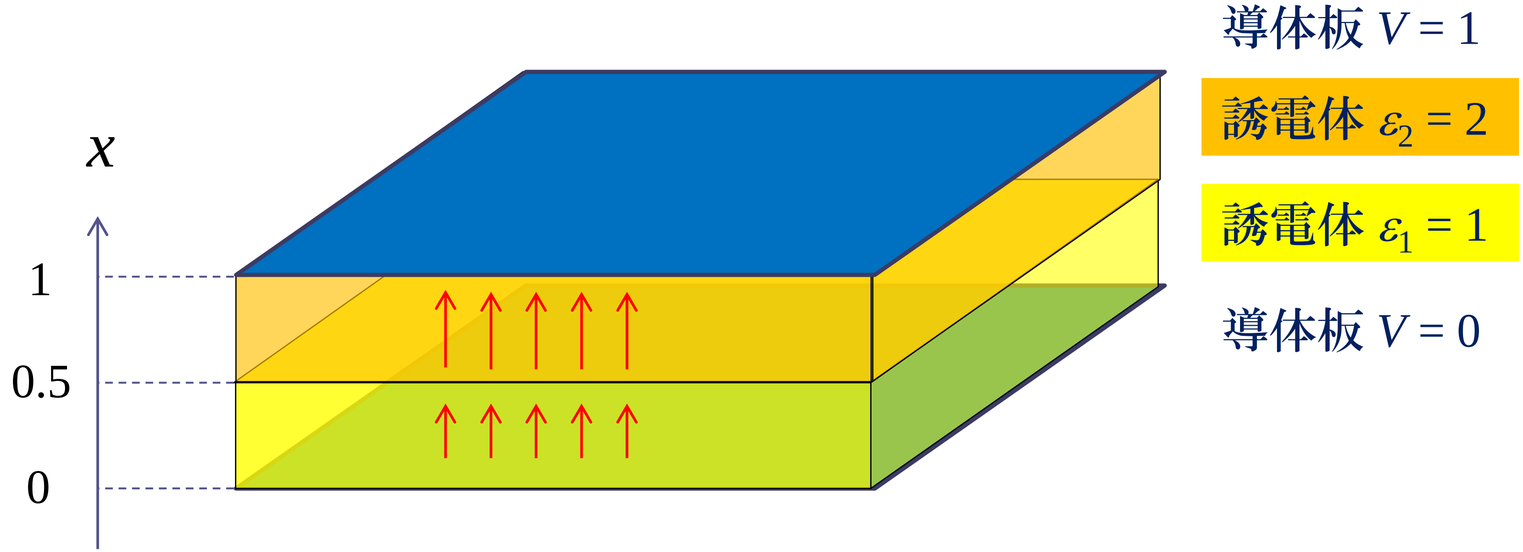
（基本２）

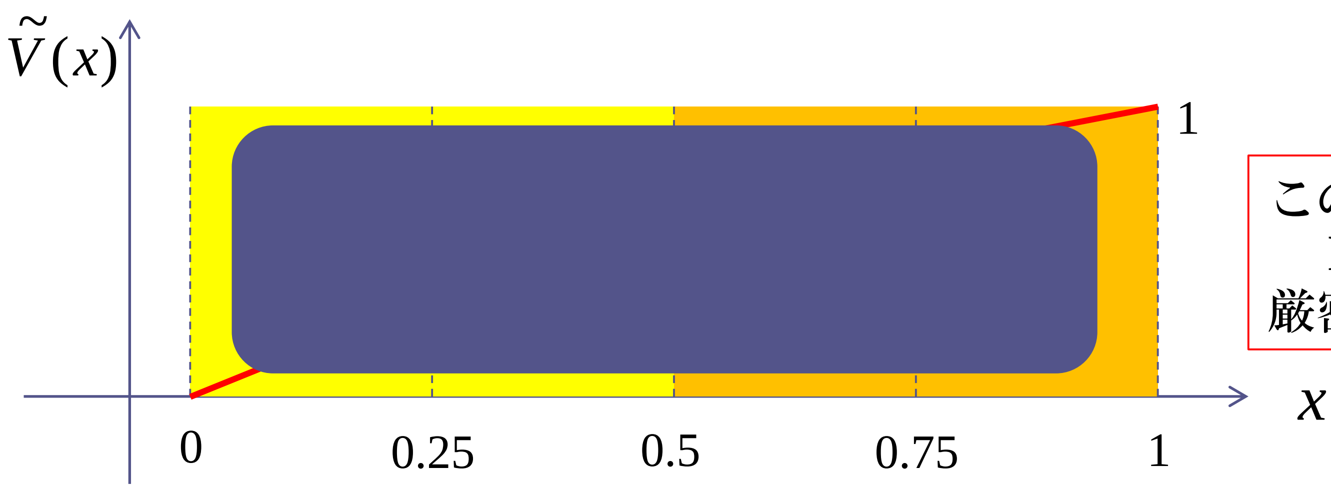
最終的な連立方程式とその解

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\
0 & -4 & 12 & -8 & 0 \\
0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\text{[redacted]}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} \text{[redacted]} \end{pmatrix}
$$

※ 帯（三重対角）行列となっている
⇒ 求解法の選択に重大な影響





この練習問題では，
FEMにより，
厳密解が得られる

係数行列作成のプログラミング１

```
do i = 1, 5 ！行に関するループ
    do j = 1, 5 ！列に関するループ
        A(i, j) = [ (i, j) 成分を計算 ]
    enddo
enddo
```

演算回数・キャッシュヒット率等の観点から効率が良くない場合が多いので，このスタイルはあまり用いられません

係数行列作成のプログラミング 2

```
A(:, :) = 0d0
do element = 1, 4 ！要素（区間）に関するループ
    do i = 1, 2 ！要素行列（2×2）を計算する
        do j = 1, 2
            element_A(i, j) = [ 成分計算 ]
        enddo
    enddo
    [ element_A(:, :) を A(:, :) （の適切な位置に）に加える ]
enddo
```

例えば，要素（区間）1 の element_A(:, :) は，$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

Fortran プログラム具体例

```
real :: x(5) = (/ 0.0,  0.25,  0.5,  0.75,  1.0 /)  ！各点の x 座標値
real :: epsilon(4) = (/ 1.0,  1.0,  2.0,  2.0 /)  ！各要素の誘電率
integer :: node_index(2, 4) = &  ！各要素を構成する節点の表
                & reshape( (/ 1,  2,  2,  3,  3,  4,  4,  5 /), (/2,  4/) )

real :: A(5, 5) = 0.0             ! 係数行列（の初期化）
real :: element_A(2, 2)           ! 要素行列
real :: node(2)                   ! 要素の左右の節点番号
real :: dndx(2)                   ! 補間行列の微係数 dN / dx

integer :: element, i, j
real :: width

!（続く）
```

$$\text{node\_index} = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}} & 3 & 4 \\ 2 & & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

要素 2 の両端点が 2, 3 であることを示す

```
! （承前）
do element = 1, 4 ! 要素に関するループ
    node(1) = node_index( 1, element ) ！左の節点の番号
    node(2) = node_index( 2, element ) ！右の節点の番号
    width = x( node(2) ) – x( node(1) ) ！要素の幅
    dndx(1) = -1.0 / width ！左の節点に関する補間関数の微係数
    dndx(2) = 1.0 / width ！右の節点に関する補間関数の微係数
    do i = 1, 2 ！要素行列を求める
        do j = 1, 2
            element_A(i, j) = epsilon(element) * dndx(i) * dndx(j) * width
        enddo
    enddo

    do i = 1, 2 ！要素行列を係数行列に加える
        do j = 1, 2
            A(node(i), node(j)) = A(node(i), node(j)) + element_A(i, j)
        enddo
    enddo
enddo
```

$$A_{ij} = \int \varepsilon \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

本スライド資料：

http://bit.do/denjiki

小テスト：

https://forms.gle/DkGgz75ceTD7Vms27

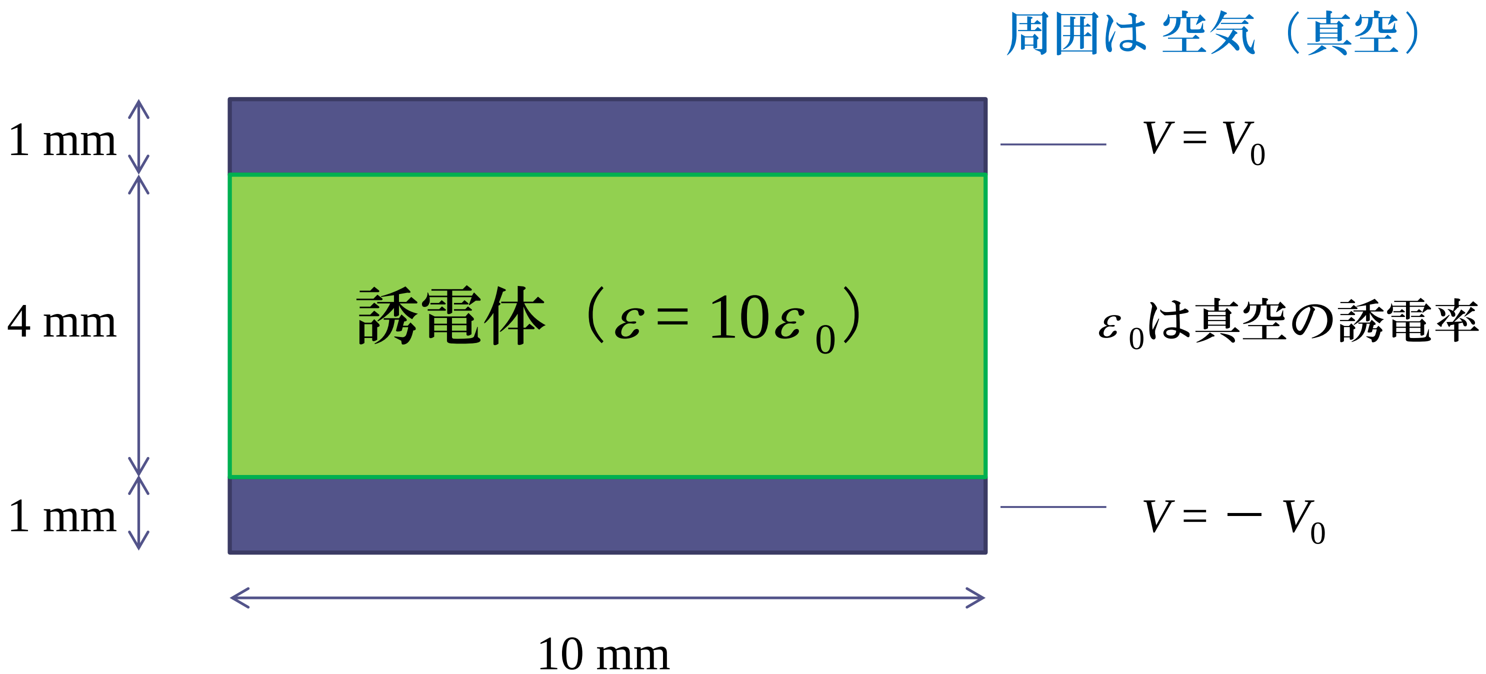
2次元静電界の例題

$$-\nabla \cdot \varepsilon \nabla V = \rho$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \rho \right]$$

V:電位（スカラポテンシャル）
ρ:電荷密度（この例題では0）

例題（平行平板コンデンサ）



平板導体の電位を$\pm V_0$としたときの、電位分布を求める

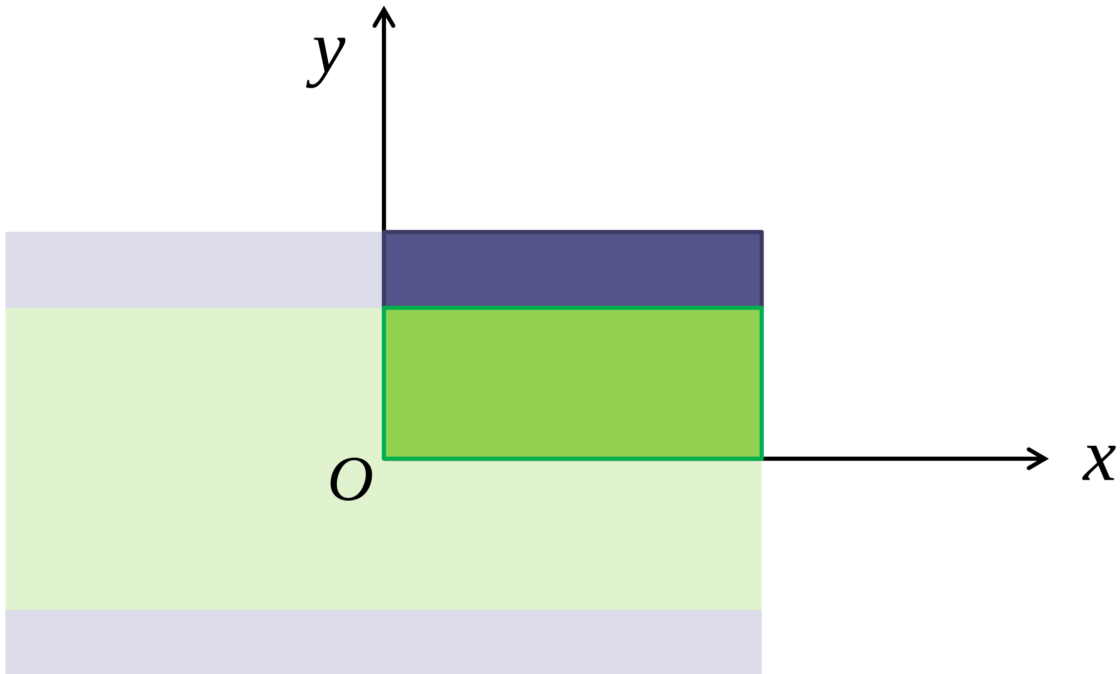
FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

スライド 62-65 に MATLABによるFEMプログラムを掲載
（計算効率を重視したプログラムではありません）

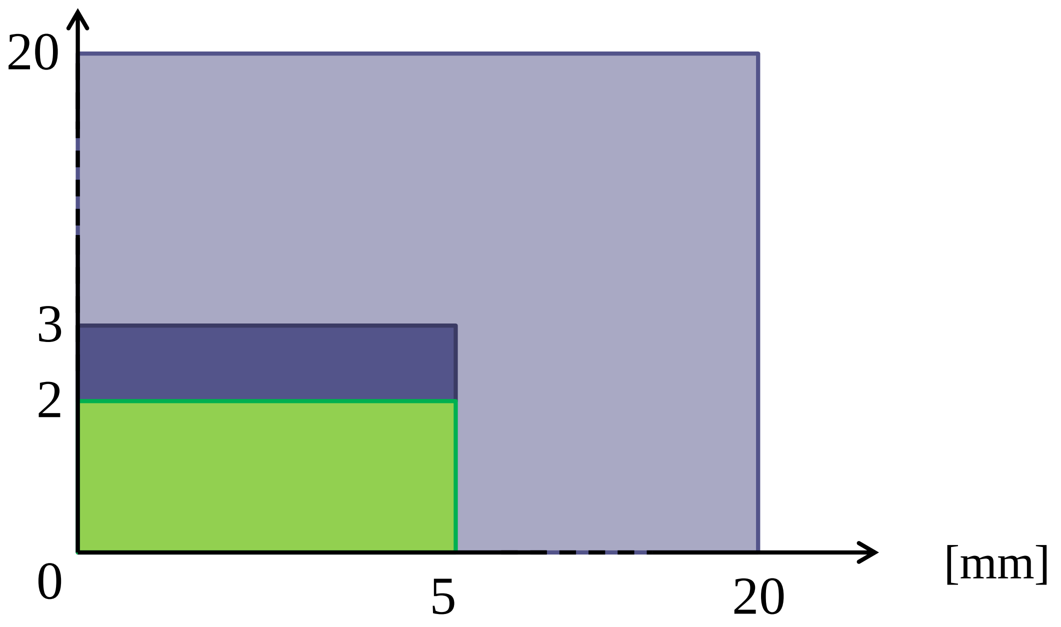
メッシュの設定 1-1

- 解析領域の設定
  - 問題の対称性を利用して、解析領域を限定する



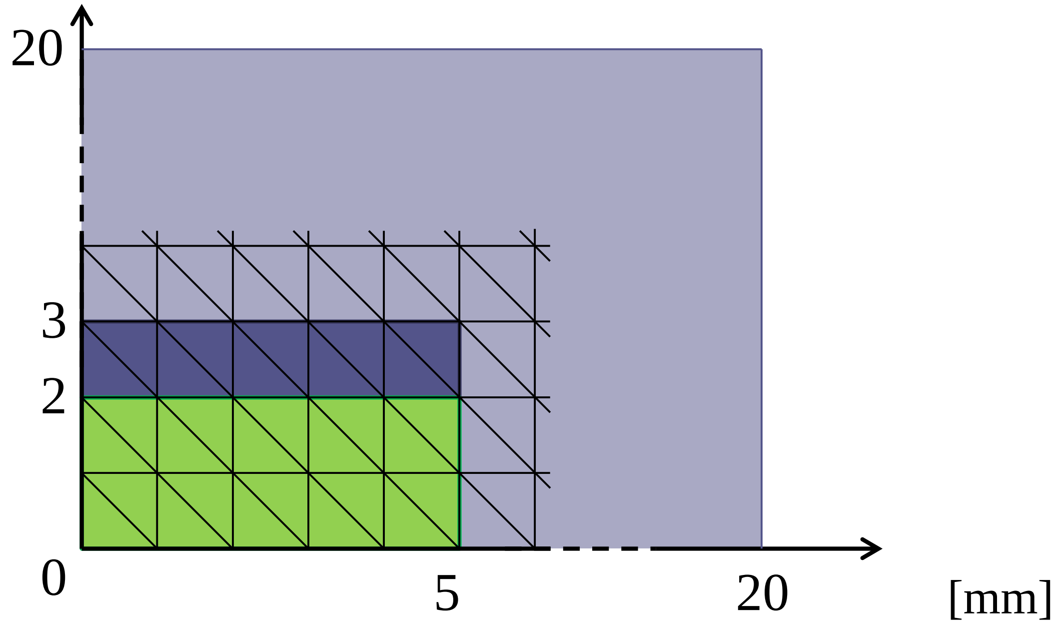
メッシュの設定 1-2

- 解析領域の設定（真空部分も考える）
  - 無限領域の扱いは難しいので、適当な有限領域に打ち切る



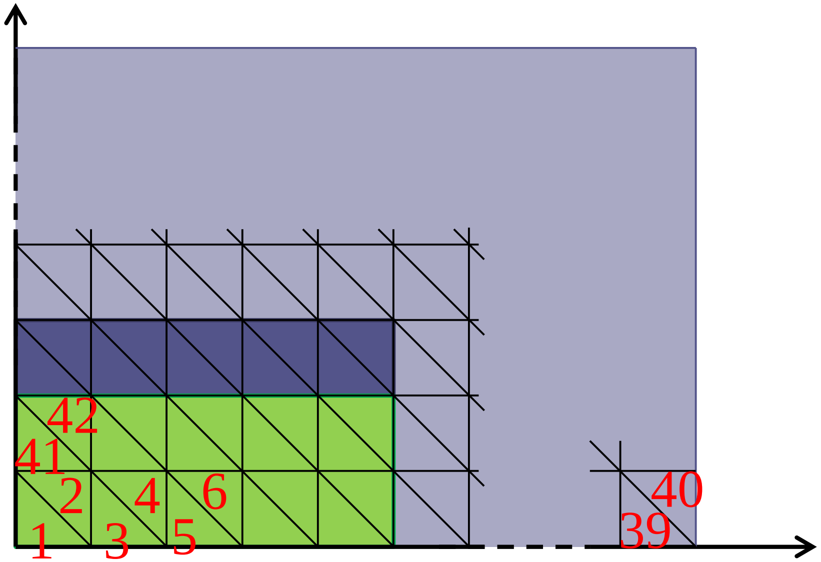
メッシュの設定 2-1

- 解析領域を要素（ここでは三角形）に分割
  - 分割が細かいほど高精度



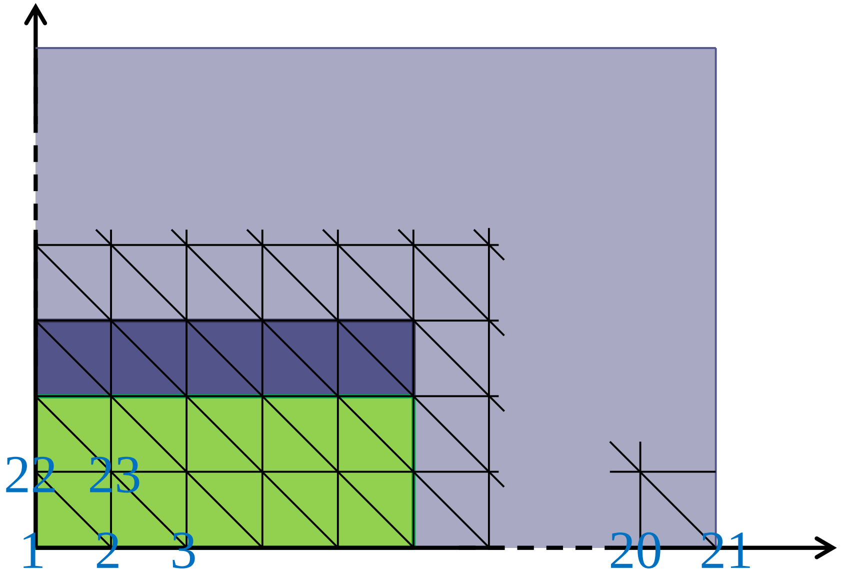
メッシュの設定 2-2

- 要素の番号付け（ここでは辞書式）



メッシュの設定 2-3

- 節点の番号付け（ここでは辞書式）

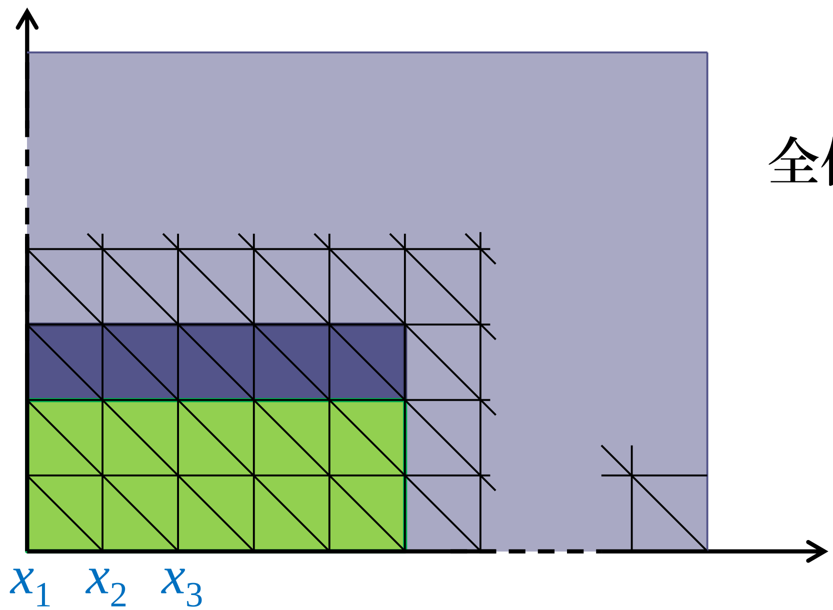


FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

全体方程式の作成 1-1

- 各節点の電位（$x_1, x_2, \ldots$）を未知数とする

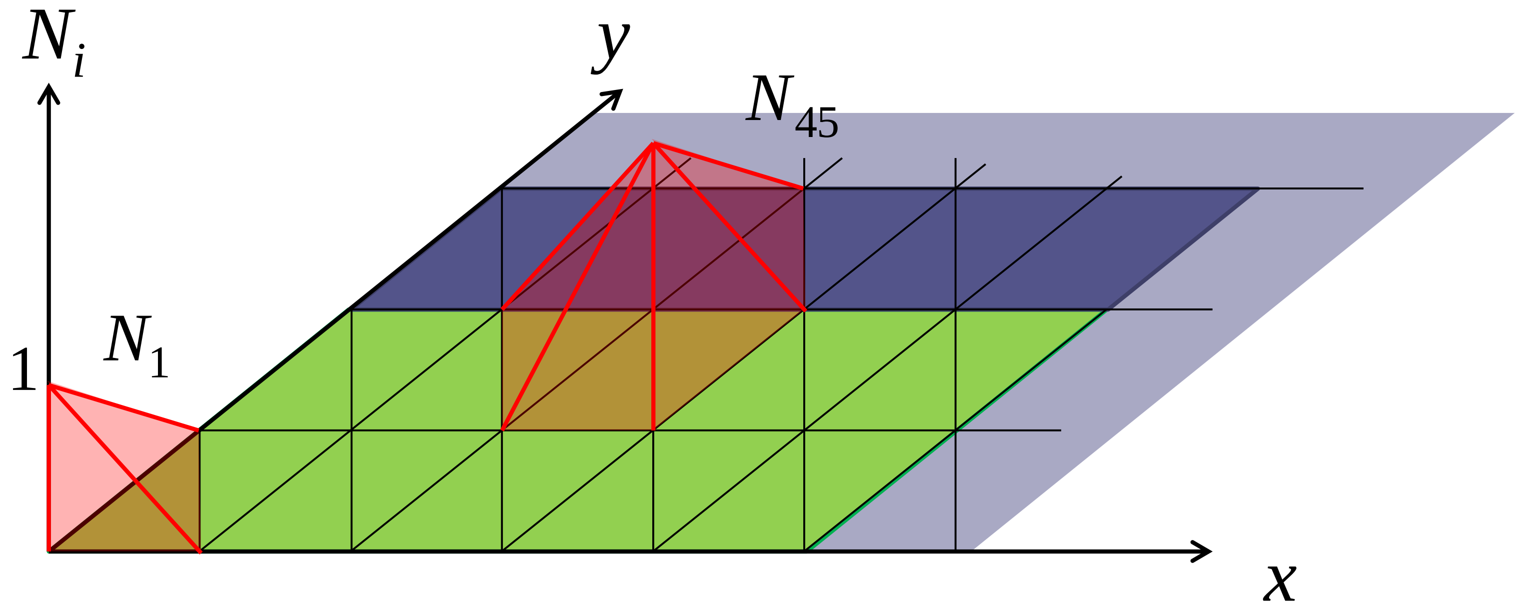


全体方程式の未知ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{441} \end{pmatrix}$$

全体方程式の作成 1-2

- V を補間関数で近似する　$\tilde{V} = \sum x_i N_i(x, y)$



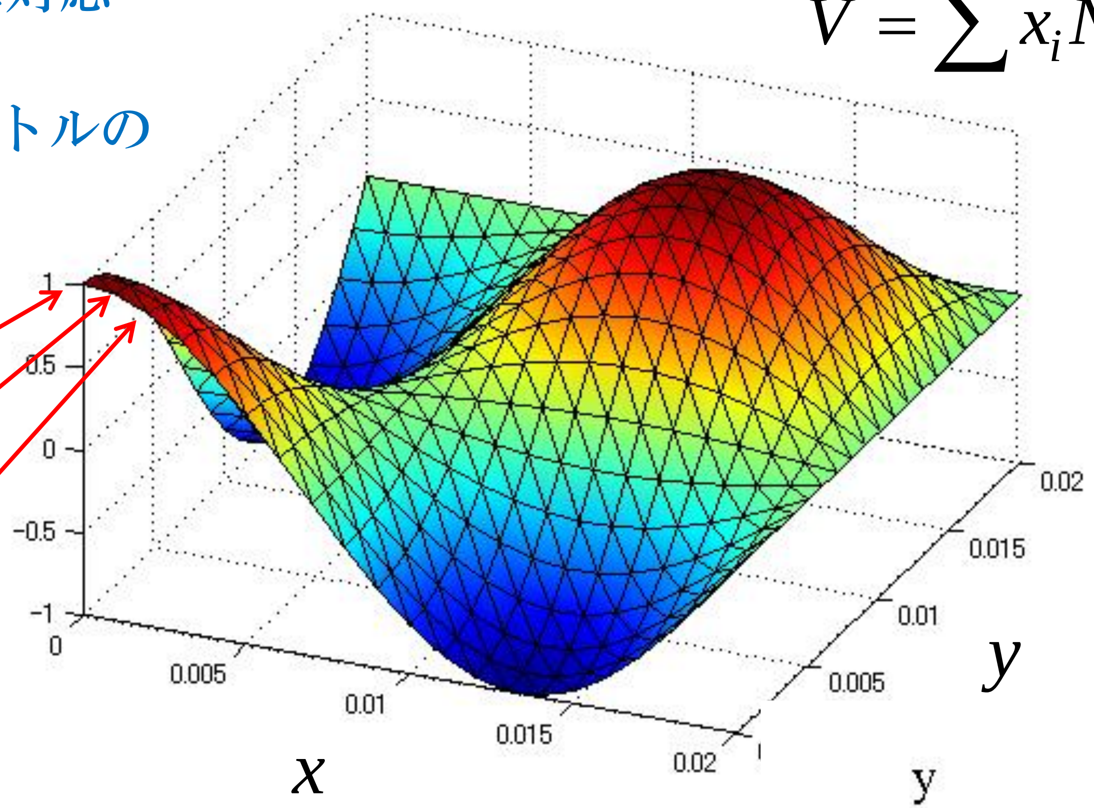
※ １次元の時のp. 18, 19 に対応

未知ベクトルと有限要素解の対応

※ １次元の時のp. 20 に対応
ただし、
「2次元の関数」とベクトルの
対応であることに注意

$$\tilde{V} = \sum x_i N_i$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.97 \\ 0.89 \\ 0.76 \\ \vdots \end{pmatrix}$$



※ 1次元の時のp. 21に対応

全体方程式の作成 2-1

- ガラーキン有限要素法
  - 補間関数を乗じて領域全体で積分する形で立式

$$-\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla V\right)=\rho$$

$$\Downarrow$$

$$-\int N_i\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla V\right)dS=\int N_i\rho dS\qquad (i=1,2,\ldots)$$

※ １次元の時のp. 21 に対応

全体方程式の作成 2-2

- 微分の階数を一つ落とす（弱形式）

$$-\int N_i \nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla V \right) dS = \int N_i \rho dS$$

ベクトル解析の公式等を利用（付録参照）

$$\int \varepsilon \nabla N_i \cdot \nabla V dS - \oint \varepsilon N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx \right) = \int N_i \rho dS$$

解析領域を囲む境界に関する積分

※ １次元の時のp. 22, 23 に対応

全体方程式の作成 2-3

- 全体方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の成分表示

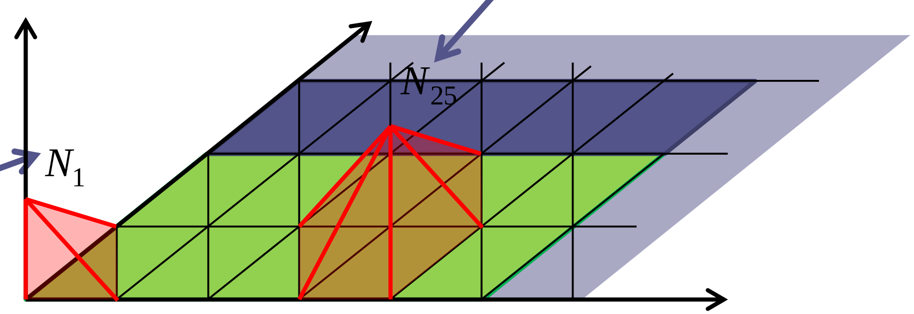
$$A_{ij} = \int \varepsilon \nabla N_i \cdot \nabla N_j dS \quad \left(= \int \varepsilon \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dS \right)$$

$$b_i = \int N_i \rho dS$$

（この例題では $\rho = 0$）

領域内部のN_i に関する式には、境界積分は関係ない

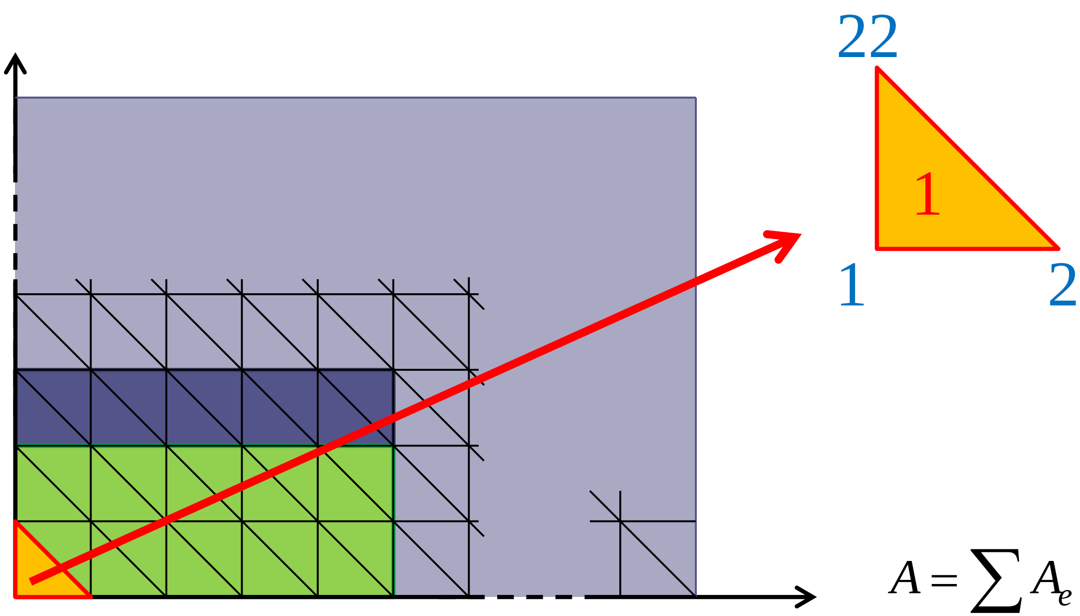
境界のことは後で考える



※ １次元の時のp. 25 に対応

全体方程式の作成 2-4

- 要素ごとに積分計算して、重ね合わせる



$$A_e = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

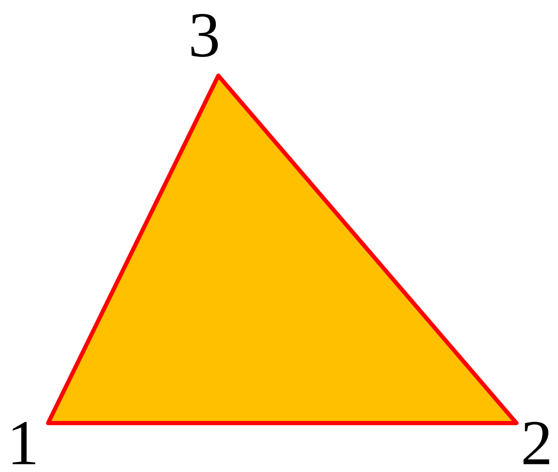
$$A = \sum A_e = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * & \cdots \\ * & * & & * & \\ \vdots & & \ddots & & \\ * & * & & * & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & & 22 & \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ 22 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

参考：要素行列の具体的な値（三角形一次補間関数の場合）

$$A_e = \frac{\varepsilon}{4S}\begin{pmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ \text{sym.} & & b_3b_3 + c_3c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$$



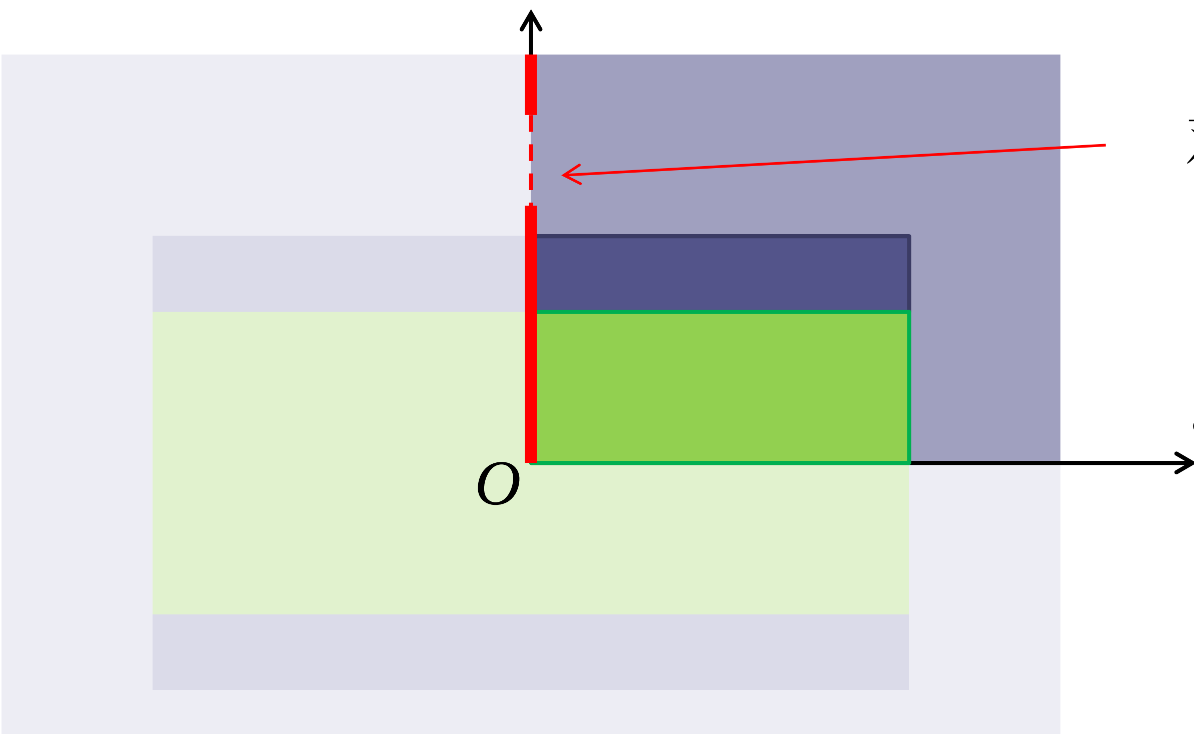
（x_i, y_i は節点 i の x, y 座標）

FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

境界条件の設定 1

- 自然境界条件（何もしなくてよい）



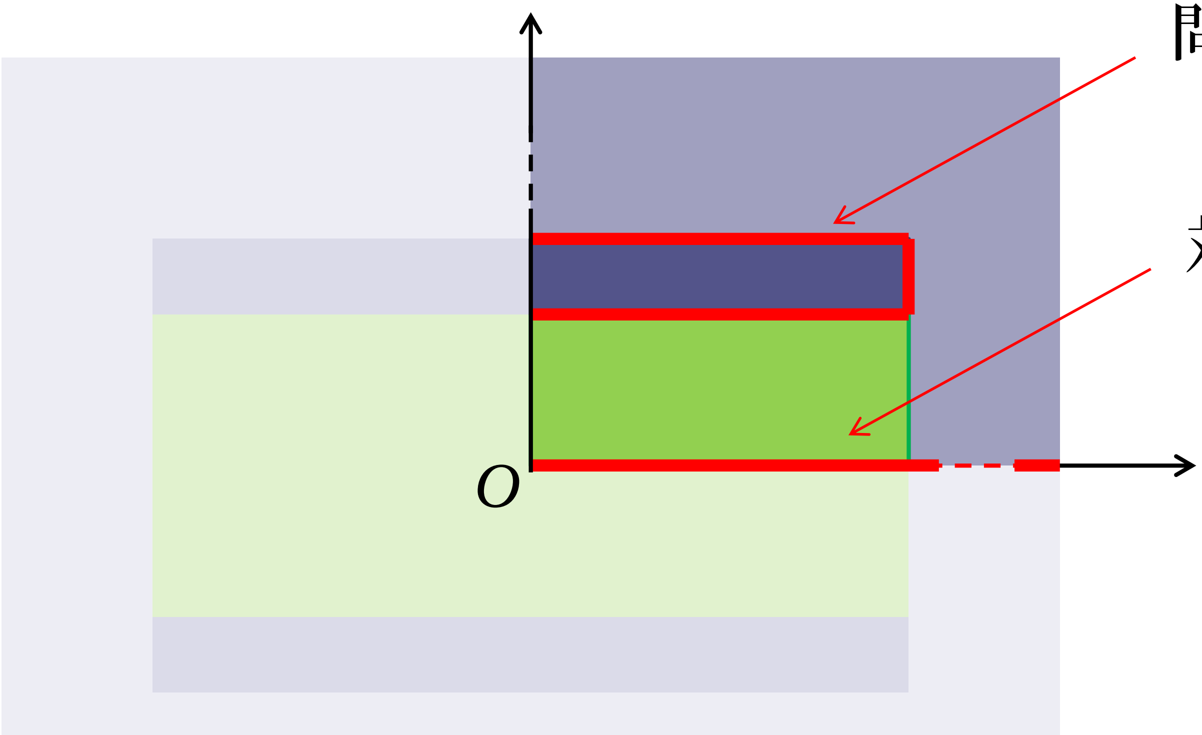
対称性から $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$

$$\int \varepsilon N_i \left(\frac{\partial V}{\partial x} dy - \frac{\partial V}{\partial y} dx \right) = 0$$

境界積分 = 0

境界条件の設定 2-1

- 基本境界条件



問題設定から $V=V_0$

対称性から $V=0$

境界条件の設定 2-2

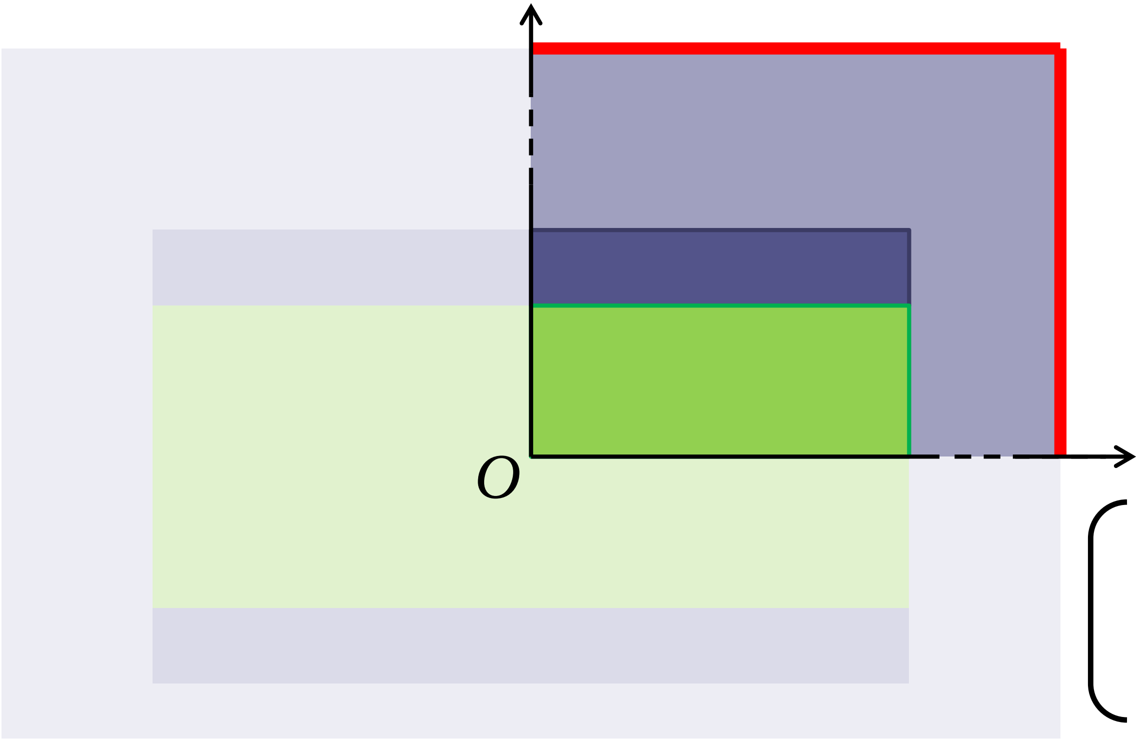
- 基本境界上の節点に関する式を，境界条件で置き換える

$$
\begin{array}{llll}
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1N}x_N = b_1 \\
\hline
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & = b_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
1\cdot x_1 & +0\cdot x_2 & \cdots & +0\cdot x_N = 0 \\
\hline
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & & = b_2 \\
\vdots & & \ddots & \vdots
\end{array}
$$

境界条件の設定 3

- 遠方の扱いは容易でないがここでは、単に自然境界とする。（解析領域を広く取っていれば、それほど悪くない近似）



※この例題の解析領域は、簡単のために狭くしています。もっと広くとらないと精度は良くありません。

FEMの流れ

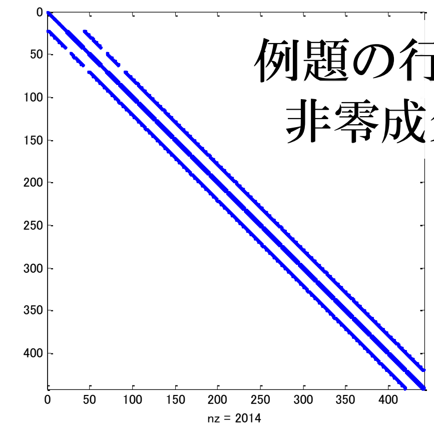
1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

全体方程式の求解　$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$

（計算コストの観点では、通常最も重い部分）

- 有力な解法
  - ガウス消去などの直接法
  - SOR, 共役勾配法などの反復法

いずれにしても、大規模問題では A の疎行列性（ほとんどの成分が 0）の利用が不可欠



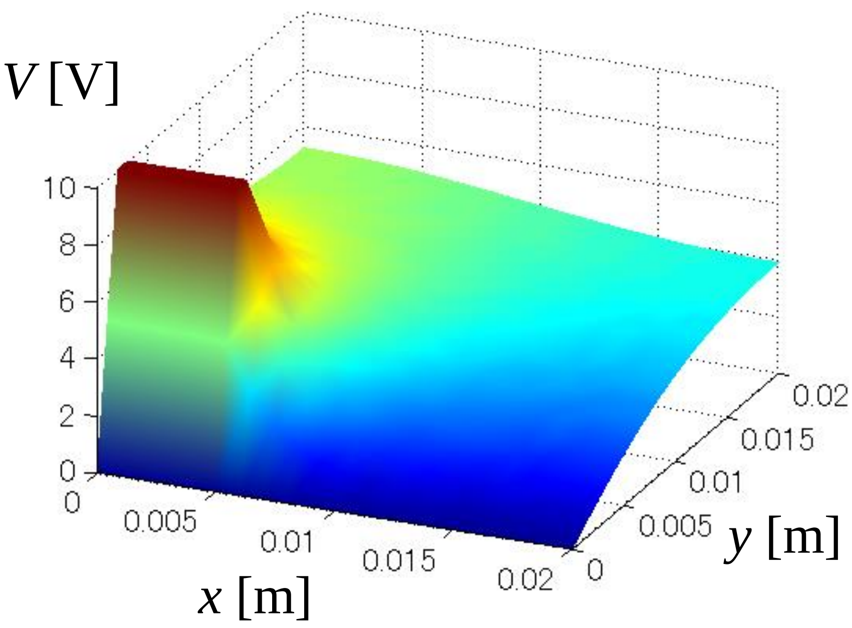
例題の行列の非零成分

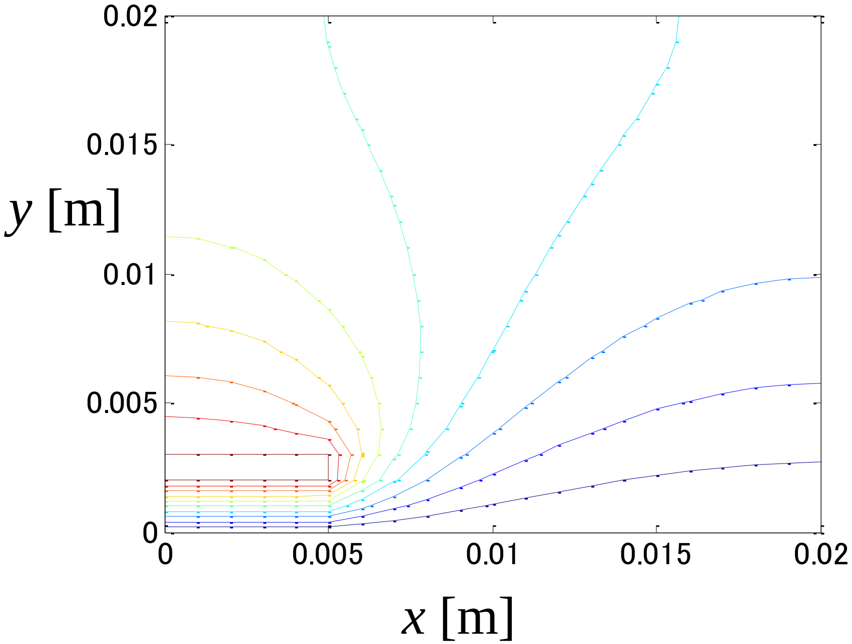
例題のMATLABプログラムでは、
直接法（疎行列ライブラリUMFPACK）を利用

FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

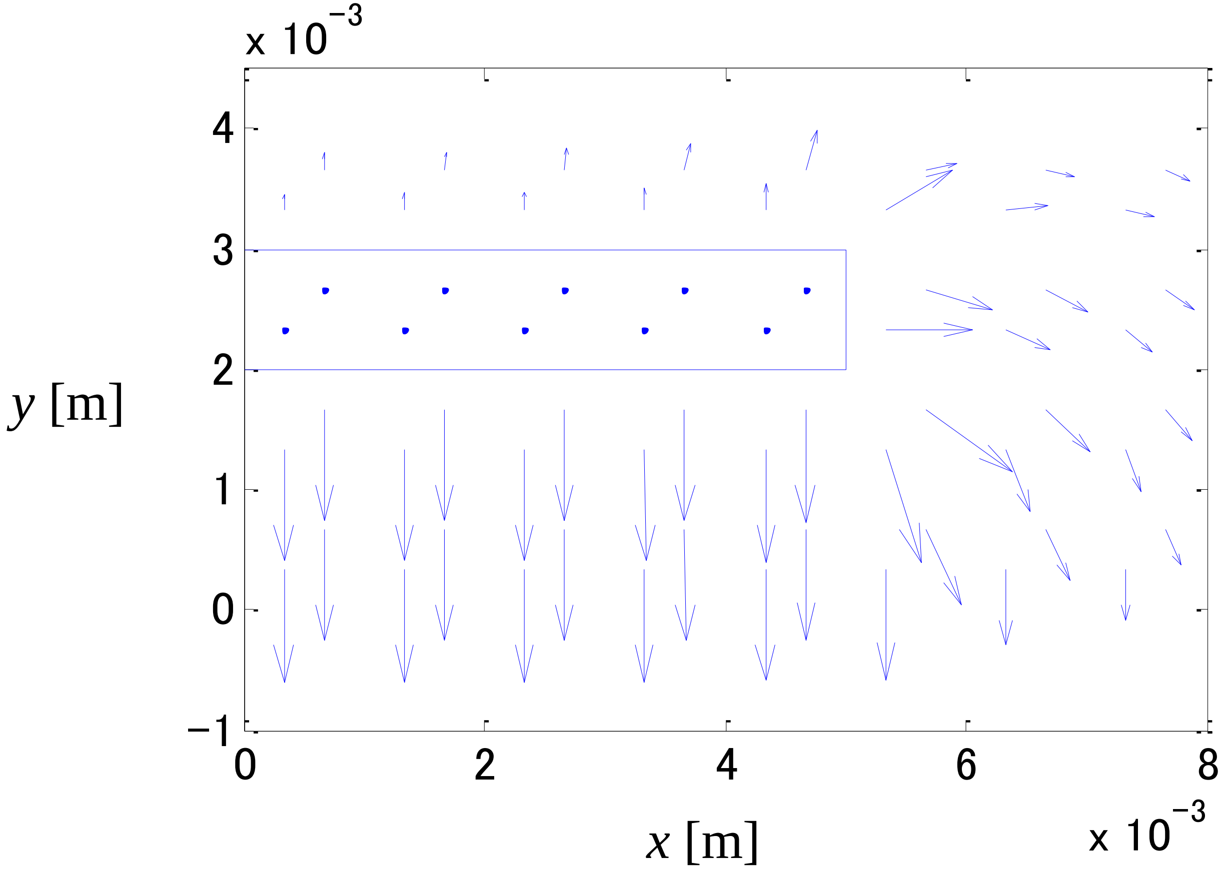
結果の表示（電位 V）





等電位線

結果の表示（電界の強さ）



2次元静電界FEMのまとめ

- メッシュ（要素分割）の設定
  - 対称性の利用
- 全体方程式の作成
  - 補間関数による近似解表現
  - ガラーキン有限要素法（補間関数を乗じて積分）
- 境界条件の設定
  - 自然境界、基本境界
- 全体方程式の求解
  - 直接法、反復法（疎行列性の利用は重要）

例題のためのMATLABプログラム

```
%% パラメータ
epsilon_0 = 8.854188 * 10^(-12);    % 真空の誘電率
epsilon_r(1) = 1;                   % 材料1（真空）の比誘電率
epsilon_r(2) = 10;                  % 材料2（誘電体）の比誘電率
V_0 = 10.0;                         % 電極電位
%% メッシュ分割
xmin = 0;  xmax = 0.02;  noex = 20;          % [xmin xmax]をnoex分割する
ymin = 0;  ymax = 0.02;  noey = 20;          % [ymin ymax]をnoey分割する
xaxis = linspace(xmin, xmax, noex + 1);      % メッシュのx座標
yaxis = linspace(ymin, ymax, noey + 1);      % メッシュのy座標
noe = 2 * noex * noey;                       % 三角形要素の数
nond = (noex + 1) * (noey + 1);              % 節点の数
%% 材料の配置
material = ones(2, noex, noey);     % 真空
material(:, 1:5, 1:2) = 2;          % 真空以外の材料の設定
```

```
%% 節点の座標・番号の設定
% 節点座標の設定
[x_node, y_node] = ndgrid( xaxis, yaxis );
% 各要素を構成する節点の番号（x, yの辞書式順）
element2node = zeros(3, 2, noex, noey);
for kx = 1:noex
    for ky = 1:noey
        % 左下の三角形
        element2node(1, 1, kx, ky) = kx + (ky - 1) * (noex + 1);
        element2node(2, 1, kx, ky) = kx + 1 + (ky - 1) * (noex + 1);
        element2node(3, 1, kx, ky) = kx + ky * (noex + 1);
        % 右上の三角形
        element2node(1, 2, kx, ky) = kx + 1 + (ky - 1) * (noex + 1);
        element2node(2, 2, kx, ky) = kx + 1 + ky * (noex + 1);
        element2node(3, 2, kx, ky) = kx + ky * (noex + 1);
    end
end
element2node = reshape(element2node, 3, noe);
```

```
%% 係数行列の計算
imat = ones(9, noe);  jmat = ones(9, noe);  mat = zeros(9, noe);
% 要素行列を計算する
for  i = 1:noe
    x = x_node( element2node(:, i) ); % 要素節点の x座標
    y = y_node( element2node(:, i) ); % 要素節点の y座標
    epsilon = epsilon_0 * epsilon_r( material(i) ); % 要素の誘電率
    a = [ x(2)*y(3)-x(3)*y(2);  x(3)*y(1)-x(1)*y(3);  x(1)*y(2)-x(2)*y(1) ];
    b = [ y(2)-y(3);  y(3)-y(1);  y(1)-y(2) ];
    c = [ x(3)-x(2);  x(1)-x(3);  x(2)-x(1) ];
    S = sum(a) / 2.0; % 要素の面積
    A_e = (b * b' + c * c') * epsilon / (4.0 * S) ; % 要素行列
    imat(:, i) = repmat( element2node(:, i), 3, 1 );
    jmat(:, i) = reshape( repmat( element2node(:, i), 1, 3 )' , 9, 1 );
    mat(:, i) = A_e(:);
end
% 係数行列は、要素行列の重ね合わせ
A = sparse(imat, jmat, mat);
```

```
%% 境界条件の設定
earth = 1:noex+1;  v_0 = [43:48 64:69]; % 電位0, V_0の条件を与える節点
dirichlet = [earth v_0];
A(dirichlet, :) = 0.0; % 固定境界の行を全て零に
A(dirichlet, dirichlet) = speye( length( dirichlet ) ); % 対角成分は1に
b = zeros(nond, 1);
b(v_0) = V_0;

%% 求解（内部ではUMFPACKが使用される）
x = A ¥ b;

%% 電位表示
[X, Y] = meshgrid( xaxis, yaxis );
Z = reshape(x, noex + 1, noey + 1)' ;
figure;  surf(X, Y, Z);  shading interp
figure;  contour(X, Y, Z) % 等高線
```

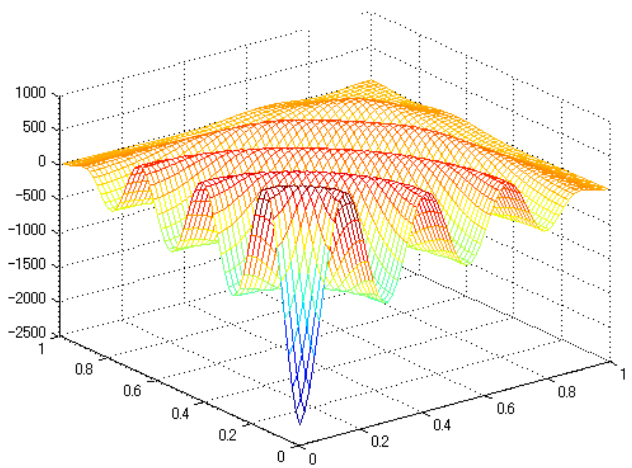
今日の内容

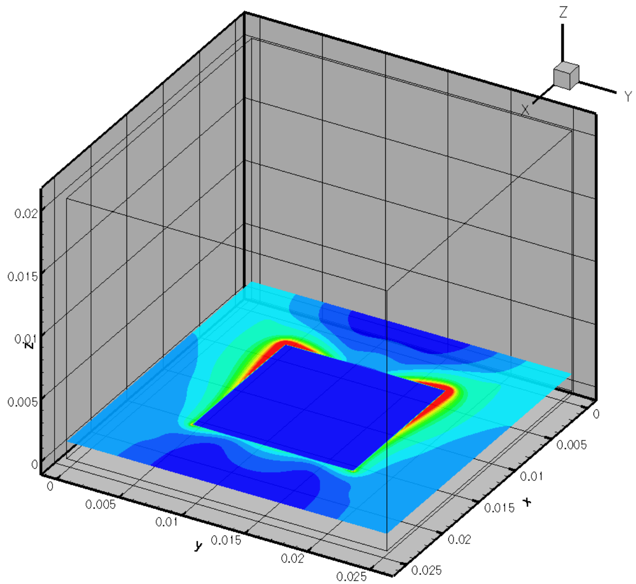
- 前提の確認
  - マクスウェル方程式
- 電磁界 FEM の基礎 I
  - １次元の練習問題
  - ２次元静電界 FEM
- 電磁界 FEM の基礎 II
  - ベクトルポテンシャルの導入
  - ベクトル変数の扱い（→辺要素）
- 辺要素 FEM
  - ベクトル補間関数
  - ３次元静磁界 FEM

具体例に沿ってFEMによる電磁界解析の概要を説明

手短に

電磁界FEMの基礎 II





マクスウェル方程式

$$
\begin{cases}
\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & \text{（3成分）} \\
\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & \text{（3成分）} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho & \text{（1成分）} \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & \text{（1成分）}
\end{cases}
$$

構成方程式（媒質の特性）

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}
\end{cases}
$$

式の数は８
独立な未知数の数は、６（例えば $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$）

ベクトルポテンシャルの導入

$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を満たすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を導入

（厳密な議論は省くが $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ から存在が保証される）

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0$$

スカラポテンシャル ϕ を以下で定義する

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

cf., 静電界の場合 $\boldsymbol{E} = -\nabla \phi$

$\boldsymbol{A}, \phi$についてマクスウェル方程式を整理

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] \\ -\nabla \cdot \left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] = \rho \end{cases}}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

式の数 ＝ 未知数の数 ＝ 4

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \phi$$

電磁界FEMでも、$\boldsymbol{A}, \phi$を未知数に選ぶことが多い

（他に、$\boldsymbol{E}$を未知数とする等も可能）

電流密度の項について

（既知の項と未知の項に分ける）

$$
\begin{cases}
\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] \\
-\nabla \cdot \left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] = \rho
\end{cases}
$$

$$
\boldsymbol{J} = \underline{\boldsymbol{J}_0} + \underline{\sigma \boldsymbol{E}}
$$

伝導電流密度（オームの法則）
σは、媒質の導電率

強制電流密度
（既知のソース項）

複素数近似

$$\begin{cases} \nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J}_0-\sigma\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi\right)-\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi\right)\right] \\ -\nabla\cdot\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\phi\right)\right]=\rho \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J}_0-(\sigma+j\omega\varepsilon)(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi) \\ -\nabla\cdot\varepsilon\left(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi\right)=\rho \end{cases}$$

全ての変数が正弦波状に
変化する場を仮定（j は虚数単位）

$$\boldsymbol{E}=\mathrm{Re}\left(\underline{\dot{\boldsymbol{E}}}e^{j\omega t}\right)$$

$$\boldsymbol{B}=\mathrm{Re}\left(\underline{\dot{\boldsymbol{B}}}e^{j\omega t}\right)$$

$$\vdots$$

複素数

FEMの未知数も複素数

電磁界FEMの実用上の分類

（複素数近似を行わない場合も同様）

高周波解析

$$\begin{cases} \nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J}_0-\underline{\left(\sigma+j\omega\varepsilon\right)}\left(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi\right) \\ -\nabla\cdot\varepsilon\left(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi\right)=\rho \end{cases}$$

準定常近似
（金属では $\sigma/\varepsilon > 10^{17}$[rad/s]）

低周波解析

$$\begin{cases} \underline{\nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J}_0-\sigma\left(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi\right)} \\ \underline{-\nabla\cdot\varepsilon\left(j\omega\boldsymbol{A}+\nabla\phi\right)=\rho} \end{cases}$$

静解析（$\omega=0$）

静磁界解析

$$\nabla\times\left(\mu^{-1}\nabla\times\boldsymbol{A}\right)=\boldsymbol{J}_0$$

静電界解析

$$-\nabla\cdot\left(\varepsilon\nabla\phi\right)=\rho$$

（方程式を分離できるので、
伝導電流はソース項に含めて考えてよい）

ベクトル変数の扱い

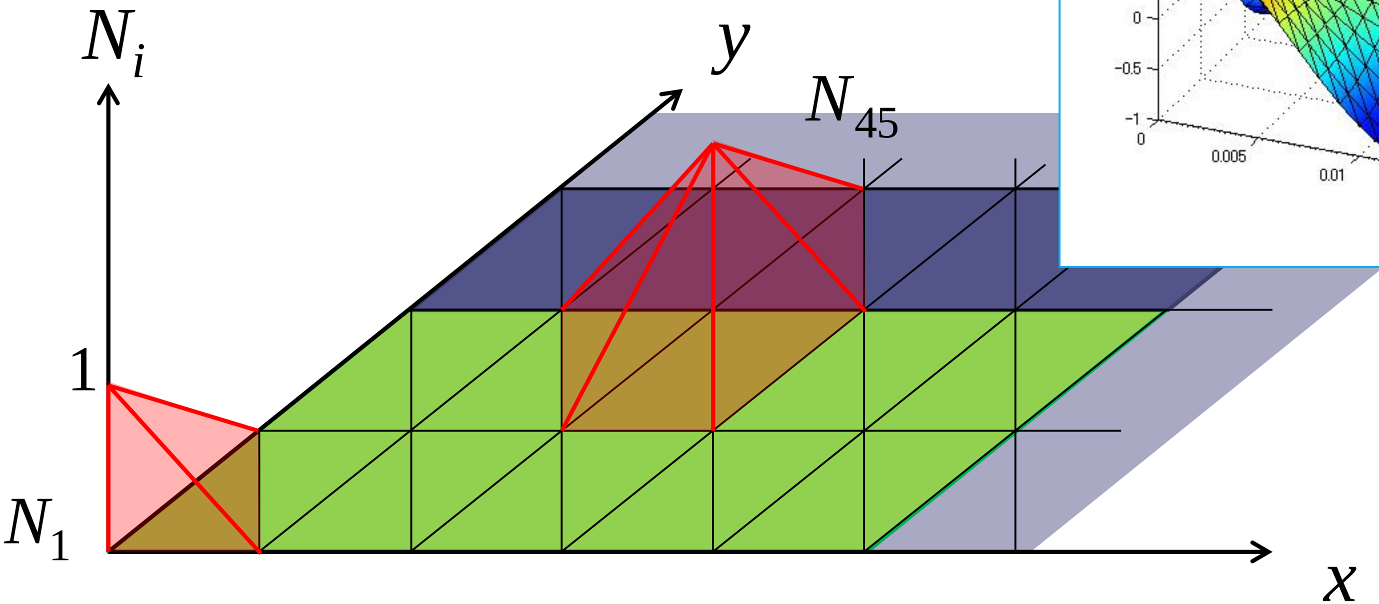
- 静電界解析以外は、ベクトルが変数となる

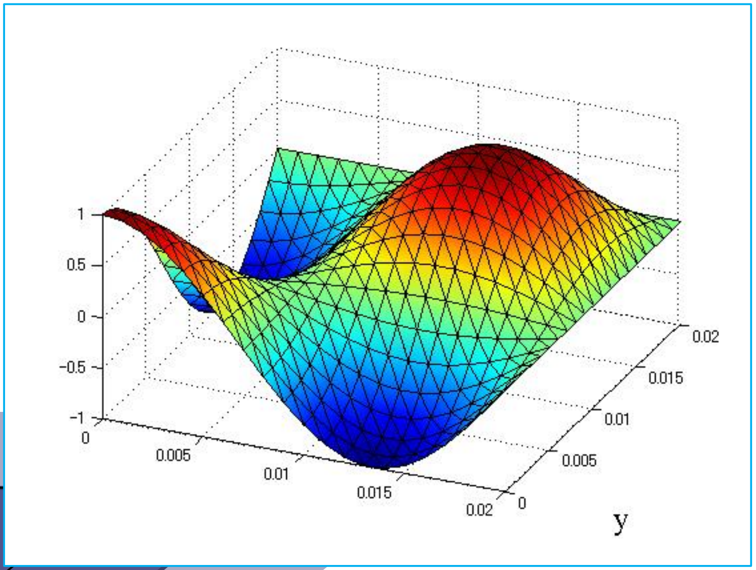
$\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A} \right)$ の離散化がキーポイントに

（$\boldsymbol{E}$ を未知数にとるときは、$\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{E} \right)$ の形）

スカラポテンシャルの近似

$$\tilde{V} = \sum x_i N_i$$



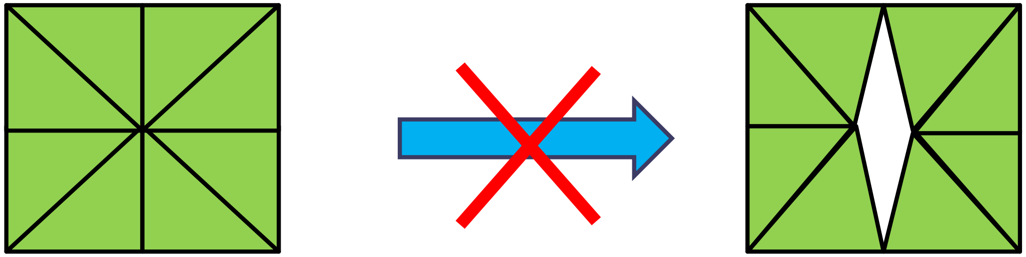


弾性解析（変位が未知数）の場合

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum u_{xi} N_i \\ \sum u_{yi} N_i \end{pmatrix}$$

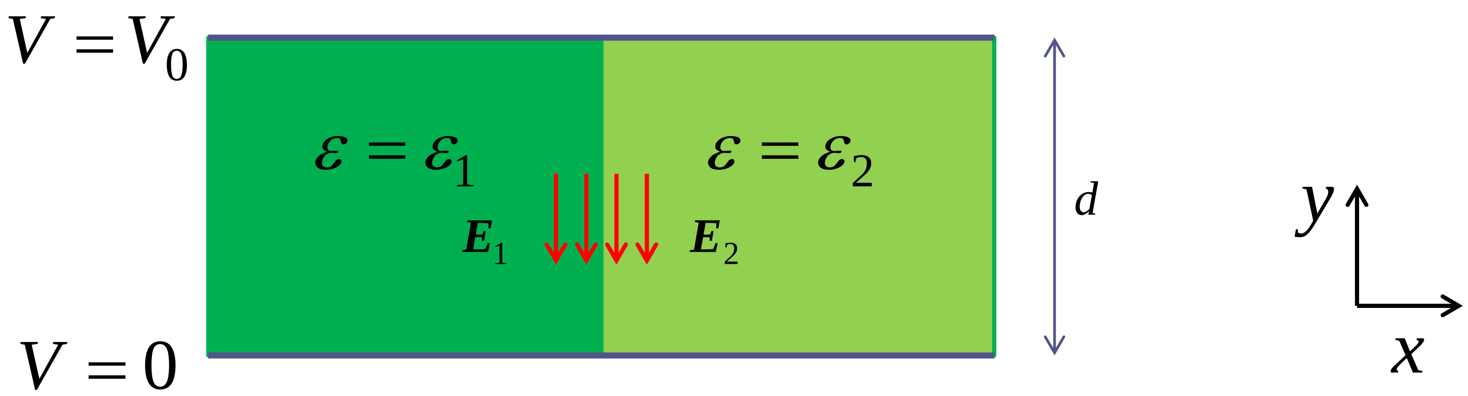
成分ごとに N_i で補間すればＯＫ

（変位は x, y について連続）



電磁界では？

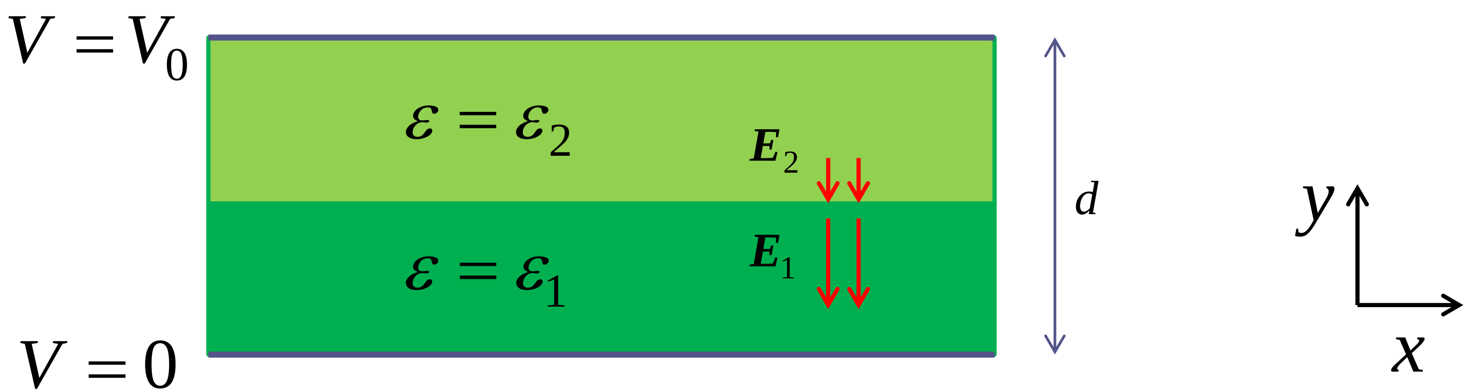
基本的なシチュエーション1



$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_2 = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \left(0, \quad -\frac{V_0}{d}, \quad 0 \right)$$

媒質間境界で E_y が連続

基本的なシチュエーション2

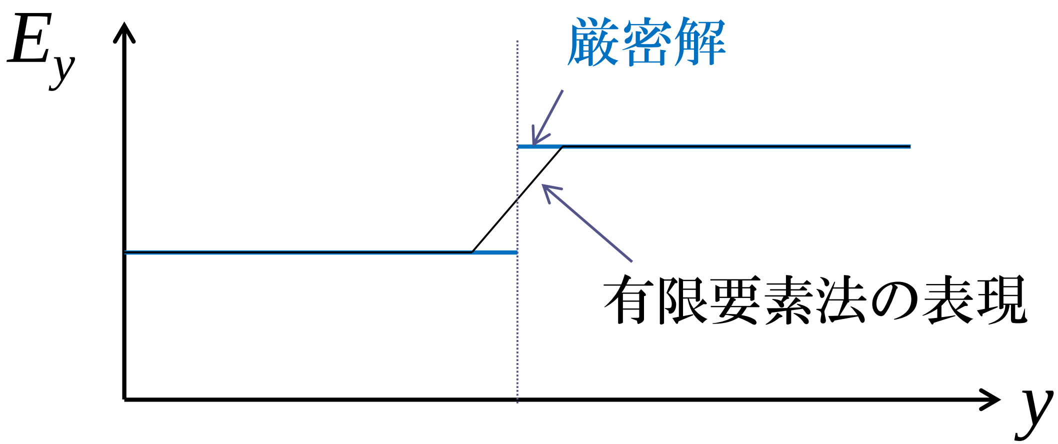


$$\boldsymbol{E}_1=\left(0,\quad -\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{V_0}{d},\quad 0\right),\quad \boldsymbol{E}_2=\left(0,\quad -\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{V_0}{d},\quad 0\right)$$

媒質間境界で E_y が不連続

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum e_{xi} N_i \\ \sum e_{yi} N_i \end{pmatrix}$$ とするのでは、<u>不連続を表現できない</u>

（メッシュを細かくしても一様収束はしない）



ここまでのまとめ

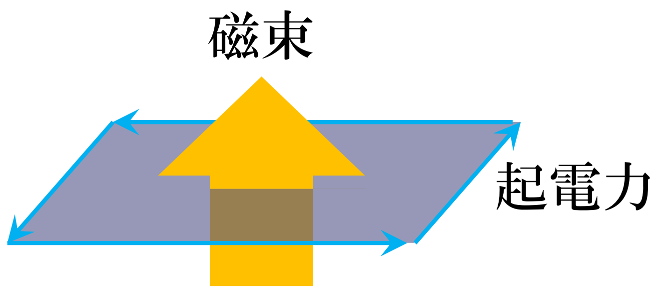
- $\boldsymbol{A}, \phi$で表したマクスウェル方程式

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J} - \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] \\ -\nabla \cdot \left[\varepsilon\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \nabla \phi\right)\right] = \rho \end{cases}$$

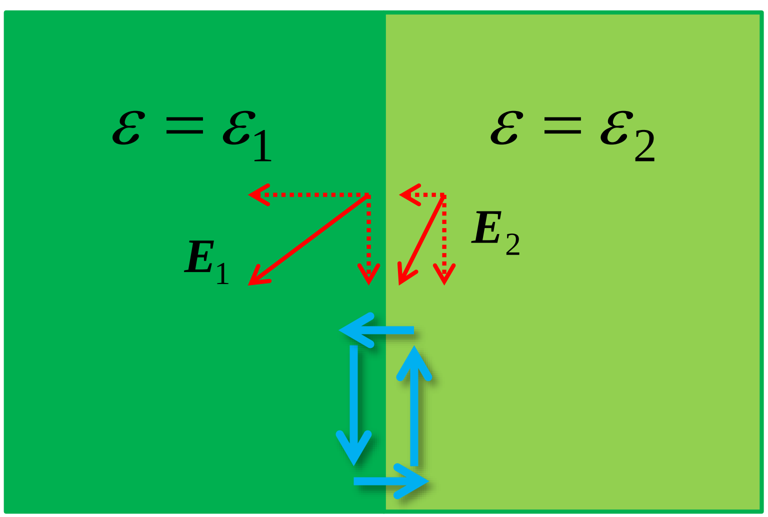
- ベクトル変数の扱い
  - 媒質間の不連続の表現が問題

（補足）

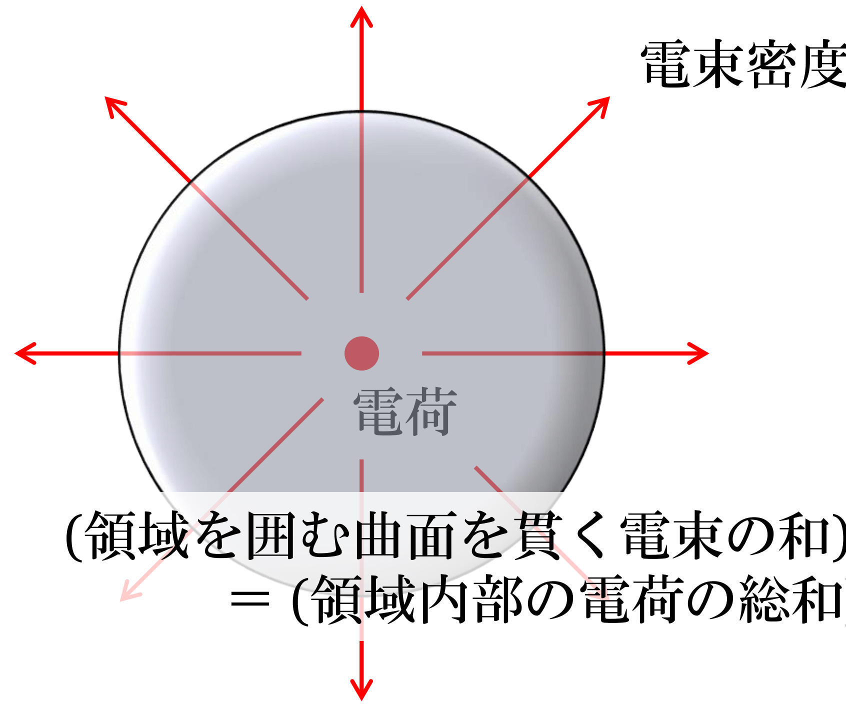
ファラデーの法則（積分形）



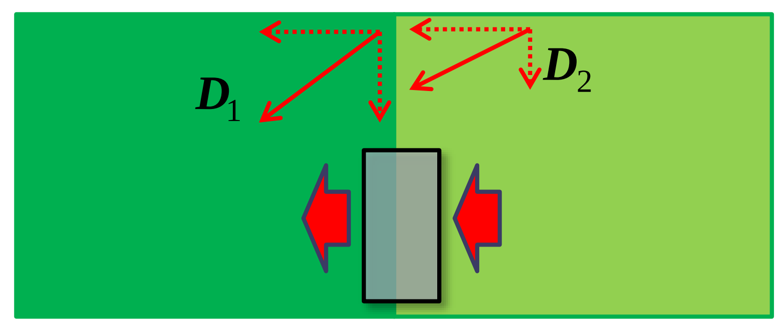
(閉回路に誘導される起電力)
$= -\frac{d}{dt}$(鎖交する磁束)



ガウスの法則（積分形）

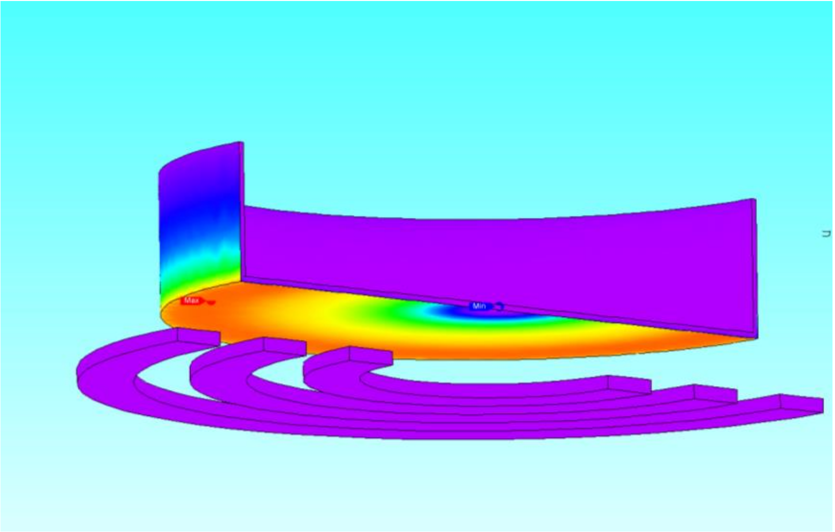


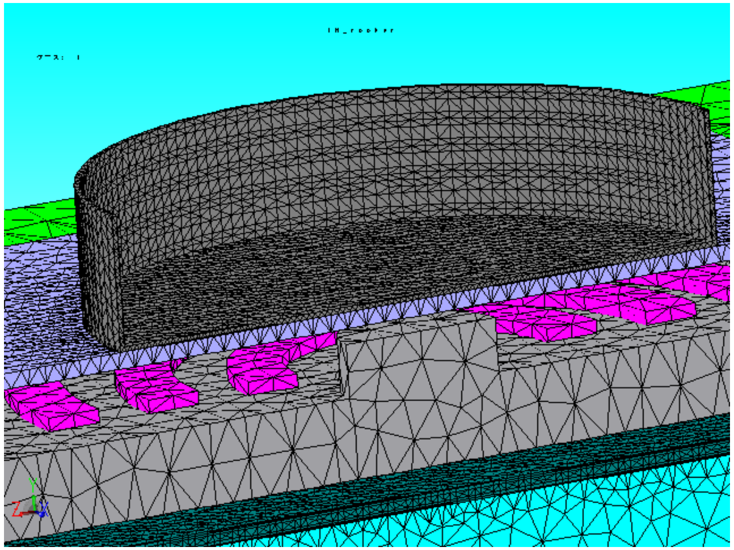
(領域を囲む曲面を貫く電束の和)
= (領域内部の電荷の総和)



<u>適切な積分路・積分面を考えれば，連続性が導かれる</u>

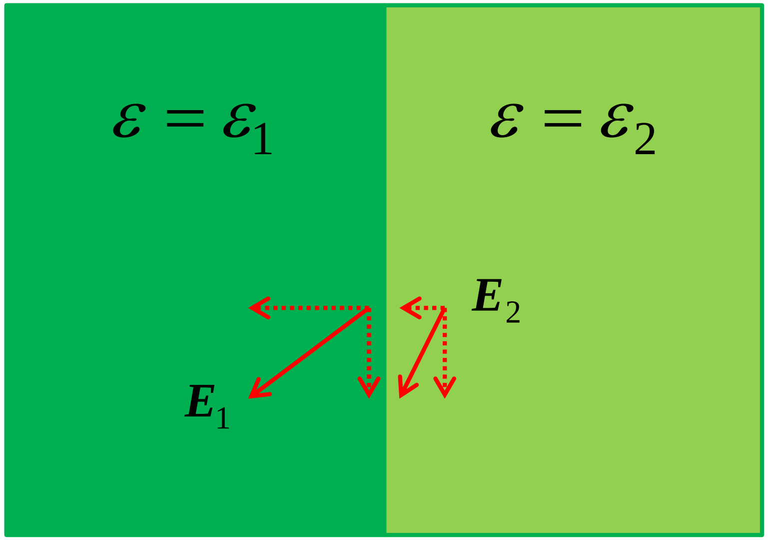
辺要素FEM



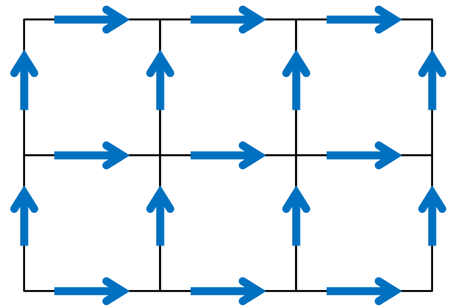


$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}$ 等に要求される条件

- 媒質境界で、接線成分が連続
  （法線成分の「不連続」は許容されるべき）



各辺における接線成分を未知数にとる

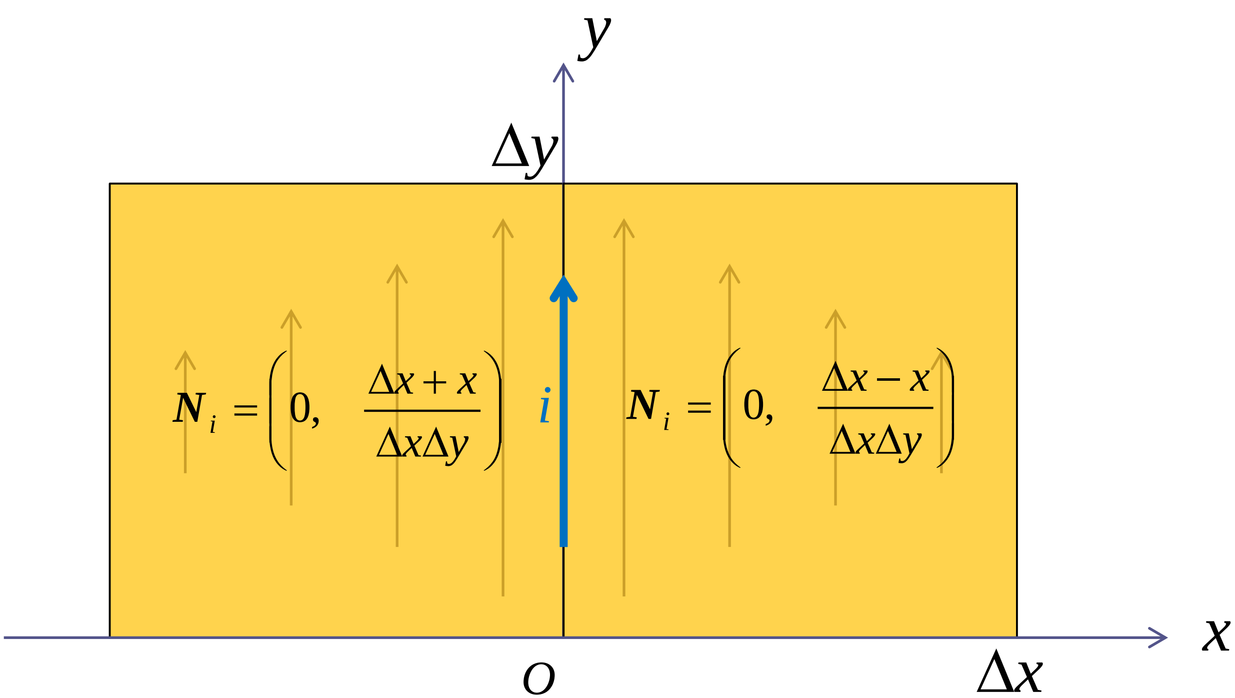


$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum e_{xi} N_i \\ \sum e_{yi} N_i \end{pmatrix}$$ ではなく　$\boldsymbol{E} = \sum e_i \boldsymbol{N}_i$ の形に

$\boldsymbol{N}_i$: ベクトル補間関数（辺要素）

長方形辺要素

※ 三角形（四面体）辺要素は，理論的にも実用的にも重要だが，導出の手間が大きいため付録とする

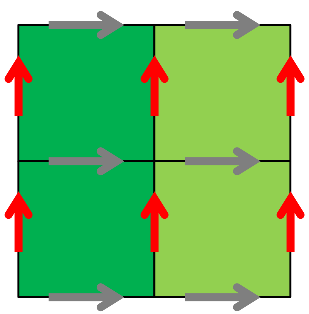


$\boldsymbol{N}_i$: 辺 i に沿って線積分した値が 1
その他の辺に沿った（線積分した）値は 0

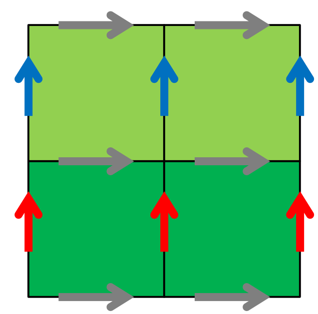
$$\boldsymbol{E} = \sum e_i \boldsymbol{N}_i$$

$$e_i = \begin{cases} E & \text{（赤の辺）} \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$

$$e_i = \begin{cases} E_1 & \text{（赤の辺）} \\ E_2 & \text{（青の辺）} \\ 0 & \text{（その他）} \end{cases}$$



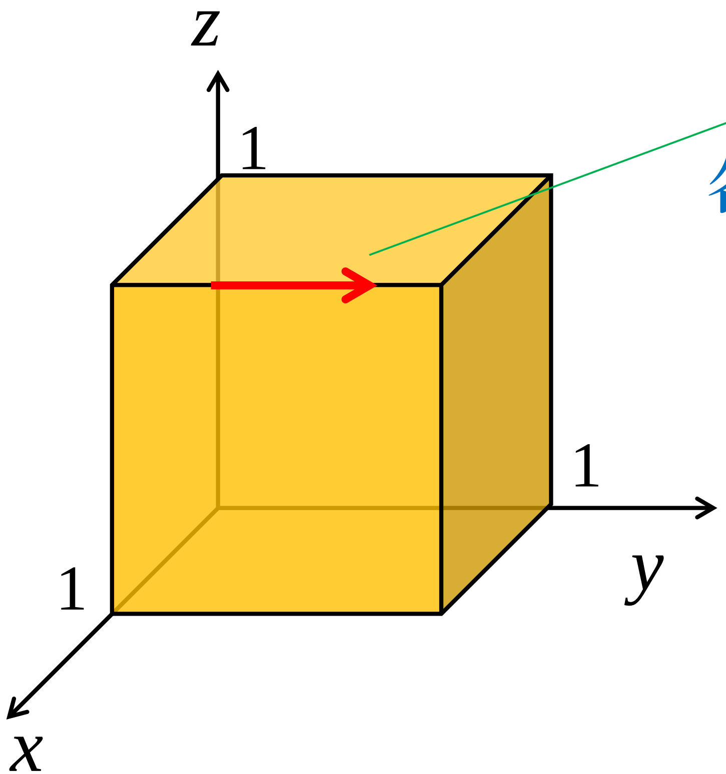
シチュエーション 1



シチュエーション 2

どちらも全く問題なく表現できる

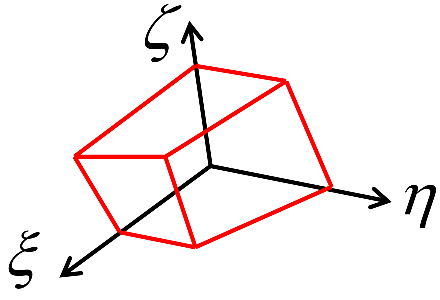
立方体のベクトル補間関数



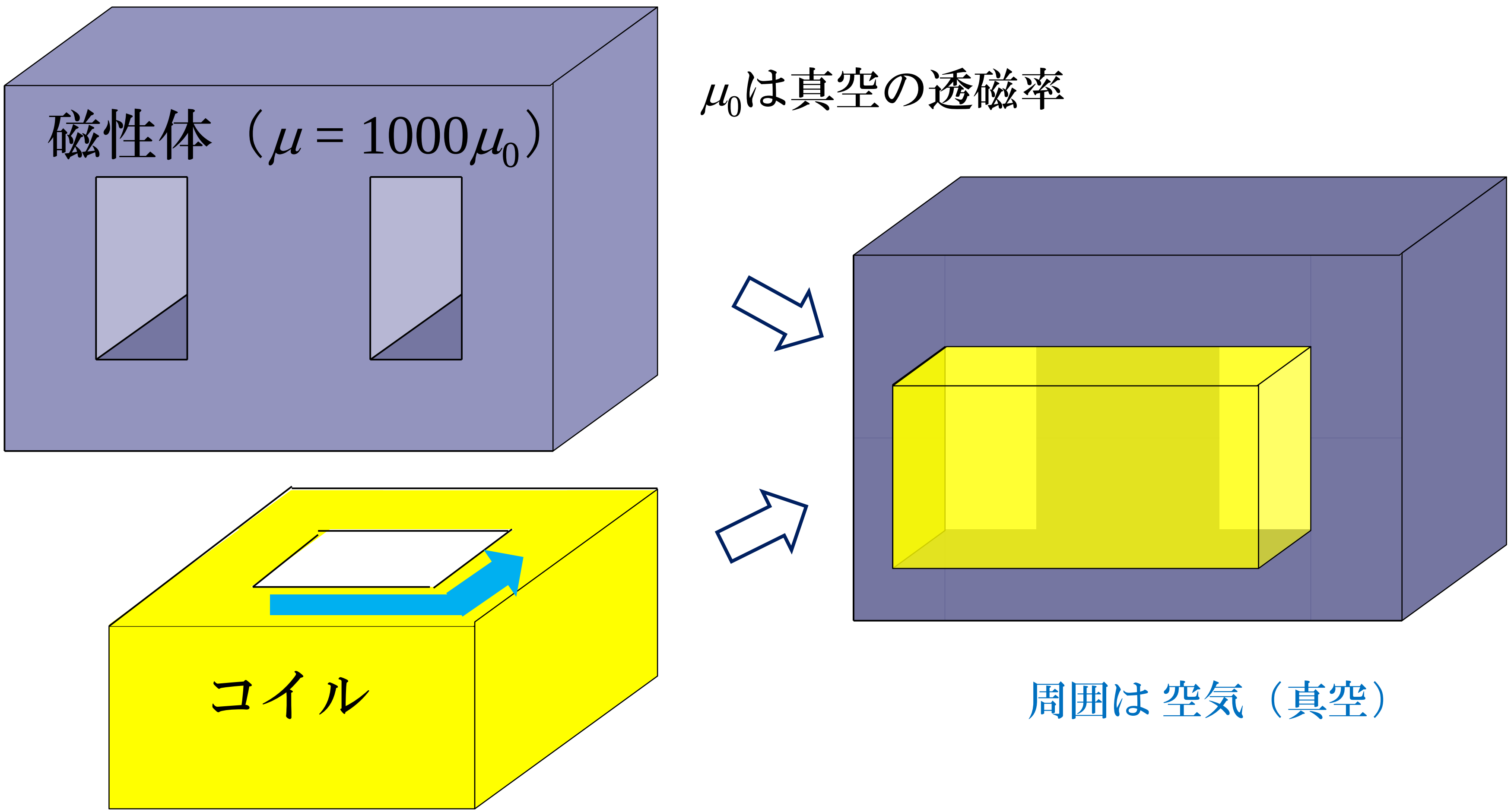
$$\boldsymbol{N}_i = \left(0, \quad xz, \quad 0\right)$$

各辺に沿った線積分値：当該辺で 1
他は 0

一般の六面体は、座標変換で扱う



3次元静磁界の例題（インダクタ）



基礎方程式

高周波解析

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J}_0 - (\sigma + j\omega\varepsilon)(j\omega \boldsymbol{A} + \nabla\phi) \\ -\nabla \cdot \varepsilon (j\omega \boldsymbol{A} + \nabla\phi) = \rho \end{cases}$$

低周波解析

$$\begin{cases} \nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J}_0 - \sigma(j\omega \boldsymbol{A} + \nabla\phi) \\ -\nabla \cdot \varepsilon (j\omega \boldsymbol{A} + \nabla\phi) = \rho \end{cases}$$

静磁界解析

$$\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \boldsymbol{J}_0$$

静電界解析

$$-\nabla \cdot (\nabla\phi) = \rho$$

FEMの流れ

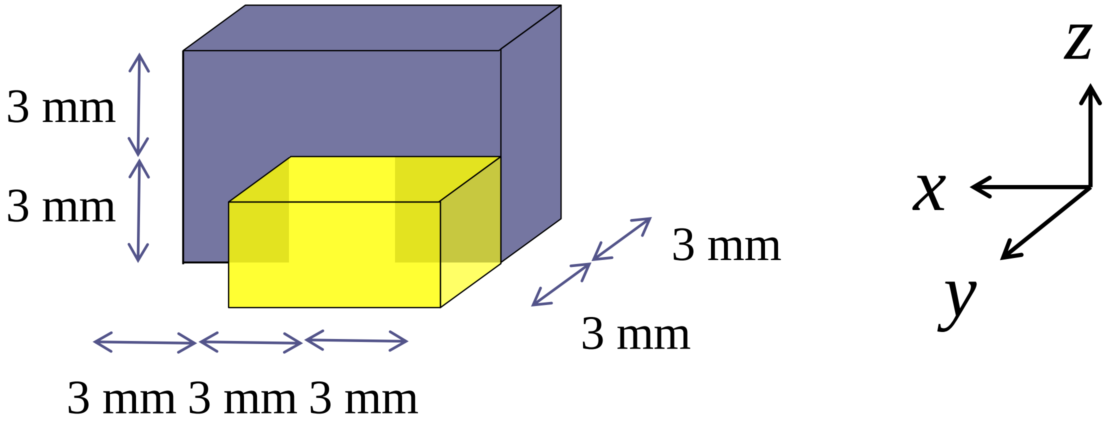
1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

スライド 102-108に MATLABによるFEMプログラムを掲載

（計算効率を重視したプログラムではありません）

メッシュの設定

- 対称性から 1/8 領域を扱う



1 mm × 1 mm × 1 mm の立方体により 20 × 20 × 20 分割
（無限遠の扱いに関して、この例題はこの広さでも十分）

FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

全体方程式の作成 1

- ベクトルポテンシャルを辺要素で表現

$$\boldsymbol{A} = \sum x_i \boldsymbol{N}_i$$

- ガラーキン有限要素法
  - 補間関数を乗じて領域全体で積分する形で立式

$$\int \boldsymbol{N}_i \cdot \left[\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right)\right] dV = \int \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 dV \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

（未知数の数）＝（式の数）＝（辺数）

全体方程式の作成 2

- 微分の階数を一つ落とす

$$\int \boldsymbol{N}_i \cdot \left[\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right)\right] dV = \int \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 dV$$

⇩ ベクトル解析の公式等を利用（付録参照）

$$\int \boldsymbol{N}_i \cdot \left[\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right)\right] dV = \int \mu^{-1} (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{N}_i) dV + \underline{\int_S \left[\left(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}\right) \times \boldsymbol{N}_i\right] \cdot d\boldsymbol{S}}$$

境界に関する積分

全体方程式の作成 3

- 全体方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の成分表示

$$A_{ij} = \int \mu^{-1} \left(\nabla \times \boldsymbol{N}_i \right) \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{N}_j \right) dV$$

$$b_i = \int \boldsymbol{N}_i \cdot \boldsymbol{J}_0 dS$$

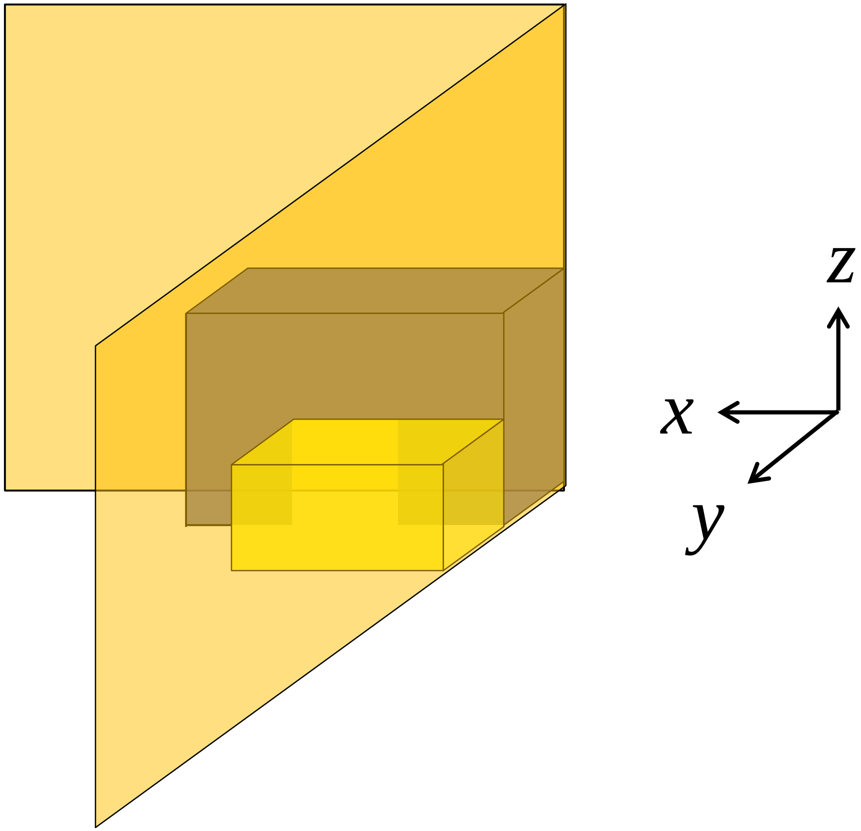
境界は後で考える

FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

境界条件の設定

- *xz*, *yz* 平面は基本境界
- 他は自然境界



FEMの流れ

1. メッシュ（要素分割）の設定
2. 全体方程式の作成
3. 境界条件の設定
4. 全体方程式の求解
5. 結果の表示

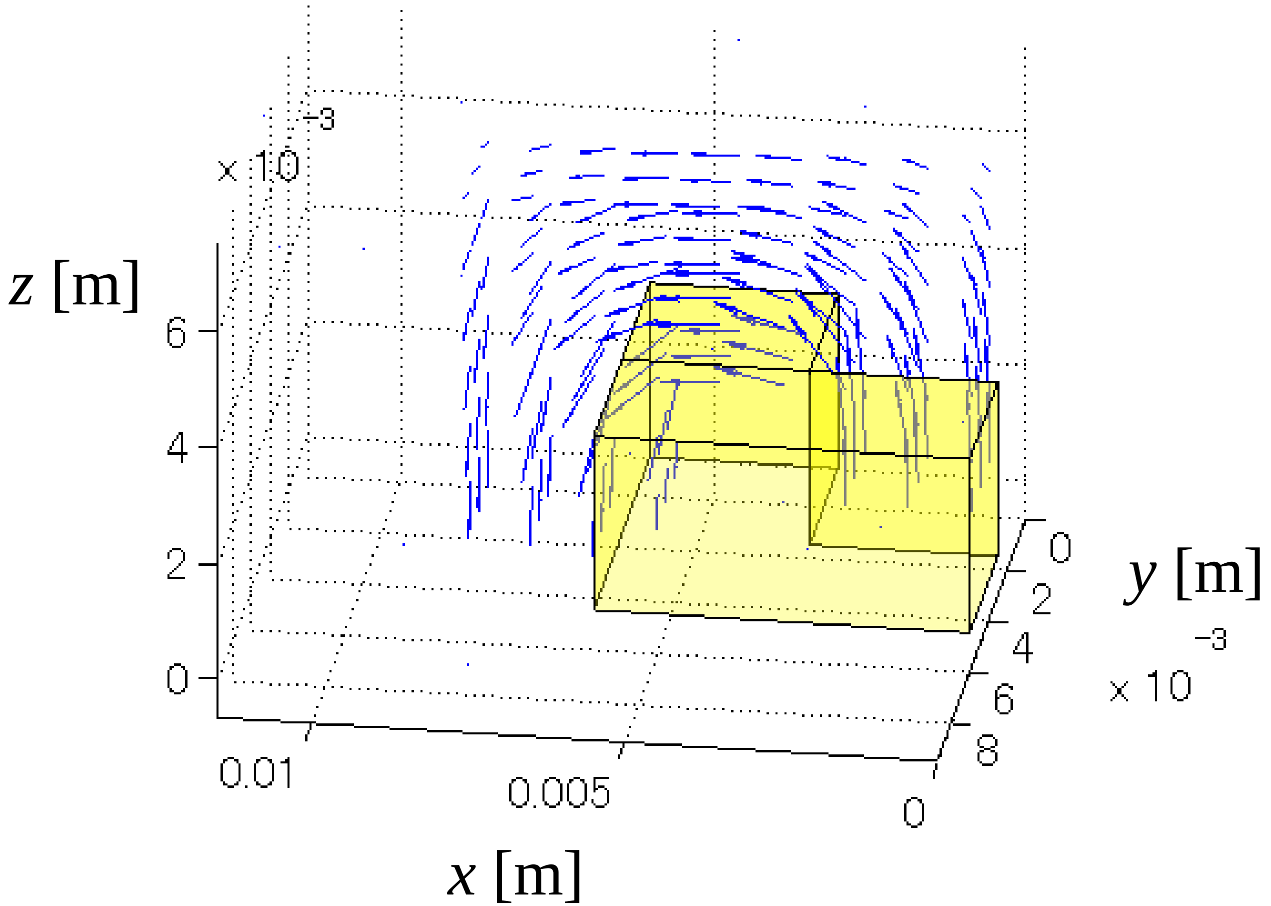
全体方程式の求解

- 直接法
  - 係数行列の特異性（非正則性）の解消が必要
- 反復法
  - 右辺が特定の条件を満たしていれば、適用に問題なし
    - 例題のMATLABプログラムでは共役勾配法を使用
    - 求解性能の向上には、前処理が重要

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \implies M^{-1}A\boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$$

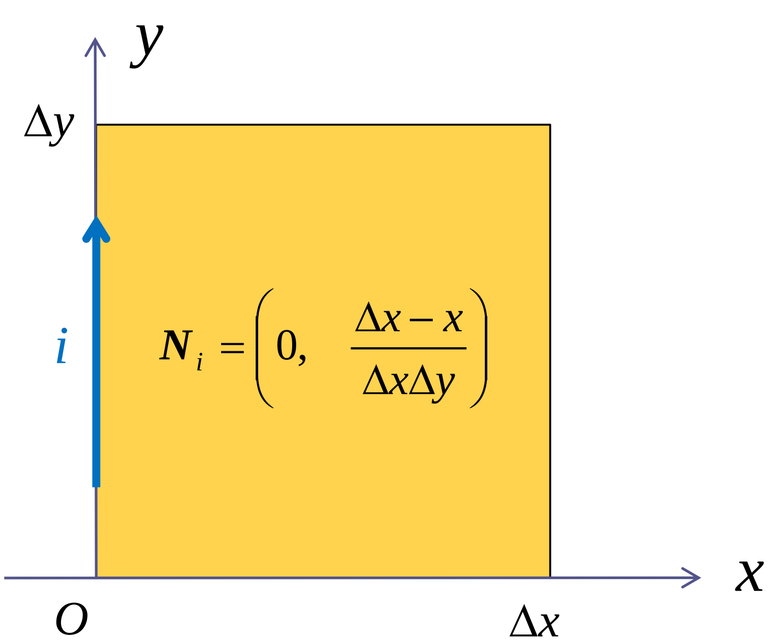
M は前処理行列

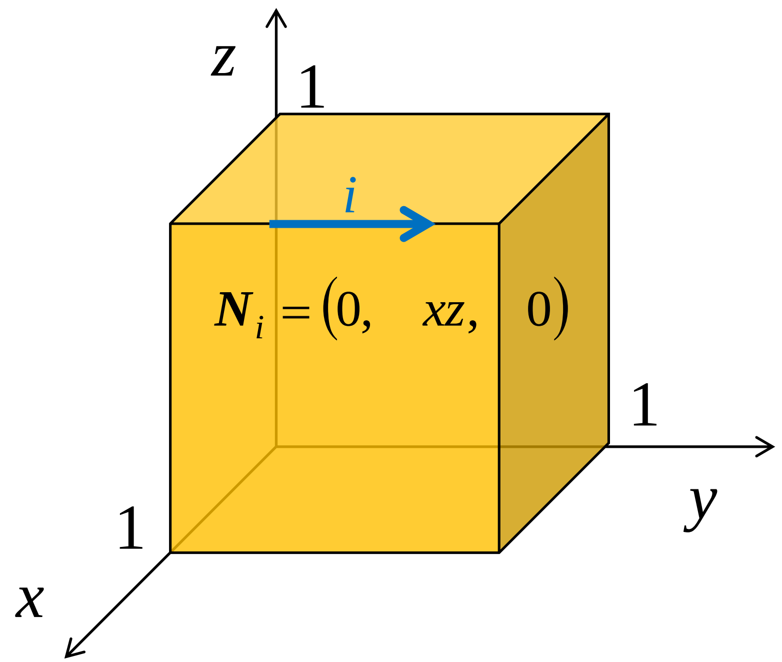
結果の表示（磁束密度）



辺要素FEMのまとめ

- ベクトル補間関数　－辺に未知数をおく－
  - ▫ 長方形／立方体は簡単
    （一般の長方形／六面体は座標変換で扱う）





例題のためのMATLABプログラム

```
%% パラメータ
mu_0 = 4 * pi / 10^7;                    % 真空の透磁率
mu_r(1) = 1;  mu_r(2) = 1000;            % 材料1（真空）, 2（磁性体）の比透磁率
J_0 = 1.0 * 10^5;                        % 強制電流密度
 %% メッシュ分割
xmin = 0;  xmax = 0.02;  noex = 20;              % [xmin xmax]をnoex分割する
ymin = 0;  ymax = 0.02;  noey = 20;              % [ymin ymax]をnoey分割する
zmin = 0;  zmax = 0.02;  noez = 20;              % [zmin zmax]をnoez分割する
xaxis = linspace(xmin, xmax, noex + 1);          % メッシュのx座標
yaxis = linspace(ymin, ymax, noey + 1);          % メッシュのy座標
zaxis = linspace(zmin, zmax, noez + 1);          % メッシュのy座標
noe = noex * noey * noez;                        % 直方体要素の数
noedx = noex * (noey + 1) * (noez + 1);          % x 方向に平行な辺の数
noedy = (noex + 1) * noey * (noez + 1);          % y 方向に平行な辺の数
noedz = (noex + 1) * (noey + 1) * noez;          % z 方向に平行な辺の数
noed = noedx + noedy + noedz;                    % 全ての辺の数
```

```
%% 材料の配置
material = ones(noex, noey, noez); % 真空
% 真空以外の材料の設定
material(1:3, 1:3, 1:3) = 2;
material(1:9, 1:3, 3:6) = 2;
material(6:9, 1:3, 1:3) = 2;
material = reshape(material, 1, noe);

%% コイルの配置（電流密度の設定）
Jx = zeros(noex, noey, noez);
Jy = zeros(noex, noey, noez);
Jz = zeros(noex, noey, noez);
Jx(1:3, 4, 1:3) = - J_0;      Jx(4, 4, 1:3) = - J_0/2;
Jx(1:4, 5, 1:3) = - J_0;      Jx(5, 5, 1:3) = - J_0/2;
Jx(1:5, 6, 1:3) = - J_0;      Jx(6, 6, 1:3) = - J_0/2;
Jy(4, 1:3, 1:3) = J_0;        Jy(4, 4, 1:3) = J_0/2;
Jy(5, 1:4, 1:3) = J_0;        Jy(5, 5, 1:3) = J_0/2;
Jy(6, 1:5, 1:3) = J_0;        Jy(6, 6, 1:3) = J_0/2;
```

```
%% 直方体のサイズ・辺の番号の設定
% サイズ
hx = zeros(noex, noey, noez);
hy = zeros(noex, noey, noez);
hz = zeros(noex, noey, noez);
for  kz = 1:noez
    for  ky = 1:noey
        for  kx = 1:noex
            hx(kx, ky, kz) = xaxis(kx + 1) - xaxis(kx);
            hy(kx, ky, kz) = yaxis(ky + 1) - yaxis(ky);
            hz(kx, ky, kz) = zaxis(kz + 1) - zaxis(kz);
        end
    end
end
```

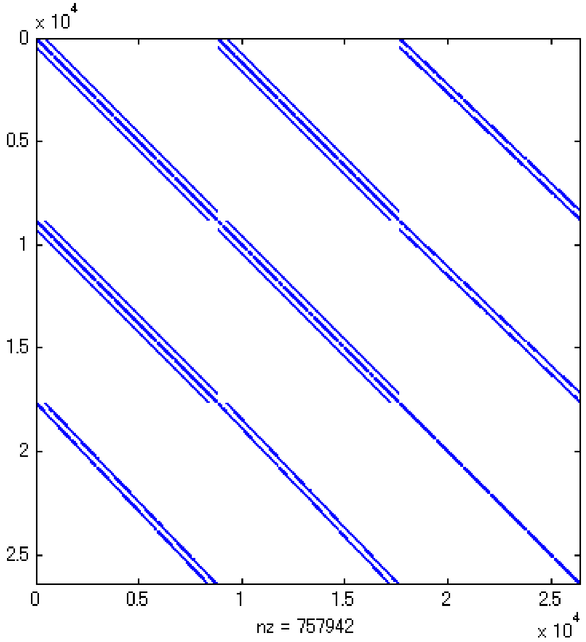
```
% 各要素を構成する辺の番号（x, y, zの辞書式順）
element2edge = zeros(12, noex, noey, noez);
% 局所番号 1（x方向）, 5（y方向）, 9（z方向） の辺
for  kz = 1:noez
    for  ky = 1:noey
        for  kx = 1:noex
            element2edge(1, kx, ky, kz) = kx + (ky - 1) * noex + (kz - 1) * noex * (noey + 1);
            element2edge(5, kx, ky, kz) = noedx + kx + (ky - 1) * (noex + 1) ...
                    + (kz - 1) * (noex + 1) * noey;
            element2edge(9, kx, ky, kz) = noedx + noedy ...
                    + kx + (ky - 1) * (noex + 1) + (kz - 1) * (noex + 1) * (noey + 1);
        end
    end
end
```

```
% 他の辺 2-4（x方向）, 6-8（y方向）, 10-12（z方向）
element2edge(2, :, :, :) = element2edge(1, :, :, :) + noex;
element2edge(3, :, :, :) = element2edge(1, :, :, :) + noex * (noey + 1);
element2edge(4, :, :, :) = element2edge(1, :, :, :) + noex * (noey + 2);
element2edge(6, :, :, :) = element2edge(5, :, :, :) + 1;
element2edge(7, :, :, :) = element2edge(5, :, :, :) + (noex + 1) * noey;
element2edge(8, :, :, :) = element2edge(5, :, :, :) + 1 + (noex + 1) * noey;
element2edge(10, :, :, :) = element2edge(9, :, :, :) + 1;
element2edge(11, :, :, :) = element2edge(9, :, :, :) + noex + 1;
element2edge(12, :, :, :) = element2edge(9, :, :, :) + noex + 2;
element2edge = reshape(element2edge, 12, noe);

%% 係数行列・右辺ベクトルの計算
imat = ones(144, noe);   jmat = ones(144, noe);   mat = zeros(144, noe);
b = zeros(noed, 1); % 右辺ベクトル
C = [ 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1, 0; ...
      0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0, -1, 0, 1; ...
      -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0; ...
      0, -1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1; ...
      1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0; ...
      0, 0, 1, -1, 0, 0, -1, 1, 0, 0, 0, 0 ]; % 回転行列
```

```
% 要素行列を計算する
for  i = 1:noe
    mu = mu_0 * mu_r( material(i) );        % 要素の誘電率
    V = hx(i) * hy(i) * hz(i);              % 要素の体積
    fx = hx(i) / (3 * hy(i) * hz(i)); fy = hy(i) / (3 * hz(i) * hx(i));  fz = hz(i) / (3 * hx(i) * hy(i));
    M_e = [ fx, fx/2, 0, 0, 0, 0; ...
              fx/2, fx, 0, 0, 0, 0; ...
              0, 0, fy, fy/2, 0, 0; ...
              0, 0, fy/2, fy, 0, 0; ...
              0, 0, 0, 0, fz, fz/2; ...
              0, 0, 0, 0, fz/2, fz ] / mu;
    A_e = C' * M_e * C;                     % 要素行列
    imat(:, i) = repmat( element2edge(:, i), 12, 1 );
    jmat(:, i) = reshape( repmat( element2edge(:, i), 1, 12 )' , 144, 1 );
    mat(:, i) = A_e(:);
    b_e = [ Jx(i) * hy(i) * hz(i) * ones(4, 1);  Jy(i) * hz(i) * hx(i) * ones(4, 1); ...
            Jz(i) * hx(i) * hy(i) * ones(4, 1); ] / 4.0;          % 要素毎の右辺
    b( element2edge(:, i) ) = b( element2edge(:, i) ) + b_e;
end
% 係数行列は、要素行列の重ね合わせ
A = sparse(imat, jmat, mat);
clear imat jmat mat;
```

```
%% 境界条件の設定
% xz, yz 平面は基本境界
zero_x = zeros(noex, noey + 1, noez + 1);
zero_x(:, 1, :) = 1;
zero_y = zeros(noex + 1, noey, noez + 1);
zero_y(1, :, :) = 1;
zero_z = zeros(noex + 1, noey + 1, noez);
zero_z(1, :, :) = 1;  zero_z(:, 1, :) = 1;
zero_x = find( zero_x );
zero_y = find( zero_y ) + noedx;
zero_z = find( zero_z ) + noedx + noedy;
dirichlet = [ zero_x;  zero_y;  zero_z ];
A(dirichlet, :) = 0.0;  A(:, dirichlet) = 0.0;          % 固定境界の行, 列を全て零に
A(dirichlet, dirichlet) = speye( length( dirichlet ) );          % 対角成分は 1 にする

%% 求解（共役勾配法、前処理無し）
tor = 10^(-6);          % 収束判定条件
maxit = 5000;          % 最大反復回数
[x, flag, relres, iter, resvec] = pcg(A, b, tor, maxit);
```

行列解法について



FEMで計算負荷が大きくなり
やすいのは，行列求解部分

$$\boxed{\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}}$$

以下，ベクトルの次数を N とする

一般的な行列解法

- 直接法
  - ガウス消去（LU分解）, ...
- 反復法
  - 定常反復法
    - ガウスザイデル, SOR, ...
  - 非定常反復法
    - CG, BiCG, BiCGStab, GMRES, ...

ユーザ視点からは，定常／非定常の区別は重要でありません

FEMユーザ視点からの特徴

- 直接法
  - 優れたライブラリが比較的手軽に利用可能
  - N が小さければ，高速
    （疎行列ならば， N～100万程度の実用例は少なくない）
  - 行列の特異性（ゲージ問題）に注意を要する
- 反復法
  - N が大きいとき効率的
    （極度に大きい N に対する現実的な選択肢）
  - 高度な計算手法による高速化の余地が大きい
  - 解法が多種多様で，初心者にとっては選択が難しい

実用電磁界FEMのための汎用的反復法

- SOR (Succesive Over Relaxation)
  - 実装が容易で，行列の対称性は問わない
  - 性能は，静電界○，静磁界・低周波△，高周波×
- IC-CG (Incomplete Cholesky Conjugate Gradient)
  - 電磁界FEMの対称行列のほとんどに適用可能

（IC-CGは，「IC前処理付きCG」の意）
- ILU-BiCGStab (Incomplete LU BiConjugate Gradient Stabilized)
  - IC-CGと類似しているが，非対称行列に適用可能

※これらと同等以上の性能の解法は，数多く存在します

行列解法の向き／不向き

<table>
<tr><th></th><th>直接法
（非常に大きいサイズでは適用困難）</th><th>SOR</th><th>IC-CG,
ILU-BiCGStab</th><th>マルチグリッド</th></tr>
<tr><td>静電界</td><td>有力</td><td>有力</td><td>有力（SORには劣る場合が多い）</td><td rowspan="4">極めて高速だが，理論・実装の両面で複雑

汎用性に難がある</td></tr>
<tr><td>静磁界</td><td rowspan="3">有力だがゲージ問題の考慮が必要</td><td rowspan="2">使用可だが速くはない</td><td rowspan="3">有力
（ゲージは課さなくてもよい）</td></tr>
<tr><td>低周波</td></tr>
<tr><td>高周波</td><td>不可</td></tr>
</table>

ガウスザイデル法

解くべき方程式（$N=3$）

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

近似解の更新式（各式を x_i について解いた形）

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_1{}^{\text{new}} &\leftarrow \left(b_1 - a_{12}\hat{x}_2 - a_{13}\hat{x}_3\right)/a_{11} \\
\hat{x}_2{}^{\text{new}} &\leftarrow \left(b_2 - a_{21}\hat{x}_1 - a_{23}\hat{x}_3\right)/a_{22} \\
\hat{x}_3{}^{\text{new}} &\leftarrow \left(b_3 - a_{31}\hat{x}_1 - a_{32}\hat{x}_2\right)/a_{33}
\end{aligned}
$$

繰り返す

SOR

ガウスザイデルの更新式を過剰緩和

$$\hat{x}_1^{\text{new}} \leftarrow \hat{x}_1 + \omega\Big[\underbrace{\big(b_1 - a_{12}\hat{x}_2 - a_{13}\hat{x}_3\big)/a_{11}}_{\text{ガウスザイデルの更新式}} - \hat{x}_1\Big]$$

x_2, x_3 についても同様

SORでは ω の適切な決定が重要

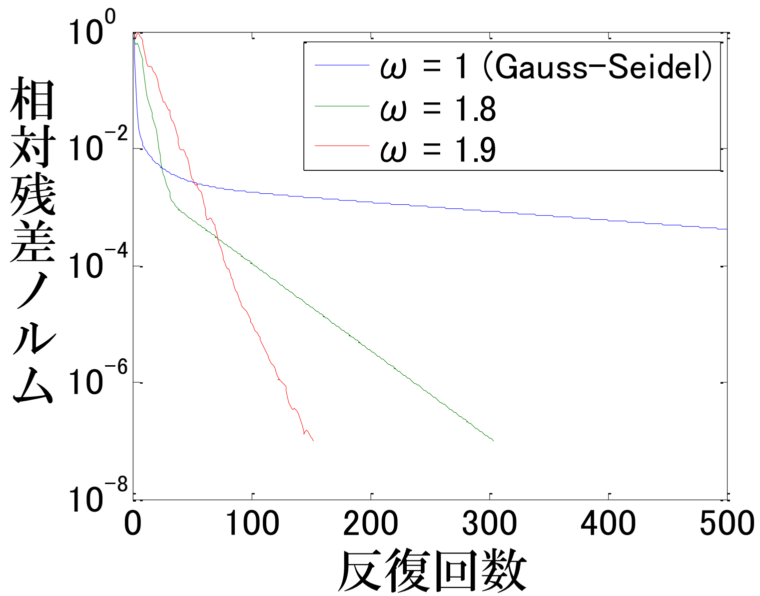
静電界解析では 1.9～2 付近が最適値

典型的には，ガウスザイデルの反復回数：$O(N)$
最適な SORの反復回数　　：$O(N^{1/3}) \sim O(N^{1/2})$

2次元静電界解析例題についての収束性

残差ノルム＝ $\left\| \boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}} \right\|$

（「相対」は，規格化の意）



前処理付きクリロフ部分空間法1

<u>（右）前処理</u>

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$A' = AM^{-1}$$

$$\boldsymbol{x}' = M\boldsymbol{x}$$

M ：前処理行列

係数行列の性質を改善する（後述）のが目的

前処理付きクリロフ部分空間法2

（前処理付き）クリロフ部分空間法

各ステップの近似解 $\boldsymbol{x}'$ を $K^{(i)}(A', \boldsymbol{b})$ から探索

$$\boldsymbol{x}'^{(i)} \in K^{(i)}\left(A'; \boldsymbol{b}\right) = \mathrm{span}\left\{\boldsymbol{b}, A'\boldsymbol{b}, \ldots, A'^{i-1}\boldsymbol{b}\right\}$$

例えば、 $\boldsymbol{x}'^{(1)} = \alpha \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x}'^{(2)} = \beta \boldsymbol{b} + \gamma A' \boldsymbol{b}$

の形で近似解を探索する

（できるだけ良い α, β 等を見つける）

前処理付きクリロフ部分空間法3

高速求解のためには

- 探索アルゴリズムの改善
  （より良い α, β 等を効率よく求める）
- 探索空間の改善
  （前処理の工夫）

前処理付きクリロフ部分空間法4

- 探索アルゴリズムとして、対称正定値行列に対しては、（ある意味で）最善のアルゴリズムが知られている
  - CG (Conjugate Gradient)法
  - CR (Conjugate Residual)法

- 非対称行列については、多種多様なアルゴリズムが提案されている
  - BiCG, BiCGStab, GP-BiCG, …
  - GCR, GMRES, …

（前処理付き）CG法のアルゴリズム

$\boldsymbol{x}^{(0)} \leftarrow 0,\ \boldsymbol{r}^{(0)} \leftarrow \boldsymbol{b},\ \beta \leftarrow 0$

for $i = 0, 1, 2, \ldots$

$\quad \boldsymbol{p}^{(i)} \leftarrow M^{-1}\boldsymbol{r}^{(i)} + \beta\,\boldsymbol{p}^{(i-1)}$

$\quad \alpha \leftarrow (M^{-1}\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}^{(i)}) / (\boldsymbol{p}^{(i)}, A\boldsymbol{p}^{(i)})$

$\quad \boldsymbol{x}^{(i+1)} \leftarrow \boldsymbol{x}^{(i)} - \alpha\,\boldsymbol{p}^{(i)}$

$\quad \boldsymbol{r}^{(i+1)} \leftarrow \boldsymbol{r}^{(i)} - \alpha\,A\boldsymbol{p}^{(i)}$

$\quad \beta \leftarrow (M^{-1}\boldsymbol{r}^{(i+1)}, \boldsymbol{r}^{(i+1)}) / (M^{-1}\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}^{(i)})$

$\quad \|\boldsymbol{r}^{(i+1)}\|$ が小さければ終了

endfor

※ 実装が必要なのは, M^{-1} とベクトルの積のみ

前処理付きクリロフ部分空間法5

良い前処理の条件

- M^{-1} とベクトルの積を高速に計算できる
- A' に対する CG や BiCG 等が速く収束する（通常、 $M \fallingdotseq A$ を目指す）

ILU前処理1

$$
A=\begin{pmatrix}
1 & -0.25 & & & -0.25 & & & \\
-0.25 & 1 & -0.25 & & & -0.25 & & \\
 & -0.25 & 1 & -0.25 & & & -0.25 & \\
 & & -0.25 & 1 & -0.25 & & & -0.25 \\
-0.25 & & & -0.25 & 1 & -0.25 & & \\
 & -0.25 & & & -0.25 & 1 & -0.25 & \\
 & & -0.25 & & & -0.25 & 1 & \\
 & & & -0.25 & & & -0.25 & 1
\end{pmatrix}
$$

ILU前処理2

通常のLU分解 $A = LU$ では、L, U は疎行列性を失う

$$
L = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & \\
-0.25 & 1 & & & & & & \\
 & -0.267 & 1 & & & & & \\
 & & -0.268 & 1 & & & & \\
-0.25 & -0.067 & -0.018 & -0.273 & 1 & & & \\
 & -0.267 & -0.071 & -0.019 & -0.316 & 1 & & \\
 & & -0.268 & -0.072 & -0.026 & -0.328 & 1 & \\
 & & & -0.268 & -0.079 & -0.031 & -0.333 & 1
\end{pmatrix}
$$

（U は省略）

ILU前処理3

ILU分解 $A \approx LU$ では、元の疎行列性を保つ
（LU分解の手順で、もともと 0 であった成分は無視する）

$$
L = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
-0.25 & 1 & & & & & & & \\
& -0.267 & 1 & & & & & & \\
& & -0.268 & 1 & & & & & \\
-0.25 & & & -0.268 & 1 & & & & \\
& -0.267 & & & -0.287 & 1 & & & \\
& & -0.268 & & & -0.290 & 1 & & \\
& & & -0.268 & & & -0.291 & 1 &
\end{pmatrix}
$$

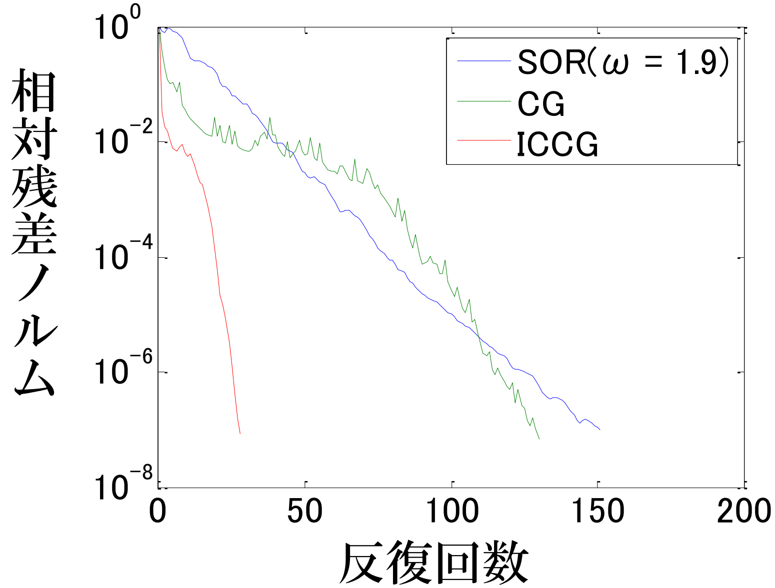
（U は省略）

SOR, CG, ICCG の収束性

2次元静電界解析の例題

残差ノルム＝ $\left\| \boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}} \right\|$

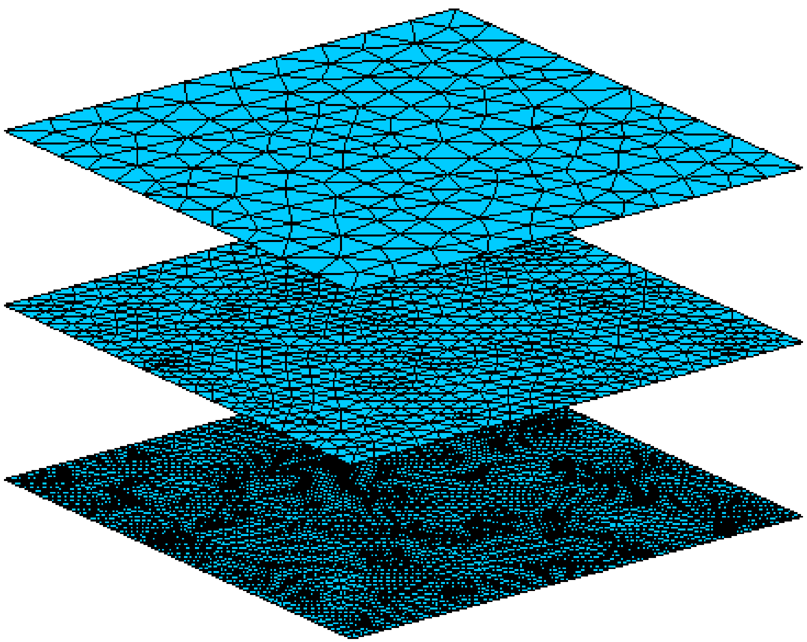
（「相対」は，規格化の意）



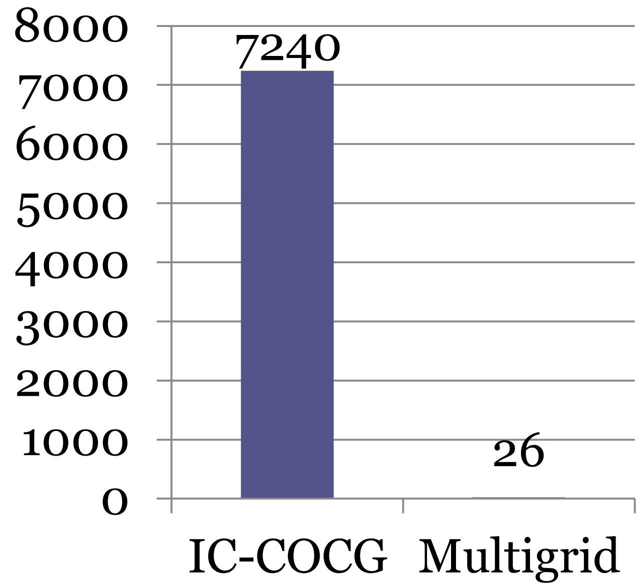
※ 1反復あたりの計算コストが異なることに注意

さらなる高速解法：マルチグリッド法

- 反復回数を $O(1)$ とする理想的な高速反復法
- 疎密の異なる複数のメッシュを使用



反復回数の比較例
（高周波解析，N ～270万）



参考文献

1. 菊地文雄, 「有限要素法の数理」, 培風館, 1994.
2. 坪井始, 内藤督, 「数値電磁界解析法の基礎」, 養賢堂, 1994.
3. 坪井始, 内藤督, 「実践数値電磁界解析法」, 養賢堂, 1995.
4. 高橋則雄, 「磁界系有限要素法を用いた最適化」, 森北出版, 2001.
5. 本間利久, 五十嵐一, 川口秀樹, 「数値電磁力学」, 森北出版, 2002.
6. 高橋則雄, 「三次元有限要素法 磁界解析技術の基礎」, 電気学会, 2006.

付録1：弱形式を導く際に使用する公式

(i) $$\nabla\cdot\left(a\boldsymbol{b}\right)=\nabla a\cdot\boldsymbol{b}+a\nabla\cdot\boldsymbol{b}$$

(ii) $$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right)=\left(\nabla\times\boldsymbol{a}\right)\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{b}\right)$$

- 2次元静電界解析のとき（3次元も同様）

$$\nabla \cdot \left(a\boldsymbol{b} \right) = \nabla a \cdot \boldsymbol{b} + a \nabla \cdot \boldsymbol{b}$$ で

$$a = N_i, \quad \boldsymbol{b} = \varepsilon \nabla V$$ とすれば

$$\int N_i \nabla \cdot \left(\varepsilon \nabla V \right) dS = \underline{\int \nabla \cdot \left(N_i \varepsilon \nabla V \right) dS} - \int \nabla N_i \cdot \left(\varepsilon \nabla V \right) dS$$

発散定理で境界積分に

$$\oint_C N_i \varepsilon \nabla V \cdot d\boldsymbol{n}$$

- 3次元静磁界・低周波・高周波解析

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\nabla \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$$ で

$$\boldsymbol{a} = \mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{N}_i$$ とすれば

$$\int \boldsymbol{N}_i \cdot \nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}) dV = \underline{\int \nabla \cdot [(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{N}_i] dV} + \int (\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{N}_i) dV$$

発散定理で境界積分に

$$\int_S [(\mu^{-1} \nabla \times \boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{N}] \cdot d\boldsymbol{S}$$