Especificação e Documentação da AV3

Participantes:

- Jadson Mendes Barbosa – 12723118224
- Ian Davi Menezes Alves Bomfim – 12723134435
- Ian Freire Borges - 12723134698

1. Introdução

As cadeias de Markov são modelos matemáticos utilizados para representar processos estocásticos, nos quais a previsão do próximo estado depende apenas do estado atual, e não dos estados anteriores. Esse conceito é amplamente aplicado em diversas áreas, como estatística, ciência de dados, finanças, engenharia, biologia e inteligência artificial. Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um programa em Julia capaz de simular cadeias de Markov de qualquer tamanho, oferecendo uma ferramenta prática para visualizar a evolução dos estados e o comportamento estacionário dos sistemas modelados.

2. Objetivo

O objetivo deste projeto é implementar uma simulação computacional de cadeias de Markov utilizando a linguagem Julia, permitindo que o usuário:

- Modele matrizes de transição de forma manual (NxN) ou selecione matrizes padrão pré-configuradas.

- Defina a distribuição inicial dos estados do sistema.

- Realize simulações que mostram a evolução dos estados ao longo de várias interações.

- Visualize o comportamento dinâmico e a tendência estacionária da cadeia de Markov.

Além disso, o projeto visa reforçar o entendimento teórico dos conceitos relacionados às cadeias de Markov, aplicando-os na prática computacional.

3. Escopo

O escopo deste projeto contempla:

- Desenvolvimento de um código em Julia capaz de criar e manipular cadeias de Markov de tamanho arbitrário.
- Implementação de um menu interativo que permite ao usuário escolher entre definir a matriz de transição manualmente ou utilizar matrizes padrão (2x2, 3x3 ou 4x4).
- Criação de funcionalidades para definir o vetor de estado inicial conforme as preferências do usuário.
- Execução da simulação por um número escolhido de interações, mostrando a evolução das probabilidades de cada estado em cada passo.
- Impressão dos resultados parciais a cada interação e da distribuição final dos estados.
- Validação de entradas, garantindo que as matrizes de transição respeitem as propriedades matemáticas das cadeias de Markov (soma das linhas igual a 1).
- Entrada dinâmica, o usuário pode pressionar apenas Enter para assumir o valor padrão, facilitando a construção da matriz e acelerando testes e experimentações.

Este projeto tem um caráter didático, voltado para fins acadêmicos, estudo de processos estocásticos e análise de sistemas probabilísticos.

4. Repositório no GitHub

Acesse o repositório em:

https://github.com/ianmenezesss/MarkovJL

5. Resolução Manual de Problemas

Nesta seção estão apresentadas imagens contendo a resolução manual de dois problemas envolvendo cadeias de Markov.

Problema 1 (3x3) – Uma urna contém duas bolas, uma azul e uma vermelha. A cada estágio, uma bola é retirada aleatoriamente e substituída por uma nova bola, a qual tem probabilidade igual a 0,8 de ser da mesma cor da bola retirada. Se inicialmente ambas as bolas são vermelhas, qual é a probabilidade de que a quinta bola selecionada seja vermelha?

Estados:

Estado 0 (S_0) = 0 Bolas vermelhas
Estado 1 (S_1) = 1 Bola Vermelha
Estado 2 (S_2) = 2 Bolas Vermelhas

Matriz de transição (P):

	S_0	S_1	S_2
S_0	0,8	0,2	0
S_1	0,1	0,8	0,1
S_2	0	0,2	0,8

Vetor de estado (V_n):

$$V_n = [P_n(S_0) \quad P_n(S_1) \quad P_n(S_2)]$$

- $P_n(S_0)$: Probabilidade de a urna estar no estado 0 após n etapas
- $P_n(S_1)$: Probabilidade de a urna estar no estado 1 após n etapas
- $P_n(S_2)$: Probabilidade de a urna estar no estado 2 após n etapas

Vetor de estado inicial:

$$V_0 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

Após 1ª etapa (V_1):

$$V_1 = V_0 \times P = [0 \quad 0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = [0 \quad 0,2 \quad 0,8]$$

Após 2ª etapa (V_2):

$$V_2 = [0 \quad 0,2 \quad 0,8] \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} = [0,02 \quad 0,32 \quad 0,66]$$

Após 3ª etapa (V_3):

$$V_3 = [0{,}02 \quad 0{,}32 \quad 0{,}66] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = [0{,}048 \quad 0{,}392 \quad 0{,}560]$$

Após 4ª etapa (V_4):

$$V_4 = [0{,}048 \quad 0{,}392 \quad 0{,}560] \times \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} = [0{,}0776 \quad 0{,}4352 \quad 0{,}4872]$$

Probabilidade de a 5ª bola ser vermelha:

$$P = (P_4(S_0) \cdot 0) + (P_4(S_1) \cdot 0{,}5) + (P_4(S_2) \cdot 1)$$

$$P = (0{,}4352 \cdot 0{,}5) + 0{,}4872$$

$$P = 0{,}2176 + 0{,}4872$$

$$P = 0{,}7048$$

$$\boxed{P = 70{,}48\%}$$

Problema 2 (2x2) – Considere um modelo simplificado de previsão do tempo para os finais de semana, onde o clima pode estar SOL ou CHUVA. As probabilidades de transição entre os estados são dadas pela seguinte matriz:

Linha 1 (SOL):
70% de chance de permanecer SOL no próximo dia.
30% de chance de mudar para CHUVA.

Linha 2 (CHUVA):
60% de chance de mudar para SOL no próximo dia.
40% de chance de permanecer CHUVA.

Se hoje é SÁBADO e está CHUVA Qual a Probabilidade de ter CHUVA na próxima QUINTA?

Matriz de transição

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{SOL} & \text{CHUVA} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{SOL} \\ \text{CHUVA} \end{array} & \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vetor de Estado:

Vetor deo Estado inicial:

$V_0 = [\underbrace{0}_{\text{SOL}} \quad \underbrace{1}_{\text{CHUVA}}]$

Passo 1 (Sábado → Domingo):

$$V_1 = V_0 \times P = [0 \quad 1] \times \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [(0 \cdot 0,7 + 1 \cdot 0,6) \quad (0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4)] = [0,6 \quad 0,4]$$

Passo 2 (Domingo → Segunda):

$$V_2 = [0,6 \quad 0,4] \times \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,66 \quad 0,34]$$

Passo 3 (Segunda → terça):

$$V_3 = [0,66 \quad 0,34] \times \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,666 \quad 0,334]$$

Passo 4 (terça → Quarta):

$$V_4 = [0,666 \quad 0,334] \times \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,6666 \quad 0,3334]$$

Passo 5 (Quarta → Quinta):

$$V_5 = [0,6666 \quad 0,3334] \times \begin{bmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{bmatrix} = [0,66666 \quad \boxed{0,33334}]$$

Portanto, a probabilidade de CHUVA na quinta-feira é 0,33334 ou 33,334%