### Homework 1: Discrete Vortex Method

Isaac Gibert, Ian Martorell, Sara Piñeiro, Esteban Ruiz, and Eduard Sulé

220024 - Aerodynamics, UPC ESEIAAT

Dated: December 2016

## 1 Verificación

Para poder verificar la solución DVM utilizaremos la teoría de perfiles delgados para calcular los valores de referencia exactos para un perfil NACA 2212 con un ángulo de ataque igual a 4°. Partimos de la ecuación para perfiles delgados, que es la siguiente:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta) \sin \theta}{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)} d\theta = U_{\infty}(\alpha - \frac{dz}{dx})$$

Aplicamos el desarrollo de Glauert:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} d\theta$$
  $A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{dz}{dx} \cos(n\theta) d\theta$ 

La circulación será:

$$\Gamma = c u_{\infty} [A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2}]$$

Aplicando la ley de Kutta  $(l=\rho_{\infty}u_{\infty}\Gamma)$  y la definición  $c_l=\frac{l}{q_{\infty}c}$  obtenemos la siguiente expresión:

$$c_l = \pi(2A_0 + A_1)$$

La línea media viene definida por las siguientes ecuaciones:

$$z_m = \frac{f}{p^2}(2px - x^2) \qquad 0 \le x \le p$$

$$z_m = \frac{f}{1 - p^2}(1 - 2p + 2px - x^2) \qquad p < x \le 1$$

Derivando respecto x, obtenemos expresiones que podemos usar en el cálculo de  $A_0$  y  $A_1$ :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2f}{p^2}(p-x) \qquad 0 \le x \le p$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2f}{(1-p)^2}(p-x) \qquad p < x \le \pi$$

Haciendo el cambio  $x=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$ , con los datos  $p=0.2,\ f=0.02,\ \alpha=4^\circ,\ y$  sabiendo que en la discontinuidad  $x=p\to\theta=\arccos(0.6)$ , obtenemos:

$$A_0 = 0.052213$$
  $A_1 = 0.09799$   $c_l = 0.6359$ 

A continuación, utilizando nuestro programa para obtener el valor de  $c_l$  para diferentes números de paneles y aplicando las distribuciones uniforme y  $full\ cosine$  obtenemos:

Paneles	$c_{l,uniforme}$	$c_{l,fullcosine}$	$Error_{uniforme}[\%]$	$Error_{fullcosine}[\%]$
4	0.5735	0.5772	9.8189	9.2386
8	0.5947	0.603	6.4774	5.1797
16	0.6073	0.615	4.5007	3.2808
32	0.6154	0.6199	3.2281	2.5115
64	0.6205	0.6223	2.4189	2.1418
128	0.6224	0.6234	2.1242	1.9648
256	0.6234	0.624	1.9607	1.8761

Figure 1: Valores obtenidos para el  $c_l$  usando una distribución uniforme y  $full\ cosine$ 

Observamos en primer lugar que no se obtienen mejoras significativas a través del uso de la distribución *full cosine*. Sin embargo, optamos por usarla de todas maneras ya que los resultados que obtenemos se acercan más a los teóricos, por poco que sea.

Tomando la distribución full cosine, vemos que a partir de 128 paneles se obtiene un error en el  $c_l$  inferior al 2%, que consideramos aceptable, por lo que utilizaremos este número de paneles en nuestros siguientes cálculos.

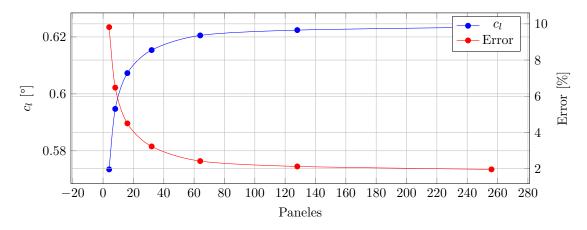


Figure 2: Distribución uniforme

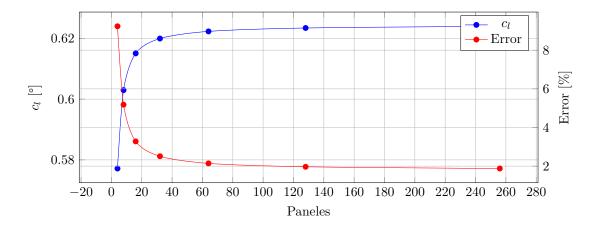


Figure 3: Distribución full cosine

En cuanto al flap, lo escogemos de tal forma que se sitúe en x=0.8. Hacemos variar el ángulo de deflexión del flap y graficamos el ángulo de sustentación nula con respecto de éste, obteniendo la siguiente recta.

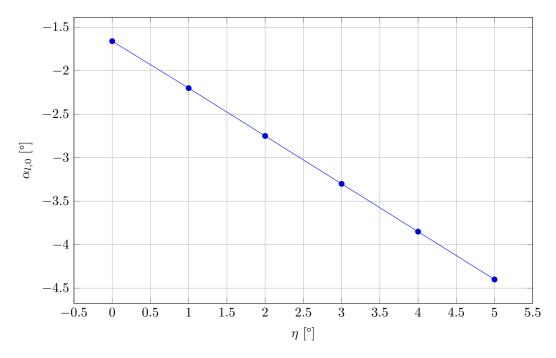


Figure 4: Eficiencia del flap

El pendiente de la curva resultante nos da el factor de eficiencia:

$$\frac{\delta\alpha_{l,0}}{\delta\eta} = -0.548$$

#### 2 Validación

Basándonos en el análisis anterior y usando el mismo perfil NACA, calculamos la pendiente de sustentación, el ángulo de ataque de sustentación nula  $(\alpha_{l,0})$  y el coeficiente de momento respecto del centro aerodinàmico  $(c_{m,LE})$ :

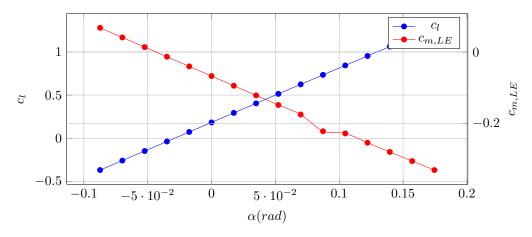


Figure 5: Distribución full cosine

Del gráfico obtenemos los siguientes resultados:

$$c_{l,\alpha} = 6.294 \approx 2\pi = 6.2832$$
  
 $\alpha_{l,0} = -0.0280 rad$   
 $c_{m,0} = -0.0436$ 

La pendiente de sustentación es prácticamente igual a  $2\pi$ , y además el cociente entre la pendeinte de la curva de coeficiente de momento y el coeficiente de sustentación resulta ser:

$$\frac{1.537}{6.294} = 0.244$$

Esto es aproximadamente igual a 0.25, es decir,  $\frac{1}{4}$  de la cuerda, posición en la que se encuentra el centro aerodinámico. Con estos datos opdemos concluir que la teoria de perfiles delgados es acertada. Del NACA report 460 obtenemos los siguientes resultados:

$$c_{l,\alpha} = 5.2$$

$$\alpha_{l,0} = -0.035 rad$$

$$c_{m,0} = -0.03$$

## 3 Discusión

Como se puede ver en las gráficas que aparecen a continuación, al aumentar la curvatura máxima y al retrasar la posición en la que se encuentra, podemos observar que las rectas de sustentación se desplazan hacia arriba, mientras que las de los momentos bajan, manteniéndose su pendiente constante. Esto se traduce en un aumento del  $c_{l,0}$ , en una reducción del  $\alpha_{l,0}$  y en un incremento

negativo de  $c_{m,0}$ . No obstante, estos incrementos son muy pequeños cuando retrasamos la posición de la combadura máxima. Cuando aumentamos la curvatura máxima, aumentamos la velocidad máxima que alcanzará el flujo en el extradós, creando un pico de succión mayor, y aumentando la diferencia de presiones, por lo que obtenemos una sustentación más grande. Esto también aumenta el momento que actúa sobre el ala debido a que estamos aumentando el módulo de la fuerza que lo provoca. Por otro lado, si retrasamos el punto de combadura máxima, estaremos variando el brazo de palanca que provocará el momento.

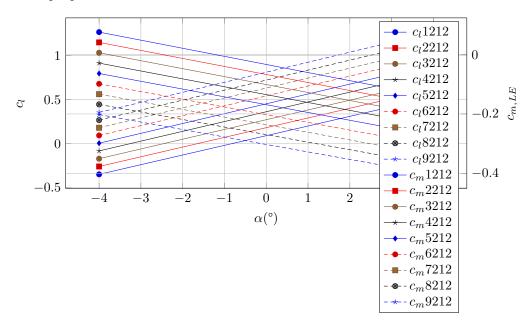


Figure 6:  $c_l$  y  $c_{m,0}$  manteniendo p fija y variando f

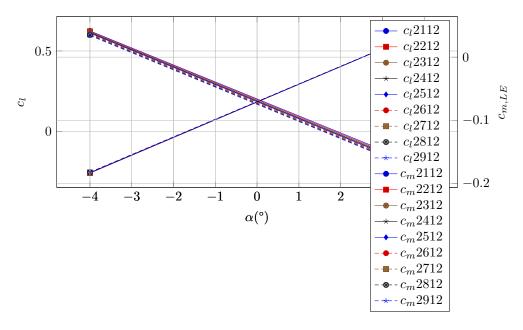


Figure 7:  $c_l$  y  $c_{m,0}$  manteniendo f fija y variando p

# 4 Apéndice: Código

```
function camberLine = airfoil (NACA, flapPosition, flapAngle, nPanels, distribution)
      \% AIRFOIL Define the camber line of an airfoil with an optional flap
                 {\tt airfoil} \, (NACA, \ flap Position \, , \ flap Angle \, , \ nPanels \, , \ distribution)
                NACA: NACA 4-digit designation
      %
                 flapPosition: flap position as a fraction of 1, use 1 for no flap
                 flapAngle: flap angle in degrees
                 nPanels: number of panels
                 distribution: \ panel \ distribution \ along \ the \ X \ axis \, , \ can \ be \ `linear' \ or \ `fullCosine' \, ,
                 defaults to 'linear'
      % Parse input data
maxCamber = str2double(NACA(1))/100;
      maxCamberPos = str2double(NACA(2))/100;
nPoints = nPanels + 1;
       % Prepare the result vectors
     X = zeros(1, nPoints);
      Z = zeros(1, nPoints);
if ~strcmp(distribution, 'fullCosine')
% distribute control points linearly
                X = linspace(0, 1, nPoints);
      end
23
       for i = 1:nPoints
                 if strcmp(distribution, 'fullCosine')
                     % Calculate X according to the number of panels
                     X(i) = (1/2) * (1-\cos(pi*(i-1)/nPanels));
27
                % Calculate Z using NACA equations for a cambered 4-digit airfoil
29
                 if (X(i) \le maxCamberPos)
                          Z(i) = (\max Camber/\max CamberPos^2)*(2*\max CamberPos*(X(i))-(X(i))^2);
                          Z(\,i\,)\,=\,(maxCamber/(1-maxCamberPos\,)^2)^*(1-2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos^*(X(\,i\,)\,)-(X(\,i\,))^2)^*(1-2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*maxCamberPos+2^*m
                 ))^2);
                 end
                \% Rotate by flapAngle degrees if this panel is part of the flap
                 if (X(i) >= flapPosition)
                          Z(i) = Z(i) - tand(flapAngle) * (X(i) - flapPosition);
      end
39
      camberLine = [X; Z];
```

airfoil.m

```
function [ circulation, cl, cmLE ] = DVM(camberLine, angleOfAttack)
           nPanels = size(camberLine, 2) - 1;
           vortices = zeros(2, nPanels);
           controlPoints = zeros(2, nPanels);
           % We need to at least compute the vortices' positions beforehand,
        % or not all of them be defined in the inner loop
           for i = 1:nPanels
                              length \, = \, sqrt \, ((camber Line \, (1 \, , \ i+1) \, - \, camber Line \, (1 \, , \ i)) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, (camber Line \, (2 \, , \ i+1) \, - \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, i) \, \widehat{\phantom{a}} \, 2 \, + \, i) \,
                               camberLine(2, i)^2;
                              angle = atand((camberLine(2, i+1) - camberLine(2, i))) / (camberLine(1, i+1) - camberLine(1, i+1))
                              camberLine (1\,,\ i\,)\,)\,)\,;
                               vortices(1, i) = camberLine(1, i) + 0.25*length*(cosd(angle));
                              vortices(2, i) = camberLine(2, i) + 0.25*length*(sind(angle));
                              end
17 % We can now calculate the circulation
```

```
influenceCoefficients = zeros(nPanels, nPanels);
  RHS = zeros(nPanels, 1);
   for i = 1:nPanels
       \% Find the unit normal vector at this control point
        d = zeros(2, 1);
        d(1) = (camberLine(1, i+1) - (camberLine(1, i)));
        d(2) = (camberLine(2, i+1) - (camberLine(2, i)));
        unitTangentVector = zeros(2, 1);
25
         \begin{array}{l} \mbox{unitTangentVector}(1) = \mbox{d}(1) \ / \ \ \mbox{sqrt}(\mbox{d}(1) \ \ ^2 + \mbox{d}(2) \ \ ^2); \\ \mbox{unitTangentVector}(2) = \mbox{d}(2) \ / \ \mbox{sqrt}(\mbox{d}(1) \ \ ^2 + \mbox{d}(2) \ \ ^2); \\ \end{array} 
27
        unitNormalVector = zeros(2, 1);
        unitNormalVector(1) = -unitTangentVector(2);
        unitNormalVector(2) = unitTangentVector(1);
        for j = 1:nPanels
31
             % Compute the induced velocity at i due to a lumped tortex at j
             d(1) = controlPoints(1, i) - vortices(1, j);
             d(2) = controlPoints(2, i) - vortices(2, j);
             r = sqrt(d(1)^2 + d(2)^2);
35
             inducedVelocity = zeros(2, 1);
             induced Velocity (1) \, = \, 1/(2 \, \stackrel{\longleftarrow}{r} \, pi \, \stackrel{\longleftarrow}{)} \, \stackrel{\ast}{*} \, d(2)/r \, \stackrel{\frown}{\sim} 2;
             inducedVelocity(2) = -1/(2*pi) * d(1)/(r)^2;
             % Compute the influence coefficients
30
             influenceCoefficients(i, j) = inducedVelocity(1) * unitNormalVector(1) +
        inducedVelocity(2) * unitNormalVector(2);
       RHS(i) = -((cosd(angleOfAttack) * unitNormalVector(1)) + (sind(angleOfAttack) *
        unitNormalVector(2)));
   circulation = influenceCoefficients \ RHS;
45 % Compute the lift coefficients
   cl = 2 * sum(circulation);
  % Compute the moment coefficient about the leading edge
   sumArray = zeros(nPanels, 1);
   for i = 1:nPanels
       sumArray(i) = circulation(i) * vortices(1, i) * cosd(angleOfAttack);
  end
   cmLE = -2 * sum(sumArray);
```

#### DVM.m

```
function [ clArray, clErrorArray, cmLEArray, nPanels ] = verification_helper(distribution)
     clReference = 0.63590677;
    NACA = '2212';
     angleOfAttack = 4;
     flap Position \, = \, 1;
     flapAngle = 0;
     clArray = [];
     clErrorArray = [];
     cmLEArray = [];
     nPanels = [];
     iPanels = 4;
     while (iPanels <= 256)
       camberLine = airfoil (NACA, flapPosition, flapAngle, iPanels, distribution);
       [ \  \, circulation \; , \; \, cl \; , \; \, cmLE \; \, ] \; = DVM(camberLine \, , \; \, angleOfAttack) \, ;
       clArray = [ clArray; cl ];
       clErrorArray = [ clErrorArray; (abs(cl-clReference))/clReference*100 ];
18
       cmLEArray = [ cmLEArray; cmLE ];
nPanels = [ nPanels; iPanels ];
       iPanels = iPanels * 2;
     end
  end
```

verification helper.m

```
[ clLinear, clErrorLinear, cmLELinear, nPanels ] = verification_helper('linear');
[ clFullCosine, clErrorFullCosine, cmLEFullCosine, nPanels ] = verification_helper('fullCosine');
csvwrite('data/cl_convergence.csv', [ nPanels clLinear clFullCosine clErrorLinear clErrorFullCosine ]);
```

#### verification.m

```
NACA = '2212';
   angleOfAttack = 4;
   flapPosition = 1;
   flapAngle = 0;
   distribution = 'fullCosine';
   nPanels = 128;
   clArray1 = [];
   clArray2 = [];
   cmLEArray1 = [];
cmLEArray2 = [];
12 NACAArray = [];
14 % Fixing f
   \quad \mathbf{for} \quad \mathbf{i} \ = \ 1\!:\!9
     NACA(1) = num2str(i);
      camberLine = airfoil(NACA, flapPosition, flapAngle, nPanels, distribution);
     \% Compute cl and cmLE for -4 and 4 degrees so we can draw a line
      [ \  \, \text{circulation} \,\, , \,\, \, \text{cl} \,\, , \,\, \text{cmLE} \,\, ] \,\, = DVM(\, \text{camberLine} \,, \,\, -4) \,;
      clArray1 = [clArray1 cl];
      cmLEArray1 \, = \, \left[ \begin{array}{c} cmLEArray1 \, cmLE \end{array} \right];
      [ \  \, \text{circulation} \,\, , \,\, \, \text{cl} \,\, , \,\, \text{cmLE} \,\, ] \,\, = DVM(\, \text{camberLine} \,, \,\,\, 4) \,;
      clArray2 = [ clArray2 cl];
      cmLEArray2 = [ cmLEArray2 cmLE ];
     NACAArray = [ NACAArray str2double(NACA) ];
   end
_{28} NACA = '2212';
    % Fixing p
   for i = 1:9
     NACA(2) = num2str(i);
      camberLine = airfoil (NACA, flapPosition, flapAngle, nPanels, distribution);
     \% Compute cl and cmLE for -4 and 4 degrees so we can draw a line
      [ circulation, cl, cmLE ] = DVM(camberLine, -4);
      clArray1 = [clArray1 cl];
     cmLEArray1 \, = \, \left[ \begin{array}{cc} cmLEArray1 \ cmLE \end{array} \right];
      [ circulation, cl, cmLE ] = DVM(camberLine, 4);
      clArray2 = [ clArray2 cl];
     cmLEArray2 \, = \, \left[ \begin{array}{cc} cmLEArray2 \end{array} \, cmLE \, \right];
     NACAArray = [ NACAArray str2double(NACA) ];
   csvwrite('data/discussion.csv', [ NACAArray; clArray1; clArray2; cmLEArray1; cmLEArray2 ])
```

discussion.m