P - 11/3/2023

08 March 2023 19:31

1. Uma moeda apresenta cara duas vezes mais frequentemente que coroa. Essa moeda é lançada três vezes e X é a variável aleatória que representa o número total de caras que ocorreram.
   (a) Determine a função de probabilidade de X e represente-a graficamente.
   (b) Determine a função distribuição de X e represente-a graficamente.
   (c) Qual é a probabilidade de só saírem caras nos três lançamentos? E de saírem, no máximo, duas caras?

a)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	1/27	6/27	12/27	8/27

$c = 2\bar{c}$ e $c + \bar{c} = 1 \Rightarrow 2\bar{c} + \bar{c} = 1 \Leftrightarrow \bar{c} = \frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{2}{3}$

$0 \rightarrow \bar{c}\,\bar{c}\,\bar{c} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$1 \rightarrow c\,\bar{c}\,\bar{c} + \bar{c}\,c\,\bar{c} + \bar{c}\,\bar{c}\,c = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{27}$

$2 \rightarrow c\,c\,\bar{c} + \bar{c}\,c\,c + c\,\bar{c}\,c = \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{12}{27}$

$3 \rightarrow c\,c\,c = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/27, & 0 \leq x < 1 \\ 7/27, & 1 \leq x < 2 \\ 19/27, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

c) $P(ccc) = \frac{8}{27} = 0{,}2963$ $\quad P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{19}{27} = 0{,}7037$

2. Suponha que o número de computadores utilizados diariamente numa determinada empresa é uma variável aleatória X com função de probabilidade,

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} \frac{k2^x}{x!} & \text{se} \quad x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{se} \quad \text{caso contrário} \end{cases}.$$

   (a) Determine o valor de k, justificando a sua resposta.
   (b) Defina a função distribuição de X.
   (c) Qual deverá ser o número mínimo de computadores disponíveis no ínicio de cada dia para que a procura diária seja satisfeita com uma probabilidade de pelo menos 0.8?
   (d) Qual é o número médio de computadores utilizados diariamente naquela empresa? E o desvio padrão?

a) $\sum_{x=1}^{4} \frac{k2^x}{x!} = 1, \quad \frac{k2^1}{1!} + \frac{k2^2}{2!} + \frac{k2^3}{3!} + \frac{k2^4}{4!} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k + 2k + \frac{4k}{3} + \frac{2k}{3} = 1 \Leftrightarrow 6k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{6}$

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/3, & 1 \leq x < 2 \\ 2/3, & 2 \leq x < 3 \\ 8/9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$1 \rightarrow \frac{\frac{1}{6} \times 2^1}{1} = \frac{1}{3}$ $\quad 2 \rightarrow \frac{\frac{1}{6} \times 2^2}{2} = \frac{1}{3}$ $\quad 3 \rightarrow \frac{\frac{1}{6} \times 2^3}{6} = \frac{2}{9}$ $\quad 4 \rightarrow \frac{\frac{1}{6} \times 2^4}{24} = \frac{1}{9}$

c) $\frac{2}{3} < 0{,}8$ ~~X~~

$\frac{8}{9} > 0,8 \Rightarrow 3$ computadores.

d) $E(X) = \sum_{x \in S} xP(X=x) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = \frac{19}{9} = 2,1$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1/3 + 4/3 + 18/9 + 16/9 - (2,1)^2} = 1,017$

3. A função distribuição de uma variável aleatória (v.a.) X é

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0.5 & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0.6 & \text{se} \quad 1 \leq x < 2 \\ 0.8 & \text{se} \quad 2 \leq x < 3 \\ 0.9 & \text{se} \quad 3 \leq x < 3.5 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 3.5 \end{cases}.$$

(a) Represente graficamente $F(x)$.

(b) Justifique que a v.a. X é discreta e calcule a sua função de probabilidade.

(c) Calcule: $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$, $P(X \geq 3)$, $P(2.5 \leq X \leq 4)$, $P(X \geq 3.5)$ e $P(2.5 \leq X \leq 4 / X \geq 1)$.

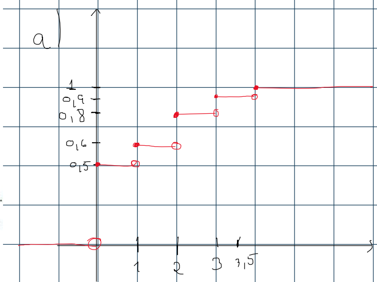
(d) Calcule $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ e $\sigma(X)$.

(e) Considere a v.a. $Y = X - 1.15$.

i. Calcule $P(Y \leq 1)$.

ii. Compare as v.a.'s X e Y, em termos de valor esperado e variância.

a)



b)

x_i	0	1	2	3	3,5
$f(x_i)$	0,5	0,1	0,2	0,1	0,1

c) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 0,6$

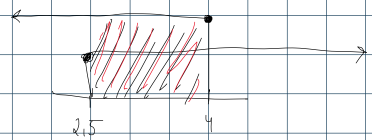
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0,4$

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0,2$

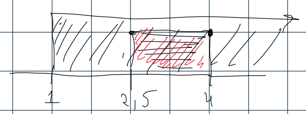
$P(2,5 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \geq 2,5) =$

$= P(X \leq 4) - 0,8 =$ gráfico

$= 1 - 0,8 = 0,2$



$P(2,5 \leq X \leq 4 / X \geq 1) = \frac{P(2,5 \leq X \leq 4 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} =$



$= \frac{P(2,5 \leq X \leq 4)}{1 - P(X \leq 0)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$

d) $E(X) = 0 \times 0,5 + 1 \times 0,1 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 + 3,5 \times 0,1 = 1,15$

$V(X) = 0^2 \times 0,5 + 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,2 + 3^2 \times 0,1 + 3,5^2 \times 0,1 - 1,15^2 = 1,7025$

$\sigma(X) = \sqrt{1,7025} = 1,3048$

e) i) $P(Y \leq 1) = P(X - 1,15 \leq 1) = P(X \leq 2,15) = 0,8$

ii) $E(Y) = E(X) - 1,15 \Leftrightarrow E(Y) = 0$

$V(Y) = V(X - 1,15) = V(X) = 1,7025$

4. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	$m-1$	m	$m+3$	$m+5$
$P(X=x_i)$	$\frac{k+1}{8}$	$\frac{k}{8}$	$\frac{k-1}{8}$	$\frac{k}{8}$

(a) Determine as constantes k e m sabendo que $E(X) = \frac{1}{4}$.

(b) Calcule $E(X-2)$ e $V(3X-2)$.

(c) Obtenha a função distribuição da v.a. X.

(d) Calcule: $P(X \le -5)$, $P(X \le -1)$, $P(-1 < X \le 3)$, $P(X \ge 4)$, $P(X < 4)$ e $P(X \le 6)$.

a) $\frac{k+1+k+k-1+k}{8} = 1 \Leftrightarrow \frac{4k}{8} = 1 \Leftrightarrow k = 2$

$\frac{1}{4} = \frac{3\,\cancel{m-3}}{8} + \frac{m}{4} + \frac{m+3}{8} + \frac{m+5}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} = \frac{8m+10}{8} \Leftrightarrow m = -1$

b) $E(X-2) = E(X) - 2 = \frac{1}{4} - 2 = -1{,}75$

$V(3X-2) = 3^2 V(X) = 9\left((-2)^2 \times 3/8 + (-1)^2 \times 1/4 + 2^2 \times 1/8 + 4^2 \times 1/4 - (1/4)^2\right) = 55{,}6875$

c)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 3/8, & -2 \le x < -1 \\ 5/8, & -1 \le x < 2 \\ 3/4, & 2 \le x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

d) $P(X \le -5) = 0$

$P(X \le -1) = 5/8$

$P(-1 < X \le 3) = P(X \le 3) - P(X > -1) = 6/8 - (1 - P(X \le -1)) = 6/8 - 5/8 = 1/8$

$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \le 2) = 2/8$

$P(X < 4) = P(X \le 2) = 3/4$

$P(X \le 6) = 1$

5. Seja X uma variável aleatória discreta definida por:

x_i	-2	-1	0	1	2
$p(x_i)$	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{15}$	k	$\frac{1}{3}$

(a) Determine o valor de k por forma a que p seja lei de probabilidade de X.

(b) Deduza a função distribuição de X.

(c) Calcule o valor médio e a variância de X.

(d) Calcule o valor de $P(X^2 = 4/X \le 1)$.

a) $\frac{1}{3} + k + \frac{1}{15} + k + \frac{1}{3} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{2}{15}$

b)
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2 \\ 1/3, & -2 \le x < -1 \\ 7/15, & -1 \le x < 0 \\ 8/15, & 0 \le x < 1 \\ 10/15, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

c) $E(X) = \cancel{-2 \times \frac{1}{3}} \cancel{-1 \times \frac{2}{15}} + \cancel{1 \times \frac{2}{15}} + \cancel{2 \times \frac{1}{3}} = 0$

$$\nabla(x) = \left((-2)^2 \times 1/3 + (-1)^2 \times 2/15 + 1^2 \times 2/15 + 2^2 \times 1/3 \right) - 0^2 = 2{,}93$$

d) $$P(X^2 = 4 / X \leq 1) = \frac{P[(X=-2 \vee X=2) \cap X \leq 1]}{P(X \leq 1)} = \frac{P[(X=-2 \cap X \leq 1) \vee \cancel{(X=2 \cap X \leq 1)}]}{P(X \leq 1)} =$$

$$= \frac{P(X=-2)}{P(X \leq 1)} = \frac{1/3}{1/3 + 2/15 + 1/15 + 2/15} = \frac{1}{2}$$