

Úvod do grafovej teórie, farbenie grafov

Heuristické optimalizačné procesy
cvičenie 4

Ing. Ján Magyar, PhD.

2025/2026 ZS

Graf

- matematický objekt, usporiadaná dvojica $G = (V, E)$
 - V – neprázdna konečná množina **vrcholov** grafu (uzlov)
 - E – množina dvojíc u a v , kde $u \neq v$, **hrany** grafu
 - ak u a v sú usporiadaná dvojica – orientovaný graf
 - ak u a v sú neusporiadaná dvojice – neorientovaný graf
- stupeň vrcholu – počet hrán smerujúcich z/do uzla
- úplný graf – obsahuje všetky možné kombinácie $\{u, v\}$ kde $u, v \in V$ a $u \neq v$
 - každé dva vrcholy sú spojené hranou
- hranovo-ohodnotený graf – každá hrana má priradenú číselnú hodnotu (váhu)

Problém farbenia grafu

- máme (neúplný) graf, chceme uzly zafarbiť tak, aby uzly prepojené hranou nemali rovnakú farbu, hľadáme minimálny počet farieb
- využitie:
 - priradovanie rádiových frekvencií
 - minimalizácia počtu nákupných tašiek
 - optimalizácia svetelne riadenej križovatky
 - rozvrhovanie predmetov do minimálneho počtu časových blokov
 - ...

Sekvenčné farbenie

1. nech $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ je ľubovoľná postupnosť vrcholov grafu $G = (V, H)$
2. postupne pre $i = 1, 2, \dots, n$ zafarbi vrchol v_i farbou najmenšieho čísla takou, že žiadnen zo zafarbených susedov nie je zafarbený touto farbou

Paralelné farbenie

1. Zorad' vrcholy grafu $G = (V, H)$ do postupnosti $P = v_1, v_2, \dots, v_n$ podľa stupňa vrcholu nerastúco.
Inicializuj množinu farieb $F = \{1\}, j = 1$
2. Postupne s prvkami P urob: ak vrchol v_i nie je zafarbený a nemá suseda zafarbeného farbou j , tak ho farbou j zafarbi
3. Ak sú všetky vrcholy postupnosti P zafarbené, ukonči
4. Ak nie sú všetky vrcholy postupnosti P zafarbené, zvýš počet farieb:
$$F \leftarrow F \cup \{j + 1\}, j \leftarrow j + 1;$$
 vráť sa ku kroku 2

Largest Degree First farbenie grafu

- farebný stupeň vrcholu v – počet rôznych farieb, ktorými sú zafarbení susedia vrcholu v
1. Zo všetkých nezafarbených vrcholov s najväčším stupňom vyber vrchol v s najväčším farebným stupňom
 2. Prirad' vrcholu v farbu najnižšieho možného čísla
 3. Ak sú všetky vrcholy zafarbené, ukonči, inak sa vráť ku kroku 1