VERSÃO 101 – 1ª Freq. / Versão 102

09 May 2021 16:38

! Cotação: 2+ = 0,25 ; 2- = -0,25

1. A = "A produção destina-se ao mercado A"

a) B = " " " " " " B" +

$\boxed{0{,}5}$ D = "O produto apresenta deficiências"

$$\begin{cases} P(A) = \frac{2}{3} P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{2}{5} \\ P(B) = \frac{3}{5} \end{cases}$$

0,25 $$\begin{cases} P(A) = \frac{1}{3} P(B) \\ P(A) + P(B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ \frac{1}{3} P(B) + P(B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(A) = \frac{1}{4} \\ P(B) = \frac{3}{4} \end{cases}$$

1. Uma empresa produz para o mercado A e para o mercado B, sendo a produção para o mercado A um terço da destinada ao mercado B. Com base no controlo de qualidade à produção da empresa, admite-se que 5% dos produtos lançados no mercado A apresentam deficiências, sendo essa percentagem de 3% na produção destinada ao mercado B.

(a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

(b) Determine a probabilidade de um produto produzido por esta empresa ser defeituoso.

(c) Determine a probabilidade de um produto não defeituoso ter sido produzido para o mercado A.

(d) Considerando uma amostra de 10 produtos dessa empresa, explicite todo o processo de definição da variável aleatória bem como a sua lei de probabilidade, que lhe permitirá determinar a probabilidade de, nesses 10 produtos, existir quando muito um defeituoso. Calcule uma aproximação para esse valor (utilize 4 casas decimais).

$P(D/A) = 0{,}05 \; ; \; P(D/B) = 0{,}03$ +

b) $\boxed{0{,}5}$ $P(D) \overset{0{,}25}{=} P(D/A) \cdot P(A) + P(D/B) \cdot P(B)$

$\overset{+}{=} 0{,}05 * 0{,}25 + 0{,}03 * 0{,}75$

$ 0{,}05 * 0{,}4 \quad 0{,}03 \quad 0{,}6$

$\overset{+}{=} 0{,}035$

$ 0{,}038$

c) $\boxed{0{,}75}$ $P(A/\bar{D}) \overset{0{,}25}{=} \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} \overset{+}{=} \frac{P(A) - P(A \cap D)}{P(\bar{D})} \overset{+}{=} \frac{0{,}25 - 0{,}05 * 0{,}25}{1 - 0{,}035} = \frac{0{,}2375}{0{,}965} \overset{+}{=} 0{,}2461$

$P(B/\bar{D}) = \frac{P(B \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) - P(B \cap D)}{P(\bar{D})} = \frac{0{,}6 - 0{,}03 * 0{,}6}{1 - 0{,}038} = \frac{0{,}582}{0{,}962} \simeq 0{,}6050$

d) $\boxed{0{,}75}$ E = "Avaliação de um produto e registo do seu estado" +

Repete-se E 10 vezes sempre nas mesmas condições +

X = "nº de produtos, em 10, que têm defeito" +

$X \sim B(10, P(D)) = B(10, 0{,}035)$ ⟶ Se usarem tabelas $B(10, 0.04)$ $P(X \leq 1) \simeq 0{,}9418$

$P(X \leq 1) \overset{0{,}25}{=} \text{Binomcdf}(10, 0.035, 0, 1) \overset{+}{=} 0{,}9543$

Não podem fazer aproximação à Poisson porque não estão reunidas as condições na dimensão ($n < 20$)

2.

X \ Y	0	1	2	P_X
0	0	0	0.10	0,1
1	0	0.05	0.05	0,1
2	0.20	0.10	0.05	0,35
3	0.30	0.10	0.05	0,45
P_Y	0,5	0,25	0,25	

a) $\boxed{0{,}5}$ lei marginal de X

x	0	1	2	3	cc
P_X	0,1	0,1	0,35	0,45	0

0,25

lei marginal de Y

y	0	1	2	cc
P_Y	0,5	0,25	0,25	0

0,25

$\boxed{0{,}5}$ b) $E(X) \overset{+}{=} 0{,}1 + 0{,}7 + 3 * 0{,}45 = 2{,}15$; $E(X^2) \overset{+}{=} 0{,}1 + 4 * 0{,}35 + 9 * 0{,}45 = 5{,}55$

$E(Y) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$; $E(Y^2) = 0{,}25 + 4 * 0{,}25 = 1{,}25$

$V(X) \overset{+}{=} E(X^2) - E^2(X) = 5{,}55 - 2{,}15^2 = 0{,}9275$; 2,15 é nº médio de meses (0,75 montórias) que 1 cliente teve, no ano anterior, a conta a descoberto e o seu desvio padrão é 0,9631. (0,8292)

$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{0{,}9275} \overset{+}{=} 0{,}9631$

$V(Y) = 1{,}25 - 0{,}75^2 = 0{,}6875$; $\sigma(Y) = 0{,}8292$

$\boxed{0{,}5}$ c) $P(Y=2/X=0) \overset{+}{=} \frac{P(X=0 \cap Y=2)}{P(X=0)} \overset{+}{=} \frac{0{,}1}{0{,}1} \overset{+}{=} 1$; $P(X=0/Y=2) = \frac{P(X=0 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4$

$\boxed{0{,}75}$ d) $\text{Cov}(X,Y) \overset{+}{=} E(XY) - E(X)\,E(Y) =$

$= 1{,}15 - 2{,}15 * 0{,}75$

$= -0{,}4625 \neq 0$

logo X e Y não são independentes 0,25

$E(XY) = \sum_{(x,y) \in S_{(X,Y)}} xy \, P(X=x, Y=x)$ 0,25

$= 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}3$

$= 1{,}15$

$E(X) = 2{,}15$; $E(Y) \overset{+}{=} 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$

$\frac{P(1,0)}{\ldots}$, $y=0$ $\quad$ $\frac{0{,}05}{0{,}1}$, $y=1$ + $\quad$ 0,5 , $y=1 \vee y=2$

e) $P(Y=y/X=1) \stackrel{+}{=} \frac{P(X=1 \cap Y=y)}{P(X=1)} \stackrel{0{,}25}{=} \begin{cases} \frac{p(1,0)}{P(X=1)} & , y=0 \\ \frac{p(1,1)}{P(X=1)} & , y=1 \\ \frac{p(1,2)}{P(X=1)} & , y=2 \\ 0 & , c.c \end{cases} = \begin{cases} \frac{0{,}05}{0{,}1} & , y=1 \; + \\ \frac{0{,}05}{0{,}1} & , y=2 \; + \\ 0 & , c.c \end{cases} = \begin{cases} 0{,}5 & , y=1 \vee y=2 \; + \\ 0 & , c.c \end{cases}$

$P(X=x/Y=0) = \frac{P(X=x \cap Y=0)}{P(Y=0)}$

lowrunto

$= \begin{cases} 0{,}4 & , x=2 \\ 0{,}6 & , x=3 \\ 0 & , c.c \end{cases}$

3.

$P(A/B) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}5P(A)$

$P(\bar{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 1 - \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = 1 - \frac{0{,}45 * 0{,}5 \cancel{P(A)}}{\cancel{P(A)}} = 0{,}775$ opção B

$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{0{,}45 * 0{,}5P(A)}{P(A)} = 0{,}225$ opção C

4.

12 — 8 rapazes, 4 raparigas

3 computadores

$\mathcal{E}$ = "observar um estudante e registar se este ganhou 1 de 3 computadores sorteados"

Repete-se $\mathcal{E}$, nas mesmas condições, 3 vezes

X = "nº de vezes, em 3, em que uma aluna ganha 1 dos computadores sorteados"

$X \sim \mathcal{H}(3, 12, 4)$

$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} + \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}}$

4. Uma empresa de computadores ofereceu 3 computadores para serem sorteados por 3 dos 12 melhores estudantes, 8 rapazes e 4 raparigas, de Engenharia Informática. Sabendo que qualquer dos estudantes pode ser premiado, a probabilidade de no máximo uma aluna ganhar um dos computadores é

(A) 0.7636 **(B)** 0.7407 **(C)** 0.5091 **(D)** 0.2364

$= \frac{14}{55} + \frac{28}{55} = \frac{42}{55} = 0{,}7636$ opção A

$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \frac{42}{55} = \frac{13}{55} = 0{,}2364$ opção D

5.

$P(\text{"1 jogador acertar no alvo"}) = p \in \,]0,1[$

$\mathcal{E}$ = "Observar 1 vez o lançamento do dardo e registar se o jogador acerta"

Repete-se $\mathcal{E}$ 4 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de vezes que 1 jogador acerta no alvo, em 4" $\Rightarrow X \sim \mathcal{B}(4, p)$ $\Rightarrow E(X) = 4p = 1{,}4$

$\Leftrightarrow p = 0{,}35$

$P(X=1) = \text{BinomPdf}(4, 0{,}35, 1) = 0{,}3845$ opção B / opção C

está nas tabelas

6.

$P(\text{"o João falhar"}) = 0{,}1$. O João executa uma série de 8 lances livres

X = "nº de vezes em 8 que o João acerta" $\sim \mathcal{B}(8, 0{,}9)$

$1 - 0{,}9^8 - {}^8C_7 \times 0{,}9^7 \times 0{,}1 = 1 - P(X=8) - P(X=7) = P(X \leq 6)$ opção C / opção D

7.

X = "nº de clientes por hora" ; $X \sim \mathcal{P}(10)$

a) $P(X \leq 5) = \text{Poissoncdf}(10, 0{,}5) = 0.0671$ opção A

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - \text{Poissoncdf}(10, 0, 4) = 1 - 0.0293 = 0.9707$ opção B

$= 1 - P(X \leq 4) =$

b) 8 — 12

$\underbrace{\qquad}_{4 \text{ horas}} \Rightarrow X_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ i.i.d com X

$$Y = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim \mathcal{P}(40) \longrightarrow P(Y > 40) = 1 - P(Y \leq 40) = 1 - \text{Poissoncdf}(40, 0, 40)$$

estabilidade da Poisson

$= 1 - 0{,}5419 = 0{,}4581$ → opção B

está nas tabelas

→ opção D

8.

$$E(X) = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \frac{a}{6} + \frac{2a^2}{6} + \frac{6}{3} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow 2a^2 + a + 12 - 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \vee a = -1$$

$a = -1$ opção B

opção A

$$\frac{1}{6} + \frac{a^2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$$