FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

“ANÁLISIS NUMÉRICO I”
“MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS”

<75.12><95.04><95.13>

DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO

1	2023	Resolucion de sist. de ecuaciones lineales, métodos iterativos
	AÑO	
	2	
TP NRO	CUAT	TEMA

INTEGRANTES DEL GRUPO

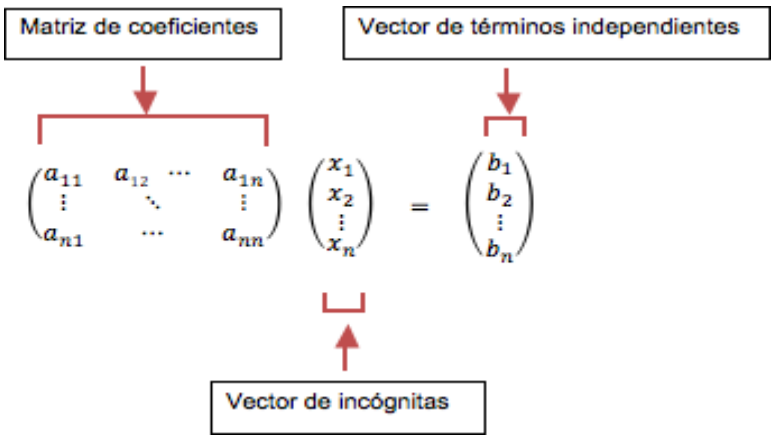
	Ian Mika, Ursino	104509
	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN
	Brayan, EGOAVIL FONSECA	101959
GRUPO	APELLIDO Y NOMBRE	PADRÓN

INTRODUCCIÓN

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas, cuya solución es un conjunto de valores para las incógnitas con el que se satisfacen todas las ecuaciones. Asumimos que los elementos que componen las ecuaciones están definidos en los números reales y que siempre hay el mismo número de ecuaciones y de incógnitas. En consecuencia, el problema consiste en buscarle la única solución al sistema, si existe. La solución de un sistema de ecuaciones lineales se plantea como sigue, en general el conjunto de ecuaciones de la forma.

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots & \\
a_{n1}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{3n}x_n &= b_3
\end{aligned}
$$

Todo sistema de ecuaciones se puede representar en forma matricial, es decir, el sistema se representa como Ax = b, donde A es una matriz (matriz de coeficientes), en este cado de n filas por n columnas, x es un vector columna de n variables (vector de incógnitas) y b es un vector columna de n valores (vector de términos independientes).



En la matriz de coeficientes, el término aij representa el coeficiente que acompaña a la j-ésima incógnita de la i-ésima ecuación. En la matriz de incógnitas, cada término corresponde a una de las n variables que queremos encontrar y en la matriz de términos independientes, sus elementos representan los términos que resultan al reemplazar las variables en el sistema y que hacen ciertas las ecuaciones asociadas al sistema.

DESAROLLO

Para desarrollar los ítems pedidos se utilizará un sistema de ecuacion lineal el cual surge de aplicar el siguiente operador a cada uno de los nodos de la grilla

$$4\,T_{ij} - T_{i-1\,j} - T_{i+1\,j} - T_{i\,j-1} - T_{i\,j+1} = 0 \qquad (1)$$

Ahora aplicando el operador en el dominio cuadrado cuyos lados se dividieron en N donde se podrá obtener una solución aproximada de T en los (N-1) x (N-1) que son los nodos interiores de la grilla obtendremos una matriz de coeficientes rala (que a lo sumo 5 elementos por fila son distintos de cero) además esta matriz presentará una estructura tridiagonal en bloques.

El vector de términos independientes estará dada por los contornos del valor de T que se encuentra impuesta por T_n, T_s, T_w, T_e en cada uno de los bordes.

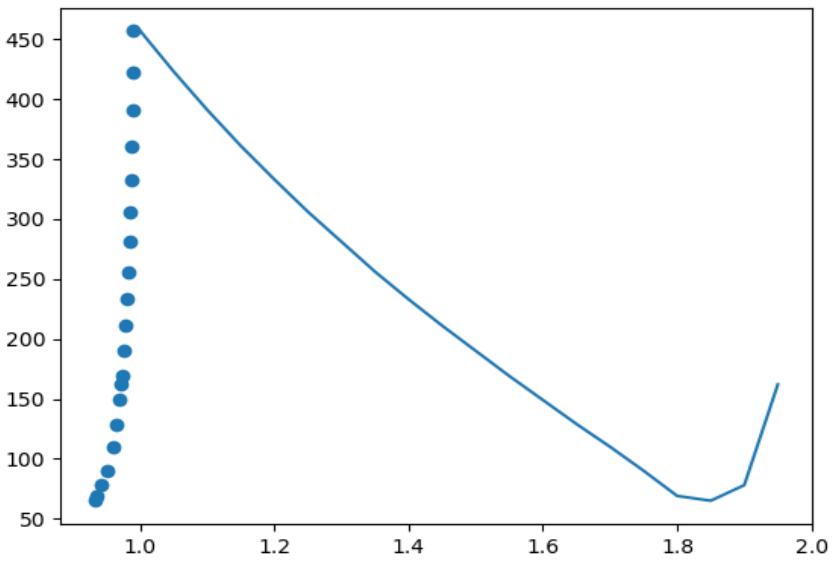
Enunció que la estructura de la matriz no dependerá de la forma de numerar los nodos debido que siempre utilizo como regla general el operador (1), lo único que cambia de estructura será el vector de términos independientes, pero este tampoco hará que cambien los valores del vector de incógnitas

Ya con estos datos, y con la utilización de un programa de lenguaje de programación (Python en este caso), podemos armar la matriz rala (A), el vector de términos de independientes (b) y la solución (T).
Los valores de la matriz, así como el vector independiente y las distintas soluciones obtenidas con el compilador de lenguajes se encontrarán en el Anexo.

Ahora se procederá a obtener soluciones numéricas T las cuales serán obtenidas utilizando el método SOR. Las mismas luego de obtenerse con dos distintas valores de N, $R_{TOL} = 0,01$ y w variable (1.00, 1.05, 1.10, ….., 1.95) se muestran gráficamente.

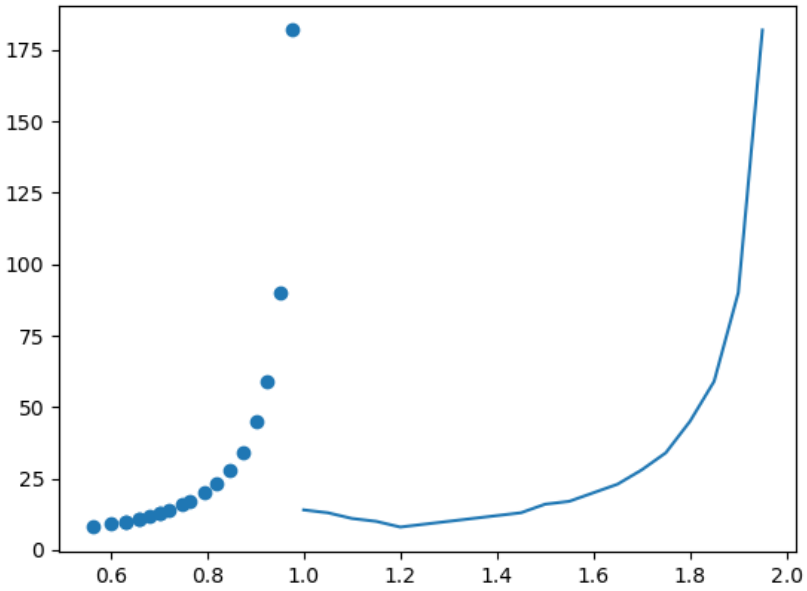
C) La línea continua representa el valor de omega en función de la cantidad de iteraciones. Los puntos representan el valor de p(Tsor) ≈ R^(1/N), donde N es la cantidad de iteraciones que

N=4



se realizaron hasta alcanzar la tolerancia 0.01, para cada valor distinto de omega.

D) Este gráfico representa lo mismo que el del ítem C, excepto que ahora
N=32



E) La matriz A del sistema, para cualquier valor de N (cantidad de lados en las que se separa la grilla) resulta siempre simétrica, tridiagonal en bloques y definida positiva (sus autovalores son todos mayores que cero). Como se cumplen estas condiciones podemos utilizar la formula para calcular el omega óptimo:

$$W_{opt} = \frac{2}{1+\sqrt{1-p(T_{GS})^2}} = \frac{2}{1+sen(\pi/N)}$$

donde $p(T_{GS}) = cos^2(\pi/N)$. Otra ecuación que vincula todo esto es:

$$p(T_{SOR}) = W_{opt} - 1 < p(T_{GS})$$

Para N=4 resulta que el omega óptimo es Wopt = 1,17 aproximadamente, $p(T_{GS})$ =0,5 y
$p(T_{SOR})$= Wopt - 1 = 0.17 < 0.5. Se puede ver que se cumple la inecuación de arriba

Para N=32 resulta que el omega óptimo teórico es Wopt = 1,82 aproximadamente, $p(T_{GS})$ = 0,99 y

$p(T_{SOR})$= Wopt - 1 = 0.82 < 0.99. Se puede ver que en este caso también se cumple la inecuación.

CONCLUSIÓN

En ambos casos observamos que la estimacion empirica para $p(T_{SOR})$ converge a uno, a medida que el número de iteraciones hasta alcanzar la tolerancia va aumentando, y comparandolo con el valor teórico, podemos concluir que: Para un valor de N (cantidad de lados en los que se separa la grilla) chico, no resulta una buena estimación, pero como para N=32 resulto una aproximación considerablemente más cercana, se puede estimar que a medida que N aumenta, la aproximación mejora.

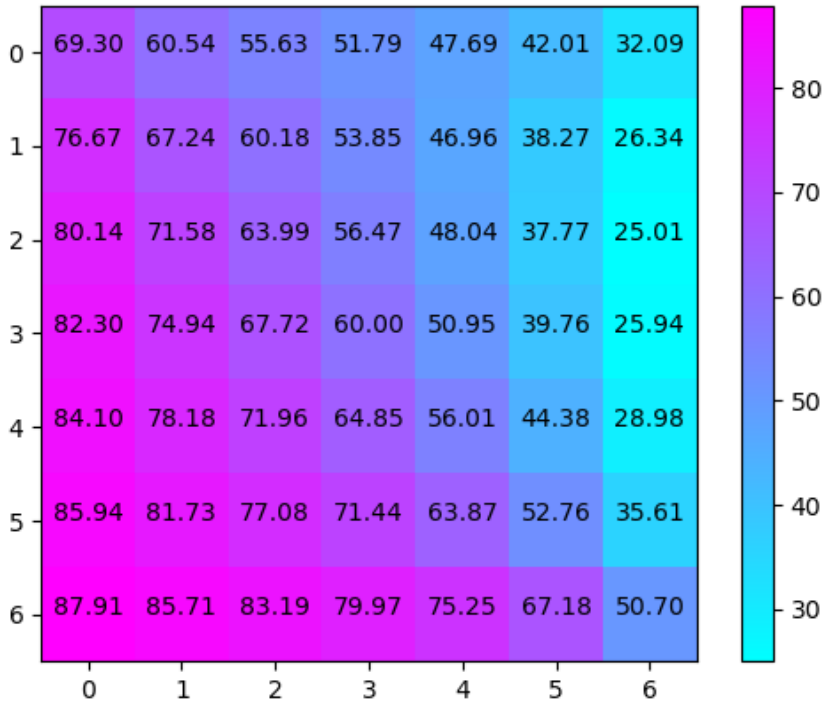
Los valores observados de Wopt en los gráficos, corresponden a sus respectivos valores teóricos, pero los valores estimados de T_{SOR} mediante la fórmula tienen errores considerables respecto del teórico, de manera que la inecuación que relacion Wopt, T_{SOR} y T_{GS} no se cumplirá.

Parte 2:

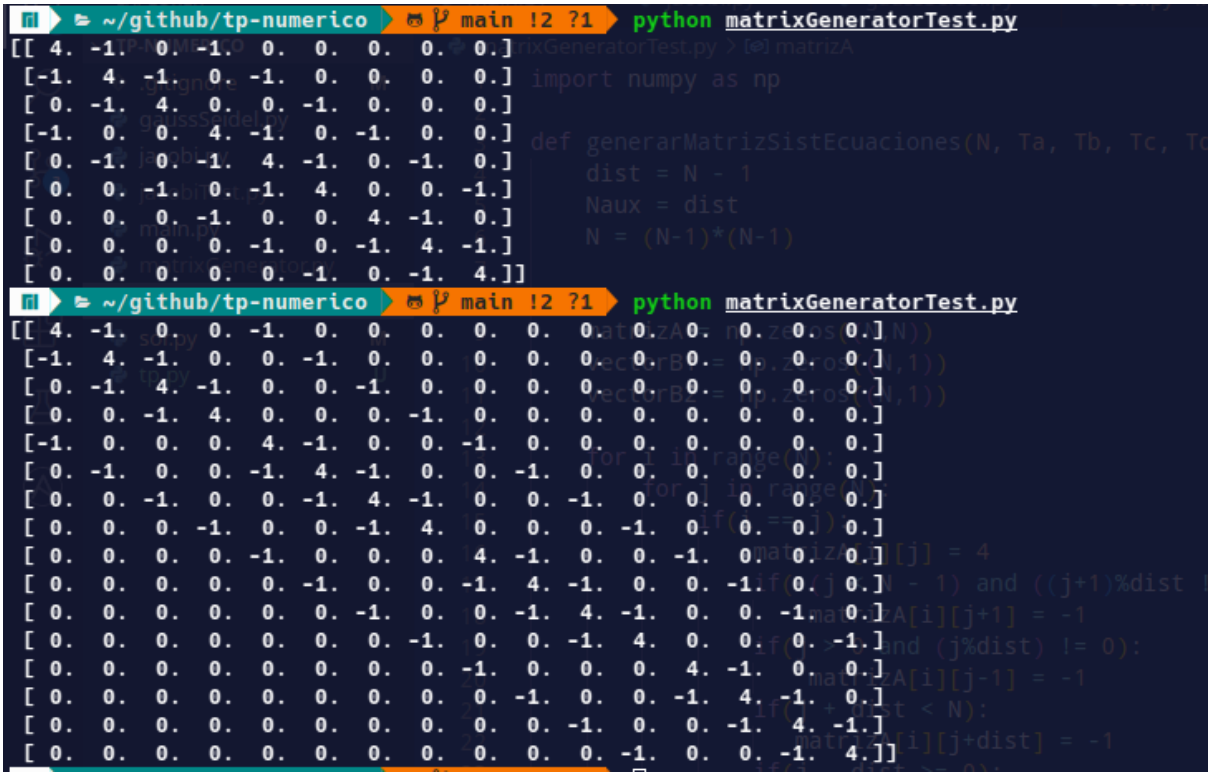
Utilizando el padrón 101959, los valores de las temperaturas resultan:

Tn = 10, Ts = 90, Tw = 50, Te = 90,

En este caso, Wopt = 1,446. A continuación se presenta el gráfico con los valores de temperatura calculados en cada nodo de la grilla, nuevamente mediante el método SOR.



ANEXO



Se muestra como queda la matriz A para dos valores distintos de N. La generación de la matriz A (para cualquier valor de N) se realizó observando su estructura a medida que variaba N. Esto se hizo para poder pasarla como argumento a la función que aplica el método SOR. La matriz superior es para N=4 y la inferior para N=5.

Se muestra como quedan los vectores independientes para dos valores de N distintos. La generación de estos vectores se realizó observando como cambia su estructura a medida que aumenta N. En este caso, 1, 2, 3 y 4 representan Tw, Te, Ts y Tn respectivamente.