A picture containing logo

Description automatically generated

**Análise Matemática II**

**2021/2022**

Atividade 02 - Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de ED

Inês Filipa dos Reis Moreira - 2019120254

Pedro Emanuel Dinis Serrano - 2016017926

Índice

[1 - Introdução 3](#_Toc107176225)

[2 - Sistemas de Equações Diferenciais (SED) 4](#_Toc107176226)

[2.1 - Definição de Sistemas de Equações Diferenciais (SED) 4](#_Toc107176227)

[2.2 – Métodos para o Sistema de equaçoes Diferenciais (SED) 4](#_Toc107176228)

[2.2.1 Método de Euler 4](#_Toc107176229)

[2.2.2 Método de Euler Melhorado 6](#_Toc107176230)

[2.2.3 Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2) 11](#_Toc107176231)

[2.2.4 Metodo de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4) 16](#_Toc107176232)

[2.2.4 Solução Exata 22](#_Toc107176233)

[3 – Problemas de Aplicação 23](#_Toc107176234)

[3.1 – Problema do Pêndulo 23](#_Toc107176235)

[3.2 – Problema Mola-Massa com Amortecimento 26](#_Toc107176236)

[3.3 – Problema Mola-Massa sem Amortecimento 28](#_Toc107176237)

[3.4 – Problema Vibração Mecânica 29](#_Toc107176238)

[3.5 – Problema Circuitos em Série 31](#_Toc107176239)

[4 - Conclusão 33](#_Toc107176240)

[5 – Bibliografia 34](#_Toc107176241)

# 1 - Introdução

O presente trabalho é sobre sistemas de equação e consiste na implementação em MATLAB de métodos de resolver sistemas de sistemas de equações diferenciais.

O principal objetivo deste trabalho é redefinir e adptar funções anteriormente implementadas na Atividade01 para a resolução de Sistemas de Equações Diferenciais com condições iniciais.

Está organizado em 2 capítulos. No capítulo 1 será abordado as formulas gerais dos métodos implementados. No capitulo 2 abordamos os problemas a resolver com os métodos.

# 2 - Sistemas de Equações Diferenciais (SED)

## 2.1 - Definição de Sistemas de Equações Diferenciais (SED)

É um sistema composto por duas ou mais equações contendo derivadas (que podem não ser necessariamente de primeira ordem) de duas ou mais varáiveis dependentes relativamente a uma só variavel independente.

## 2.2 – Métodos para o Sistema de equaçoes Diferenciais (SED)

### 2.2.1 Método de Euler

**Definição –** O método de Euler é um procedimento de primeira ordem que visa aproximar a solução da equação difrencial que satisfaz a condição incial . Neste caso iremos usar o método euler para resolver um sistema de equações.

**Fórmula Geral (EDs de 1ª ordem):**

onde:

* – Próximo valor aproximado da solução do problama original
* – Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual
* - Valor de cada subintervalo (passo)
* – Valor de no ponto

**Fórmula Geral Modificada para um Sistema de Equações**

* – Próxima ordenada da solução aproximada
* – Proxima ordenada da solução aproximada
* – Orderna atual da solução aproximada
* – Ordenada da soolução aproximda
* - Valor de casa subintervalo (passo)
* – valor de no ponto
* – valor de no ponto

**Algoritmo:**

1. Definir o valor de ;
2. Criar um vetor
3. Atribuir o primeiro valor de e de para guardar as soluções e atribuir e ;
4. Para de 1 a , fazemos o cálculo do método de Euler para iesima iteração no vetor e no vetor

Text

Description automatically generated

### 2.2.2 Método de Euler Melhorado

O Método de Euler Melhorado é semelhante ao Método de Euler Tradicional mas tem uma diferença.

Este método utiliza uma média de inclinações em cada ponto para cada iteração, dando desta forma um precisão maior.

**Fórmula Geral (Eds de 1ª ordem)**

* – Próximo valor aproximado da solução do problema original (na abcissa );
* – Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
* - Valor de cada subintervalo (passo);
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo.

**Calculo de**

* – Inclinação no início do intervalo;
* – Valor de no ponto

**Calculo de**

* – Inclinação no fim do intervalo;
* – Proxima abcissa do intervalo escolhido
* - Tamanho de cada subintervalo (passo);
* – Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual
* – Inclinação no inicio do intervalo

**Fórmula Geral Modificada para um Sistema de Equações**

* – Aproximação do método de Heun para a iésima iteração;
* – Aproximação do método de Heun para a iésima iteração;
* – Ordenada atual da função aproximada ;
* - Ordenada atual da função aproximada;
* - Valor de cada subintervalo;
* – Cálculo da média das inclinações;
* – Cálculo da média das inclinações.

**Calculo de**

* – Calculo da media das iterações.
* – Inclinação no início do intervalo;
* - Inclinação no fim do intervalo.

**Calculo de**

* – Calculo da media das iterações.
* – Inclinação no início do intervalo;
* - Inclinação no fim do intervalo.

**Calculo de**

* - Inclinação no inicio do intervalo
* – Valor de no ponto

**Calculo de**

* - Inclinação no inicio do intervalo
* – Valor de no ponto

**Calculo de**

* - Inclinação no fim do intervalo
* – Proxima abcissa do intervalo escolhido;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Inclinação no início do intervalo
* – Valor de no ponto .

**Calculo de**

* - Inclinação no fim do intervalo
* – Proxima abcissa do intervalo escolhido;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Inclinação no início do intervalo
* – Valor de no ponto

**Algortimo**

1. Definir o passo ;
2. Criar um vetor e um vetor para guardar as soluções e atribuir e
3. Atribuir o primeiro valor de e de ;
4. Cálculo da inclinação no início do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo da média das inclinações;
7. Cálculo do valor aproximado para a iésima iteração.

Text, letter

Description automatically generated

### 2.2.3 Metodo de Runge-Kutta de ordem 2 (RK2)

**Definição**

O RK2 é um metodo simples que requer apenas derivadas de 1ª ordem e pode fornecer aproximações precisas.

**Fórmula Geral (Eds 1ª ordem)**

* – Proximo valor aproximado da solução do problema original
* – Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual
* – Inclinação no inicio do intervalo
* – Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de**

* – Inclinação no inicio do intervalo
* - Valor de cada subintervalo
* – Valor de no ponto

**Cálculo de**

* – Inclinação no fim do intervalo;
* – Abcissa atual do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo;
* – Valor aproximado da solução do problema original na abcissa atual;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Valor de no ponto .

**Fórmula Geral modificada para um sistema de equações**

* – Aproximação do método de RK2 para iésima iteração;
* - Aproximação do método de RK2 para iésima iteração;
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Ordernada atual da solução aproximada ;
* – Calculo da média das inclinações;
* – Calculo da média das inclinações.
* **Calculo de**

* – Calculo da media das iterações.
* – Inclinação no início do intervalo;
* - Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de**

* – Calculo da media das iterações.
* – Inclinação no início do intervalo;
* - Inclinação no fim do intervalo.

**Cálculo de**

* Inclinação no inicio do intervalo
* - Tamanho do subintervalo
* – Valor de no ponto

**Cálculo de**

* Inclinação no inicio do intervalo
* - Tamanho do subintervalo
* – Abcissa atual do intervalo escolhido
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Valor de no ponto

**Cáculo de**

* – Inclinação no fim do intervalo
* - Tamanho dos subintervalos
* – Proxima abcissa do intervalo escolhido
* – Inclinação no inicio do intervalo
* – Ordenada atual da soluçãp aproximada
* – Ordenada atual da solução aproximada
* – Inclinação no inicio do intervalo

**Cálculo de**

1. – Inclinação no fim do intervalo
2. - Tamanho dos subintervalos
3. – Proxima abcissa do intervalo escolhido
4. – Inclinação no inicio do intervalo
5. - Inclinação no inicio do intervalo
6. – Ordenada atual da solução aproximada
7. – Ordenada atual da solução aproximda

**Algoritmo**

1. Definir o subintervalo, ;
2. Criar um vetor e um vetor para guardar as soluções e atribuir e ;
3. Atribuir o primerio valor de e de ;
4. Cálculo da inclinção no inicio do intervalo;
5. Cálculo da inclinação no fim do intervalo;
6. Cálculo do valor aproximado para iésima iteração.

Text, letter

Description automatically generated

### 2.2.4 Metodo de Runge-Kutta de ordem 4 (RK4)

**Definição**

É o método numerico com maior precisão. A sua fórmula considera para cada iteração 4 valores denominados normalmente por ”k” onde o *primeiro* é a inclinação no início do intervalo, o *segundo* é a inclinação no ponto médio usando a primeira inclinação, o *terceiro* é novamente a inclinação no ponto médio do intervalo mas, desta vez, utilizando a segunda inclinação e, finalmente, o *quarto* é a inclinação no final fo intervalo. Este método não necessita do cálculo de qualquer derivada de f, mas depende de outra função que é definida avalinando f em diferentes pontos.

**Formula Geral (EDs 1ª ordem)**

* – Aproximação pelo método RK4 de
* – Valor de na iesima iteração;
* - Valor dos subintervalos.
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no ponto medio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo.

Média ponderada das inclinações:

**Fórmula Geral modificada para um Sistema de Equações**

* - Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração;
* – Aproximação do método de RK4 para a iésima iteração;
* – Ordenada atual da solução aproximada ;
* – Ordenada atual da solução aproximada ;
* – Cálculo da média das inclinações;
* – Cálculo da média das inclinações.

**Cáculo de**

* - Cálculo da média das inclinações
* – Inclinação no inicio do intervalo
* - Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no ponto medio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo;

**Cálculo de**

* – Cálculo da média das inclinações;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo.

**Cáculo de**

* – Inclinação no inicio do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo
* – Valor de  no ponto .

**Cálculo de**

* – Inclinação no inicio do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo
* – Valor de  no ponto .

**Cálculo de , ,**

* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo;
* – Abcissa atual o intervalo escolhido;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Ordenada atual da solução aproximada ;
* – Ordenda atual da solução aproximada ;
* – Inclinação no inicio do intervalo.

**Cálculo de , ,**

* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no ponto médio do intervalo;
* – Inclinação no fim do intervalo;
* - Tamanho de cada subintervalo;
* – Abcissa atual o intervalo escolhido;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Inclinação no inicio do intervalo;
* – Ordenada atual da solução aproximada ;
* – Ordenda atual da solução aproximada .

**Algoritmo**

1. Definir o subintervalo, ;
2. Criar um vetor e um vetor para guardar as soluções e atribuir e ;
3. Atribuir o primeiro valor de e de ;
4. Calculo do, – inclinação no inicio do intervalo;
5. Calculo do, – inclinação no ponto médio do intervalo;
6. Calculo do, – inclinação no ponto médio do intervalo, novamente;
7. Cáculo do, – inclinação no fim do intervalo.

**Text, letter

Description automatically generated**

### 2.2.4 Solução Exata

**Definição**

A solução exata, diz concretamente o resultado que um certo exercicio retorna, uma vex que é uma solução exata, esta é muitas vezes usada como modo de comparação com os outros métodos para tentar perceber qual deles é mais eficaz e preciso.

Text

Description automatically generated

# 3 – Problemas de Aplicação

## Diagram Description automatically generated with medium confidence3.1 – Problema do Pêndulo

Com o programa criado em MATLAB, conseguimos resolver o problema expecificado a cima de maneira simples.

Sendo este problema uma equação diferencial de ordem 2 não linear, não irá ser apresentado uma solução exata.

**Resolução**

Neste problema, resolvido em aula, considerámos o seguinte:

Como o pêndulo é largado com velocidade nula, no ponto em que a corda está perpendicular ao seu suporte, temos as condições iniciais:

Desta forma, temos a seguinte esquação diferencial:

Line chart

Description automatically generated with low confidence Agora podemos aplicar o algoritmo de resolução e temos o sistema:

O programa apresenta a função dada no enuciando, os parâmetros de entrada, os métodos que irão resolver o problema, um gráfico e uma tabela.

A picture containing chart

Description automatically generatedUsando todos os métodos, termos uma comparação entre eles, podemos ver a precisão de cada um para resolver este problema.

## Graphical user interface, text, application Description automatically generated3.2 – Problema Mola-Massa com Amortecimento

Considerando o enuciado e , temos a a equação difrencial:

E as condições iniciais:

E aplicando os algoritmo de resolução temos o sistema

Obtemos a seguinte informção na GUI:

A picture containing table

Description automatically generated

## 3.3 – Problema Mola-Massa sem Amortecimento

Será o mesmo que o anterior mas uma condição importante não existe amortecimento.

Chart

Description automatically generated

## 3.4 – Problema Vibração Mecânica

Diagram

Description automatically generated

Considerando o enuciado , temos a seguinte ED:

Com condiçoes iniciais:

E com o algortimo de resolução temos o seguinte sistema de equaçoes:

Temos na GUI o seguinte:

Chart

Description automatically generated

## 3.5 – Problema Circuitos em Série

Diagram

Description automatically generated with medium confidence

Considreando o enuciado temos a seguinte equação difrencial:

Considerando que o circuito se encontra desligado no instante ,

Temos :

Temos o seguinte sistema:

Assim temos no GUI o seguinte:

Chart

Description automatically generated

# 4 - Conclusão

Neste trabalho abordamos o assunto dos métodos numericos existentes como por exemplo método de Euler, método de Euler Melhorado, RK2, RK4, e concluimos que estes métodos possibilitam a resolução de problemas com Equaçoes diferenciais de ordem 2.

Este trabalho foi importante para o nosso aprufundamento deste tema visto que permitiu-nos desenvolver por nós próprios uma aplicação em MATLAB e aplicar os métodos numéricos dados em aula.

# 5 – Bibliografia

<https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Euler>

<https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta>