

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique o seu nome completo e número de estudante;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, indique a versão da frequência que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução trabalhe com 4 casas decimais (pelo menos).

(0.75) 1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.75$, $P(B/\bar{A}) = \frac{3}{7}$ e $P(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $P(B)$ é:

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{26}{35}$ (D) $\frac{9}{35}$

(0.75) 2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x	a	$2a$	$3a$
$P(X = x)$	0.4	0.2	0.4

onde a designa um número real. Sabendo que valor médio desta variável é 4, o suporte da variável é

- (A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{2, 4, 6\}$ (C) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$ (D) $\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$

(0.75) 3. Ao escrever uma página de código, a probabilidade de um programador cometer um erro de digitação é 0.05. A probabilidade de, em 20 páginas de código, existirem no máximo 18 perfeitas é:

- (A) 0.2642 (B) 0.0755 (C) 0.7358 (D) 0.9245

(0.75) 4. O número de tentativas de fraude num exame comporta-se como uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de valor esperado 2. Em 15 exames realizados num determinado ano letivo, a probabilidade de, no máximo, existirem 26 tentativas de fraude é:

- (A) 0.2673 (B) 0.7916 (C) 0.7327 (D) 0.9667

(3.5) 5. Numa unidade curricular de um curso de ensino superior verificou-se que

- 65% dos alunos foram à quase totalidade das aulas;
- 45% dos alunos aprovaram na unidade curricular;
- 25% dos alunos não foram à quase totalidade das aulas nem aprovaram.

0,5 (a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

1,0 (b) Determine a probabilidade de um aluno que foi à quase totalidade das aulas aprovar na unidade curricular.

1,0 (c) Sabendo que um aluno aprovou na unidade curricular, qual é a probabilidade dele não ter frequentado a quase totalidade das aulas.

1,0 (d) Se forem escolhidos aleatoriamente 8 alunos da unidade curricular considerada, determine um valor aproximado para a probabilidade de pelo menos 4 terem aprovado.

(3.5) 6. Os trabalhadores de uma empresa foram classificados de acordo com o número de anos de experiência profissional, X , e o salário em milhares de euros, Y .

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

X	Y	1	2	3
		0.06	0.14	0
5		0.04	0.16	0.10
10		0	0.10	0.40

0,5 a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y .

0,5 b) Dos trabalhadores com um salário de 3 mil euros, qual a percentagem dos que têm cinco anos de experiência profissional?

1,0 c) Determine a covariância entre X e Y . O número de anos de experiência profissional é independente do salário? Justifique.

1,0 d) Calcule $P(Y = y/X = 1), \forall y \in \mathbb{R}$.

0,5 e) Determine o valor esperado do salário quando um trabalhador tem no máximo um ano de experiência.

DBAA / DDCA

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A condicionada por B , $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i)$.

Teorema [Bayes] Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)}, i = 2, \dots, n$.

OBSERVAÇÕES:

- No cabeçalho da sua folha de resolução indique o seu nome completo e número de estudante;
- Na primeira página e antes de iniciar a resolução, indique a versão da frequência que vai realizar e o modelo de calculadora que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas NÃO descontam;
- Ao longo da resolução trabalhe com 4 casas decimais (pelo menos).

(0.75) 1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.75$, $P(B/\bar{A}) = \frac{3}{7}$ e $P(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $P(B)$ é:

- (A) $\frac{26}{35}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{9}{35}$

(0.75) 2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x	a	$2a$	$3a$
$P(X = x)$	0.4	0.2	0.4

onde a designa um número real. Sabendo que valor médio desta variável é 4, o suporte da variável é

- (A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$ (C) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$ (D) $\{2, 4, 6\}$

(0.75) 3. Ao escrever uma página de código, a probabilidade de um programador cometer um erro de digitação é 0.05. A probabilidade de, em 20 páginas de código, existirem no máximo 18 perfeitas é:

- (A) 0.7358 (B) 0.0755 (C) 0.2642 (D) 0.9245

(0.75) 4. O número de tentativas de fraude num exame comporta-se como uma variável aleatória com distribuição de Poisson de valor esperado 2. Em 15 exames realizados num determinado ano letivo, a probabilidade de, no máximo, existirem 26 tentativas de fraude é:

- (A) 0.2673 (B) 0.7327 (C) 0.7916 (D) 0.9667

(3.5) 5. Numa unidade curricular de um curso de ensino superior verificou-se que

- 65% dos alunos foram à quase totalidade das aulas;
- 45% dos alunos aprovaram na unidade curricular;
- 25% dos alunos não foram à quase totalidade das aulas nem aprovaram.

0,5 (a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

1,0 (b) Determine a probabilidade de um aluno que não foi à quase totalidade das aulas aprovar na unidade curricular.

1,0 (c) Sabendo que um aluno frequentou à quase totalidade das aulas, qual é a probabilidade dele ter aprovado na unidade curricular.

1,0 (d) Se forem escolhidos aleatoriamente 8 alunos da unidade curricular considerada, determine um valor aproximado para a probabilidade de no máximo 4 não terem aprovado.

(3.5) 6. Os trabalhadores de uma empresa foram classificados de acordo com o número de anos de experiência profissional, X , e o salário em milhares de euros, Y .

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

	X	1	5	10
Y				
1	0.06	0.14	0	
2	0.04	0.16	0.10	
3	0	0.10	0.40	

- Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y .
- Dos trabalhadores com um salário de 3 mil euros, qual a percentagem dos que têm dez anos de experiência profissional?
- Determine a covariância entre X e Y . O número de anos de experiência profissional é independente do salário? Justifique.
- Calcule $P(Y = y/X = 1), \forall y \in \mathbb{R}$.
- Determine o valor esperado do salário quando um trabalhador tem no máximo um ano de experiência.

DDCA

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A condicionada por B , $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B/A_i) P(A_i)$.

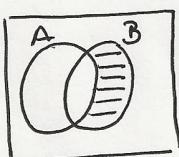
Teorema [Bayes] Sejam A_1, A_2, \dots, A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B/A_i)P(A_i)}, i = 2, \dots, n$.

Versão 102 • Versão 101
D; D; e; A D; B; A; A

Ex1:

$$P(A) = 0,75 ; P(B/\bar{A}) = \frac{3}{7} ; P(B/A) = \frac{1}{5}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(B/A) \cdot P(A)}{1 - P(A)}$$



então

$$\frac{3}{7} = \frac{P(B) - \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{28} + \frac{3}{20} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{35} \quad \textcircled{D} \quad \textcircled{D}$$

Ex2:

x	a	2a	3a
P(x=x)	0,4	0,2	0,4

, $a \in \mathbb{R}$

$$E(x) = 4 \Leftrightarrow 0,4a + 0,4a + 1,2a = 4$$

$$\Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$$

$$S_x = \{2, 4, 6\} \quad \textcircled{D} \quad \textcircled{B}$$

Ex3: $P(\text{"encontrar um erro de digitação numa página"}) = 0,05$

E = "Observar 1 página e verificar se existe 1 erro"

Repete-se E 20 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de páginas em 20 perfeitas"

$$X \sim \beta(20, 0,95) \quad P(X \leq 18) = \text{Binomedf}(20, 0,95, 18) \\ = 0,2642$$

(c) (A)

Ex4:

$X = \text{"nº de tentativas de fraude nesse exame"}$

$$X \sim P(2); E(X) = 2$$

$Y = \text{"nº de tentativas de fraude em 15 exames"}$

$$= \sum_{i=1}^{15} X_i \text{ com } X_i \text{ i.i.d com } X$$

Pelo estabilidade da Poisson, $Y \sim P(15 \times 2) = P(30)$

$$P(Y \leq 26) = \text{PoissonCdf}(30, 0, 26) = 0,2673$$

(A) (A)

Ex5:

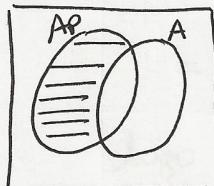
a) $A = \text{"o aluno foi à totalidade das aulas"}$

$A_p = \text{"... aprovou na unidade curricular"}$

$$P(A) = 0,65; P(A_p) = 0,45$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{A}_p) = 0,25$$

$$\text{b) } P(A_p / \bar{A}) = \frac{P(A_p \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(A_p) - P(A \cap A_p)}{P(\bar{A})} = \frac{0,45 - 0,35}{1 - 0,65} = \frac{2}{7}$$



$$P(\bar{A} \cap \bar{A}_p) = P(\bar{A} \cup A_p)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{A}_p) = 1 - P(A) - P(A_p) + P(A \cap A_p)$$

$$\Leftrightarrow 0,25 - 1 + 0,65 + 0,45 = P(A \cap A_p)$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap A_p) = 0,35$$

$$= 0,2857$$

$$\text{c) } P(\bar{A} / A_p) = \frac{P(\bar{A} \cap A_p)}{P(A_p)}$$

$$= \frac{P(A_p) - P(A \cap A_p)}{P(A_p)}$$

$$= \frac{0,45 - 0,35}{0,45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

$$= 0,2222$$

$$\text{b) } P(A_p / A) = \frac{P(A_p \cap A)}{P(A)} = \frac{0,35}{0,65} = \frac{7}{13} = 0,5385$$

d) $E = \text{"observa-se 1 aluno e registra-se se este aprovou ou não"}$
Repete-se E 8 vezes sob as mesmas condições

$X = \text{"nº de alunos em 8 que aprovaram"}$

$$X \sim \text{Binom}(8, 0,55) \sim \beta(8, 0,55) \quad P(X \leq 4) \approx \text{BinomCdf}(8, 0,55, 0,4)$$

$$X \sim \text{Binom}(8, N, 0,55 N) \sim \beta(8, 0,45) \quad \frac{8}{N} \leq 0,1$$

$$= 0,5230$$

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,5230$$

Ex6:

X = "nº de anos de experiência profissional"

Y = "Salário em milhares de euros"

$y \setminus x$	1	5	10	$P(Y=y)$
1	0,06	0,14	0	0,2
2	0,04	0,16	0,1	0,3
3	0	0,1	0,4	0,5
$P(X=x)$	0,1	0,4	0,5	1

$x \setminus y$	1	2	3	$P(X=x)$
1	0,06	0,14	0	0,2
5	0,04	0,16	0,10	0,3
10	0	0,10	0,40	0,5
$P(Y=y)$	0,1	0,4	0,5	1

a) lei de X

0,5

x	1	5	10	c.c.
$P(X=x)$	0,1	0,4	0,5	0
	0,2	0,3	0,5	0

lei de Y

y	1	2	3	c.c.
$P(Y=y)$	0,2	0,3	0,5	0
	0,1	0,4	0,5	0

b) $P(X=10 / Y=3) = \frac{P(X=10 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \frac{0,4}{0,5} = \frac{4}{5} = 0,8$

0,5

$$P(X=5 / Y=3) = \frac{0,10}{0,50} = \frac{1}{5} = 0,2$$

c) $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ *ver que* $E(XY) = \sum_{(x,y) \in S_{(X,Y)}} xy P(X=x \cap Y=y)$
 $= 1 \times 1 \times 0,06 + \dots + 3 \times 10 \times 0,4$
 $= 17,94 ; 17,64$

1,0

Logo X e Y São independentes

independentes.

d) $P(Y=y / X=1) = \frac{P(X=1 \cap Y=y)}{P(X=1)} = \begin{cases} \frac{P(1,1)}{0,1}, & y=1 \\ \frac{P(1,2)}{0,1}, & y=2 \\ \frac{P(1,3)}{0,1}, & y=3 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$= \begin{cases} 0,6, & y=1 \\ 0,4, & y=2 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

$E(X) = \sum_{x \in S_X} x P(X=x)$
 $= 1 \times 0,1 + 5 \times 0,4 + 10 \times 0,5$
 $= 7,1 ; 6,7$

$E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y P(Y=y)$
 $= 1 \times 0,2 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,5$
 $= 2,3 ; 2,4$

e) $E(Y / X \leq 1) = E(Y / X=1) = \frac{0,6 \times 1 + 0,4 \times 2}{0,6 \times 1 + 0,4 \times 2} = 1,4 (\times 1000) ; 1,7 (\times 1000)$
 $(= 1400 \text{ €}) \quad (= 1700 \text{ €})$

0,5