EXAME DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS
21/06/2019
TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

(1) Acontecimentos:

$D_i = \{$ peça com defeito $i\}$, $i = 1, 2$.

Probabilidades: $P(D_1 \cap D_2) = 0.01$, $P(D_1 \cap \overline{D}_2) = 0.03$, $P(\overline{D}_1 \cap D_2) = 0.23$, $P(\overline{D}_1 \cap \overline{D}_2) = 0.73$

- $P(D_2 | D_1) = \dfrac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1)} = \dfrac{P(D_2 \cap D_1)}{P(D_1 \cap D_2) + P(D_1 \cap \overline{D}_2)} =$

$= \dfrac{0.01}{0.01 + 0.03} = \dfrac{0.01}{0.04} = 0.25$

(2) $X =$ nº de clientes que passam informações úteis, em 20

$X \sim H(4, 20, 5)$

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \dfrac{\binom{5}{0}\binom{15}{4}}{\binom{20}{4}} = 1 - \dfrac{1365}{4845} =$

$\simeq 0.7183$ (4 c.d.)

(3) $X =$ nº de acessos a um servidor, por minuto

$X \sim P(2)$

(a) $P(X > 2 | X > 0) = \dfrac{P(X > 2 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \dfrac{P(X > 2)}{P(X > 0)} =$

$= \dfrac{1 - P(X \leq 2)}{1 - P(X \leq 0)} \simeq \dfrac{1 - 0.6767}{1 - 0.1353} \simeq 0.3739$

(b) $X_i =$ nº de acessos a um servidor, no i-ésimo minuto, $i = 1, \ldots, 10$

Assumindo $X_1, \ldots, X_{10}$ v.a.'s independentes e $X_i \sim P(2)$, $i = 1, \ldots, 10$, $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \sim P(10 \times 2)$, da Aditividade da Poisson.

- $P(Y \leq 15) \simeq 0.1565$

(4) X = tempo de execução de um algoritmo, em minutos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{2}{3} x^3 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x - 1/3 & , \quad 1 \leq x < 4/3 \\ 1 & , \quad x \geq 4/3 \end{cases}$$

$$P(X \in]1/2, 7/6]) = P\left(\frac{1}{2} < X \leq 7/6\right) = F(7/6) - F(1/2)$$

$$= \frac{7}{6} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{1}{2^3} = 3/4$$

(5) X = velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas

$$X \sim N(135, \sqrt{100}) \Rightarrow Z = \frac{X - 135}{10} \sim N(0,1)$$

- $P(X > 120) = P(Z > -1.50) = 0.9332$ (4 c.d.)

(6) X = nº de engenheiros envolvidos no desenvolvimento de um projeto
Y = nº de estagiários " " " " " "

(a) • $P_X(x) = \sum_y P_{XY}(x,y)$, $\forall x$

x	0	1	2	c.c.
$P_X(x)$	0.2	0.4	0.4	0

• $P_Y(y) = \sum_x P_{XY}(x,y)$, $\forall y$

y	0	1	2	c.c.
$P_Y(y)$	0.15	0.6	0.25	0

(b) • $E(X) = \sum_x x * P_X(x) = 1.2$; $E(Y) = \sum_y y * P_Y(y) = 1.1$

- $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.3 - 1.2 \times 1.1 = -0.02$

- Como $cov(X,Y) \neq 0$, X e Y não são independentes.

(c) • $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2.3$

- $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y) =$
$= 0.56 + 0.39 + 2 \times (-0.02) = 0.91$

(d) (i) $P(2X > Y) = P_{XY}(1,0) + P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,0) + P_{XY}(2,1) + P_{XY}(2,2)$
$= 0.1 + 0.3 + 0.05 + 0.2 + 0.15 = 0.8$

(ii) $P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - (P_{XY}(0,0) + P_{XY}(1,1) + P_{XY}(2,2))$

(7) X = velocidade média (em km/h) de veículos em circulação nas autoestradas portuguesas

$X \sim N(135, \sqrt{100}) \Rightarrow Z = \dfrac{X-135}{10} \sim N(0,1)$

(a) $P(X>150 \mid X>135) = \dfrac{P(X>150 \cap X>135)}{P(X>135)} =$

$= \dfrac{P(X>150)}{P(X>135)} = \dfrac{P(Z>1.5)}{P(Z>0.0)} = \dfrac{0.066807}{0.5} = 0.1336$

(b) X_i = velocidade média (em km/h) do i-ésimo veículo em circulação nas autoestradas portuguesas, $i=1,2$.

Admitindo X_1 e X_2 independentes e $X_i \sim N(135, 10)$, $i=1,2$, $D = X_1 - X_2 \sim N(\mu_D, \sigma_D)$, da Estabilidade da Lei Normal,

com $\mu_D = E(X_1) - E(X_2) = 0$ e $\sigma_D = \sqrt{V(X_1)+V(X_2)} = \sqrt{200}$

• $P(D>20) = P\left(\dfrac{D-0}{\sqrt{200}} > \dfrac{20}{\sqrt{200}}\right)$

$\simeq P(Z > 1.41)$, $Z \sim N(0,1)$

$\simeq 0.0793$ ↳ com 2 c.d.

(8) X = tempo de execução de um algoritmo, em minutos

$E(X) = 8/9$, $V(X) = 1/15$

X_i = tempo da i-ésima execução do algoritmo, em minutos, $i=1,\dots,100$

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{100}$ = tempo médio de 100 execuções do algoritmo.

Admitindo que $X_1,\dots,X_{100}$ são independentes e identicamente distribuídas com X, do T.L.C., $\dfrac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sigma_{\overline{X}}} \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$,

com $E(\overline{X}) = 8/9$ e $\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\dfrac{1/15}{100}}$.

• $P(\overline{X} \leq 0.9) = P\left(\dfrac{\overline{X}-8/9}{\sqrt{1/15}}\sqrt{100} \leq \dfrac{0.9-8/9}{\sqrt{1/15}}10\right) \simeq P(Z \leq 0.4303)$

$\simeq 0.6665$

(9) X = quilometragem efetuada por litro (km/l) de combustível por um automóvel

$X \sim N(\mu, \sigma)$

Amostra: $n = 8$, $\bar{x} = 24.34$ e $s_8^2 = 0.5$.

(a) Como $X \sim N(\mu, \sigma)$ e σ desconhecido, $Z_n = \frac{\bar{X} - \mu}{S_n}\sqrt{n} \sim t_{(8-1)}$

- $z: P(-z < Z_n < z) = 0.95$, $Z_n \sim t_7$.

  Logo $z = F_{Z_n}^{-1}(0.975) \simeq 2.365$

- Intervalo aleatório de confiança 95% para μ (...):

  $IAC_{95\%}(\mu) = \left] \bar{X} - 2.365\frac{S_8}{\sqrt{8}}, \bar{X} + 2.365\frac{S_8}{\sqrt{8}} \right[$

- Concretização: $IC(\mu) = \left] 24.34 - 2.365\frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{8}}, 24.34 + 2.365\frac{\sqrt{0.5}}{\sqrt{8}} \right[$

  $=]23.75, 24.93[$ (km/l)

(b) • $H_0: \mu = 24.5$ vs $H_1: \mu < 24.5$

- Assumindo H_0 verdadeira, $T = \frac{\bar{X} - 24.5}{S_8}\sqrt{8} \sim t_7$;
- Região Crítica, $R.C. =]-\infty, z_c]$ com

  $z_c: P(T \leq z_c) = 0.1$, ou seja, $z_c = F_T^{-1}(0.1) = -1.415$

  (ou $z_c = -F_T^{-1}(0.9) = -1.415$).

  $R.C. =]-\infty, -1.415]$

- Como $T_{obs} = \frac{24.34 - 24.5}{\sqrt{0.5}}\sqrt{8} = -0.64 \notin R.C.$,

  com um nível de significância de 10% não se rejeita H_0 (não há evidências para aceitar H_1 ...)

9 (c) • $Z_n = \frac{(n-1) S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$, com $(n-1) = 7$

• $a, b : P(a < Z_n < b) = 0.95$, $Z_n \sim \chi^2_7$

$\begin{cases} a : P(Z_n < a) = 0.025 \\ b : P(Z_n < b) = 0.975 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = F^{-1}_{Z_n}(0.025) = 1.69 \\ b = F^{-1}_{Z_n}(0.975) = 16.01 \end{cases}$

• Intervalo aleatório a 95% para σ (...):

$IAC_{95\%}(\sigma) = \left] \sqrt{\frac{7 * S_8^2}{16.01}} , \sqrt{\frac{7 \times S_8^2}{1.69}} \right[$

• Concretização: $IC(\sigma) = \left] \sqrt{\frac{7 \times 0.5}{16.01}} , \sqrt{\frac{7 \times 0.5}{1.69}} \right[$

$=]0.468 , 1.439[$ (Km/l)

10 • $X_1, \dots, X_{12}$ são (a) independentes e (s) identicamente distribuídos com X.

• $E(T_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} E(X_i) \overset{(s)}{=} \frac{1}{2} \times 2 \times E(X) = E(X)$

• $E(T_{12}) = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} E(X_i) \overset{(s)}{=} \frac{1}{12} \times 12 \times E(X) = E(X)$

$\therefore E(T_2) = E(T_{12})$

• $V(T_2) \overset{(a)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2} V(X_i) \overset{(s)}{=} \frac{1}{4} \times 2 \times V(X) = \frac{1}{2} V(X)$

• $V(T_{12}) \overset{(a)}{=} \frac{1}{12^2} \sum_{i=1}^{12} V(X_i) \overset{(s)}{=} \frac{1}{12^2} \times 12 \times V(X) = \frac{1}{12} V(X)$

$\therefore V(T_2) > V(T_{12})$, logo

a afirmação é falsa.