



Heuristické optimalizačné procesy

Typy problémov, prototypové problémy

prednáška 2
Ing. Ján Magyar, PhD.
ak. rok. 2024/2025 ZS

Typy problémov

- numerický (numerická optimalizácia)
 - priradenie hodnôt premenným
- kombinatorický (plánovanie, rozvrhovanie, pridelovanie zdrojov)
 - zoskupovanie objektov
 - usporiadanie objektov
 - priradenie objektov objektom

Rozhodovací problém

riešenie inštancie problému spĺňa požadované podmienky
(minimálny počet až všetky)

varianty:

- *hl'adací* - vyhľadať riešenie (alebo určiť jeho neexistenciu)
- *rozhodovací* - určiť, či riešenie existuje alebo nie

Optimalizačný problém

hľadáme riešenie, ktoré poskytuje optimálnu hodnotu **cieľovej funkcie**

varianty:

- *hľadací* - nájsť riešenie s min/max hodnotou cieľovej funkcie
- *ohodnocovací* - nájsť optimálnu hodnotu cieľovej funkcie

- *asociovaný rozhodovací problém* - nájsť riešenie s hodnotou cieľovej funkcie lepšou alebo rovnou zadanému prahu (alebo určiť, že neexistuje)

Kombinovaný problém

hľadáme riešenie, ktoré:

- spĺňa všetky požadované podmienky (môže byť súčasťou cieľovej funkcie → optimalizačný problém)
- poskytuje optimálnu hodnotu cieľovej funkcie (môže byť podmienka na prah → asociovaný rozhodovací problém)

Kandidát riešenia

- nevalidný
- validný
- validný a optimálny = riešenie

Problém splniteľnosti

satisfiability problem, alebo SAT

je daná formula vo výrokovej logike

logické hodnoty chceme mapovať na výrokové premenné tak, aby formula mohla byť považovaná za pravdivú

prototyp kombinatorického *priradzovania*

SAT - formálne vyjadrenie

- syntax

- konštanty: $C = \{\top, \perp\}$
- premenné: $V = \{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$
- operátory: $O = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- tvorba formúl: $\top, \perp, x_i, \neg F, F1 \wedge F2, F1 \vee F2$

- sémantika (pri mapovaní a)

- $\text{Val}(\top, a) = \top$, $\text{Val}(x_i, a) = a(x_i)$, $\text{Val}(\neg F, a) = \neg \text{Val}(F, a)$
- model formuly
- CNF = ekvivalencia/reštrikcia (k-CNF)

SAT - charakteristika

- veľkosť inštancie: n (počet premenných)
- veľkosť priestoru:
 - 2^n kandidátov = úplné priradenie
 - 3^n kandidátov = úplné aj parciálne priradenie
- typ problému
 - rozhodovací problém
 - hľadací variant = hľadanie modelu
 - počet podmienok: 1, viac
 - optimalizačný problém - tvar MAX-SAT

SAT = príklad

$$F = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$\wedge (\neg x_2 \vee x_1)$$

$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$$\wedge (x_1 \vee x_2)$$

$$\wedge (\neg x_4 \vee x_3)$$

$$\wedge (\neg x_5 \vee x_3)$$

Problém obchodného cestujúceho

interpretácia: predstava obchodného cestujúceho (traveling salesman problem, alebo TSP)

máme daný graf s váženými (orientovanými alebo neorientovanými) hranami, a hľadáme Hamiltonovský cyklus s minimálnou celkovou váhou

prototyp kombinatorického *usporiadania*

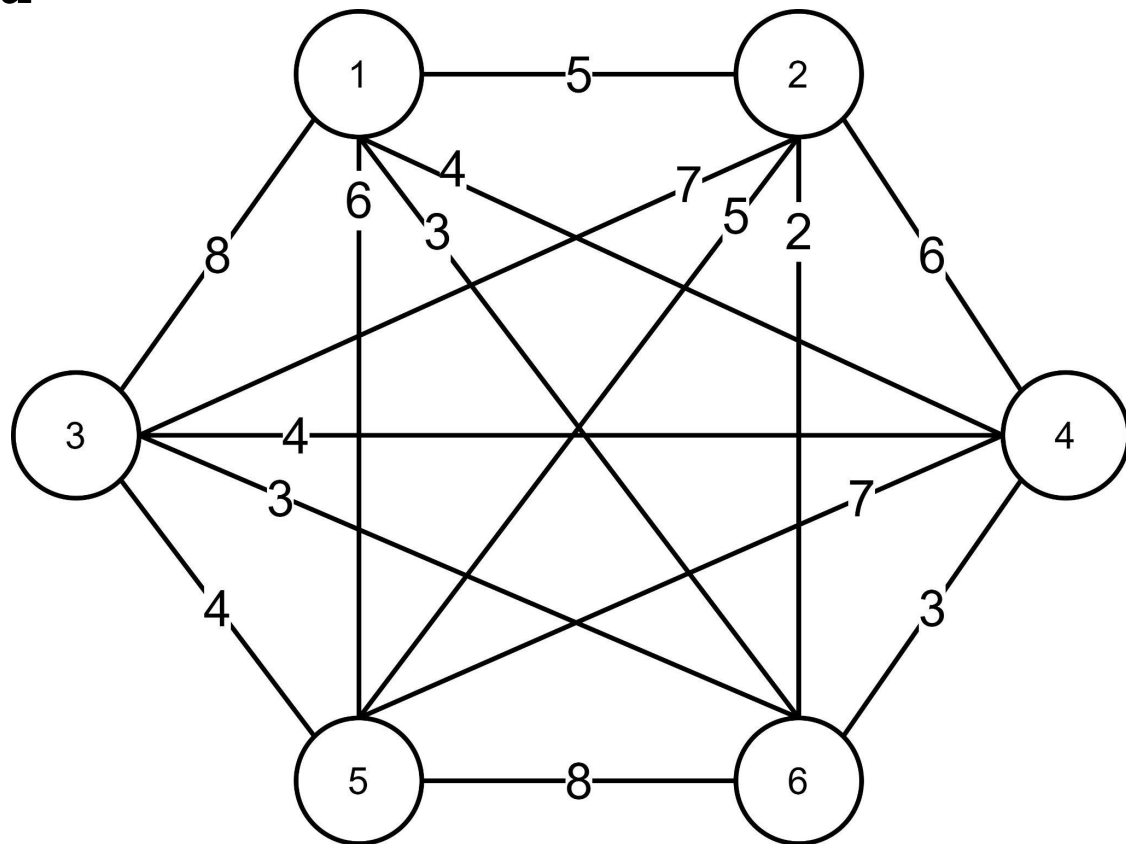
TSP - formálne vyjadrenie

- hranovo vážený graf $G = \{V, E, w\}$
 - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
 - $E \subseteq V \times V$
 - $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$
- cesta
 - (v_1, v_2, \dots, v_k)
 - cyklus, Hamiltonovský cyklus
- váha cesty
 - $w(v_1, v_2, \dots, v_k) = w(v_1, v_2) + \dots + w(v_{k-1}, v_k)$
- kompletnosť grafu: nekompletný \rightarrow kompletný

TSP - charakteristika

- veľkosť inštancie: n (počet vrcholov)
- veľkosť priestoru: $n! / 2n$ (pre úplný graf)
- typ problému
 - kombinovaný problém
 - cieľová funkcia: dĺžka cyklickej cesty
 - podmienka: cyklus je Hamiltonovský

TSP - príklad



Farbenie grafov

graph coloring, alebo GC

je daný neorientovaný graf, uzly ktorého chceme zafarbiť tak, aby dva uzly, spojené hranou, boli zafarbené rôznymi farbami

prototyp kombinatorického *zoskupovania*

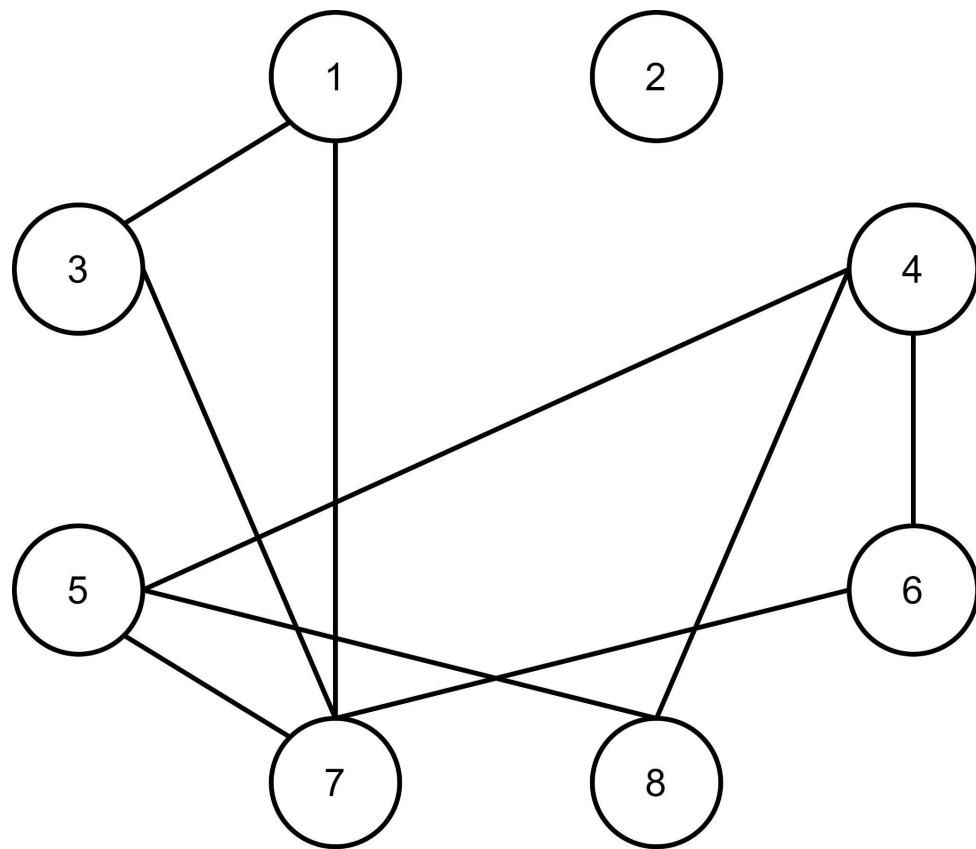
GC - formálne vyjadrenie

- hranovo neorientovaný graf $G = \{V, E\}$
 - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
 - $E \subseteq V \times V$
- mapovanie
 - $a: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \leq n$
 - $(u, v) \in E \rightarrow a(u) \neq a(v)$
- riešenia s permutovanými farbami sú izomorfnými riešeniami

GC - charakteristika

- veľkosť inštancie: n (počet vrcholov)
- veľkosť priestoru: k^n (k = maximálny počet možných farieb)
- typ problému
 - rozhodovací - k -farbenie
 - podmienka: rôznosť farieb susedných vrcholov
 - kombinovaný - nájsť chromatické číslo
 - cieľová funkcia: počet použitých farieb
 - podmienka: rôznosť farieb susedných vrcholov

GC - príklad



otázky?