INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
EXAME DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS - ÉPOCA NORMAL

07 de Julho de 2022 **Versão 101**/102 Duração: 2h30min

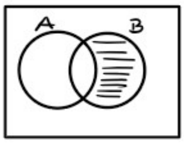
OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução **trabalhe com 4 casas decimais** (pelo menos);
- Na resolução de todas as questões que **não sejam** de escolha múltipla justifique todos os cálculos e deduções.

(1.0) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.75$, $P(B/\overline{A}) = \frac{3}{7}$ e $P(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $P(B)$ é:

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{26}{35}$ **(D)** $\frac{9}{35}$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{7} * (1 - 0{,}75)$$



$$\Leftrightarrow P(B) = P(A \cap B) + \frac{3}{7} * 0{,}25$$
$$= 0.15 + \frac{3}{28} = \frac{9}{35} \longrightarrow \text{opção D}$$

opção B

$$P(B/A) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{1}{5} * P(A)$$
$$= \frac{1}{5} * 0{,}75$$
$$= 0.15$$

(3.0) **2.** Uma empresa de desenvolvimento de *software* efetuou um estudo sobre o comportamento dos seus clientes aquando dos pedidos de orçamentos. Verificou que a 40% dos clientes que propõem alterações ao pedido inicial, é feito um aditamento ao orçamento; a 15% dos clientes que não propõem alterações ao pedido inicial, não é feito um aditamento ao orçamento e que 65% dos clientes propõem alterações ao pedido inicial.

(a) O João afirmou que, escolhendo um cliente ao acaso, é mais provável que esse cliente proponha alterações ao pedido inicial sem ser feito um aditamento ao orçamento, do que seja feito um aditamento ao orçamento e não tenham sido propostas alterações ao pedido inicial. Indique, justificando, se o João tem razão.

A = "são feitas alterações ao pedido inicial"

B = "é feito um aditamento ao orçamento"

$P(B/A) = 0{,}4$; $P(\bar{B}/\bar{A}) = 0{,}15$; $P(A) = 0.65$

a) $P(B/A) = 0{,}4 \Leftrightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0{,}4$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}4 * 0{,}65$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = 0.26$

$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$
$= 0{,}65 - 0{,}26 = 0.39$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$
$= 0{,}5575 - 0{,}26$
$= 0.2975$

$\Leftrightarrow P(B \cap A) = 0.26$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) =$
$= 0.65 - 0.26 = 0.39$

R: Como $P(A \cap \overline{B}) > P(B \cap \overline{A})$ podemos concluir que o João tem razão.

$P(B) = P(B/A) \cdot P(A) + P(B/\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$
$= 0.4 * 0.65 + (1 - 0.15) * 0.35$
$= 0.26 + 0.2975$
$= 0.5575$

(b) O João efetuou um aditamento a um orçamento. Ele apostou então que o cliente tinha proposto alterações ao pedido inicial. Qual é a probabilidade do João ganhar a aposta?

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.26}{0.5575} = 0.4664$$

(c) Os acontecimentos, "o cliente propõe alterações ao pedido inicial" e "é efetuado um aditamento ao orçamento" são independentes? Justifique.

Não, pois se fossem teríamos $P(A/B) = P(A)$ o que é falso pois $0.4664 \neq 0.26$

(1.0) **3.** O guarda redes de uma dada equipa de futebol defende 10% das grandes penalidades. A final da taça vai ser decidida pela marcação de 5 grandes penalidades. A probabilidade de que o guarda redes defenda pelo menos uma grande penalidade na final da taça é igual a:

(A) 0.5905 **(B)** 0.0086 **(C)** 0.4095 **(D)** 0.0815

D = "o guarda-redes defende uma penalidade"

$P(D) = 0.1$

$\mathcal{E}$ = " observar a marcação de uma penalidade e registar o resultado"

Repete-se $\mathcal{E}$ sempre nas mesmas condições, 5 vezes.

X = " Número de penalidades defendidas em 5"

$X \sim \mathcal{B}(5, 0.1)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.5905 = 0.4095 \rightarrow$ opção C

opção A

(1.0) **4.** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias reais independentes tais que $X \sim \mathcal{P}(0.2)$ e $Y \sim \mathcal{P}(0.4)$. Determine $P(X + Y = 3)$.

$X + Y \sim \mathcal{P}(0.2 + 0.4) = \mathcal{P}(0.6)$

estabilidade da Poisson
X e Y são independentes

$P(X+Y=3) = \text{PoissonPdf}(0.6, 3) = 0.0198$

(4.5) **5.** Considere o vetor aleatório (X,Y) que representa o número de consultas anuais que um grupo de utentes requereu no serviço público, X, e no serviço privado, Y, caracterizado pela seguinte função de probabilidade conjunta.

X \ Y	2	3	4	X
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	1/4
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$	1/2
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0	1/4
Y	1/3	1/3	1/3	1

a) Determine as leis de probabilidade marginal do número de consultas no serviço público e no serviço privado.

lei de probabilidade de

X = "Número de consultas no serviço público"

X	1	2	3	cc
P(X=x)	1/4	1/2	1/4	0

lei de probabilidade de

Y = "Número de consultas no serviço privado"

Y	2	3	4	cc
P(Y=y)	1/3	1/3	1/3	0

b) Construa a função de probabilidade do número de consultas no serviço privado, apenas para os utentes que tiveram 2 consultas no público.

$$P(Y=y/X=2) = \begin{cases} P(Y=2/X=2) & , y=2 \\ P(Y=3/X=2) & , y=3 \\ P(Y=4/X=2) & , y=4 \\ 0 & , c.c \end{cases} = \begin{cases} \frac{P(2,2)}{P(X=2)} & , y=2 \\ \frac{P(2,3)}{P(X=2)} & , y=3 \\ \frac{P(2,4)}{P(X=2)} & , y=4 \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1/6}{1/2} & , y=2 \\ 0 & , y=3 \\ \frac{1/3}{1/2} & , y=4 \\ 0 & , c.c \end{cases} = \begin{cases} 1/3 & , y=2 \\ \frac{2}{3} & , y=4 \\ 0 & , c.c \end{cases}$$

c) Qual a probabilidade de, ao escolher um utente ao acaso, este ter tido 2 consultas no serviço privado, sabendo que teve menos de 6 consultas, ou seja, $P(Y=2/X+Y \leq 5)$?

$$P(Y=2 / X+Y \leq 5) = \frac{P(Y=2 \cap X+Y \leq 5)}{P(X+Y) \leq 5)}$$

$1+2 \leq 5$

$2+2 \leq 5$

$3+2 \leq 5$

X \ Y	2	3	4
1	3	4	5
2	4	5	6
3	5	6	7

$$= \frac{P(1,2) + P(2,2) + P(3,2)}{1 - P(2,4) - P(3,3) - P(3,4)}$$

$$= \frac{1/3}{1-1/2} = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$$

d) Será que o número de consultas no serviço público é independente do número de consultas no serviço privado? Justifique.

d) Será que o número de consultas no serviço público é independente do número de consultas no serviço privado? Justifique.

Se X e Y forem independentes $P(Y=y \,/\, X=x) = P(Y=y)$, $\forall (x,y) \in S_{(X,Y)}$

o que é falso pois pela alínea b)

$P(Y=3/X=2) = 0 \neq \frac{1}{3} = P(Y=3)$ (por exemplo)

(2.5) **6.** Uma pequena estação de serviço de aldeia é abastecida com gasolina todos os sábados à tarde. O seu volume de vendas semanal, em milhares de litros, é uma variável aleatória X com função densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

sendo o seu valor esperado igual a 0.5 com uma variância de 0.05.

(a) Se numa dada altura da semana já foram vendidos 200 litros de gasolina, a probabilidade de se venderem menos de 750 litros nessa semana é:

(A) 0.7396 **(B)** 0.8256 **(C)** 0.8438 **(D)** 0.1744

X = "Número de litros, em milhares, de gasolina vendida"

$$P(X<0{,}75 / X \geq 0{,}2) = \frac{P(X<0{,}75 \cap X \geq 0{,}2)}{P(X \geq 0{,}2)}$$

$$= \frac{\int_{0.2}^{0.75} 6x(1-x)\,dx}{\int_{0.2}^{1} 6x(1-x)\,dx} = \frac{\cancel{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{0.2}^{0.75}}{\cancel{6}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big]_{0.2}^{1}} = 0{,}8256$$

opção B

opção B

(b) Analisando as vendas realizadas no último ano (52 semanas), determine a probabilidade do número médio de vendas semanais ter sido inferior a 600 litros. **Observação:** *Nos cálculos que efetuar conserve 4 casas decimais.*

Seja $\overline{X} = \frac{1}{52}\sum_{i=1}^{52} X_i$ o número médio de vendas semanais num ano, onde X_i, $i=1,\dots,52$, são i.i.d com X

Como X_i, $i=1,\dots,52$, são i.i.d com X que tem média 0.5 e desvio-padrão $\sqrt{0.05} = 0.2236$, pelo T.L.C,

$$\frac{\overline{X}-E(\overline{X})}{\sqrt{V(\overline{X})}} \dot{\sim} N(0,1) \quad \text{onde} \quad E(\overline{X}) = E(X) = 0.5$$

$$V(\overline{X}) = \frac{V(X)}{52} = \frac{0.05}{52} = 0.000962 \simeq 0.001$$

$$\Rightarrow \overline{X} \dot{\sim} N(0.5, \sqrt{0.001}) = N(0.5, 0.0316)$$

Assim,

$$P(\overline{X} < 0.6) \simeq \text{normalcdf}(-\infty, 0.6, 0.5, 0.0316) \Big\} \text{normalcdf}\left(-\infty, 0.6, 0.5, \sqrt{\tfrac{0.05}{52}}\right)$$

Assim,

$$P(\overline{X} < 0.6) \simeq \text{normalcdf}(-\infty, 0.6, 0.5, 0.0316) = 0.9992$$

$\text{normalcdf}\left(-\infty, 0.6, 0.5, \sqrt{\frac{0.05}{52}}\right)$
$= 0.9994$

(2.5) **7.** Uma empresa produtora de equipamentos para realidade virtual dispõe de dois protótipos independentes, A e B, para o fabrico de óculos e pretende compará-los no que diz respeito à sua velocidade de produção. Sabe-se que os tempos de produção dos dois protótipos A e B seguem distribuições normais de médias 9.5 minutos e 10.4 minutos, respetivamente, e que os desvios-padrão são 1 minuto e 1.25 minutos, respetivamente.

(a) Determine a probabilidade do tempo de produção do protótipo A ser inferior ao tempo de produção do protótipo B.

X_A = " tempo de producão do protótipo A " $\quad X_A \sim N(9.5, 1)$

X_B = " tempo de producão do protótipo B " $\quad X_B \sim N(10.4, 1.25)$

X_A e X_B são independentes

$$P(X_A < X_B) = P(X_A - X_B < 0)$$

Como X_A e X_B seguem distribuições normais e são independentes pela estabilidade da normal

$$X_A - X_B \sim N\left(9.5 - 10.4, \sqrt{1^2 + 1.25^2}\right) = N(-0.9, 1.6008)$$

$$= \text{normalcdf}(-\infty, -0.9, 1.6008)$$

$$= 0.7130$$

(b) O número mínimo de produtos que a empresa tem de testar em cada protótipo para garantir, com 95% de probabilidade, que o tempo médio de produção do protótipo A é inferior ao tempo médio de produção do protótipo B é:

(A) 9 (B) 8 (C) 12 (D) 13

$?\, n \in \mathbb{N}: \quad P(\overline{X}_A < \overline{X}_B) = 0.95$

estabilidade da distribuição normal

$$\overline{X}_A \sim N\left(E(\overline{X}_A), \sqrt{V(\overline{X}_A)}\right)$$

$$= N\left(E(X_A), \sqrt{\frac{V(X_A)}{n}}\right)$$

$$= N\left(9.5, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

De igual forma

$$\overline{X}_B \sim N\left(10.4, \frac{1.25}{\sqrt{n}}\right)$$

Logo $\overline{X}_A - \overline{X}_B \sim N\left(-0.9, \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1.25^2}{n}}\right)$

$$= N\left(-0.9, \frac{\sqrt{2.5625}}{\sqrt{n}}\right)$$

então $P(\bar{X}_A - \bar{X}_B < 0) = 0.95$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{0+0.9}{\frac{\sqrt{2.5625}}{\sqrt{n}}}\right) = 0.95 \quad \text{com } Z \sim N(0,1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n}\,\frac{0.9}{\sqrt{2.5625}} = \text{invNorm}(0.95, 0, 1)$$

$$\Leftrightarrow n = \left(\frac{1.6449 * \sqrt{2.5625}}{0.9}\right)^2 \wedge n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n = 8.5597 \wedge n \in \mathbb{N}$$

R: O número mínimo de produtos a testar será 9. opção (A)

opção (C)

(4.5) **8.** O tempo de vida de um componente eletrónico, em milhares de horas, tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & , \quad 0 \le x \le \theta, \ \ \theta > 0 \\ 0 & , \quad \text{outros valores de } x \end{cases}$$

Para conhecer o comportamento desta variável aleatória, a empresa observou as durações de 50 componentes escolhidos aleatoriamente da produção diária, tendo verificado que

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 273 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1732.5$$

(a) Prove que o valor médio da variável aleatória X é dado, em função de θ, por $\frac{2}{3}\theta$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{2x}{\theta^2}\, dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta x^2\, dx = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\theta$$

$$= \frac{2}{\cancel{\theta^2}}\left(\frac{\cancel{\theta^3}^{\,1}}{3} - 0\right) = \frac{2}{3}\theta$$

(b) Determine uma estimativa cêntrica para θ.

Se $E(X) = \frac{2}{3}\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{3}{2}E(X)$

logo, pelo método dos momentos, $\hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X} = \frac{3}{2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

é um estimador cêntrico para θ.

Uma estimativa cêntrica para θ será

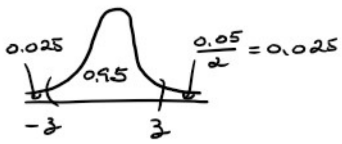
$$\frac{3}{2} * \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{3}{100} * 273 = 8.19$$

(c) Determine um intervalo com 95% de confiança para a média do tempo de vida do componente eletrónico.

int. confiança para μ ao grau 0.95 com σ desconhecido

$$Z = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{S} \ \dot{\sim}\ \mathcal{N}(0,1)$$

$$?z: \ P(-z < Z < z) = 0.95$$



$$\Leftrightarrow\ ?z: \ P(Z < z) = 0.975$$

$$\Rightarrow\ z \simeq \text{invnorm}(0.975, 0, 1) = 1.96$$

$$\therefore\ P(-1.96 < Z < 1.96) \simeq 0.9$$

$$-1.96 < \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{S} < 1.96 \ \Leftrightarrow\ \bar{X} - \frac{1.96 * S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \frac{1.96 * S}{\sqrt{n}}$$

O intervalo aleatório para μ pretendido é

$$\left]\ \bar{X} - \frac{1.96 * S}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{X} + \frac{1.96 * S}{\sqrt{n}}\ \right[$$

Da amostra recolhida

$$s^2 = \frac{1}{50-1} \sum_{i=1}^{50} x_i^2 - \frac{50}{50-1}\bar{x}^2 \quad ; \quad \bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50} x_i = \frac{1}{50} * 273 = 5.46$$

$$= \frac{1}{49} * 1732.5 - \frac{50}{49} * 5.46^2$$

$$= 4.9371$$

Um intervalo de confiança para μ será

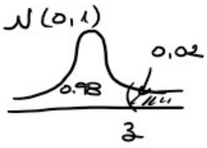
$$\left]5.46 - \frac{1.96 * \sqrt{4.9371}}{\sqrt{50}}\ ,\ 5.46 + \frac{1.96 * \sqrt{4.9371}}{\sqrt{50}}\right[\ = \ \left]4.8441,\ 6.0759\right[$$ em milhares de horas.

(d) Averigue com uma significância de 2% se o tempo médio de vida um componente eletrónico é superior a 5500 horas.

$H_0: \mu = 5.5$ vs $H_1: \mu > 5.5$ com $\alpha = 0.02$

$$T = \sqrt{n}\ \frac{\bar{X}-\mu}{S} \ \dot{\sim}\ \mathcal{N}(0,1)$$

Região Crítica



$$= [z, +\infty[\ = \ [2.0538, +\infty[$$

$$z = \text{invnorm}(0.98, 0, 1) = 2.0538$$

Sob a hipótese Ho, $T \overset{a}{=} \sqrt{50}\ \dfrac{5.46 - 5.5}{\sqrt{4.9371}} = -0.1273 \notin R.C$

logo ao nível 0.02 não rejeitamos Ho, isto é, a este nível não podemos assumir que o tempo médio de vida do componente seja superior a 5500 horas.