FREQ2

20 June 2022 16:23

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
2ª FREQUÊNCIA DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

28 de Junho de 2022 **Versão 101** Duração: 1h30min

BBCD

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução **trabalhe com 4 casas decimais** (pelo menos).

(1.25) **1.** Suponha que pede uma pizza na sua pizzaria favorita às 19h. Sabe-se que o tempo que uma pizza demora a ser entregue ao cliente é distribuído uniformemente entre as 19h e as 19h30.

(a) A probabilidade de ter que esperar no mínimo 10 minutos pela sua pizza é

(A) 0.8 **(B)** 0.6667 **(C)** 0.3333 **(D)** 0.2

X = "tempo que uma pizza demora a ser entregue"

$X \sim \mathcal{U}_{[0,\, 0.5]}$ 10 minutos $\longrightarrow \frac{1}{6}$ da hora

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.5} & , x \in [0, 0.5] \\ 0 & , x \notin [0, 0.5] \end{cases} = \begin{cases} 2 & , x \in [0, 0.5] \\ 0 & , x \notin [0, 0.5] \end{cases}$$

a) $P\left(X \geq \frac{1}{6}\right) = \int_{1/6}^{0.5} 2 \, dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \simeq 0.6667$

opção B

(b) Se às 19h15 a pizza ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de ter de esperar pelo menos mais 10 minutos?

15 minutos $\longrightarrow \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0.25$ da hora

$$P\big(X \geq \underbrace{0.25 + \tfrac{1}{6}}_{=0.4167} \,/\, X \geq 0.25\big) = \frac{P(X \geq 0.4167)}{P(X \geq 0.25)} = \frac{\cancel{2}(0.5 - 0.4167)}{\cancel{2}(0.5 - 0.25)}$$

$$= \frac{0.0833}{0.25} = 0.3332$$

(3.0) **2.** A quantidade de açúcar diária consumida numa pastelaria, na secção de confecção de bolos, é uma variável aleatória com distribuição normal de média 1000 kg e desvio-padrão 150 kg. Admita que o consumo de açúcar em dias distintos é independente.

(a) Em determinado momento do dia já tinham sido consumidos 980 kg. A probabilidade de terem sido, nesse dia, consumidos menos de 1230 kg é, com duas casas decimais, igual a

(A) 0.49 **(B)** 0.89 **(C)** 0.94 **(D)** 0.11

X = " a quantidade de açúcar consumida por dia "

$X \sim N(1000, 150)$

a) $P(X < 1230 / X \geq 980) = \dfrac{P(980 \leq X < 1230)}{P(X \geq 980)}$

$= \dfrac{\text{normalcdf}(980, 1230, 1000, 150)}{\text{normalcdf}(980, \infty, 1000, 150)}$

$= \dfrac{0.4904}{0.5530} = 0.8868$

centrando e reduzindo

$\simeq \dfrac{P(-0.13 < Z < 1.53)}{P(Z \geq -0.13)}$

em que $Z = \dfrac{X - 1000}{150} \sim N(0,1)$

$= \dfrac{P(Z < 1.53) - P(Z < -0.13)}{P(Z < 0.13)}$ simetria da $N(0,1)$

$= \dfrac{P(Z < 1.53) - \overbrace{(1 - P(Z < 0.13))}^{P(Z > 0.13)}}{0.5517}$

$= \dfrac{0.9370 - 1 + 0.5517}{0.5517} = \dfrac{0.4887}{0.5517}$

$= 0.8858$

opção B

(b) Diariamente qual deverá ser a quantidade de açúcar em armazém para que a probabilidade de rotura seja inferior a 10%? Aproxime o seu resultado às unidades.

$? q \in \mathbb{R}: \quad P(\text{"rotura"}) < 0.1$ rotura significa que $X > q$

$\Leftrightarrow P(X > q) < 0.1$

$\Leftrightarrow 1 - P(X \leq q) < 0.1$

$\Leftrightarrow P(X \leq q) > 0.9$

$\Leftrightarrow q > \text{invNorm}(0.9, 1000, 150)$

$\Leftrightarrow q > 1192.23 \Rightarrow \boxed{q = 1193 \text{ kg}}$

(c) Qual é a probabilidade de numa semana serem consumidos pelo menos 7230 Kg de açúcar?

uma semana $\Rightarrow$ 7 dias $X_1, X_2, \ldots, X_7$

Y = " quantidade de açúcar consumida numa semana "

$\Leftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{7} X_i$

Como $X_1, \ldots, X_7$ são i.i.d com $X \sim N(1000, 150)$

pela estabilidade da normal

$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^{7} 1000, \sqrt{\sum_{i=1}^{7} 150^2}\right) = N(7000, 396.8630)$

pelo estabilidade da normal

$$Y \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{7} 1000 \, , \, \sqrt{\sum_{i=1}^{7} 150^2}\right) = \mathcal{N}\left(7000, \, 396.8630\right)$$

$P(Y \geq 7230) = \text{normalcdf}(7230, \infty, 7000, 396.8630)$

$= 0.2811$

$P(Y \geq 7230) \simeq 1 - P(Z < 0.58)$

com $Z = \dfrac{Y - 7000}{396.8630} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= 1 - 0.7190 = 0.2810$

(4.25) **3.** O tempo (em horas) gasto por um aluno a estudar para um exame está associado a uma variável aleatória X com função densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & , \quad x \geq \theta \\ 0 & , \quad x < \theta \end{cases} ,$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro desconhecido relacionado com o tempo considerado mínimo para aprovar no exame. Sabe-se que $\mathrm{E}(X) = \theta + 1$ e que $\mathrm{V}(X) = 1$. Foi recolhida uma amostra de dimensão 100, da qual se extraíram os seguintes valores,

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 2960 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 87715$$

(a) Determine, justificando, estimativas cêntricas para a média de X e para o parâmetro θ.

Um estimador cêntrico para $\mu = E(X)$ é $\hat{\mu} = \bar{X}$, logo uma estimativa cêntrica para μ será

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{296\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 29.6$$

Como $E(X) = \theta + 1 \Leftrightarrow \hat{\theta} = E(X) - 1$ um estimador cêntrico para θ será $\hat{\theta} = \bar{X} - 1$ e uma estimativa para θ será $29.6 - 1 = 28.6$.

(b) Determine um intervalo com aproximadamente 95% de confiança para o tempo médio gasto por um aluno a estudar para um exame.

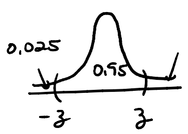
int. confiança para μ ao grau 0.95 com $\sigma = \sqrt{V(X)} = 1$ conhecido

Passo 1:

$Z = \sqrt{n} \, \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \overset{\sim}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$ simétrica

Passo 2:

$? \, z \in \mathbb{R} : P(-z < Z < z) = 0.95 \Leftrightarrow ? \, z \in \mathbb{R} : P(Z < z) = 0.975$



$\dfrac{1 - 0.95}{2} = 0.025$

$\Rightarrow z = \text{invNorm}(0.975, 0, 1)$

$\Leftrightarrow z = 1.95996 \simeq 1.96$

Passo 3:

$-1.96 < Z < 1.96 \Leftrightarrow -1.96 < \sqrt{n} \, \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma} < 1.96$

$\Leftrightarrow \bar{X} - \dfrac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \dfrac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}}$

O intervalo aleatório para μ ao grau 0.95 com σ conhecido é:

$$\left] \bar{X} - \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} \, , \, \bar{X} + \frac{1.96 \sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

Passo 4:

Sendo $n=100$; $\sigma=1$, $\bar{x}=29.6$ um intervalo de confiança para μ ao grau 0.95 será

$$\left]29.6-\frac{1.96*1}{\sqrt{100}}, 29.6+\frac{1.96*1}{\sqrt{100}}\right[= \left]29.6-0.196, 29.6+0.196\right[$$

$$= \left]29.404, 29.796\right[$$

(c) Com base na alínea anterior um intervalo com aproximadamente 95% de confiança para o parâmetro θ é:

(A)]29.404, 29.796[**(B)**]30.402, 30.798[**(C)**]28.404, 28.796[**(D)**]28.402, 28.798[

Sendo $\mu=E(X) \Leftrightarrow \mu=\theta+1 \Leftrightarrow \theta=\mu-1$

logo um intervalo de confiança para θ ao grau 0.95 é

$$\left]28.404, 28.796\right[\quad \text{opção (C)}$$

(d) Se pretender, para o mesmo grau de confiança, diminuir a amplitude do intervalo de confiança para o parâmetro θ, deve:

(A) diminuir α **(B)** diminuir n **(C)** aumentar α **(D)** aumentar n

se se pretende o mesmo grau de confiança não se pode alterar α logo (A) e (C) estão fora de questão

int. conf. para o parâmetro θ é

$$\left]\bar{x}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}-1, \bar{x}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}-1\right[$$

logo diminuir a sua amplitude ⇒ aumentar o valor de n (dimensão da amostra)

opção (D)

(e) Considerando 29 uma boa estimativa para o valor de θ, determine a probabilidade de um aluno estudar menos de 36 horas sabendo que já estudou 30 horas.

Observação: Se necessitar, $\int_a^b f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(b)} - e^{f(a)}$

$$\underline{\underline{\hat{\theta}=29}} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} e^{-x+29}, & x \geq 29 \\ 0, & x<29 \end{cases}$$

$$P(X<36 / X\geq 30) = \frac{P(30\leq X<36)}{P(X\geq 30)} = \frac{(-1)\int_{30}^{36}(-1)e^{-x+29}\,dx}{1-P(X\leq 30)} = \frac{-\left[e^{-36+29}-e^{-30+29}\right]}{1-\underbrace{\int_{29}^{30} e^{-x+29}\,dx}_{-e^{-1}+1}}$$

X é contínua

$$= \frac{-e^{-7}+e^{-1}}{\cancel{1}+e^{-1}-\cancel{1}} = 0.9975$$

(f) Determine, justificando, a probabilidade do tempo médio de estudo de 100 alunos ser superior a 30 horas.

(f) Determine, justificando, a probabilidade do tempo médio de estudo de 100 alunos ser superior a 30 horas.

$X_1, \ldots, X_{100}$ são i.i.d com X $\Rightarrow$ Pelo T.L.C $\dfrac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sqrt{V(\overline{X})}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$\hat{\theta} = 29$ (estimativa)

$P(\overline{X} > 30) = 0.5$

lei de $\overline{X}$?

onde $E(\overline{X}) = E(X) = \theta + 1 = 30$

$V(\overline{X}) = \dfrac{V(X)}{100} = \dfrac{1}{100}$

então $\overline{X} \overset{\cdot}{\sim} N\left(30, \frac{1}{10}\right)$

(1.5) **4.** Um investidor está interessado em investir num activo financeiro cujo retorno (expresso em percentagem) se admite ter distribuição normal com desvio-padrão 2. O investidor só investirá no ativo se o retorno médio for superior a 3. Para tomar a decisão, recolheu informação sobre o retorno do activo em 29 transações seleccionadas aleatoriamente, tendo obtido um retorno médio de 3.9.

(a) Com o objectivo de auxiliar o investidor, realize, ao nível de significância de 5% um teste paramétrico conveniente. Que decisão aconselha ao investidor?

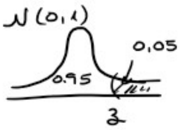
$n = 29$; $\bar{x} = 3.9\%$

X = "retorno financeiro do investimento" ; lei de $X \sim N(\mu, 2)$

a) $H_0: \mu = 3$ vs $H_1: \mu > 3$ com $\alpha = 0.05$

$T = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Região Crítica



$= [z, +\infty[= [1.6449, +\infty[$

$z = \text{invnorm}(0.95, 0, 1) = 1.6449$

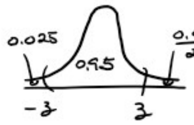
Sob a hipótese H_0, $T = \sqrt{29}\,\dfrac{3.9 - 3}{2} = 2.4233 \in R.C$

logo ao nível 0.05, rejeitamos H_0, isto é, a este nível daremos indicação para investir.

ou (com penalização de 0.25 na classificação)

int. confiança para μ ao grau 0.95 com σ conhecido

$Z = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$



$?z: \; P(-z < Z < z) = 0.95$

$\Leftrightarrow ?z: \; P(Z < z) = 0.975$

$\Rightarrow z \simeq \text{invnorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$

$\therefore \; P(-1.96 < Z < 1.96) \simeq 0.9$

$-1.96 < \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma} < 1.96 \Leftrightarrow \overline{X} - \dfrac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + \dfrac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}$

O intervalo aleatório para μ pretendido é

$\left] \overline{X} - \dfrac{1.96 * \sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \dfrac{1.96 * \sigma}{\sqrt{n}} \right[$

Um intervalo de confiança para μ será

$\left] 3.9 - \dfrac{1.96 * 2}{\sqrt{29}}, 3.9 + \dfrac{1.96 * 2}{\sqrt{29}} \right[=]3.1721, 4.6279[\subset]3, +\infty[$

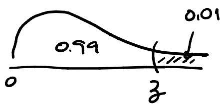
$$\left]3.9 - \frac{1.96 \ * 2}{\sqrt{29}} \ , \ 3.9 + \frac{1.96 \ * 2}{\sqrt{29}}\right[\ = \ ]3.1721 \ , \ 4.6279[\ \subset \ ]3, +\infty[$$

Com confiança 0.95 daria ao investidor indicação para investir.

(b) Posteriormente, pensando mais sobre o assunto, o investidor colocou em causa o desvio-padrão por existirem opiniões de que este seria superior a 2. Esclareça esta questão sabendo que o desvio-padrão da amostra recolhida foi 2.8. Utilize um nível de significância de 1%.

$H_0: \sigma = 2$ vs $H_1: \sigma > 2$ ao nível $\alpha = 0.01$; $s = 2.8$

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{28}$$

Região Crítica: 

$= [z, +\infty[\ = [48.2782, +\infty[$

$$z = inv\chi^2(0.99, 28) = 48.2782$$

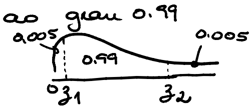
Sob a hipótese Ho, $T = \frac{28 * 2.8^2}{2^2} = 54.88 \in R.C$

logo ao nível 0.02, rejeitamos Ho, ou seja, a esse nível, podemos afirmar que o desvio-padrão é superior a 2.

ou (com penalização de 0.25 na classificação)

int. confiança para σ ao grau 0.99

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{28}$$



$z_1 = inv\chi^2(0.05, 28) = 12.4613$; $z_2 = inv\chi^2(0.95, 28) = 50.9934$

$$12.4613 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 50.9934 \iff \ldots \iff \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{50.9934}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{12.4613}}$$

Com confiança 0.9 $\sigma \in \left]2.0748 , 4.1972\right[\ \subset \ [2, +\infty[$

com 99% de confiança podemos afirmar que o desvio-padrão é superior a 2.

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
2ª FREQUÊNCIA DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

28 de Junho de 2022 **Versão 102** Duração: 1h30min

ADAD

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução trabalhe com 4 casas decimais (pelo menos).

(1.25) **1.** Suponha que pede uma pizza na sua pizzaria favorita às 19h. Sabe-se que o tempo que uma pizza demora a ser entregue ao cliente é distribuído uniformemente entre as 19h e as 19h30.

(a) A probabilidade de ter que esperar no mínimo 10 minutos pela sua pizza é

(A) 0.6667 **(B)** 0.2 **(C)** 0.3333 **(D)** 0.8

X = "tempo que uma pizza demora a ser entregue"

$X \sim U_{[0,\,0.5]}$ 10 minutos $\longrightarrow \frac{1}{6}$ da hora

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{0.5}, & x \in [0, 0.5] \\ 0, & x \notin [0, 0.5] \end{cases} = \begin{cases} 2, & x \in [0, 0.5] \\ 0, & x \notin [0, 0.5] \end{cases}$$

a) $P(X \geq \frac{1}{6}) = \int_{1/6}^{0.5} 2 \, dx = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3} \simeq 0.6667$ opção A

(b) Se às 19h15 a pizza ainda não tiver chegado, qual é a probabilidade de ter de esperar pelo menos mais 10 minutos?

15 minutos $\longrightarrow \frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0.25$ da hora

$$P(X \geq \underbrace{0.25 + \tfrac{1}{6}}_{0.4167} \,/\, X \geq 0.25) = \frac{P(X \geq 0.4167)}{P(X \geq 0.25)} = \frac{\cancel{2}(0.5 - 0.4167)}{\cancel{2}(0.5 - 0.25)}$$

$$= \frac{0.0833}{0.25} = 0.3332$$

(3.0) **2.** A quantidade de açúcar diária consumida numa pastelaria, na secção de confecção de bolos, é uma variável aleatória com distribuição normal de média 1000 kg e desvio-padrão 150 kg. Admita que o consumo de açucar em dias distintos é independente.

(a) Em determinado momento do dia já tinham sido consumidos 980 kg. A probabilidade de terem sido, nesse dia, consumidos menos de 1230 kg é, com duas casas decimais,

(A) 0.94 **(B)** 0.11 **(C)** 0.49 **(D)** 0.89

X = "A quantidade de açúcar consumida por dia"

$X =$ "A quantidade de açúcar consumida por dia"

$X \sim \mathcal{N}(1000, 150)$

a) $P(X < 1230 / X \geq 980) = \dfrac{P(980 \leq X < 1230)}{P(X \geq 980)}$

$= \dfrac{\text{normalcdf}(980, 1230, 1000, 150)}{\text{normalcdf}(980, \infty, 1000, 150)}$

$= \dfrac{0.4904}{0.5530} = 0.8868$

centrando e reduzindo

$\simeq \dfrac{P(-0.13 < Z < 1.53)}{P(Z \geq -0.13)}$

em que $Z = \dfrac{X - 1000}{150} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= \dfrac{P(Z < 1.53) - P(Z < -0.13)}{P(Z < 0.13)}$ simetria da $N(0,1)$

$= \dfrac{P(Z<1.53) - \overbrace{(1 - P(Z<0.13))}^{P(Z>0.13)}}{0.5517}$

$= \dfrac{0.9370 - 1 + 0.5517}{0.5517} = \dfrac{0.4887}{0.5517}$

$= 0.8858$

opção D

(b) Diariamente qual deverá ser a quantidade de açúcar em armazém para que a probabilidade de rotura seja superior a 10%? Aproxime o seu resultado às unidades.

$?\, q \in \mathbb{R}: \quad P(\text{"rotura"}) > 0.1$ rotura significa que $X > q$

$\Leftrightarrow P(X > q) > 0.1$

$\Leftrightarrow 1 - P(X \leq q) > 0.1$

$\Leftrightarrow P(X \leq q) < 0.9$

$\Leftrightarrow q < \text{invNorm}(0.9, 1000, 150)$

$\Leftrightarrow q < 1192.23 \Rightarrow \boxed{q = 1192 \text{ kg}}$

(c) Qual é a probabilidade de numa semana serem consumidos no mínimo 7230 Kg de açúcar?

uma semana $\Rightarrow$ 7 dias $X_1, X_2, \ldots, X_7$

$Y =$ "quantidade de açúcar consumida numa semana"

$\Leftrightarrow Y = \sum_{i=1}^{7} X_i$

Como $X_1, \ldots, X_7$ são i.i.d com $X \sim \mathcal{N}(1000, 150)$

pela estabilidade da normal

$Y \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{7} 1000, \sqrt{\sum_{i=1}^{7} 150^2}\right) = \mathcal{N}(7000, 396.8630)$

$P(Y \geq 7230) = \text{normalcdf}(7230, \infty, 7000, 396.8630)$

$= 0.2811$

$P(Y \geq 7230) \simeq 1 - P(Z < 0.58)$

com $Z = \dfrac{Y - 7000}{396.8630} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= 1 - 0.7190 = 0.2810$

(4.25) **3.** O tempo (em horas) gasto por um aluno a estudar para um exame está associado a uma variável aleatória X com função densidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-x+\theta} & , \quad x \geq \theta \\ 0 & , \quad x < \theta \end{cases},$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro desconhecido relacionado com o tempo considerado mínimo para aprovar no exame. Sabe-se que $\mathrm{E}(X) = \theta + 1$ e que $\mathrm{V}(X) = 1$. Foi recolhida uma amostra de dimensão 100, da qual se extraíram os seguintes valores,

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 2960 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 87715$$

(a) Determine, justificando, estimativas cêntricas para a média de X e para o parâmetro θ.

Um estimador cêntrico para $\mu = E(X)$ é $\hat{\mu} = \bar{X}$ logo uma estimativa cêntrica para μ será

$$\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = \frac{296\cancel{0}}{10\cancel{0}} = 29.6$$

Como $E(X) = \theta + 1 \Leftrightarrow \hat{\theta} = E(X) - 1$ um estimador cêntrico para θ será

$\hat{\theta} = \bar{X} - 1$ e uma estimativa para θ será $29.6 - 1 = 28.6$.

(b) Determine um intervalo com aproximadamente 95% de confiança para o tempo médio gasto por um aluno a estudar para um exame.

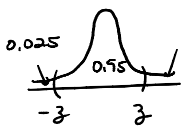
int. confiança para μ ao grau 0,95 com $\sigma = \sqrt{V(X)} = 1$ conhecido

Passo 1:

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1) \text{ simétrica}$$

Passo 2:

$? z \in \mathbb{R} : P(-z < Z < z) = 0{,}95 \Leftrightarrow ? z \in \mathbb{R} : P(Z < z) = 0{,}975$



$\frac{1 - 0.95}{2} = 0{,}025$

$\Rightarrow z = \text{invNorm}(0{,}975, 0, 1)$

$\Leftrightarrow z = 1.95996 \simeq 1.96$

Passo 3:

$$-1.96 < Z < 1.96 \Leftrightarrow -1.96 < \sqrt{n}\,\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} < 1.96$$

$$\Leftrightarrow \bar{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$$

O intervalo aleatório para μ ao grau 0,95 com σ conhecido é:

$$\left]\bar{X} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

Passo 4:

Sendo $n = 100$; $\sigma = 1$, $\bar{x} = 29.6$ um intervalo de confiança para μ ao grau 0,95 será

$$\left]29.6 - \frac{1.96 * 1}{\sqrt{100}}, 29.6 + \frac{1.96 * 1}{\sqrt{100}}\right[= \left]29.6 - 0.196, 29.6 + 0.196\right[$$

$$= \left]29.404, 29.796\right[$$

$= \left] 29.404,\ 29.796 \right[$

(c) Com base na alínea anterior um intervalo com aproximadamente 95% de confiança para o parâmetro θ é:

(A) $]28.404, 28.796[$ **(B)** $]28.402, 28.798[$ **(C)** $]29.404, 29.796[$ **(D)** $]30.402, 30.798[$

Sendo $\mu = E(X) \Leftrightarrow \mu = \theta + 1 \Leftrightarrow \theta = \mu - 1$

logo um intervalo de confiança para θ ao grau 0.95 é

$\left] 28.404,\ 28.796 \right[$ opção A

(d) Se pretender, para o mesmo grau de confiança, diminuir a amplitude do intervalo de confiança para o parâmetro θ, deve:

(A) aumentar α **(B)** diminuir n **(C)** diminuir α **(D)** aumentar n

se se pretende o mesmo grau de confiança não se pode alterar α logo (A) e (C) estão fora de questão

int. conf. para o parâmetro θ é

$$\left] \bar{x} - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} - 1,\ \bar{x} + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}} - 1 \right[$$

logo diminuir a sua amplitude $\Rightarrow$ aumentar o valor de n (dimensão da amostra)

opção D

(e) Considerando 29 uma boa estimativa para o valor de θ, determine a probabilidade de um aluno estudar menos de 32 horas sabendo que já estudou 30 horas.

Observação: Se necessitar, $\int_a^b f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = e^{f(b)} - e^{f(a)}$

$$\underline{\underline{\hat{\theta} = 29}} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{-x+29}, & x \geq 29 \\ 0, & x < 29 \end{cases}$$

$$P(X < 32 / X \geq 30) = \frac{P(30 \leq X < 32)}{P(X \geq 30)} = \frac{(-1)\int_{30}^{32} (-1)\, e^{-x+29}\, dx}{1 - P(X \leq 30)} = \frac{-\left[e^{-32+29} - e^{-30+29}\right]}{1 - \underbrace{\int_{29}^{30} e^{-x+29}\, dx}_{-e^{-1}+1}}$$

X é contínua

$$= \frac{-e^{-3} + e^{-1}}{\cancel{1} + e^{-1} - \cancel{1}} = 0.8647$$

(f) Determine, justificando, a probabilidade do tempo médio de estudo de 100 alunos ser inferior a 30 horas.

$X_1, \ldots, X_{100}$ são i.i.d com X $\Rightarrow$ Pelo T.L.C $\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \overset{\cdot}{\sim} N(0,1)$

$P(\bar{X} < 30) = 0.5$

Lei de $\bar{X}$?

$\hat{\theta} = 29$ (estimativa)

onde $E(\bar{X}) = E(X) = \theta + 1 = 30$

$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{100} = \frac{1}{100}$

lei de x !

$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{100} = \frac{1}{100}$

então $\bar{X} \dot{\sim} N(30, \frac{1}{10})$

(1.5) **4.** Um investidor está interessado em investir num activo financeiro cujo retorno (expresso em percentagem) se admite ter distribuição normal com desvio-padrão 2. O investidor só investirá no ativo se o retorno médio for superior a 3. Para tomar a decisão, recolheu informação sobre o retorno do activo em 29 transações seleccionadas aleatoriamente, tendo obtido um retorno médio de 3.9.

(a) Com o objectivo de auxiliar o investidor, realize, ao nível de significância de 1% um teste paramétrico conveniente. Que decisão aconselha ao investidor?

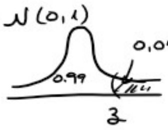
$n = 29$; $\bar{x} = 3.9\%$

$X =$ "retorno financeiro do investimento" ; lei de $X \sim N(\mu, 2)$

a) $H_0: \mu = 3$ vs $H_1: \mu > 3$ com $\alpha = 0.01$

$T = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

Região Crítica



$= [z, +\infty[\ = [2.3264, +\infty[$

$z = \text{invnorm}(0.99, 0, 1) = 2.3264$

Sob a hipótese H_0, $T = \sqrt{29}\ \frac{3.9 - 3}{2} = 2.4233 \in R.C$

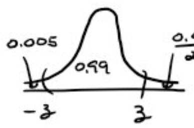
logo ao nível 0.01, rejeitamos H_0, isto é, a este nível daremos indicação para investir.

ou (com penalização de 0.25 na classificação)

int. confiança para μ ao grau 0.99 com σ conhecido

$Z = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

$? z: P(-z < Z < z) = 0.99$



$\Leftrightarrow ? z: P(Z < z) = 0.995$

$\Rightarrow z \simeq \text{invnorm}(0.995, 0, 1) = 2.5758$

$\therefore P(-2.5758 < Z < 2.5758) \simeq 0.99$

$-2.5758 < \sqrt{n}\ \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} < 2.5758 \Leftrightarrow \bar{X} - \frac{2.5758\,\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{2.5758\,\sigma}{\sqrt{n}}$

O intervalo aleatório para μ pretendido é

$\left]\ \bar{X} - \frac{2.5758 * \sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{2.5758 * \sigma}{\sqrt{n}}\ \right[$

Um intervalo de confiança para μ será

$\left]\ 3.9 - \frac{2.5758 * 2}{\sqrt{29}}, 3.9 + \frac{2.5758 * 2}{\sqrt{29}}\ \right[= \ ]2.94337, 4.8566[\ \not\subset \ ]3, +\infty[$

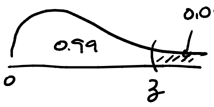
Com confiança 0.99 não é clara a indicação a dar ao investidor

(b) Posteriormente, pensando mais sobre o assunto, o investidor colocou em causa o desvio-padrão por existirem opiniões de que este seria superior a 2. Esclareça esta questão sabendo que o desvio-padrão da amostra recolhida foi 2.8. Utilize um nível de significância de 1%.

$H_0: \sigma = 2$ vs $H_1: \sigma > 2$ ao nível $\alpha = 0.01$; $s = 2.8$

$$T = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{28}$$

Região Crítica :



$= [z, +\infty[\; = [48.2782, +\infty[$

$z = \text{inv}\chi^2(0.99, 28) = 48.2782$

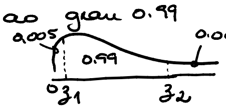
Sob a hipótese Ho , $T = \dfrac{28 * 2.8^2}{2^2} = 54.88 \in$ R.C

logo ao nível 0.02, rejeitamos Ho, ou seja, a esse nível, podemos afirmar que o desvio-padrão é superior a 2.

ou (com penalização de 0.25 na classificação)

int. confiança para σ ao grau 0.99

$$Z = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} = \chi^2_{28}$$



$z_1 = \text{inv}\chi^2(0.05, 28) = 12.4613$; $z_2 = \text{inv}\chi^2(0.95, 28) = 50.9934$

$$12.4613 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < 50.9934 \iff \ldots \iff \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{50.9934}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{12.4613}}$$

Com confiança 0.9 $\sigma \in \,]2.0748, 4.1972[\; \subset [2, +\infty[$

com 99% de confiança podemos afirmar que o desvio-padrão é superior a 2.