Matemática Discreta

Lógica

(Proposicional e Predicados)

Prof. Roberto Samarone Araújo

April 22, 2018

Primeiro Teste de Lógica

Você foi convidado a participar do júri em um proceso criminal. O advogado de defesa argumenta o seguinte:

> *"Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, então Jason não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente."*

O argumento do advogado está correto ?
Qual seria o seu voto ?

Segunda Teste de Lógica

Você é prisioneiro de uma tribo indígena que conhece todos os segredos do Universo e portanto sabem de tudo. Você está para receber sua sentença de morte. O cacique o desafia:

> *"Faça uma afirmação qualquer. Se o que você falar for mentira você morrerá na fogueira. Se falar a verdade você será afogado. Se não pudermos definir sua afirmação como verdade ou mentira, nós te libertaremos"*

O que você diria ?

Lógica Formal

Lógica é a disciplina que lida com os métodos de raciocínio

- a Lógica provê regras e técnicas para determinar se um dado argumento é válido
- **aplicações diretas**: projeto de circuitos computacionais, construção e verificação de programas

Proposições Lógicas

Proposição

- É um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo [Filho2015].
- É uma sentença declarativa que é verdadeira (V) ou falsa (F), mas não ambos.

Valor verdade

é o resultado da avaliação de uma proposição (V ou F)

Proposições

Exemplo

1.	$2+3=5$	*proposição, verdadeira*
2.	7 não é um número par	*proposição, verdadeira*
3.	Pirataria é crime	*proposição, verdadeira*
4.	$x>3$	*não é proposição*
6.	Você fala inglês?	*não é proposição*
7.	Abra aquela porta	*não é proposição*
8.	Ela é muito bonita	*não é proposição*

Observação

Observe que o valor verdade (V ou F) de uma proposição não é necessariamente conhecido

Exemplo: "*A temperatura na superfície do planeta Vênus é de* 400°C" é uma proposição

Proposições

Lógica

Em Lógica, as proposições podem ser denotadas por símbolos, tais como p,q,r,..., os quais são chamados de **variáveis proposicionais**

Exemplo

1. p: o Sol está brilhando hoje
2. q: $2 + 3 = 5$

Proposições

Lógica

Em Lógica, as proposições podem ser denotadas por símbolos, tais como p,q,r,..., os quais são chamados de **variáveis proposicionais**

Exemplo

1. p: o Sol está brilhando hoje
2. q: $2 + 3 = 5$

Proposições Compostas

• Normalmente, uma argumentação não se limita ao uso de sentenças simples

• Novas proposições podem ser construídas a partir de proposições existentes, com o auxílio de operadores lógicos, para obter **proposições compostas**

Operador Negação

- A sentença:

" Não é verdade que p"

é uma outra proposição, chamada de **negação de p**

Notação

$\neg p$, *not* p, $\sim p$

Operador Negação

- A sentença:

"Não é verdade que p"

é uma outra proposição, chamada de **negação de** p

Notação

$\neg p$, *not p*, $\sim p$

Exemplo

- q: *"Hoje é quarta-feira"*
- $\neg q$: *"Não é verdade que hoje é quarta-feira"*, ou
- $\neg q$: *"Hoje não é quarta-feira"*

Negação e Tabela Verdade

Tabela Verdade

- Fornece os valores verdade (lógico) de uma proposição composta em termos dos valores verdade de suas partes componentes
- Útil na determinação dos valores verdade de proposições construídas a partir de sentenças mais simples

Negação e Tabela Verdade

Tabela Verdade

• Fornece os valores verdade (lógico) de uma proposição composta em termos dos valores verdade de suas partes componentes

• Útil na determinação dos valores verdade de proposições construídas a partir de sentenças mais simples

Da definição de negação segue que:

- se p é Verdadeiro, então $\neg p$ é Falso
- se p é Falso, então $\neg p$ é Verdadeiro

Logo, o valor verdade de $\neg p$, relativo a p, é dado por

p	$\neg p$
F	V
V	F

Exercício

Apresente a forma negativa das seguintes proposições:

1. $p : 4 + 5 > 2$
2. q : O dia está quente

Conectivos Lógicos

Operador Unário

constrói uma nova proposição a partir de uma única proposição

Conectivos

operadores lógicos usados para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições já existentes

Operador Binário

constrói uma nova proposição a partir de outras duas proposições

Operador Conjunção

Operação "E"
Notação: $p \wedge q$, p e q ou p and q

Tabela Verdade

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Exemplos de Conjunção

1. p: hoje é terça-feira
   q: está chovendo hoje
   $p \wedge q$: hoje é terça e está chovendo

Exemplos de Conjunção

1. p: hoje é terça-feira
   q: está chovendo hoje
   $p \wedge q$: hoje é terça e está chovendo
2. p: $2 < 3$
   q: $-5 > -8$
   $p \wedge q$: $2 < 3$ e $-5 > -8$

Exemplos de Conjunção

1. p: hoje é terça-feira
   q: está chovendo hoje
   $p \wedge q$: hoje é terça e está chovendo
2. p: $2 < 3$
   q: $-5 > -8$
   $p \wedge q$: $2 < 3$ e $-5 > -8$
3. p: está chovendo hoje
   q: $3 < 5$
   $p \wedge q$: está chovendo hoje e $3 < 5$

Operador Disjunção

Operação "OU"
Notação: $p \vee q$, p ou q ou p or q

Tabela Verdade

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Aqui este operador é utilizado de forma inclusiva.

Exemplos de Disjunção

1. p: 221 é um inteiro positivo
   q: $\sqrt{11}$ é um número racional
   $p \vee q$: 221 é um inteiro positivo **ou** $\sqrt{11}$ é um racional (V)

Exemplos de Disjunção

1. p: 221 é um inteiro positivo
   q: $\sqrt{11}$ é um número racional
   $p \vee q$: 221 é um inteiro positivo **ou** $\sqrt{11}$ é um racional (V)

2. p: $2 + 7 \neq 9$
   q: A goiaba é um animal
   $p \vee q$: $2 + 7 \neq 9$ **ou** A goiaba é um animal (F)

Exemplo

Suponha que $x \in \Re$. Sejam "$p : 0 < x$", "$q : x < 5$" e "$r : x = 5$". Então

1. $x <= 5$

$$q \vee r$$

2. $0 < x < 5$

$$p \wedge q$$

3. $0 < x <= 5$

$$p \wedge (q \vee r)$$

Ou Inclusivo e Ou Exclusivo

O conectivo ou pode ser interpretado de duas maneiras distintas

Ou Inclusivo	Ou Exclusivo
"Eu passei em Matemática ou eu rodei em Economia"	"Eu viajei para São Paulo de carro ou eu viajei para São Paulo de ônibus"
pelo menos uma das possibilidades ocorreu, mas ambas poderiam ter ocorrido	*somente uma das possibilidades pode ter ocorrido*

Disjunção Exclusiva

Operação "OU Exclusivo" ou "XOR"
Notação: $p \oplus q$, p xor q ou p ou q (mas não ambos)

Tabela Verdade

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Obs.: $p \oplus q$ utilizando os conectivos lógicos corresponde à $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$. Verifique através de uma tabela verdade !

Condicional ou Implicação

Notação: $p \rightarrow q$

Tabela Verdade

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Note que $p \rightarrow q$ é V quando:

- p e q são ambos V
- p é F (não importando q)

Na expressão $p \rightarrow q$

p é chamado de **hipótese** ou antecedente

q é chamado de **conclusão** ou consequente

Condicional ou Implicação

Maneiras de expressar $p \to q$

- se p, então q
- p é **condição suficiente** para q

A verdade de p é suficiente para garantir a verdade de q (i.e. $p \to q$)

- p é **condição necessária** para q

Para q ser verdade, é necessário que p seja verdade. Se p não é verdade, então q não pode ser verdade. (i.e. $\neg p \to \neg q \equiv q \to p$)

- p [pode acontecer] **somente se** q [acontece] (i.e. $\neg q \to \neg p \equiv p \to q$)
- p é consequência de q

Obs.:

p se $q \equiv q \to p$

p somente se $q \equiv p \to q$

p somente se $q \not\equiv p$ se q

Condicional ou Implicação

Maneiras de expressar $p \to q$

- se p, então q
- p é **condição suficiente** para q

A verdade de p é suficiente para garantir a verdade de q (i.e. $p \to q$)

- p é **condição necessária** para q

Para q ser verdade, é necessário que p seja verdade. Se p não é verdade, então q não pode ser verdade. (i.e. $\neg p \to \neg q \equiv q \to p$)

- p [pode acontecer] **somente se** q [acontece] (i.e. $\neg q \to \neg p \equiv p \to q$)
- p é consequência de q

Obs.:

p se $q \equiv q \to p$
p somente se $q \equiv p \to q$
p somente se $q \not\equiv p$ se q

Ex:
Eu vou a praia se eu estudar. ($q \to p$)
Eu vou a praia somente se tiver dinheiro. ($p \to q$)

Exemplos de Condicional

- A sentença:

  "**Fogo é uma condição necessária para fumaça**"

  pode ser reformulada como:

  "**Se há fumaça, então há fogo**"

- logo:

  \- o antecedente é: "**Há fumaça**"

  \- o consequente é: "**Há fogo**"

Exercícios

Indique o antecedente e o consequente e coloque cada proposição na forma se/então:

1. *"Se a chuva continuar, o rio vai transbordar"*
2. *"Uma condição suficiente para a falha de uma rede é que a chave geral pare de funcionar"*
3. *"Uma boa dieta é uma condição necessária para um gato ser saudável"*

Exercícios

Converta cada proposição para a forma se/então:

1. *"A aprovação de Maria em todas as disciplinas é condição suficiente para sua graduação"*
2. *"João completar 18 anos é condição necessária para seu alistamento militar"*

Análise do Condicional

Quando usada na linguagem normal, a implicação $p \to q$ supõe uma relação de causa e efeito entre p e q

Exemplo

"Se amanhã chover, eu vou ficar em casa"

Análise do Condicional

Quando usada na linguagem normal, a implicação $p \rightarrow q$ supõe uma relação de causa e efeito entre p e q

Exemplo

"*Se amanhã chover, eu vou ficar em casa*"

Em Lógica, $p \rightarrow q$ diz apenas que não teremos p Verdadeiro e q Falso ao mesmo tempo.

Exemplo

"Se pedra é ouro, então $1 + 1 = 20$"

Análise do Condicional

Note que se p é Falsa, então $p \to q$ é Verdadeira para qualquer q, ou seja:

"*Uma falsa hipótese implica em qualquer conclusão*"

Exemplo

"*Se* $2 + 2 = 5$, *então no Brasil não há corrupção*"

Exercício

Quando é que a implicação:

"Se hoje é terça, então $2 + 3 = 6$" é Verdadeira?

Conversa(oposta) e Contrapositiva

Definição

Se $p \rightarrow q$ é uma condicional, então:

- a **conversa (oposta)** de $p \rightarrow q$ é a implicação $q \rightarrow p$
- a **contrapositiva** de $p \rightarrow q$ é a implicação $\neg q \rightarrow \neg p$

Conversa(oposta) e Contrapositiva

Definição

Se $p \rightarrow q$ é uma condicional, então:
- a **conversa (oposta)** de $p \rightarrow q$ é a implicação $q \rightarrow p$
- a **contrapositiva** de $p \rightarrow q$ é a implicação $\neg q \rightarrow \neg p$

Exemplo

"*Se Jorge é paraense, então Jorge é brasileiro*"

p: *Jorge é paraense*

$p \rightarrow q$

q: *Jorge é brasileiro*

$q \rightarrow p$: "*Se Jorge é brasileiro, então Jorge é paraense*"
$\neg q \rightarrow \neg p$: "*Se Jorge não é brasileiro, então Jorge não é paraense*"
Obs: (Contrapositiva) $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
(Conversa) $p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$

Bicondicional ou Equivalência $(p \to q \wedge q \to p)$

Notação: $p \leftrightarrow q$

Tabela Verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Note que $p \leftrightarrow q$ é V somente quando p e q têm o mesmo valor verdade

Bicondicional ou Equivalência $(p \to q \wedge q \to p)$

Notação: $p \leftrightarrow q$

Tabela Verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Note que $p \leftrightarrow q$ é V somente quando p e q têm o mesmo valor verdade

Maneiras de expressar $p \leftrightarrow q$

- p se e somente se q
- p é necessário e suficiente para q
- se p então q, e conversamente

Bicondicional ou Equivalência $(p \to q \wedge q \to p)$

Notação: $p \leftrightarrow q$

Tabela Verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Note que $p \leftrightarrow q$ é V somente quando p e q têm o mesmo valor verdade

Maneiras de expressar $p \leftrightarrow q$

- p se e somente se q
- p é necessário e suficiente para q
- se p então q, e conversamente

Exercício

a equivalência "$3 > 2$ *se e somente se* $0 < 1$" é Verdadeira?

Resposta:

p: $3 > 2$ é V

q: $0 < 1$ é V

logo: $p \leftrightarrow q$ é Verdadeira

Proposições Compostas

- São argumentações que têm muitas proposições
- São construídas com o auxílio dos operadores lógicos

Exemplos

s: $p \rightarrow (q \wedge (p \rightarrow r))$

r: $\neg(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)]$

t: $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

Traduzindo Sentenças para Lógica

Exemplo

Encontrar a proposição que traduz a seguinte sentença:

"Você não pode andar de patins se você tem menos do que $1,20$m a não ser que você tenha mais do que 16 anos"

Traduzindo Sentenças para Lógica

Exemplo

Encontrar a proposição que traduz a seguinte sentença:

"Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1,20m a não ser que você tenha mais do que 16 anos"

Solução

q: "Você pode andar de patins"
r: "Você tem menos do que 1,20m"
s: "Você tem mais do que 16 anos"

a sentença pode ser traduzida por:

$$(r \land \neg s) \to \neg q$$

Traduzindo Sentenças para Lógica

Suponha que a previsão do tempo seja:

h "Sol e chuva são as únicas duas possibilidade para amanhã".
Qual seria a forma lógica ?

Traduzindo Sentenças para Lógica

Suponha que a previsão do tempo seja:

h "Sol e chuva são as únicas duas possibilidade para amanhã".
Qual seria a forma lógica ?

Resp.: $p \vee q$

Para se determinar a forma lógica de uma declaração é preciso pensar no que ela quer dizer ao invés de simplesmente traduzí-la para símbolos.

Proposições compostas e Tabelas Verdade

A sentença: $s : p \to (q \wedge (p \to r))$

- envolve 3 proposições independentes
- logo, há $2^3 = 8$ situações possíveis

p	q	r	$p \to (q \wedge (p \to r))$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

Construindo Tabelas Verdade

A tabela verdade de uma proposição composta de n variáveis proposicionais é obtida por:

1. As primeiras n colunas da tabela devem ser rotuladas com as variáveis proposicionais - outras colunas servirão para combinações intermediárias
2. Sob cada uma das primeiras colunas, lista-se os 2^n possíveis conjuntos de valores verdade das variáveis proposicionais
3. Para cada linha, determina-se os valores verdade restantes

Exemplo

Determine a tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$

Exemplo

Determine a tabela verdade de $(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$

Solução

p	q	r	$p \vee q$	$r \leftrightarrow p$	$(p \vee q) \rightarrow (r \leftrightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	V	V

Outro Exemplo

Determine a tabela verdade de $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

Outro Exemplo

Determine a tabela verdade de $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

Solução

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Equivalentes

Classificação de Proposições Compostas

Tautologia

Proposição que é sempre verdadeira para todos os possíveis valores de suas variáveis proposicionais

Exemplo: $p \vee \neg p$

Classificação de Proposições Compostas

Tautologia

Proposição que é sempre verdadeira para todos os possíveis valores de suas variáveis proposicionais

Exemplo: $p \vee \neg p$

Contradição ou Absurdo

Proposição que é sempre falsa

Exemplo: $p \wedge \neg p$

Classificação de Proposições Compostas

Tautologia

Proposição que é sempre verdadeira para todos os possíveis valores de suas variáveis proposicionais
Exemplo: $p \vee \neg p$

Contradição ou Absurdo

Proposição que é sempre falsa
Exemplo: $p \wedge \neg p$

Contingência

Proposição que pode ser V ou F, dependendo dos valores verdade de suas variáveis proposicionais (nem tautologia nem contradição)

Equivalência Lógica

- Se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, as proposições p e q são ditas logicamente equivalentes

  Notação: $p \Leftrightarrow q$ ou $p \equiv q$

- Se $p \equiv q$, os dois lados são simplesmente diferentes modos de construir a mesma sentença

- Um importante recurso usado na argumentação lógica é a substituição de uma proposição por outra que seja equivalente

Determinação da Equivalência

Usando Tabelas Verdade

Exemplo: Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes

Determinação da Equivalência

Usando Tabelas Verdade

Exemplo: Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes

Solução

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Determinação da Equivalência

Usando Tabelas Verdade

Exemplo: Mostre que $\neg(p \vee q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são equivalentes

Solução

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Exercício:

Mostre que $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

Equivalências que são tautologias Importantes

Lei	Equivalência
Idempotência	$p \vee p \Leftrightarrow p$
	$p \wedge p \Leftrightarrow p$
Dupla negação	$\neg\neg p \Leftrightarrow p$
Comutatividade	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Associatividade	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Distributividade	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Equivalências Importantes

Lei	Equivalência
Tautologia	$p \wedge (\text{tautologia}) \equiv p$
	$p \vee (\text{tautologia}) \equiv \text{tautologia}$
	$\neg(\text{tautologia}) \equiv \text{contradição}$
Contradição	$p \wedge (\text{contradição}) \equiv \text{contradição}$
	$p \vee (\text{contradição}) \equiv p$
	$\neg(\text{contradição}) \equiv \text{tautologia}$

Uso das Equivalências

Exemplo

$p \vee q$: "O rio é raso ou poluído"

$\neg(p \vee q)$:?

Uso das Equivalências

Exemplo

$p \vee q$: "O rio é raso ou poluído"
$\neg(p \vee q)$:?

- pelas leis de De Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- logo:

$\neg(p \vee q)$: "O rio não é raso **e** nem poluído"

Uso das Equivalências

Exemplo

$p \vee q$: "O rio é raso ou poluído"
$\neg(p \vee q)$:?

- pelas leis de De Morgan: $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
- logo:

$$\neg(p \vee q) : \text{"O rio não é raso } \textbf{e} \text{ nem poluído"}$$

Note que $\neg(p \vee q)$ NÃO É equivalente a

"O rio não é raso OU não é poluído"

Exemplo

Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes

Exemplo

Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são logicamente equivalentes

Solução

$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow$	
$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	Lei de De Morgan
$\Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q)$	Lei de De Morgan
$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg q)$	Dupla negação
$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Distributividade
$\Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge \neg q)$	pois $(\neg p \wedge p)$ é *Falso*
$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	pois $(p \vee F) \Leftrightarrow p$

Exercício

Verifique as seguintes equivalências lógicas

Utilize a tabela verdade para verificar o seguinte:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Nos próximos exercícios utilize as propriedades para verificar as equivalências:

- $\neg(p \wedge \neg q)$
- $\neg(q \wedge \neg p) \vee p \equiv \neg q \vee p$
- $\neg(p \vee (q \wedge \neg r)) \wedge q \equiv \neg p \wedge (q \wedge r)$

Análise da Validade dos Argumentos

Argumento [Filho2015]

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ e q proposições quaisquer (simples ou compostas) chama-se *argumento* toda a afirmação de que uma dada sequência finita $p_1, p_2, \cdots, p_n$ $(n \geq 1)$ de proposições tem como consequência uma proposição final q.

Análise da Validade dos Argumentos

Argumento [Filho2015]

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ e q proposições quaisquer (simples ou compostas) chama-se *argumento* toda a afirmação de que uma dada sequência finita $p_1, p_2, \cdots, p_n$ $(n \geq 1)$ de proposições tem como consequência uma proposição final q.

- $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$ são as **premissas** do argumento
- q é a **conclusão** do argumento
- Notação: $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$

Análise da Validade dos Argumentos

Validade de um Argumento [Filho2015]

Um argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ diz-se *válido* se e somente se a conclusão q for verdade todas as vezes que as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são verdadeiras.

Ou seja, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

Análise da Validade dos Argumentos

Validade de um Argumento [Filho2015]

Um argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ diz-se *válido* se e somente se a conclusão q for verdade todas as vezes que as premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são verdadeiras.

Ou seja, a verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão.

Teorema [Filho2015]

Um argumento $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$ é válido se e somente se a condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ é tautológica.

Assim, um argumento qualquer $p_1, p_2, \ldots, p_n \vdash q$, corresponde a condicional $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n)$

Análise da Validade dos Argumentos

- Se $p \rightarrow q$ é uma tautologia, então q segue logicamente a partir de p.

Análise da Validade dos Argumentos

- Se $p \rightarrow q$ é uma tautologia, então q segue logicamente a partir de p.
- Se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma **tautologia**, então esta implicação é verdade com relação aos valores verdades de qualquer de suas componentes.

Análise da Validade dos Argumentos

- Se $p \rightarrow q$ é uma tautologia, então q segue logicamente a partir de p.
- Se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma **tautologia**, então esta implicação é verdade com relação aos valores verdades de qualquer de suas componentes.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p_i são as hipóteses (premissas) e q é a conclusão.

Análise da Validade dos Argumentos

- Se $p \rightarrow q$ é uma tautologia, então q segue logicamente a partir de p.
- Se $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n) \rightarrow q$ é uma **tautologia**, então esta implicação é verdade com relação aos valores verdades de qualquer de suas componentes.

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p_i são as hipóteses (premissas) e q é a conclusão.

- Provar um "teorema" significa mostrar que a implicação é uma *tautologia* !
- Obs.: Não estamos mostrando que 'q' é verdade, mas que 'q' será verdade se todas as premissas (p_i) forem verdade.

Análise da Validade dos Argumentos

- As tabelas-verdade podem ser utilizadas para demonstrar, verificar ou testar a validade de qualquer argumento.
- Vamos construir uma tabela verdade contendo uma coluna para cada premissa e uma para a conclusão.
- Nas linhas, identificar se os valores lógicos das premissas $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \cdots \wedge p_n$ são todos verdade. Na mesma linha, o valor lógico da conclusão também deve ser verdade para o argumento ser válido
- Se o valor lógico da conclusão for F em pelo menos uma linha, o argumento não é válido.

Exemplo:

Amanhã vai chover ou nevar.
Está muito quente para nevar.
Portanto vai chover.

Estes argumentos são válidos ?

Análise da Validade dos Argumentos

Solução

Análise da Validade dos Argumentos

Solução

		Premissas		Conclusão
$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p}$
F	F	F	V	F
F	V	V	F	F
V	F	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
V	V	V	F	V

Os argumentos são válidos !

Análise da Validade dos Argumentos

Exemplo:

Se você investe em ações, então você ficará rico.
Se você ficar rico, então você ficará feliz.

—

$\therefore$ Se você investir em ações, você será feliz.

Estes argumentos são válidos ?

Análise da Validade dos Argumentos

Exemplo:

Se você investe em ações, então você ficará rico.
Se você ficar rico, então você ficará feliz.

—

$\therefore$ Se você investir em ações, você será feliz.

Estes argumentos são válidos ?

Exemplo:

Análise da Validade dos Argumentos

Verifique se os seguintes argumentos são válidos:

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Análise da Validade dos Argumentos

Exercício

Mauro não é magro mas é preguiçoso, ou ele é magro.
Mauro é magro.
Portanto, Mauro não é preguiçoso.

Estes argumentos são válidos ?

Análise da Validade dos Argumentos

Exercício

Mauro não é magro mas é preguiçoso, ou ele é magro.
Mauro é magro.
Portanto, Mauro não é preguiçoso.

Estes argumentos são válidos ?

$$
\begin{array}{c}
(\neg p \wedge q) \vee p \\
p \\
\boxed{-} \\
\therefore \neg q
\end{array}
$$

Análise da Validade dos Argumentos

Exercício

Se eu dirijo rumo ao meu local de trabalho, então eu vou chegar cansado.
Eu não dirijo rumo ao meu local de trabalho.
Portanto, eu não vou chegar cansado.

Estes argumentos são válidos ?

Análise da Validade dos Argumentos

Argumentos baseados em *tautologias* representam métodos universalmente corretos de raciocínio. Tais argumentos são chamados de regras de inferência.

Duas Importantes Regras de Inferência

Modus ponens

Tautologia: $[p \wedge (p \to q)] \to q$

Regra:

$$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Duas Importantes Regras de Inferência

Modus ponens
Tautologia: $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
Regra:

$$\begin{array}{c} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Exemplo:

Se você tem a senha, então você pode entrar no computador
Você tem a senha
—
Você pode entrar no computador

Duas Importantes Regras de Inferência

Modus tollens

Tautologia: $[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$

Regra:

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Duas Importantes Regras de Inferência

Modus tollens

Tautologia: $[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$

Regra:

$$\begin{array}{c} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

Exemplo:

Você não pode entrar no computador

Se você tem a senha, então você pode entrar no computador

Você não tem a senha

Predicados e Quantificadores

- Proposições têm uma forma limitada de expressão;
- Como poderíamos expressar a declaração: “Todos os estudantes são inteligentes” ?

Predicados e Quantificadores

- Proposições têm uma forma limitada de expressão;
- Como poderíamos expressar a declaração: "Todos os estudantes são inteligentes" ?
- Para isso, vamos introduzir os predicados e os quantificadores.

Predicados e Quantificadores

Predicado

- É uma propriedade que um certo "objeto" possui. Ex: P : "estuda matemática discreta". Q : "Nasceu em Belém".

Predicados e Quantificadores

Predicado

- É uma propriedade que um certo "objeto" possui. Ex: P : "estuda matemática discreta". Q : "Nasceu em Belém".
- Podemos também utilizar variáveis para descrever predicados. Um predicado possui um número finito de variáveis.

Ex: $P(x)$: "x nasceu em Belém".
$Q(x) : x > 0$ - Propriedade que a variável x é positiva.

Predicados e Quantificadores

Predicado

- É uma propriedade que um certo "objeto" possui. Ex: P : "estuda matemática discreta". Q : "Nasceu em Belém".
- Podemos também utilizar variáveis para descrever predicados. Um predicado possui um número finito de variáveis.

Ex: $P(x)$: "x nasceu em Belém".
$Q(x) : x > 0$ - Propriedade que a variável x é positiva.

- Ao atribuir valores para as variáveis em um predicado, obtém-se uma proposição que possui um valor verdade (V ou F).

$Q(x) : x > 0$ - $Q(1) = 1 > 0$ é Verdade, mas
$Q(-1) = -1 > 0$ é Falso

Predicados - o Domínio e o Conjunto Verdade

Domínio ou Conjunto Universo

- É a coleção de objetos em que x pode ser escolhido. Ex: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^*$.
- Especifica os valores possíveis para a variável x

Predicados - o Domínio e o Conjunto Verdade

Domínio ou Conjunto Universo

- É a coleção de objetos em que x pode ser escolhido. Ex: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^*$.
- Especifica os valores possíveis para a variável x

Conjunto Verdade

O conjunto verdade de um predicado $P(x)$ é o conjunto de todos os valores de x que fazem $P(x)$ verdadeiro. ou seja, o conjunto verdade de $P(x) = \{x|P(x)\}$.

Predicados - o Domínio e o Conjunto Verdade

Domínio ou Conjunto Universo

- É a coleção de objetos em que x pode ser escolhido. Ex: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}^*$.
- Especifica os valores possíveis para a variável x

Conjunto Verdade

O conjunto verdade de um predicado $P(x)$ é o conjunto de todos os valores de x que fazem $P(x)$ verdadeiro. ou seja, o conjunto verdade de $P(x) = \{x|P(x)\}$.

Exemplo

Seja o domínio é $\mathbb{Z}^+$ e o predicado $P(x)$: "x é um número primo". O conjunto verdade de $P(x) = "2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots"$

Predicados e Quantificadores

Quantificadores

- Informam quantos "objetos" do domínio possuem uma certa propriedade (predicado) $P(x)$.
- Ex: $(\forall x)P(x)$.
  O predicado $P(y) : y > 0$ pode ser escrito como: $(\forall y)(y > 0)$
- Predicado + variáveis substituídas por valores + quantificadores = proposição.

Predicados e Quantificadores

Quantificadores

- Informam quantos "objetos" do domínio possuem uma certa propriedade (predicado) $P(x)$.
- Ex: $(\forall x)P(x)$.
  O predicado $P(y) : y > 0$ pode ser escrito como: $(\forall y)(y > 0)$
- Predicado + variáveis substituídas por valores + quantificadores = proposição.

- Expressões podem ser formadas utilizando predicados com quantificadores, símbolos de agrupamento (parêntese e colchetes) e conectivos lógicos.
- Símbolos de agrupamento identificam o escopo do quantificador

Quantificadores

O Quantificador Universal

Seja um predicado $P(x)$,
o **Quantificador Universal** de $P(x)$ é: $\forall_x P(x)$

- O predicado é verdade para todo elemento considerado.
- Significado: "Para todos os valores de x, $P(x)$ **é verdade**"
- "Para todo x"; "todo x"; "para qualquer x"
- Ex: Seja $P(x) : x + 4 > 4$, $\forall_{x \in \mathbb{N}^*}(x + 4 > 4)$ é verdade
- Ex: Seja $P(x) : -(-x) = x$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}(-(-x) = x)$ é verdade
- Ex: Seja $Q(x) : x + 1 < 4$, $\forall_x Q(x)$ é falso

Quantificadores

O Quantificador Universal

Seja um predicado $P(x)$,
o **Quantificador Universal** de $P(x)$ é: $\forall_x P(x)$

- O predicado é verdade para todo elemento considerado.
- Significado: "Para todos os valores de x, $P(x)$ **é verdade**"
- "Para todo x"; "todo x"; "para qualquer x"
- Ex: Seja $P(x) : x + 4 > 4$, $\forall_{x \in \mathbb{N}^*}(x + 4 > 4)$ é verdade
- Ex: Seja $P(x) : -(-x) = x$, $\forall_{x \in \mathbb{R}}(-(-x) = x)$ é verdade
- Ex: Seja $Q(x) : x + 1 < 4$, $\forall_x Q(x)$ é falso
- Se encontrarmos um **contra-exemplo** para $\forall_x P(x)$, ele será falso
- $\forall_x P(x)$ equivale a $P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$ para um domínio de n elementos

Quantificadores

Qual o valor lógico da expressão $(\forall x)P(x)$ *nas interpretações a seguir:*

- $P(x)$ é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todos os botões de prata.
- $P(x)$ é a propriedade que x é amarelo e o conjunto universo é o conjunto de todos os botões de ouro.
- $P(x)$ é a propriedade que x é um carro a gasolina no conjunto de todos os carros.

Quantificadores

Quantificador Existencial

Seja um predicado $P(x)$,
o **Quantificador Existencial** de $P(x)$ é: $\exists_x P(x)$

- Existem um ou mais elementos para os quais o predicado é verdade.
- Significado: "Existe (pelo menos) um valor x para que $P(x)$ seja verdadeiro"
- "Existe um x"; "Existe algum x; "Existe no mínimo um x"
- Ex: Seja $P(x) : x + 4 < 7$, $\exists_{x \in \mathbb{N}}(x + 4 < 7)$ é verdade
- Ex: Seja $P(x) : x + 1 < 4$, $\exists_{x \in \mathbb{N}}(x + 1 < 4)$ é verdade

Quantificadores

Quantificador Existencial

Seja um predicado $P(x)$,
o **Quantificador Existencial** de $P(x)$ é: $\exists_x P(x)$

- Existem um ou mais elementos para os quais o predicado é verdade.
- Significado: "Existe (pelo menos) um valor x para que $P(x)$ seja verdadeiro"
- "Existe um x"; "Existe algum x; "Existe no mínimo um x"
- Ex: Seja $P(x) : x + 4 < 7$, $\exists_{x \in \mathbb{N}}(x + 4 < 7)$ é verdade
- Ex: Seja $P(x) : x + 1 < 4$, $\exists_{x \in \mathbb{N}}(x + 1 < 4)$ é verdade
- $\exists_x P(x)$ equivale a $P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$ para um domínio de n elementos

Quantificadores

Qual o valor lógico da expressão $(\exists x)P(x)$ *nas interpretações a seguir:*

- $P(x)$ é a propriedade que x é um carro a gasolina no conjunto de todos os carros.
- $P(x)$ é a propriedade que x é uma casa de madeira no conjunto de todos as casas.
- $P(x)$ é a propriedade que x é um pássaro que fala no conjunto de todos os pássaros.

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:
"Todo aluno da classe estudou programação"

De forma a traduzir para lógica, podemos seguir os passos:

1. **Reescrever** a declaração de forma a identificar os quantificadores. Seguindo a declaração temos: "Para todo aluno da classe, esse aluno estudou programação".
2. Introduzir a variável "x". Seguindo a declaração temos: "Para todo estudante x da classe, x estudou programação"

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:
"Todo aluno da classe estudou programação"

De forma a traduzir para lógica, podemos seguir os passos:

1. **Reescrever** a declaração de forma a identificar os quantificadores. Seguindo a declaração temos: "Para todo aluno da classe, esse aluno estudou programação".
2. Introduzir a variável "x". Seguindo a declaração temos: "Para todo estudante x da classe, x estudou programação"

Para o domínio "x são todos os estudantes na classe" e $C(x)$: """x estudou programação""", temos: $\forall_x C(x)$

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:
"Alguns alunos na classe foram a Salinas"

1. **Reescrevendo:** "Existe um aluno na classe (com a propriedade) que visitou Salinas".
2. **Introduzindo a variável:** "Existe um aluno x na classe em que x visitou Salinas"

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:
"Alguns alunos na classe foram a Salinas"

1. **Reescrevendo:** "Existe um aluno na classe (com a propriedade) que visitou Salinas".
2. **Introduzindo a variável:** "Existe um aluno x na classe em que x visitou Salinas"

Para o domínio "x são todos os alunos na classe" e $Q(x)$: """x visitou Salinas"", temos: $\exists_x Q(x)$

Predicados

Proposição Condicional Universal

$\forall_x P(x) \rightarrow Q(x)$

Predicados

Proposição Condicional Universal

$\forall_x P(x) \rightarrow Q(x)$

Exemplo:

$\forall_{x \in \mathbb{R}}$ se $x > 2$ então $x^2 > 4$

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:

"Todo aluno da classe estudou programação"

onde o **domínio** é: "Todas as pessoas"

1. **Reescrevendo:** "Para qualquer pessoa, se essa pessoa é aluno da classe, então ela estudou programação".
2. **Introduzindo a variável:** "Para qualquer pessoa x, se essa pessoa x é aluno da classe, então x estudou programação".

Seja:
$S(x)$: """Pessoa x na classe""
$C(x)$: """Pessoa x estudou programação""

Temos: $\forall_x (S(x) \rightarrow C(x))$

Predicados

Traduzindo para Lógica

Observação:

A declaração não pode ser expressada como:

$$\forall_x (S(x) \wedge C(x))$$

Isso quer dizer que todas as pessoas são alunos da classe e estudam programação.

Predicados

Exemplo

Seja:

- Domínio: todas as pessoas
- $M(x)$: x é uma mulher
- $B(x)$: x tem cabelos castanhos

- O que a seguinte fórmula quer dizer: $\forall_x (M(x) \rightarrow B(x))$?

Predicados

Traduzindo para Lógica

Seja a declaração:

"Alguns alunos na classe foram a Salinas"

onde o **domínio** é: "Todas as pessoas"

1. **Reescrevendo:** "Existe uma pessoa (com a propriedade) que é aluno da classe e foi a Salinas".
2. **Introduzindo a variável:** "Existe uma pessoa x (que tem como propriedade) em que x é um aluno da classe e x foi a Salinas".

Seja:

$S(x)$: """x é um aluno na classe"""

$M(x)$: """x visitou Salinas"""

Temos: $\exists_x (S(x) \land M(x))$

Predicados

Traduzindo para Lógica

Observação:

A declaração não pode ser expressada como:

$$\exists_x (S(x) \rightarrow M(x))$$

Isso é verdade quando existe uma pessoa x que não está na classe pois: $F \rightarrow V$ e $F \rightarrow F$ são verdade.

Quantificadores

Negando Expressões Quantificadas

- Seja a afirmação: "Todo estudante da turma cursou programação" ($\forall_x P(x)$) - Dom.:os estudantes da turma
- Sua negação é: "Não é verdade que todo estudante da turma cursou programação". Isso equivale a: "Existe um estudante na turma que não cursou programação"
- Assim: $\neg\forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$

Quantificadores

Negando Expressões Quantificadas

- Seja a afirmação: "Todo estudante da turma cursou programação" ($\forall_x P(x)$) - Dom.:os estudantes da turma
- Sua negação é: "Não é verdade que todo estudante da turma cursou programação". Isso equivale a: "Existe um estudante na turma que não cursou programação"
- Assim: $\neg\forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$

- Seja o afirmação: "Existe um estudante na turma que cursou programação" ($\exists_x P(x)$)
- Sua negação é: "Não é verdade que existe um estudante na turma que cursou programação". Isso equivale a: "Todos os estudantes na turma não estudaram programação"
- Assim: $\neg\exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x)$

Quantificadores

Leis da Negação - Quantificadores

$\neg\exists_x P(x) \equiv \forall_x \neg P(x)$
$\neg\forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$

Quantificadores

Exemplo

Sejam as declarações $\forall_x(x^2 > x)$ e $\exists_x(x^2 = 2)$. Quais são suas negações ?

Quantificadores

Negando Expressões Quantificadas

Seja a proposição:
"Todos os matemáticos são homens" i.e. $\forall_{x \in (\text{matemáticos})}(x \text{ é homem})$

A negação pode ser realizada de duas formas:

1. É falso que todos os matemáticos são homens.
2. Existe pelo menos uma mulher que é matemática.

Quantificadores

Negando Expressões Quantificadas

Seja a proposição:
"Todos os matemáticos são homens" i.e. $\forall_{x \in (\text{matemáticos})}(x \text{ é homem})$

A negação pode ser realizada de duas formas:

1. É falso que todos os matemáticos são homens.
2. Existe pelo menos uma mulher que é matemática.

Isto que dizer que:
$\neg(\forall_{x \in (\text{matemáticos})})(x \text{ é homem}) \equiv (\exists_{x \in (\text{matemáticos})})(x \text{ é mulher})$

Quantificadores

$$\neg\forall_x(P(x) \to Q(x)) \text{ e } \exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

são logicamente equivalentes.

Quantificadores

$$\neg\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x)) \text{ e } \exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

são logicamente equivalentes.

Observe que:

$$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

Quantificadores

$$\neg\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x)) \text{ e } \exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

são logicamente equivalentes.

Observe que:

$$\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$\neg\forall_x P(x) \equiv \exists_x \neg P(x)$
$\neg\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists_x \neg(P(x) \rightarrow Q(x))$

Como: $\neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv (P(x) \wedge \neg Q(x))$

Então: $\neg\forall_x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists_x(P(x) \wedge \neg Q(x))$