



# Heuristické optimalizačné procesy

Typy problémov, prototypové problémy

prednáška 2  
Ing. Ján Magyar, PhD.  
ak. rok. 2025/2026 ZS

# Typy problémov

- numerický (numerická optimalizácia)
  - priradenie hodnôt premenným
- kombinatorický (plánovanie, rozvrhovanie, pridelovanie zdrojov)
  - zoskupovanie objektov
  - usporiadanie objektov
  - priradenie objektov objektom

# Rozhodovací problém

riešenie inštancie problému spĺňa požadované podmienky  
(minimálny počet až všetky)

varianty:

- *hl'adací* - vyhľadať riešenie (alebo určiť jeho neexistenciu)
- *rozhodovací* - určiť, či riešenie existuje alebo nie

# Optimalizačný problém

hľadáme riešenie, ktoré poskytuje optimálnu hodnotu **cieľovej funkcie**

varianty:

- *hľadací* - nájsť riešenie s min/max hodnotou cieľovej funkcie
- *ohodnocovací* - nájsť optimálnu hodnotu cieľovej funkcie
  
- *asociovaný rozhodovací problém* - nájsť riešenie s hodnotou cieľovej funkcie lepšou alebo rovnou zadanému prahu (alebo určiť, že neexistuje)

# Kombinovaný problém

hľadáme riešenie, ktoré:

- spĺňa všetky požadované podmienky (môže byť súčasťou cieľovej funkcie → optimalizačný problém)
- poskytuje optimálnu hodnotu cieľovej funkcie (môže byť podmienka na prah → asociovaný rozhodovací problém)

# Kandidát riešenia

- nevalidný
- validný
- validný a optimálny = riešenie

# Problém splniteľnosti

satisfiability problem, alebo SAT

je daná formula vo výrokovej logike

logické hodnoty chceme mapovať na výrokové premenné tak, aby formula mohla byť považovaná za pravdivú

prototyp kombinatorického *priradzovania*

# SAT - formálne vyjadrenie

- syntax

- konštanty:  $C = \{\top, \perp\}$
- premenné:  $V = \{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$
- operátory:  $O = \{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$
- tvorba formúl:  $\top, \perp, x_i, \neg F, F1 \wedge F2, F1 \vee F2$

- sémantika (pri mapovaní  $a$ )

- $\text{Val}(\top, a) = \top$ ,  $\text{Val}(x_i, a) = a(x_i)$ ,  $\text{Val}(\neg F, a) = \neg \text{Val}(F, a)$
- model formuly
- CNF = ekvivalencia/reštrikcia (k-CNF)



# SAT - charakteristika

- veľkosť inštancie:  $n$  (počet premenných)
- veľkosť priestoru:
  - $2^n$  kandidátov = úplné priradenie
  - $3^n$  kandidátov = úplné aj parciálne priradenie
- typ problému
  - rozhodovací problém
    - hľadací variant = hľadanie modelu
    - počet podmienok: 1, viac
  - optimalizačný problém - tvar MAX-SAT

## SAT = príklad

$$F = (\neg x_1 \vee x_2)$$

$$\wedge (\neg x_2 \vee x_1)$$

$$\wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$$

$$\wedge (x_1 \vee x_2)$$

$$\wedge (\neg x_4 \vee x_3)$$

$$\wedge (\neg x_5 \vee x_3)$$

# Problém obchodného cestujúceho

interpretácia: predstava obchodného cestujúceho (traveling salesman problem, alebo TSP)

máme daný graf s váženými (orientovanými alebo neorientovanými) hranami, a hľadáme Hamiltonovský cyklus s minimálnou celkovou váhou

prototyp kombinatorického *usporiadania*

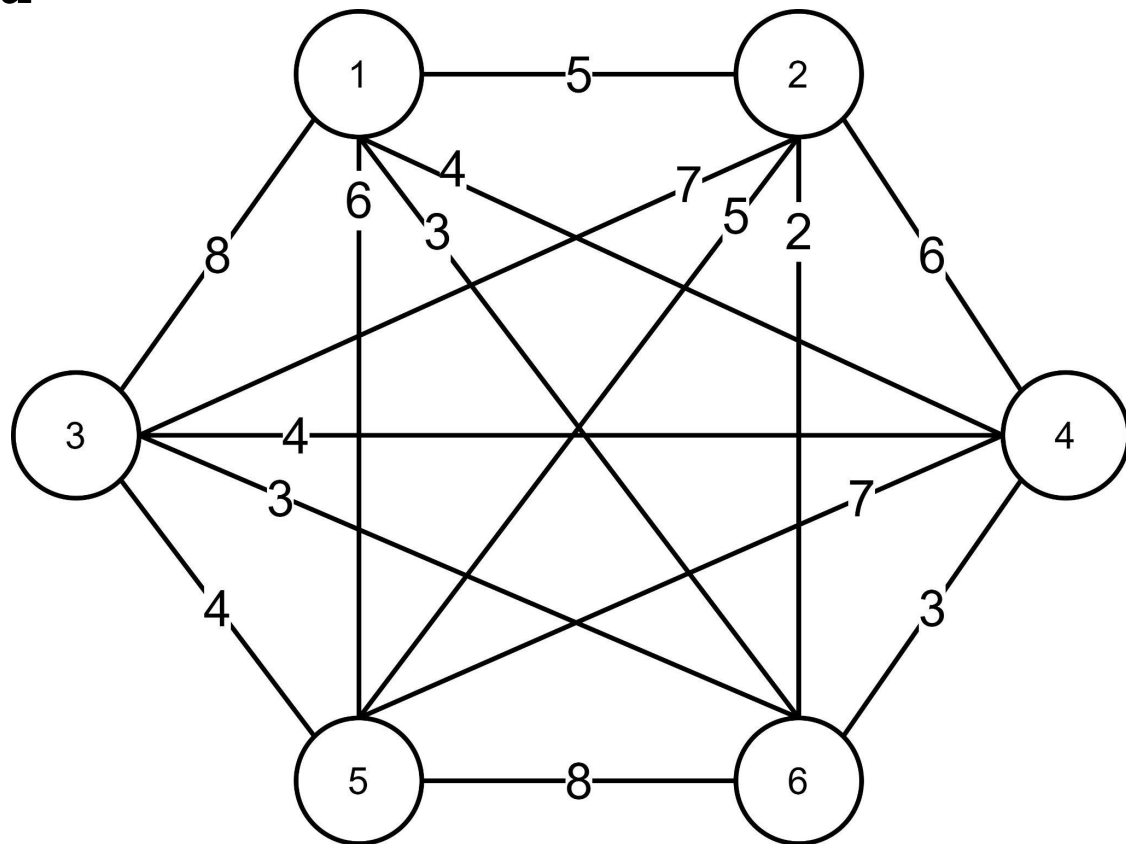
# TSP - formálne vyjadrenie

- hranovo vážený graf  $G = \{V, E, w\}$ 
  - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
  - $E \subseteq V \times V$
  - $w: E \rightarrow \mathbb{R}^+$
- cesta
  - $(v_1, v_2, \dots, v_k)$
  - cyklus, Hamiltonovský cyklus
- váha cesty
  - $w(v_1, v_2, \dots, v_k) = w(v_1, v_2) + \dots + w(v_{k-1}, v_k)$
- kompletnosť grafu: nekompletný  $\rightarrow$  kompletný

# TSP - charakteristika

- veľkosť inštancie:  $n$  (počet vrcholov)
- veľkosť priestoru:  $n! / 2n$  (pre úplný graf)
- typ problému
  - kombinovaný problém
  - cieľová funkcia: dĺžka cyklickej cesty
  - podmienka: cyklus je Hamiltonovský

# TSP - príklad



# Farbenie grafov

graph coloring, alebo GC

je daný neorientovaný graf, uzly ktorého chceme zafarbiť tak, aby dva uzly, spojené hranou, boli zafarbené rôznymi farbami

prototyp kombinatorického *zoskupovania*

# GC - formálne vyjadrenie

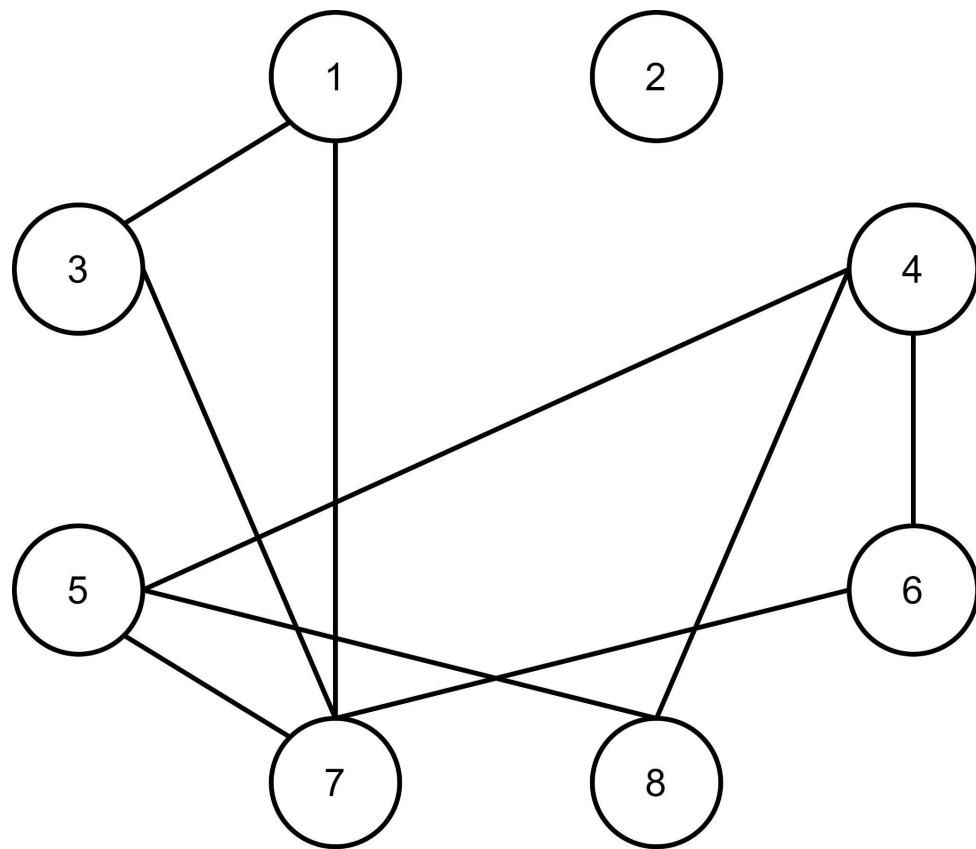
- hranovo neorientovaný graf  $G = \{V, E\}$ 
  - $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
  - $E \subseteq V \times V$
- mapovanie
  - $a: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \leq n$
  - $(u, v) \in E \rightarrow a(u) \neq a(v)$
- riešenia s permutovanými farbami sú izomorfnými riešeniami



# GC - charakteristika

- veľkosť inštancie:  $n$  (počet vrcholov)
- veľkosť priestoru:  $k^n$  ( $k$  = maximálny počet možných farieb)
- typ problému
  - rozhodovací -  $k$ -farbenie
    - podmienka: rôznosť farieb susedných vrcholov
  - kombinovaný - nájsť chromatické číslo
    - cieľová funkcia: počet použitých farieb
    - podmienka: rôznosť farieb susedných vrcholov

# GC - príklad



**otázky?**