INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)
1ª FREQUÊNCIA DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

03 de Maio de 2022 **Versão 101** Duração: 1h30min

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução trabalhe com 4 casas decimais (pelo menos).

(0.75) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $\mathrm{P}(A) = 0.75$, $\mathrm{P}(B/\overline{A}) = \frac{3}{7}$ e $\mathrm{P}(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $\mathrm{P}(B)$ é:

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{26}{35}$ **(D)** $\frac{9}{35}$

(0.75) 2. A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x	a	$2a$	$3a$
$P(X = x)$	0.4	0.2	0.4

onde a designa um número real. Sabendo que valor médio desta variável é 4, o suporte da variável é

(A) $\{1, 2, 3\}$ **(B)** $\{2, 4, 6\}$ **(C)** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$ **(D)** $\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$

(0.75) **3.** Ao escrever uma página de código, a probabilidade de um programador cometer um erro de digitação é 0.05. A probabilidade de, em 20 páginas de código, existirem no máximo 18 perfeitas é:

(A) 0.2642 **(B)** 0.0755 **(C)** 0.7358 **(D)** 0.9245

(0.75) **4.** O número de tentativas de fraude num exame comporta-se como uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de valor esperado 2. Em 15 exames realizados num determinado ano letivo, a probabilidade de, no máximo, existirem 26 tentativas de fraude é:

(A) 0.2673 **(B)** 0.7916 **(C)** 0.7327 **(D)** 0.9667

v.s.f.f.

(3.5) **5.** Numa unidade curricular de um curso de ensino superior verificou-se que

- 65% dos alunos foram à quase totalidade das aulas;
- 45% dos alunos aprovaram na unidade curricular;
- 25% dos alunos não foram à quase totalidade das aulas nem aprovaram.

0,5 (a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

1,0 (b) Determine a probabilidade de um aluno que foi à quase totalidade das aulas aprovar na unidade curricular.

1,0 (c) Sabendo que um aluno aprovou na unidade curricular, qual é a probabilidade dele não ter frequentado a quase totalidade das aulas.

1,0 (d) Se forem escolhidos aleatoriamente 8 alunos da unidade curricular considerada, determine um valor aproximado para a probabilidade de pelo menos 4 terem **aprovado**.

(3.5) **6.** Os trabalhadores de uma empresa foram classificados de acordo com o número de anos de experiência profissional, X, e o salário em milhares de euros, Y.
A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

X \ Y	1	2	3
1	0.06	0.14	0
5	0.04	0.16	0.10
10	0	0.10	0.40

0,5 a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y.

0,5 b) Dos trabalhadores com um salário de 3 mil euros, qual a percentagem dos que têm cinco anos de experiência profissional?

1,0 c) Determine a covariância entre X e Y. O número de anos de experiência profissional é independente do salário? Justifique.

1,0 d) Calcule $P(Y = y/X = 1), \forall y \in \mathbb{R}$.

0,5 e) Determine o valor esperado do salário quando um trabalhador tem no máximo um ano de experiência.

DBAA / DDCA

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)$.

Teorema [Bayes] Sejam A_1, A_2, ..., A_n acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)}$, $i = 2, ..., n$.

isec Engenharia

INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE COIMBRA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA E MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM ENGENHARIA INFORMÁTICA (LEI, LEI-PL, LEICE)

1ª FREQUÊNCIA DE MÉTODOS ESTATÍSTICOS

03 de Maio de 2022 **Versão 102** Duração: 1h30min

OBSERVAÇÕES:

- No **cabeçalho** da sua folha de resolução indique **o seu nome completo e número de estudante**;
- Na **primeira página** e antes de iniciar a resolução, **indique a versão da frequência** que vai realizar e o **modelo de calculadora** que utilizará;
- As escolhas múltiplas erradas **NÃO** descontam;
- Ao longo da resolução trabalhe com 4 casas decimais (pelo menos).

DDCA

(0.75) **1.** Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$). Sabe-se que $P(A) = 0.75$, $P(B/\overline{A}) = \frac{3}{7}$ e $P(B/A) = \frac{1}{5}$. O valor de $P(B)$ é:

(A) $\frac{26}{35}$ **(B)** $\frac{3}{4}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{9}{35}$

(0.75) **2.** A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é dada pela tabela

x	a	$2a$	$3a$
$P(X = x)$	0.4	0.2	0.4

onde a designa um número real. Sabendo que valor médio desta variável é 4, o suporte da variável é

(A) $\{1, 2, 3\}$ **(B)** $\left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$ **(C)** $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$ **(D)** $\{2, 4, 6\}$

(0.75) **3.** Ao escrever uma página de código, a probabilidade de um programador cometer um erro de digitação é 0.05. A probabilidade de, em 20 páginas de código, existirem no máximo 18 perfeitas é:

(A) 0.7358 **(B)** 0.0755 **(C)** 0.2642 **(D)** 0.9245

(0.75) **4.** O número de tentativas de fraude num exame comporta-se como uma variável aleatória com distribuição de *Poisson* de valor esperado 2. Em 15 exames realizados num determinado ano letivo, a probabilidade de, no máximo, existirem 26 tentativas de fraude é:

(A) 0.2673 **(B)** 0.7327 **(C)** 0.7916 **(D)** 0.9667

v.s.f.f.

(3.5) **5.** Numa unidade curricular de um curso de ensino superior verificou-se que

- 65% dos alunos foram à quase totalidade das aulas;
- 45% dos alunos aprovaram na unidade curricular;
- 25% dos alunos não foram à quase totalidade das aulas nem aprovaram.

0,5 (a) Defina em compreensão os acontecimentos referidos no enunciado e extraia deste todos os dados fornecidos.

1,0 (b) Determine a probabilidade de um aluno que não foi à quase totalidade das aulas aprovar na unidade curricular.

1,0 (c) Sabendo que um aluno frequentou foi à quase totalidade das aulas, qual é a probabilidade dele ter aprovado na unidade curricular.

1,0 (d) Se forem escolhidos aleatoriamente 8 alunos da unidade curricular considerada, determine um valor aproximado para a probabilidade de no máximo 4 não terem **aprovado**.

(3.5) **6.** Os trabalhadores de uma empresa foram classificados de acordo com o número de anos de experiência profissional, X, e o salário em milhares de euros, Y.

A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na forma de tabela, por

Y \ X	1	5	10
1	0.06	0.14	0
2	0.04	0.16	0.10
3	0	0.10	0.40

a) Determine as leis de probabilidade marginal de X e Y.

b) Dos trabalhadores com um salário de 3 mil euros, qual a percentagem dos que têm dez anos de experiência profissional?

c) Determine a covariância entre X e Y. O número de anos de experiência profissional é independente do salário? Justifique.

d) Calcule $\mathrm{P}(Y = y / X = 1), \forall y \in \mathbb{R}$.

e) Determine o valor esperado do salário quando um trabalhador tem no máximo um ano de experiência.

DDCA

Definição Sejam A e B acontecimentos de Ω com $P(B) > 0$. A probabilidade de A *condicionada por* B, $P(A/B)$, é dada por

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema [probabilidade total] Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer. Tem-se $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)$.

Teorema [Bayes] Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ acontecimentos de Ω tais que $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ e $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Seja B um acontecimento qualquer, com $B \neq \emptyset$. Tem-se $P(A_i/B) = \dfrac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i)\, P(A_i)}$, $i = 2, \ldots, n$.

ME - 1ª Frequência - 03.05.2022 -

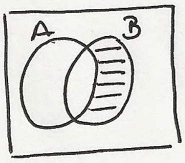
Versão 102 — D; D; C; A

Versão 101 — D; B; A; A

Ex1:

$P(A) = 0{,}75$; $P(B/\bar{A}) = \frac{3}{7}$; $P(B/A) = \frac{1}{5}$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{P(B) - P(B/A) \cdot P(A)}{1 - P(A)}$$



então $$\frac{3}{7} = \frac{P(B) - \frac{1}{5} \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{7} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{28} + \frac{3}{20} = P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B) = \frac{9}{35}$$

D   D

Ex2:

x	a	$2a$	$3a$
$P(X=x)$	0,4	0,2	0,4

, $a \in \mathbb{R}$

$E(X) = 4 \Leftrightarrow 0{,}4a + 0{,}4a + 1{,}2a = 4$

$\Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

$S_X = \{2, 4, 6\}$ D   B

Ex3:

P("cometer um erro de digitação numa página") = 0,05

$\mathcal{E}$ = "Observar 1 página e registar se existe 1 erro"

Repete-se $\mathcal{E}$ 20 vezes sempre nas mesmas condições

X = "nº de páginas em 20 perfeitas"

$X \sim \mathcal{B}(20, 0{,}95)$ $P(X \le 18) = \text{Binomcdf}(20, 0.95, 18)$

$= 0{,}2642$

C   A

Ex4:

$X =$ "nº de tentativas de fraude num exame"

$X \sim \mathcal{P}(2)$; $E(X) = 2$

$Y =$ "nº de tentativas de fraude em 15 exames"

$= \sum_{i=1}^{15} X_i$ com X_i, i.i.d com X

Pela estabilidade da Poisson, $Y \sim \mathcal{P}(15 \times 2) = \mathcal{P}(30)$

$P(Y \leq 26) =$ PoissonCdf$(30, 0, 26) = 0{,}2673$ (A) (A)

Ex5:

a) 0,5

$A =$ "o aluno foi à totalidade das aulas"

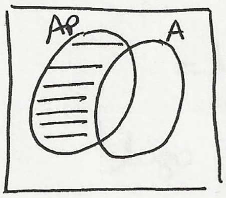
$Ap =$ " " aprovou na unidade curricular"

$P(A) = 0{,}65$; $P(Ap) = 0{,}45$

$P(\bar{A} \cap \bar{Ap}) = 0{,}25$

b) 1,0 $P(Ap / \bar{A}) = \dfrac{P(Ap \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(Ap) - P(A \cap Ap)}{P(\bar{A})} = \dfrac{0{,}45 - 0{,}35}{1 - 0{,}65} = \dfrac{2}{7}$

$= 0{,}2857$



$P(\bar{A} \cap \bar{Ap}) = P(\overline{A \cup Ap})$

$P(\bar{A} \cap \bar{Ap}) = 1 - P(A) - P(Ap) + P(A \cap Ap)$

$\Leftrightarrow 0{,}25 - 1 + 0{,}65 + 0{,}45 = P(A \cap Ap)$

$\Leftrightarrow P(A \cap Ap) = 0{,}35$

c) $P(\bar{A} / Ap) = \dfrac{P(\bar{A} \cap Ap)}{P(Ap)}$

$= \dfrac{P(Ap) - P(A \cap Ap)}{P(Ap)}$

$= \dfrac{0{,}45 - 0{,}35}{0{,}45} = \dfrac{10}{45} = \dfrac{2}{9}$

$= 0{,}2222$

b)
c) 1,0 $P(Ap / A) = \dfrac{P(Ap \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}35}{0{,}65} = \dfrac{7}{13} = 0{,}5385$

d) 1,0 $\mathcal{E} =$ "observa-se 1 aluno e regista-se se este aprovou ou não"

Repete-se $\mathcal{E}$ 8 vezes nas mesmas condições

$X =$ "nº de alunos em 8 que aprovaram"

$X \sim \mathcal{H}(8, N, 0{,}55\,N)$ $\overset{\sim}{\sim}$ $\mathcal{B}(8, 0{,}55)$ $\quad P(X \leq 4) \simeq$ Binomcdf$(8, 0{,}55, 0, 4)$

$0{,}45\,N$ $\quad \frac{8}{N} \leq 0{,}1$ $\quad 0{,}45$

$= 0{,}5230$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$

$= 0{,}5230$

Ex6:

$X =$ " nº de anos de experiência profissional "

$Y =$ " salário em milhares de euros "

Y \ X	1	5	10	P(Y=y)
1	0,06	0,14	0	0,2
2	0.04	0.16	0.1	0.3
3	0	0.1	0.4	0.5
P(X=x)	0.1	0.4	0.5	1

X \ Y	1	2	3	P(X=x)
1	0,06	0,14	0	0,2
5	0,04	0,16	0,10	0,3
10	0	0,10	0,40	0,5
P(Y=y)	0,1	0,4	0,5	1

a) lei de X

0,5

x	1	5	10	c.c
P(X=x)	0,1	0,4	0,5	0
	0,2	0,3	0,5	0

lei de Y

y	1	2	3	c.c
P(Y=y)	0,2	0,3	0,5	0
	0,1	0,4	0,5	0

b) $P(X=10 / Y=3) = \dfrac{P(X=10 \cap Y=3)}{P(Y=3)} = \dfrac{0.4}{0.5} = \dfrac{4}{5} = 0.8$

0,5

$P(X=5 / Y=3) = \dfrac{0.10}{0.50} = \dfrac{1}{5} = 0.2$

c) $cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$ em que $E(XY) = \sum_{(x,y) \in S_{(X,Y)}} xy \, P(X=x \cap Y=y)$

1,0

$= 1.61 \neq 0$; $1.56 \neq 0$

$= 1 \times 1 \times 0.06 + \ldots + 3 \times 10 \times 0.4$

$= 17.94$; 17.64

logo X e Y não são independentes.

$E(X) = \sum_{x \in S_X} x \, P(X=x)$

$= 1 \times 0.1 + 5 \times 0.4 + 10 \times 0.5$

$= 7.1$; 6.7

$E(Y) = \sum_{y \in S_Y} y \, P(Y=y)$

$= 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.5$

$= 2.3$; 2.4

d) $P(Y=y / X=1) = \dfrac{P(X=1 \cap Y=y)}{P(X=1)} = \begin{cases} \dfrac{P(1,1)}{0.1}, & y=1 \\ \dfrac{P(1,2)}{0.1}, & y=2 \\ \dfrac{P(1,3)}{0.1}, & y=3 \\ 0, & c.c \end{cases}$

1,0

$= \begin{cases} 0,6, & y=1 \\ 0,4, & y=2 \\ 0, & c.c \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 0.3, & y=1 \\ 0.7, & y=2 \\ 0, & c.c \end{cases}$

e) $E(Y / X \leq 1) = E(Y / X=1) = 0.6 \times 1 + 0.4 \times 2$; $0.3 \times 1 + 0.7 \times 2$

0,5

$= 1.4 (\times 1000)$; $1.7 (\times 1000)$

$(= 1400 €)$ $\quad (= 1700 €)$