Exame ME - normal

25 June 2021 16:19

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
EXAME DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS - Época normal

28 de Junho de 2021 **Versão 101** Duração: 2h00min

Na resolução de todas as questões que **não sejam** de escolha múltipla justifique todos os cálculos e deduções.

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.6$ e $P(\overline{B}/A) = \frac{1}{3}$. O valor de $P(A \cap B)$ é

(A) 0.18 **(B)** 0.42 **(C)** 0.40 **(D)** 0.80

$P(\overline{B}/A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - P(B/A) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow P(B/A) = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{2}{3} P(A)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.4 \longrightarrow$ OPÇÃO (C)

2. Um estudante vai realizar 3 exames. Se a probabilidade de ter nota positiva em cada um for de $\frac{1}{2}$ e os resultados forem independentes, calcule a probabilidade do estudante ter nota positiva:

(a) em pelo menos um exame;

(b) em todos os exames.

a) $\mathcal{E}$ = "O estudante realiza um exame e anota a sua classificação"

Repete $\mathcal{E}$ 3 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de exames, em 3, em que teve nota positiva"

$X \sim B(3, \frac{1}{2})$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.125 = 0.875$

b) $P(X = 3) = 0.125$

3. O número de defeitos por artigo produzido numa certa linha de produção segue uma distribuição de *Poisson* de valor esperado 0.01. Para serem distribuídos, esses artigos são embalados em caixas de 10 unidades.

(a) A probabilidade de um qualquer artigo apresentar defeitos é

(A) 0.9048 **(B)** 0.9900 **(C)** 0.0952 **(D)** 0.0100

(b) A probabilidade de, numa caixa, no máximo 1 artigo ser defeituoso é

(A) 0.0956 **(B)** 0.0013 **(C)** 0.9044 **(D)** 0.9957

Ex3:

X = "nº de defeitos por artigo produzido numa linha de produção"

$E(X) = 0.01$; $X \sim \mathcal{P}(0.01)$; Cada caixa tem 10 artigos

a) $P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.99 = 0.01 \longrightarrow$ OPÇÃO (D)

b) $\mathcal{E}$ = "Inspecionar 1 artigo da caixa e registar o seu estado"

Repetir $\mathcal{E}$, 10 vezes, sempre nas mesmas condições

Y = "nº de artigos na caixa que são defeituosos"

$Y \sim B(10, P(X>0)) = B(10, 0.01)$

$P(Y \leq 1) = 0.9957$

$\downarrow$

OPÇÃO (D)

(3.0) **4.** Numa fábrica, há três linhas de produção de um artigo (X), sendo que o artigo é classificado quanto ao acabamento (Y), de acordo com a seguinte tabela:

X \ Y	1	2	Total
1	0.06	b	0.25
2	0.04	c	e
3	a	d	0.4

(a) Sabendo que $P(Y = 1/X = 3) = 0.125$, complete a tabela.

(b) Sabendo que um artigo foi produzido na linha de produção 1, determine a probabilidade de ter sido classificado quanto ao acabamento com 1.

(c) A classificação média do acabamento do artigo é

(A) 2.00 **(B)** 2.15 **(C)** 1.85 **(D)** Nenhuma das anteriores

(Embora esta questão seja de escolha mútipla, indique todos os cálculos que efetuar)

a)

$b = 0.25 - 0.06 = 0.19$; $e = 1 - 0.4 - 0.25 = 0.35$

$c = 0.35 - 0.04 = 0.31$; $a + d = 0.4$; $\dfrac{P(Y=1 \cap X=3)}{P(X=3)} = 0.125$

$\Leftrightarrow a = 0.125 \times 0.4$

$\Leftrightarrow a = 0.05$

$d = 0.4 - 0.05 = 0.35$

b) $P(Y=1 / X=1) = \dfrac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)} = \dfrac{0.06}{0.25} = 0.24$

c)

y	1	2	cc
P_y	0.15	0.85	0

$E(Y) = 1 \times 0.15 + 2 \times 0.85 = 1.85 \longrightarrow$ opção (c)

Teste 2-Versão 101

5. Considere que o tempo de viagem de autocarro entre Coimbra e Lisboa segue uma distribuição Uniforme entre 100 a 120 minutos.

(a) Sabendo que, por motivo de obras na autoestrada, o tempo de viagem irá ser superior a 110 minutos, a probabilidade do autocarro terminar a viagem no máximo ao fim de 115 minutos será

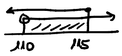
(A) 0.25 **(B)** 0.5 **(C)** 0.75 **(D)** 0.6667

(b) Numa amostra aleatória de 31 viagens, qual a probabilidade de a média dos tempos de viagem ser inferior a 112 minutos?

$X =$ "tempo de viagem de autocarro entre Coimbra e Lisboa"

$X \sim U_{[100,120]} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{20} \mathbb{1}_{[100,120]}(x)$

a) $P(X \le 115 / X > 110) = \dfrac{P(X \le 115 \cap X > 110)}{P(X > 110)} = \dfrac{\int_{110}^{115} \frac{1}{20}\, dx}{1 - P(X \le 110)} = \dfrac{\frac{5}{20}}{1 - \int_{100}^{110} \frac{1}{20}\, dx}$



$= \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \longrightarrow$ opção (B)

b) $X_1, \dots, X_{31}$ amostra aleatória de X $\Rightarrow$ X_i são i.i.d com $X \sim U_{[100,120]}$

$P(\bar{X} < 112) = ?$

Como $n > 30$, pelo T.L.C,

$\dfrac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ em que $E(\bar{X}) = E(X) = \frac{100+120}{2} = 110$

$V(\bar{X}) = \dfrac{V(X)}{31} = \dfrac{\frac{100}{3}}{31} = \dfrac{100}{93}$

$V(X) = \dfrac{(120-100)^2}{12}$

então $\dfrac{\bar{X} - 110}{\sqrt{\frac{100}{93}}} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

$\Leftrightarrow \bar{X} \overset{a}{\sim} \mathcal{N}(110,\ 1.037)$

$P(\bar{X} \le 112) \simeq$ normalCdf$(-\infty, 112, 110, 1.037) = 0.9731$

$\bar{X}$ é contínua

6. Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo que vai ser lançado no próximo mês gasta em média 9.7 litros aos 100 km, em circuito urbano, com desvio padrão de 1 litro. Admita que o consumo segue uma distribuição Normal.

(a) A probabilidade de, numa amostra aleatória de 20 automóveis, o gasto médio ser superior a 10 litros é, com 2 casas decimais, igual a

(A) 0.38 **(B)** 0.91 **(C)** 0 **(D)** 0.09

(b) Qual a deverá ser a dimensão da amostra para obter, com pelo menos 90% probabilidade, um gasto médio inferior a 10 litros?

a) X = "consumo aos 100 km de um automóvel que será lançado no mercado"

$X \sim \mathcal{N}(9.7, 1)$

$X_1, \ldots, X_{20}$ amostra aleatória de X , $P(\overline{X} > 10) = ?$

$\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(E(\overline{X}), \sqrt{V(\overline{X})}\right)$ estabilidade do normal X_i são i.i.d com X

$\Leftrightarrow \overline{X} \sim \mathcal{N}\left(9.7, \frac{1}{\sqrt{20}}\right)$ $V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{20} = \frac{1^2}{20}$

então $P(\overline{X} \geqslant 10) = \text{normalcdf}\left(10, \infty, 9.7, \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 0.0898 \simeq 0.09 \rightarrow$ opção (D)

$\overline{X}$ é contínua

b)

$? n \in \mathbb{N}: P(\overline{X} < 10) \geqslant 0.9 \longrightarrow$ de a) sabemos que $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(9.7, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\Leftrightarrow P\Bigg(\underbrace{\frac{\overline{X} - 9.7}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} < \frac{10 - 9.7}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\Bigg) \geqslant 0.9$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}(10 - 9.7) \geqslant \text{invnorm}(0.9, 0, 1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geqslant \frac{1.28}{0.3}$

$\Leftrightarrow n \geqslant \left(\frac{1.28}{0.3}\right)^2$

$\Leftrightarrow n \geqslant 18.20$ e $n \in \mathbb{N}$ logo $\boxed{n = 19}$

7. Um certo nutricionista concebeu um novo programa dietético para as pessoas que têm uma vida profissional muito sedentária. Com este novo programa ele afirma que a perda média de peso, ao fim de um mês, é de 6.1 kg. Para testar a veracidade de tal afirmação, analisaram-se os resultados obtidos por 50 pacientes, tendo-se verificado uma perda média de peso de 3.4 kg.

Admita que a perda de peso segue uma distribuição Normal com um desvio padrão de 1.8 kg.

(a) Com 95% de confiança, concorda com a afirmação do nutricionista relativamente à perda média de peso?

(b) Mantendo todos os dados restantes da questão, sem efetuar cálculos, poderá alterar a sua opinião se considerar um grau de confiança de 90%?

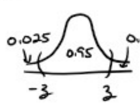
$n = 50$; $\overline{x} = 3.4$ kg

a) $(1-\alpha)\% = 95\%$; X = "perda de peso num mês" ; $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1.8)$

Intervalo de Confiança para μ ao grau 0.95 com σ conhecido

$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ simétrica

$? z \in \mathbb{R}: P(-z < Z < z) = 0.95$



$\Leftrightarrow P(Z < z) = 0.975$

$\Leftrightarrow z = \text{invNorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

$\therefore P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$-1.96 < \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < 1.96 \Leftrightarrow \overline{X} - \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}$

$$-1.96 < \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < 1.96 \iff \bar{X} - \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}$$

O intervalo aleatório para μ ao grau 0.95 com σ conhecido é

$$\left]\bar{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Como $n = 50$; $\bar{x} = 3.4$; $\sigma = 1.8$

Um intervalo de confiança para μ ao grau 0.95 com σ conhecido é

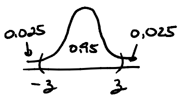
$$\left]3.4 - \frac{1.96 * 1.8}{\sqrt{50}}\ ,\ 3.4 + \frac{1.96 * 1.8}{\sqrt{50}}\right[= \left]2.901,\ 3.899\right[$$

Com uma confiança de 95%, não concordamos com a afirmação da nutricionista pois $6.1 \notin \left]2.901, 3.899\right[$

ou Testar $H_0: \mu = 6.1$ v.s $H_1: \mu \neq 6.1$

ao nível $\alpha = 0.05$

$T = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$



R. Crítica $= \left]-\infty, -1.96\right] \cup \left[1.96, +\infty\right[$

$z: P(Z < z) = 0.975$

$\Rightarrow z = \text{invnorm}(0.975, 0, 1)$

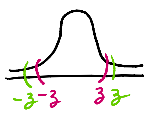
$= 1.96$

Sob a hipótese H_0

$$T = \sqrt{50}\ \frac{3.4 - 6.1}{1.8} = -10.61 \in \text{R. Crítica}$$

logo ao nível de 5% rejeitamos a hipótese de $\mu = 6.1$, ou seja, a esse nível não concordamos com a nutricionista

b) Se o grau de confiança diminuir, mantendo-se as restantes condições



$z \rightarrow 0.95$

$z \rightarrow 0.9$

$\Rightarrow$ a amplitude do intervalo de confiança diminui (a região crítica aumenta), logo sem efetuar cálculos podemos manter a opinião anterior.

se efetuarem teste

$(1-\alpha)$ diminuir $\Rightarrow \alpha$ aumentar

$\Rightarrow$ R.C com maior amplitude

$\Rightarrow T_{H_0}$ continuará na R.C

$\Rightarrow$ manter a decisão

8. Seja X uma variável aleatória real cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido, θ, com $\theta \in]0,1[$. Sabe-se que $E(X) = \frac{\theta}{4}$.

(a) Recolheu-se uma amostra de X, $X_1 X_2, \cdots, X_n$ com $n > 2$. O estimador $T = \frac{nX_1 - 2X_2 - X_n}{2}$ é um estimador cêntrico de θ?

(A) Depende do valor de n **(B)** Não **(C)** Sim

(b) Foi recolhida uma amostra de X, de dimensão 40, cuja média é 0.125. A partir desta amostra calcule uma estimativa cêntrica de θ é

(A) 0.5 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** Nenhuma das anteriores

a) $$E(T) = E\left(\frac{n X_1 - 2X_2 - X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[n E(X_1) - 2E(X_2) - E(X_n)\right]$$

X_i são i.i.d com X, para $i = 1, \dots, n \Rightarrow E(X_i) = \frac{\theta}{4}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n\theta}{4} - \frac{2\theta}{4} - \frac{\theta}{4}\right]$$

$$= \frac{(n-3)\theta}{8} \neq \theta$$ logo T não é cêntrico para estimar θ. → opção (B)

A propriedade do estimador não pode depender da dimensão da amostra.

b) $n = 40$; $\bar{x} = 0.125$

Como $E(X) = \frac{\theta}{4}$, um estimador cêntrico para θ será

$\hat{\theta} = 4\bar{X}$ logo uma estimativa cêntrica será

$$\hat{\theta}_{40} = 4 * 0.125 = 0.5 \rightarrow \text{opção (A)}$$

isec Engenharia

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra

Departamento de Física e Matemática

Licenciatura em Engenharia Informática (LEI, LEI-PL, LEICE)

Exame de Métodos Estatísticos - Época normal

28 de Junho de 2021 **Versão 102** Duração: 2h00min

Na resolução de todas as questões que **não sejam** de escolha múltipla justifique todos os cálculos e deduções.

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.6$ e $P(\overline{B}/A) = \frac{1}{3}$. O valor de $P(A \cap B)$ é

(A) 0.40 **(B)** 0.80 **(C)** 0.18 **(D)** 0.42

$P(\overline{B}/A) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - P(B/A) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow P(B/A) = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{2}{3} P(A)$

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.4 \rightarrow$ OPÇÃO (A)

(2.5) **2.** Um estudante vai realizar 3 exames. Se a probabilidade de ter nota positiva em cada um for de $\frac{1}{2}$ e os resultados forem independentes, calcule a probabilidade do estudante ter nota positiva:

(a) em pelo menos um exame;

(b) num único exame.

a) $\mathcal{E}$ = "O estudante realiza um exame e anota a sua classificação"

Repete $\mathcal{E}$ 3 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de exames, em 3, em que teve nota positiva"

$X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{2})$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.125 = 0.875$

b) $P(X = 1) = 0.375$

(2.5) **3.** O número de defeitos por artigo produzido numa certa linha de produção segue uma distribuição de *Poisson* de valor esperado 0.01. Para serem distribuídos, esses artigos são embalados em caixas de 10 unidades.

(a) A probabilidade de um artigo apresentar defeitos é

(A) 0.9048 **(B)** 0.0952 **(C)** 0.9900 **(D)** 0.0100

(b) A probabilidade de, numa caixa, pelo menos 1 artigo ser defeituoso é

(A) 0.0956 **(B)** 0.0013 **(C)** 0.9044 **(D)** 0.9957

Ex3:

X = "nº de defeitos por artigo produzido numa linha de produção"

$E(X) = 0.01$; $X \sim \mathcal{P}(0.01)$; Cada caixa tem 10 artigos

a) $P(X>0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - 0.99 = 0.01 \longrightarrow$ OPÇÃO (D)

b) $\mathcal{E}$ = "Inspecionar 1 artigo da caixa e registar o seu estado"

Repetir $\mathcal{E}$, 10 vezes, sempre nas mesmas condições

Y = "nº de artigos na caixa que são defeituosos"

$Y \sim B(10, P(X>0)) = B(10, 0.01)$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y \leq 0) = 1 - 0.9044$

$= 0.0956 \longrightarrow$ OPÇÃO (A)

(3.0) **4.** Numa fábrica, há três linhas de produção de um artigo (X), sendo que o artigo é classificado quanto ao acabamento (Y), de acordo com a seguinte tabela:

X \ Y	1	2	Total
1	0.06	b	0.25
2	0.04	c	e
3	a	d	0.4

(a) Sabendo que $P(Y = 1/X = 3) = 0.125$, complete a tabela.

(b) Sabendo que um artigo foi produzido na linha de produção 1, determine a probabilidade de ter sido classificado quanto ao acabamento com 1.

(c) A classificação média do acabamento do artigo é

(A) 2.00 **(B)** 2.15 **(C)** 1.85 **(D)** Nenhuma das anteriores

(Embora esta questão seja de escolha mútipla, indique todos os cálculos que efetuar)

a) $b = 0.25 - 0.06 = 0.19$; $e = 1 - 0.4 - 0.25 = 0.35$

$c = 0.35 - 0.04 = 0.31$; $a + d = 0.4$; $\dfrac{P(Y=1 \cap X=3)}{P(X=3)} = 0.125$

$\Leftrightarrow a = 0.125 \times 0.4$

$\Leftrightarrow a = 0.05$

$d = 0.4 - 0.05 = 0.35$

b) $P(Y=1/X=1) = \dfrac{P(X=1 \cap Y=1)}{P(X=1)} = \dfrac{0.06}{0.25} = 0.24$

c)

y	1	2	cc
P_Y	0.15	0.85	0

$E(Y) = 1 \times 0.15 + 2 \times 0.85 = 1.85 \longrightarrow$ opção (C)

$\longrightarrow$ Teste 2 Versão 102 $\longleftarrow$

(3.0) **5.** Considere que o tempo de viagem de autocarro entre Coimbra e Lisboa segue uma distribuição Uniforme entre 100 a 120 minutos.

(a) Sabendo que, por motivo de obras na autoestrada, o tempo de viagem irá ser superior a 110 minutos, a probabilidade do autocarro não terminar a viagem ao fim de 115 minutos será

(A) 0.2500 **(B)** 0.5000 **(C)** 0.7500 **(D)** 0.6667

(b) Numa amostra aleatória de 31 viagens, qual a probabilidade de a média dos tempos de viagem ser inferior a 112 minutos?

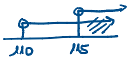
X = "tempo de viagem de autocarro entre Coimbra e Lisboa"

$X \sim U_{[100,120]} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{20} \mathbb{1}_{[100,120]}(x)$

a) $P(X>115 / X>110) = \dfrac{P(X>115 \cap X>110)}{P(X>110)} = \dfrac{\int_{115}^{120} \frac{1}{20}\,dx}{1 - P(X \leq 110)} = \dfrac{\frac{5}{20}}{1 - \int_{100}^{110} \frac{1}{20}\,dx}$

110 115

$= \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \longrightarrow$ opção (B)



$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = 0.5 \longrightarrow \text{opção (B)}$$

b) $X_1, \dots, X_{31}$ amostra aleatória de X $\Rightarrow$ X_i são i.i.d com $X \sim U_{[100,120]}$

Como $n > 30$, pelo T.L.C,

$P(\bar{X} < 112) = ?$

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1) \quad \text{em que } E(\bar{X}) = E(X) = \frac{100+120}{2} = 110$$

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{31} = \frac{\frac{100}{3}}{31} = \frac{100}{93}$$

$$V(X) = \frac{(120-100)^2}{12}$$

então $\dfrac{\bar{X} - 110}{\sqrt{\frac{100}{93}}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$\Leftrightarrow \bar{X} \overset{\cdot}{\sim} N(110, 1.037)$

$$\underset{\bar{X} \text{ é contínua}}{P(\bar{X} \leq 112)} \cong \text{normalcdf}(-\infty, 112, 110, 1.037) = 0.9731$$

(3.0) **6.** Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo que vai ser lançado no próximo mês gasta em média 9.7 litros aos 100 km, em circuito urbano, com desvio padrão de 1 litro. Admita que o consumo segue uma distribuição Normal.

(a) A probabilidade de, numa amostra aleatória de 20 automóveis, o gasto médio ser superior a 10 litros é, com 2 casas decimais, igual a

(A) 0.38 **(B)** 0.91 **(C)** 0 **(D)** 0.09

(b) Qual a deverá ser a dimensão da amostra para obter, com pelo menos 90% probabilidade, um gasto médio inferior a 10 litros?

a) X = "consumo aos 100 km de um automóvel que será lançado no mercado"

$X \sim N(9.7, 1)$

$X_1, \dots, X_{20}$ amostra aleatória de X, $P(\bar{X} > 10) = ?$

$\bar{X} \sim N(E(\bar{X}), \sqrt{V(\bar{X})})$ estabilidade da normal X_i são i.i.d com X

$\Leftrightarrow \bar{X} \sim N\left(9.7, \frac{1}{\sqrt{20}}\right)$ $\quad V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{20} = \frac{1^2}{20}$

então $\underset{\bar{X} \text{ é contínua}}{P(\bar{X} \geq 10)} = \text{normalcdf}\left(10, \infty, 9.7, \frac{1}{\sqrt{20}}\right) = 0.0898 \simeq 0.09 \longrightarrow$ opção (D)

b) $? n \in \mathbb{N}: P(\bar{X} < 10) \geq 0.9 \longrightarrow$ de a) sabemos que $\bar{X} \sim N\left(9.7, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$\Leftrightarrow P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X} - 9.7}{\frac{1}{\sqrt{n}}}}_{Z \sim N(0,1)} < \frac{10 - 9.7}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\Bigg) \geq 0.9$$

$\Leftrightarrow \sqrt{n}(10 - 9.7) \geq \text{invnorm}(0.9, 0, 1)$

$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.28}{0.3}$

$\Leftrightarrow n \geq \left(\frac{1.28}{0.3}\right)^2$

$\Leftrightarrow n \geq 18.20$ e $n \in \mathbb{N}$ logo $\boxed{n = 19}$

(3.0) **7.** Um certo nutricionista concebeu um novo programa dietético para as pessoas que têm uma vida profissional muito sedentária. Com este novo programa ele afirma que a perda média de peso, ao fim de um mês, é de 6.1 kg. Para testar a veracidade de tal afirmação, analisaram-se os resultados obtidos por 50 pacientes, tendo-se verificado uma perda média de peso de 3.4 kg.

Admita que a perda de peso segue uma distribuição Normal com um desvio padrão de 1.8 kg.

(a) Com 95% de confiança, concorda com a afirmação do nutricionista relativamente à perda média de peso?

(b) Mantendo todos os dados restantes da questão, sem efetuar cálculos, poderá alterar a sua opinião se considerar um grau de confiança de 99%?

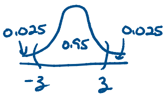
$n = 50$; $\bar{x} = 3.4$ kg

a) $(1-\alpha)\% = 95\%$; $X =$ "perda de peso num mês" ; $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1.8)$

Intervalo de Confiança para μ ao grau 0.95 com σ conhecido

$Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ simétrica

$? z \in \mathbb{R}: \; P(-z < Z < z) = 0.95$



$\Leftrightarrow P(Z < z) = 0.975$

$\Leftrightarrow z = \text{invNorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

$\therefore P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95$

$-1.96 < \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} < 1.96 \Leftrightarrow \bar{X} - \dfrac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \dfrac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}$

O intervalo aleatório para μ ao grau 0.95 com σ conhecido é

$\left]\bar{X} - \dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \dfrac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right[$

Como $n = 50$; $\bar{x} = 3.4$; $\sigma = 1.8$

Um intervalo de confiança para μ ao grau 0.95 com σ conhecido é

$\left]3.4 - \dfrac{1.96 \times 1.8}{\sqrt{50}}, 3.4 + \dfrac{1.96 \times 1.8}{\sqrt{50}}\right[= \left]2.901, 3.899\right[$

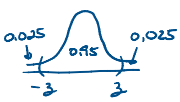
Com uma confiança de 95%, não concordamos com a afirmação do nutricionista pois $6.1 \notin \left]2.901, 3.899\right[$

ou

Testar $H_0: \mu = 6.1$ v.s $H_1: \mu \neq 6.1$

ao nível $\alpha = 0.05$

$T = \sqrt{n}\,\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$



R. Crítica $= \left]-\infty, -1.96\right] \cup \left[1.96, +\infty\right[$

$z: P(Z < z) = 0.975$

$\Rightarrow z = \text{invNorm}(0.975, 0, 1)$
$= 1.96$

Sob a hipótese H_0

$T = \sqrt{50}\,\dfrac{3.4 - 6.1}{1.8} = -10.61 \in$ R. Crítica

Logo ao nível de 5% rejeitamos a hipótese de $\mu = 6.1$, ou seja, a esse nível não concordamos com a nutricionista

b) Se o grau de confiança aumentar, mantendo-se as restantes condições

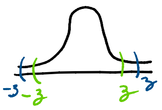
$z \rightarrow 0.95$

se efetuarem teste
$(1-\alpha)$ aumentar $\Rightarrow \alpha$ diminui

$\Rightarrow$ R.C com menor amplitude

[illegible] NADA [illegible]

condições



$z \rightarrow 0.95$

$z - 0.99$

$\Rightarrow$ a amplitude do intervalo de confiança aumenta (a região crítica diminui), logo sem efetuar cálculos NÃO PODEMOS AFIRMAR NADA nem que mantemos nem que podemos alterar.

$(1-\alpha)$ aumentar $\Rightarrow$ α diminui

$\Rightarrow$ R.C com menor amplitude

$\Rightarrow$ Sem efetuar cálculos NÃO PODEMOS AFIRMAR NADA nem que mantemos nem que podemos alterar.

(2.0) **8.** Seja X uma variável aleatória real cuja distribuição de probabilidade depende de um parâmetro desconhecido, θ, com $\theta \in]0,1[$. Sabe-se que $E(X) = \frac{\theta}{8}$.

(a) Recolheu-se uma amostra de X, $X_1 X_2, \cdots, X_n$ com $n > 2$. O estimador $T = \frac{nX_1 - 2X_2 - X_n}{2}$ é um estimador cêntrico de θ?

(A) Sim **(B)** Depende do valor de n **(C)** Não

(b) Foi recolhida uma amostra de X, de dimensão 40, cuja média é 0.125. A partir desta amostra calcule uma estimativa cêntrica de θ é

(A) 0.5 **(B)** 2 **(C)** 1 **(D)** Nenhuma das anteriores

a) $E(T) = E\left(\frac{n X_1 - 2X_2 - X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[n E(X_1) - 2E(X_2) - E(X_n)\right]$

X_i são i.i.d com X, para $i = 1, \dots, n$ $\Rightarrow E(X_i) = \frac{\theta}{8}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{n\theta}{8} - \frac{2\theta}{8} - \frac{\theta}{8}\right]$

$= \frac{(n-3)\theta}{16} \neq \theta$ logo T não é cêntrico para estimar θ. $\rightarrow$ opção (C)

A propriedade do estimador não pode depender da dimensão da amostra.

b) $n = 40$; $\bar{x} = 0.125$

Como $E(X) = \frac{\theta}{8}$, um estimador cêntrico para θ será

$\hat{\theta} = 8\bar{X}$ logo uma estimativa cêntrica será

$\hat{\theta}_{40} = 8 * 0.125 = 1$ $\rightarrow$ opção (C)