Frequência 1 ME - recurso

13 July 2021 17:50

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
1ª FREQUÊNCIA DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS - Época de Recurso

16 de Julho de 2021 **Versão 101** Duração: 1h30min

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.6$ e $P(A \cap B) = 0.4$. O valor de $P(B/\overline{A})$ é

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 1

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0}{0.4} = 0$$ ou como

$P(B)=0.4$, $P(A)=0.6$, $P(A\cap B)=0.4$ $\Big\}$ $B \subset A \Rightarrow B\cap\bar{A} = \emptyset \Rightarrow P(B/\bar{A}) = 0$

opção (A)

(1.5) **2.** Um estudante vai realizar 3 exames. Se a probabilidade de ter nota positiva em cada um for de 0.6 e os resultados forem independentes, calcule a probabilidade do estudante ter nota positiva:

(a) no máximo em dois exames;

(b) apenas no primeiro e no terceiro exame.

a) $\mathcal{E}$ = "O estudante realiza um exame e anota a sua classificação"
Repete $\mathcal{E}$ 3 vezes sempre nas mesmas condições
X = "nº de exames, em 3, em que teve nota positiva"
$X \sim \mathcal{B}(3, 0.6)$

$P(X \leq 2) = \text{Binomial}(3, 0.6, 0, 2) = 0.784$

b) A_i = "o aluno tem positiva no $i^{ésimo}$ exame" ; $i = 1, 2, 3$

$$P(A_1 \cap \bar{A_2} \cap A_3) \underset{\text{acontecimentos são independentes}}{=} P(A_1) \times P(\bar{A_2}) \times P(A_3) = 0.6 \times 0.4 \times 0.6 = 0.144$$

(1.5) **3.** O número de defeitos por artigo produzido numa certa linha de produção segue uma distribuição de *Poisson* de valor esperado 0.01. Para serem distribuídos, esses artigos são embalados em caixas de 10 unidades.

(a) A probabilidade de um qualquer artigo não apresentar defeitos é

(A) 0.9900 **(B)** 0.9048 **(C)** 0.0952 **(D)** 0.0100

(b) A probabilidade de, numa caixa, o número total de defeitos encontrados ser superior a 2 é

(A) 0.0001 **(B)** 0.0013 **(C)** 0.0002 **(D)** 0.9957

$X =$ "nº de defeitos por artigo produzido numa linha de produção"

$E(X) = 0.01$; $X \sim \mathcal{P}(0.01)$; Cada caixa tem 10 artigos

a)

$P(X=0) = 0.99 \longrightarrow$ opção (A)

b) $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i =$ "nº total de defeitos encontrados"

Como X_i são independentes pela estabilidade da Poisson

$Y \sim \mathcal{P}(10 \times 0.01) = \mathcal{P}(0.1)$

$P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \text{Poissoncdf}(0.1, 0, 2) = 1 - 0.999845 = 0.000155 \approx 0.0002$

opção (C)

(3.0) **4.** Numa fábrica, há duas linhas de produção de um artigo (X), sendo que o artigo é classificado quanto ao acabamento (Y), de acordo com a seguinte tabela:

Y \ X	1	2	Total
1	0.06	b	0.25
2	0.04	c	e
3	a	d	0.4

(a) Sabendo que $P(X = 2 \cap Y = 3) = 0.25$, complete a tabela.

(b) Sabendo que um artigo foi classificado quanto ao acabamento com 3, determine a probabilidade de ter sido produzido pela linha 2.

(c) Das afirmações seguintes escolha a verdadeira

(I) Quanto maior é o número da linha de produção menor é a classificação quanto ao acabamento;
(II) Quanto maior é o número da linha de produção maior é a classificação quanto ao acabamento;
(III) A classificação quanto ao acabamento é independente do número da linha de produção.

(Embora esta questão seja de escolha múltipla, indique todos os cálculos que efetuar)

a)

$b = 0.25 - 0.06 = 0.19$; $e = 1 - 0.4 - 0.25 = 0.35$

$c = 0.35 - 0.04 = 0.31$; $a + d = 0.4$; $P(X=2 \cap Y=3) = 0.25$

$\Leftrightarrow d = 0.25$

$\rightarrow a = 0.4 - 0.25 = 0.15$

b) $P(X=2 / Y=3) = \dfrac{P(X=2 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \dfrac{0.25}{0.4} = 0.625$

c) $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$; $E(XY) = 0.06 + 2*0.04 + 3*0.15 + 2*0.19 +$

$+ 4*0.31 + 6*0.25 = 3.71$

$= 3.71 - 1.75*2.15$

$= -0.0525$

$E(X) = 1*0.25 + 2*0.75 = 1.75$; $E(X^2) = 1^2*0.75 + 2^2*0.75 = 3.25$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.1875$

$E(Y) = 1*0.25 + 2*0.35 + 3*0.4 = 2.15$

$E(Y^2) = 1^2*0.25 + 2^2*0.35 + 3^2*0.4 = 5.25$

$E(Y) = 1 * 0.25 + 2 * 0.35 + 3 * 0.4 = 2.15$

$E(Y^2) = 1^2 * 0.25 + 2^2 * 0.35 + 3^2 * 0.4 = 5.25$

$V(Y) = 0.6275$

$$\rho = \frac{-0.0525}{\sqrt{0.1875}\sqrt{0.6275}} = -0.1531 < 0 \longrightarrow \text{opção (I)}$$

(2.5) **5.** Uma empresa com várias sucursais espalhadas pelo país costuma alugar carrinhas em três agências Rent a Car. Estima-se que a empresa alugue 50% das carrinhas à agência A, 25% à agência B e as restantes à agência C. Sabe-se ainda que a probabilidade de haver avarias numa carrinha é de 8%, 25% e 7% quando é alugada respetivamente à agência A, B e C.

(a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

(b) Determine a percentagem de carrinhas que avariam.

(c) Calcule a probabilidade de uma carrinha com avarias ter sido alugada à agência C.

a) A = "A empresa aluga carrinha à agência A" ; $P(A) = 0.5$

B = "A empresa aluga carrinha à agência B" ; $P(B) = 0.25$

C = "A empresa aluga carrinha à agência C" ; $P(C) = 1 - 0.75 = 0.25$

D = "A carrinha tem avarias" $P(D/A) = 0.08$; $A \cup B \cup C = \Omega$

$P(D/B) = 0.25$

$P(D/C) = 0.07$

b) $P(D) = P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B) + P(D/C) \cdot P(C)$

$= 0.12$

R: 12% das carrinhas avariam.

c) $$P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0.07 \times 0.25}{0.12} = 0.1458$$

(0.5) **6.** A função de probabilidade de uma variável aleória X é dada pela tabela seguinte

x	-2	-1	1	2	3
P(X=x)	a	b	0.25	b	a

onde a e $b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $P(X = -2) = 2P(X = 2)$, o valor de $P(X = 4a + 8b)$ é

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** 0

$P(X=-2) = 2P(X=2) \Leftrightarrow a = 2b$

$a + b + 0.25 + b + a = 1 \Leftrightarrow 6b = 0.75 \Leftrightarrow b = 0.125$

$\Rightarrow a = 0.25$

$P(X = 4 * 0.25 + 8 * 0.125) = P(X=2) = 0.125 \longrightarrow$ opção C

Instituto Superior de Engenharia de Coimbra
Departamento de Física e Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática (LEI, LEI-PL, LEICE)
1ª Frequência de Métodos Estatísticos - Época de Recurso

16 de Julho de 2021 **Versão 102** Duração: 1h30min

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.6$, $P(\overline{B}) = 0.6$ e $P(A \cap B) = 0.4$. O valor de $P(B/\overline{A})$ é

(A) 1 **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{1}{3}$ **(D)** 0

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B\cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A\cap B)}{1-P(A)} = \frac{0}{0.4} = 0$$ ou como

$\left.\begin{array}{l} P(B)=0.4 \\ P(A)=0.6 \\ P(A\cap B)=0.4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B\subset A \\ \Rightarrow B\cap\bar{A} = \emptyset \end{array}$

$\Rightarrow P(B/\bar{A}) = 0$

opção D

(1.5) **2.** Um estudante vai realizar 3 exames. Se a probabilidade de ter nota positiva em cada um for de 0.6 e os resultados forem independentes, calcule a probabilidade do estudante ter nota positiva:

(a) no mínimo em dois exames;

(b) apenas no primeiro e no segundo exame.

a) $\mathcal{E}$ = "O estudante realiza um exame e anota a sua classificação"

Repete $\mathcal{E}$ 3 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de exames, em 3, em que teve nota positiva"

$X \sim \mathcal{B}(3, 0.6)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - \text{Binomial}(3, 0.6, 0, 1) = 1 - 0.352 = 0.648$

b) A_i = "o aluno tem positiva no $i^{ésimo}$ exame" ; $i = 1, 2, 3$

acontecimentos são independentes

$P(A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(\bar{A}_3) = 0.6 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144$

(1.5) **3.** O número de defeitos por artigo produzido numa certa linha de produção segue uma distribuição de *Poisson* de valor esperado 0.01. Para serem distribuídos, esses artigos são embalados em caixas de 10 unidades.

(a) A probabilidade de um qualquer artigo não apresentar defeitos é

(A) 0.0952 **(B)** 0.0100 **(C)** 0.9900 **(D)** 0.9048

(b) A probabilidade de, numa caixa, o número total de defeitos encontrados ser superior a 2 é

(A) 0.0002 **(B)** 0.0013 **(C)** 0.0001 **(D)** 0.9957

X = "nº de defeitos por artigo produzido numa linha de produção"

$E(X) = 0.01$; $X \sim \mathcal{P}(0.01)$; Cada caixa tem 10 artigos

a)

$P(X=0) = 0.99 \longrightarrow$ opção C

b) $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i$ = "nº total de defeitos encontrados"

Como X_i são independentes pela estabilidade da Poisson

$Y \sim \mathcal{P}(10 \times 0.01) = \mathcal{P}(0.1)$

$P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 -$ Poissoncdf $0.1, 0\ 2) = 1 - 0.999845 = 0.000155 \simeq 0.0002$

opção A

(3.0) **4.** Numa fábrica, há duas linhas de produção de um artigo (X), sendo que o artigo é classificado quanto ao acabamento (Y), de acordo com a seguinte tabela:

Y \ X	1	2	Total
1	0.06	b	0.25
2	0.04	c	e
3	a	d	0.4

(a) Sabendo que $P(X = 2 \cap Y = 3) = 0.25$, complete a tabela.

(b) Sabendo que um artigo foi classificado quanto ao acabamento com 3, determine a probabilidade de ter sido produzido pela linha 2.

(c) Das afirmações seguintes escolha a verdadeira

(I) Quanto menor é o número da linha de produção maior é a classificação quanto ao acabamento;
(II) Quanto menor é o número da linha de produção menor é a classificação quanto ao acabamento;
(III) A classificação quanto ao acabamento é independente do número da linha de produção.

(Embora esta questão seja de escolha múltipla, indique todos os cálculos que efetuar)

a)

$b = 0.25 - 0.06 = 0.19$; $e = 1 - 0.4 - 0.25 = 0.35$

$c = 0.35 - 0.04 = 0.31$; $a + d = 0.4$; $P(X=2 \cap Y=3) = 0.25$

$\Leftrightarrow d = 0.25$

$a = 0.4 - 0.25 = 0.15$

b) $P(X=2 / Y=3) = \dfrac{P(X=2 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \dfrac{0.25}{0.4} = 0.625$

c) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$; $E(XY) = 0.06 + 2*0.04 + 3*0.15 + 2*0.15 +$

$+ 4*0.31 + 6*0.25 = 3.71$

$= 3.71 - 1.75*2.15$

$= -0.0525$

$E(X) = 1*0.25 + 2*0.75 = 1.75$; $E(X^2) = 1^2*0.75 + 2^2*0.75 = 3.25$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 0.1875$

$E(Y) = 1*0.25 + 2*0.35 + 3*0.4 = 2.15$

$E(Y^2) = 1^2*0.25 + 2^2*0.35 + 3^2*0.4 = 5.25$

$V(Y) = 0.6275$

$\rho = \dfrac{-0.0525}{\sqrt{0.1875}\sqrt{0.6275}} = -0.1531 < 0 \longrightarrow$ opção I

(2.5) **5.** Uma empresa com várias sucursais espalhadas pelo país costuma alugar carrinhas em três agências Rent a Car. Estima-se que a empresa alugue 50% das carrinhas à agência A, 25% à agência B e as restantes à agência C. Sabe-se ainda que a probabilidade de haver avarias numa carrinha é de 8%, 25% e 7% quando é alugada respetivamente à agência A, B e C.

(a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

(b) Determine a percentagem de carrinhas que não avariam.

(c) Calcule a probabilidade de uma carrinha com avarias ter sido alugada à agência B.

a) A = "A empresa aluga carrinha à agência A" ; $P(A) = 0.5$

B = "A empresa aluga carrinha à agência B" ; $P(B) = 0.25$

C = "A empresa aluga carrinha à agência C" ; $P(C) = 1 - 0.75 = 0.25$

D = "A carrinha tem avarias" $P(D/A) = 0.08$; $A \cup B \cup C = \Omega$

$P(D/B) = 0.25$

$P(D/C) = 0.07$

b) $P(D) = P(D/A).P(A) + P(D/B).P(B) + P(D/C).P(C)$

$= 0.12$

R: 12% das carrinhas avariam.

c) $P(B/D) = \dfrac{P(B \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D/B).P(B)}{P(D)} = \dfrac{0.25 \times 0.25}{0.12} = 0.5208$

(0.5) **6.** A função de probabilidade de uma variável aleaória X é dada pela tabela seguinte

x	-2	-1	1	2	3
P(X=x)	a	b	0.25	b	a

onde a e $b \in \mathbb{R}$. Sabendo que $P(X=-2)=2P(X=2)$, o valor de $P(X=2a+4b)$ é

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{1}{8}$ **(D)** 0

$P(X=-2) = 2P(X=2) \Leftrightarrow a = 2b$

$a+b+0.25+b+a = 1 \Leftrightarrow 6b = 0.75 \Leftrightarrow b = 0.125$

$\Rightarrow a = 0.25$

$P(X = 2*0.25 + 4*0.125) = P(X=1) = 0.25 \longrightarrow$ opção A