Procesamiento Digital de Imágenes

Unidad III: Operaciones en el dominio frecuencial

Departamento de Informática - FICH
Universidad Nacional del Litoral

10 de abril de 2017

Temas a desarrollar

- Introducción.
- Transformada bidimensional de Fourier y su inversa:
  - Definición y propiedades.
  - Representación gráfica.
  - Importancia de la magnitud y la fase.
- Filtrado frecuencial:
  - Filtros de suavizado
  - Filtros de acentuado
  - Filtrado de alta potencia
  - Filtrado de énfasis de altas frecuencias
  - Filtros pasa-banda y rechaza-banda
  - Filtrado homomórfico

Transformada de Fourier

- Señales unidimensionales digitales:

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-\frac{j2\pi ux}{M}}, \text{ para } u = 0, 1, \ldots, M-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{\frac{j2\pi ux}{M}}, \text{ para } x = 0, 1, \ldots, M-1$$

- Señales bidimensionales digitales:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}, \text{ para } \begin{cases} u = 0, \ldots, M-1 \\ v = 0, \ldots, N-1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}, \text{ para } \begin{cases} x = 0, 1, \ldots, M-1 \\ y = 0, 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

Transformada de Fourier

- Relaciones entre paso espacial y paso frecuencial:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

- En coordenadas polares:

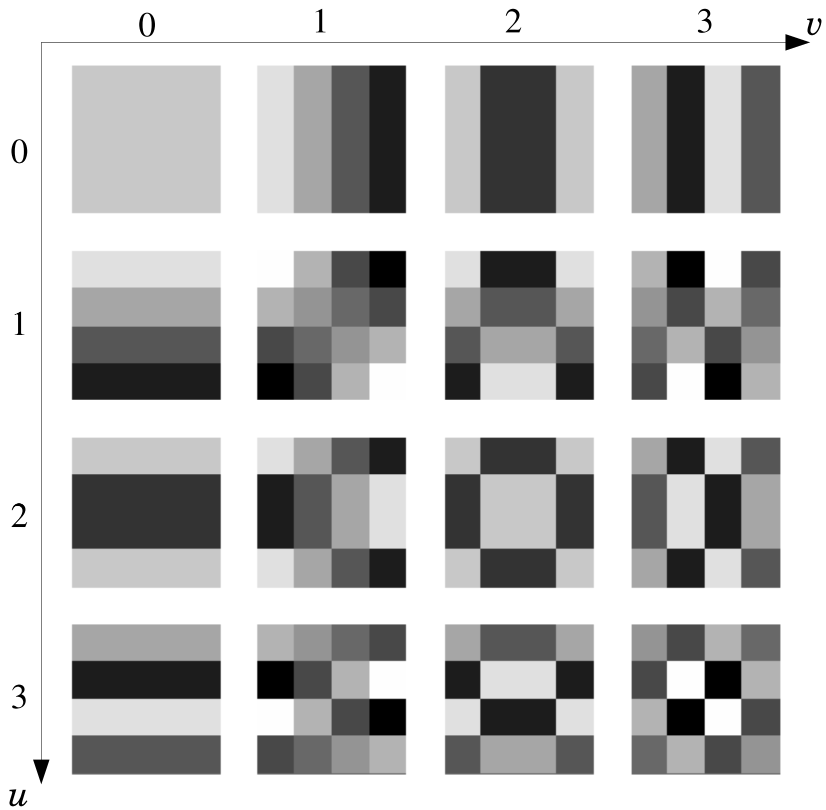
$$F(u,v) = |F(u,v)|\, e^{-j\phi(u)}$$

donde

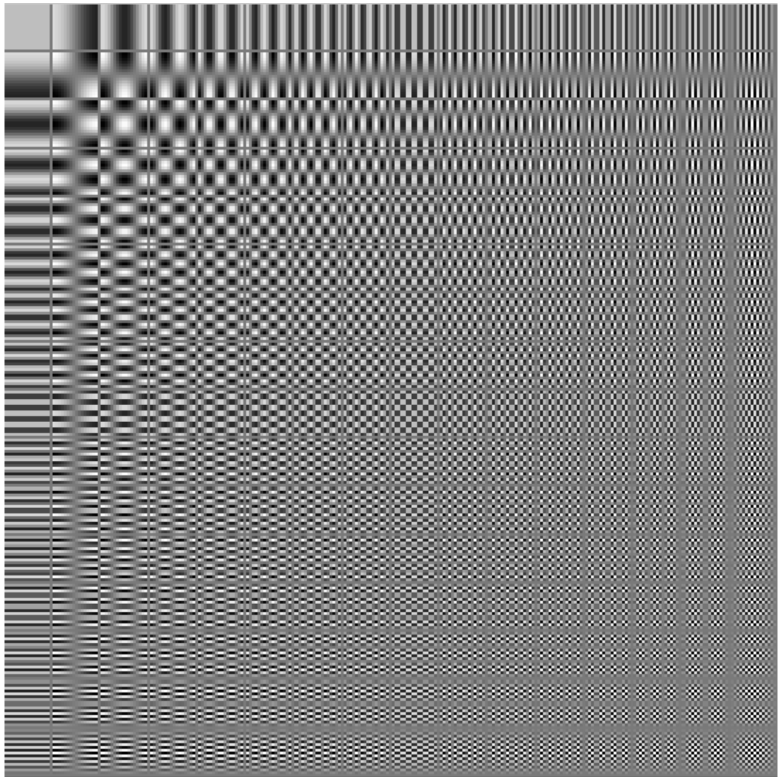
$$\begin{aligned} \text{Magnitud (espectro)} \quad &: \quad |F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)} \\ \text{Fase} \quad &: \quad \phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right] \end{aligned}$$

Transformada de Fourier

- Concepto de imágenes base:



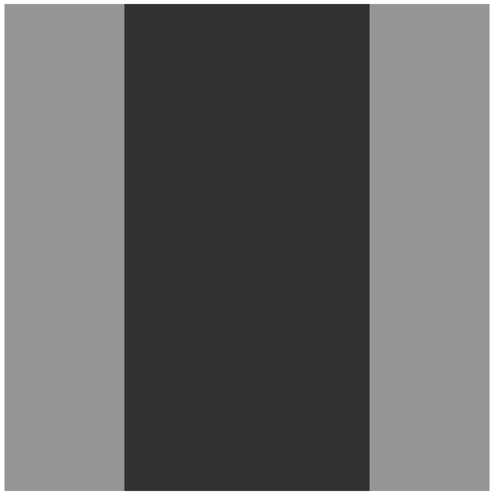
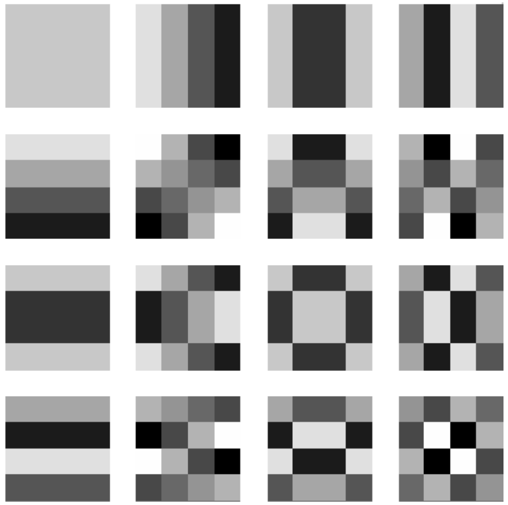
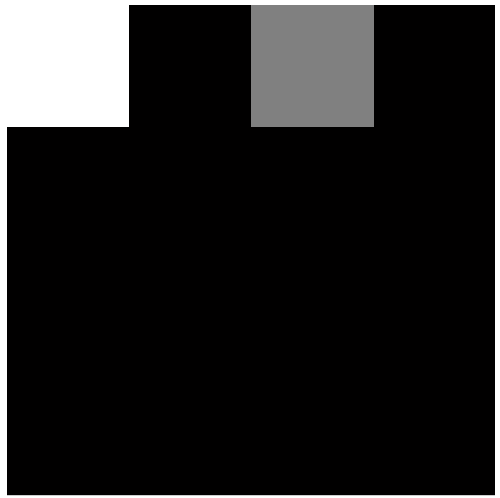
Base para imagen de 4x4



Base para imagen de 16x16

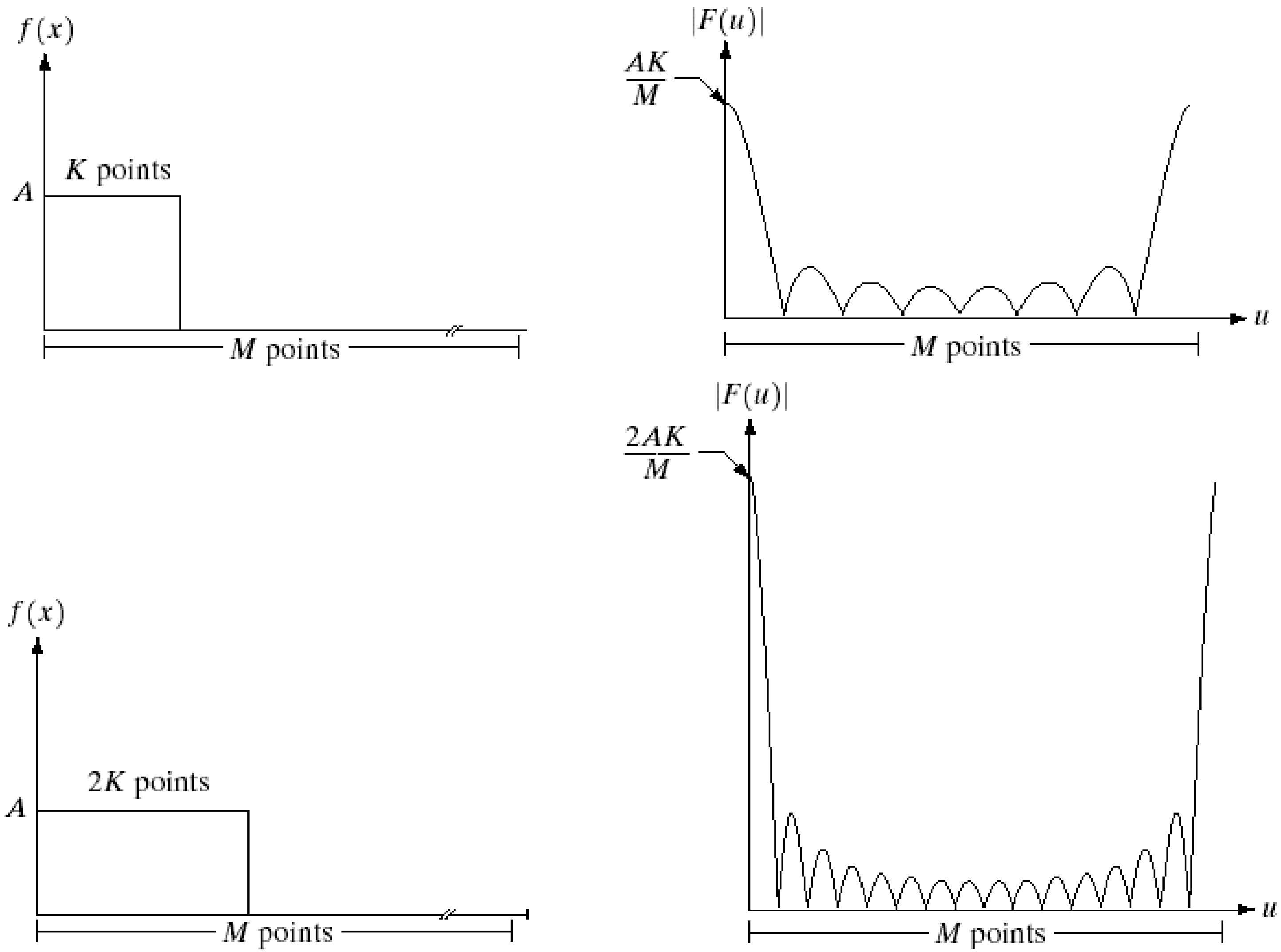
Transformada de Fourier

- Ejemplo con imagen de 4x4: imagen, imágenes base de 4x4 y coeficientes positivos de la DCT2

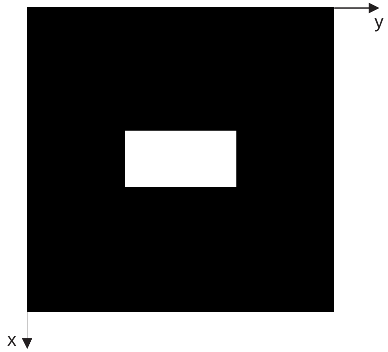
Transformada de Fourier

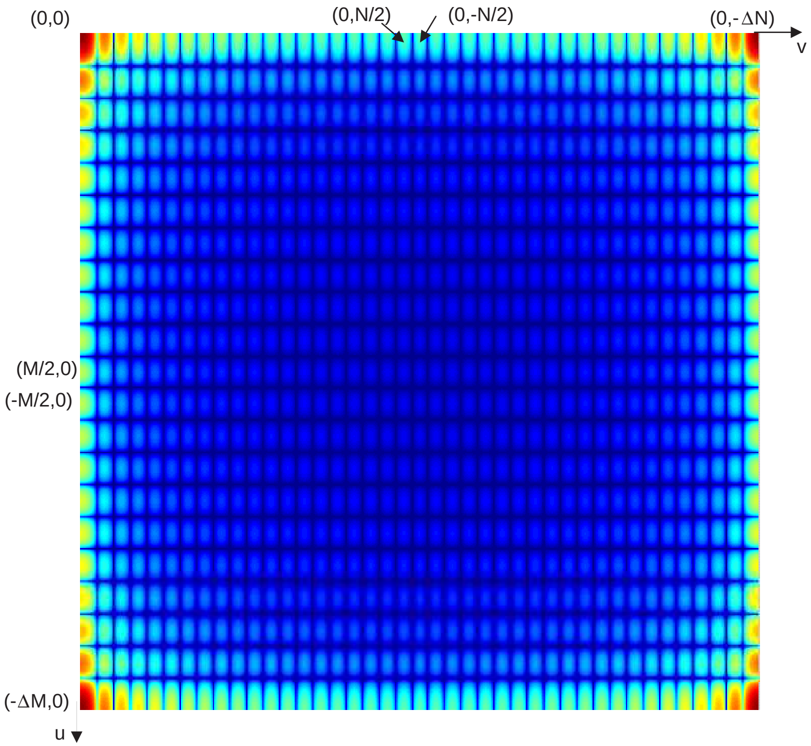
- Representación gráfica 1D:

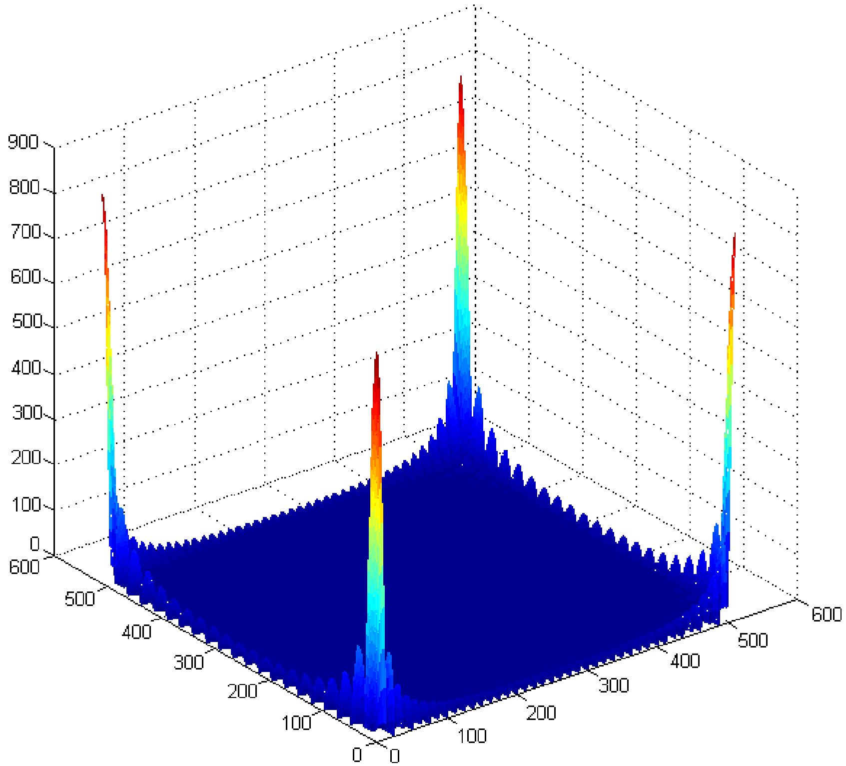


Transformada de Fourier

- Representación gráfica 2D:







Propiedades de la transformada de Fourier

- Traslación:

$$
\begin{aligned}
f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} &\Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \\
f(x-x_0, y-y_0) &\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(ux_0/M+vy_0/N)}
\end{aligned}
$$

Cuando $u_0 = M/2$ y $v_0 = N/2$:

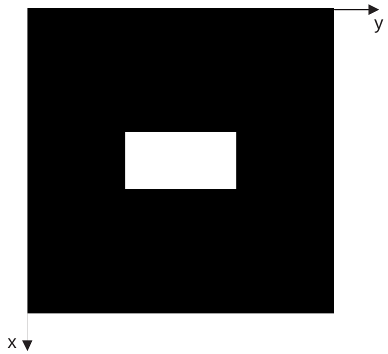
$$
\begin{aligned}
e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)} &= e^{j\pi(x+y)} \\
&= (-1)^{x+y}
\end{aligned}
$$

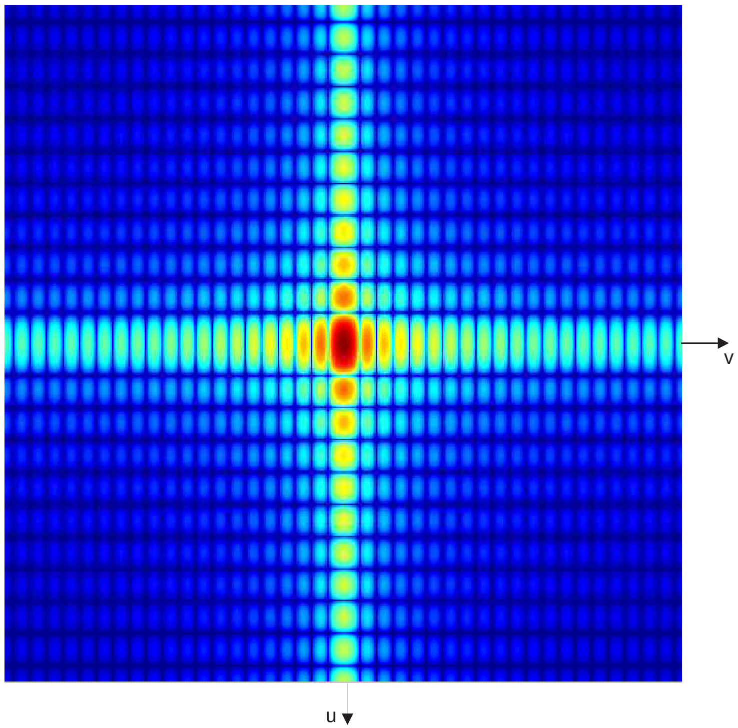
Por lo tanto:

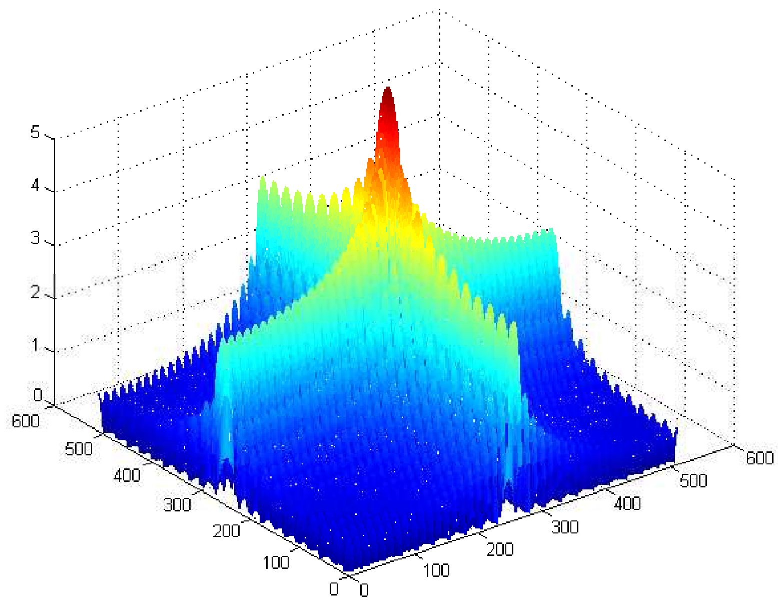
$$
\begin{aligned}
f(x,y)(-1)^{x+y} &\Leftrightarrow F(u-M/2, v-N/2) \\
f(x-M/2, y-N/2) &\Leftrightarrow F(u,v)(-1)^{u+v}
\end{aligned}
$$

Transformada de Fourier

- Centrado de la transformada:







Propiedades de la transformada de Fourier

- Periodicidad: $f(x, y)$ y $F(u, v)$ son funciones periódicas de período M y N

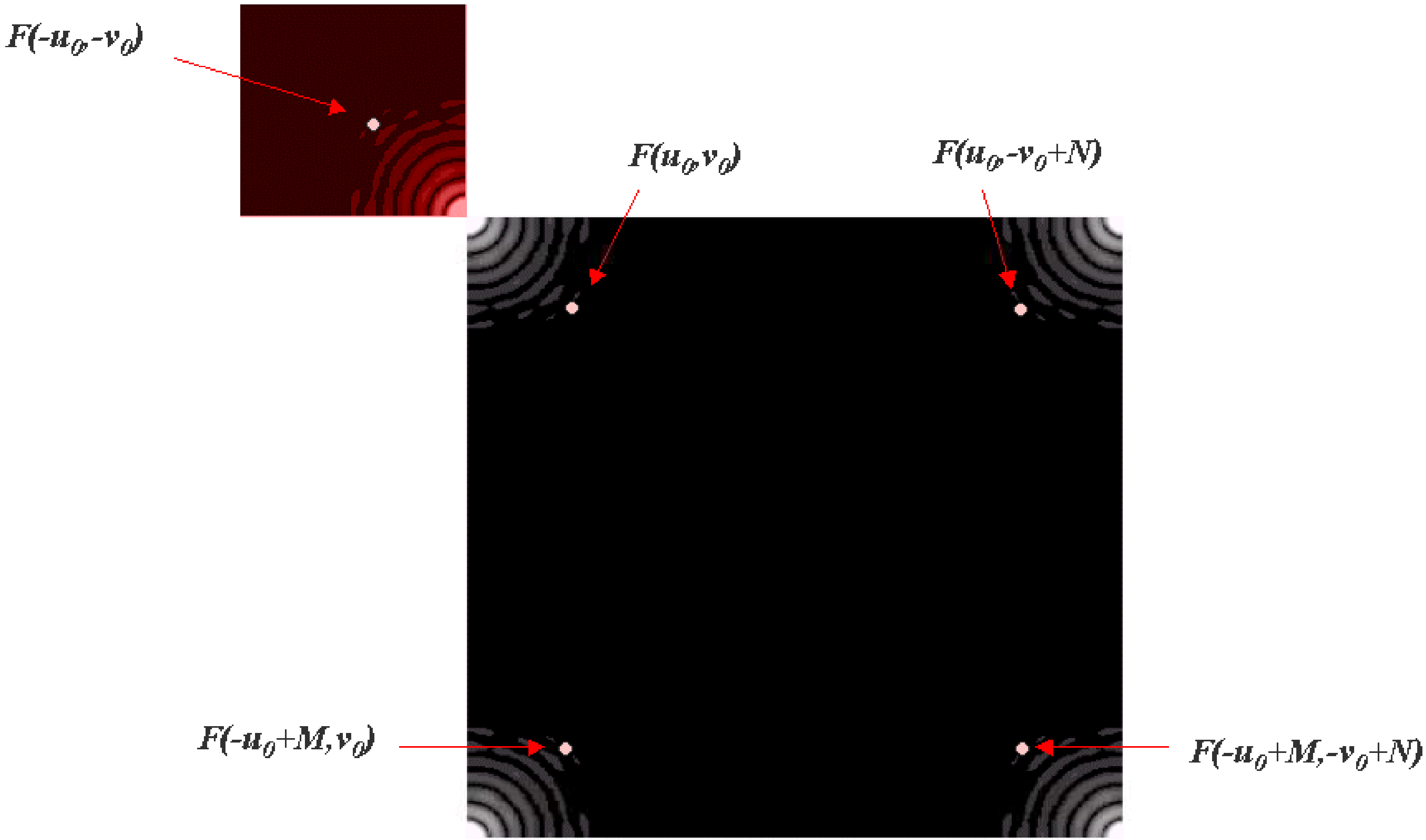
$$F(u, v) = F(u + M, v) = F(u, v + N) = F(u + M, v + N)$$
$$f(x, y) = f(x + M, y) = f(x, y + N) = f(x + M, y + N)$$

- Simetría conjugada: si $f(x, y)$ es real entonces

$$F(u, v) = F^*(-u, -v), \text{ y}$$
$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

lo que dice que el espectro es simétrico respecto al origen.

Propiedades de la transformada de Fourier



Propiedades de la transformada de Fourier

- Rotación:

  En coordenadas polares:

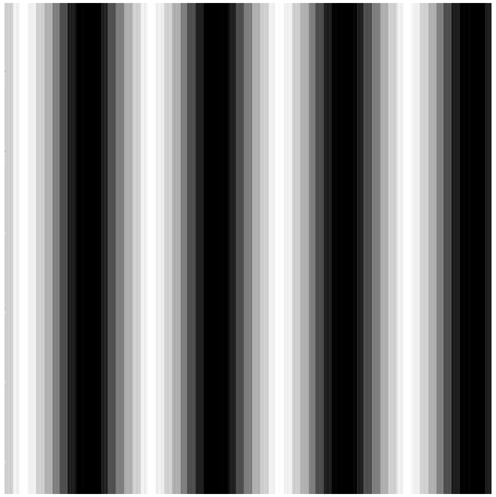
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ u = \omega\cos\varphi,\ v = \omega\sin\varphi$$

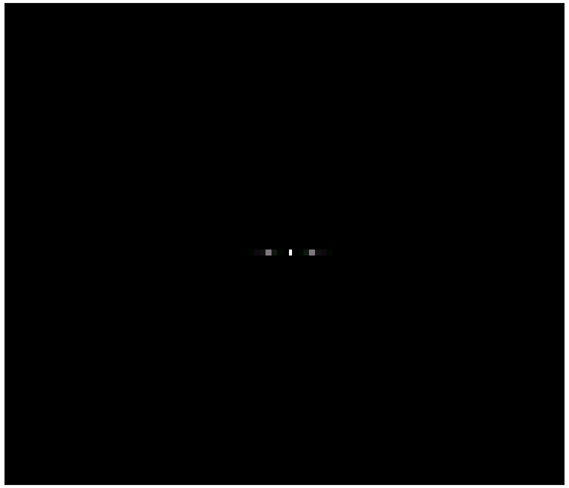
  Substituyendo:

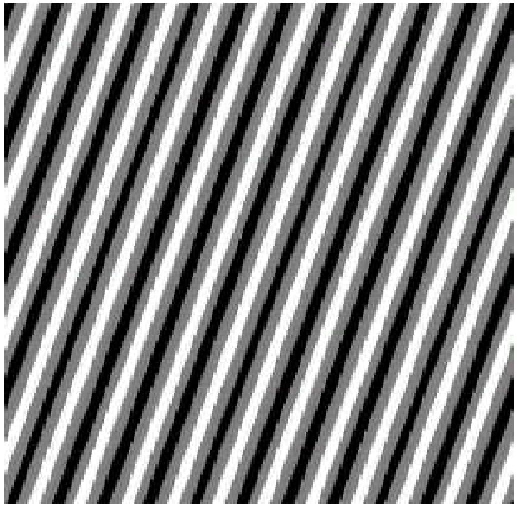
$$\begin{aligned} f(r,\theta) &\Leftrightarrow F(\omega,\varphi) \\ f(r,\theta+\theta_0) &\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0) \end{aligned}$$

  Si $f(x, y)$ se gira un ángulo θ_0, su transformada de Fourier $F(u, v)$ se gira la misma cantidad.

Propiedades de la transformada de Fourier







Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución:

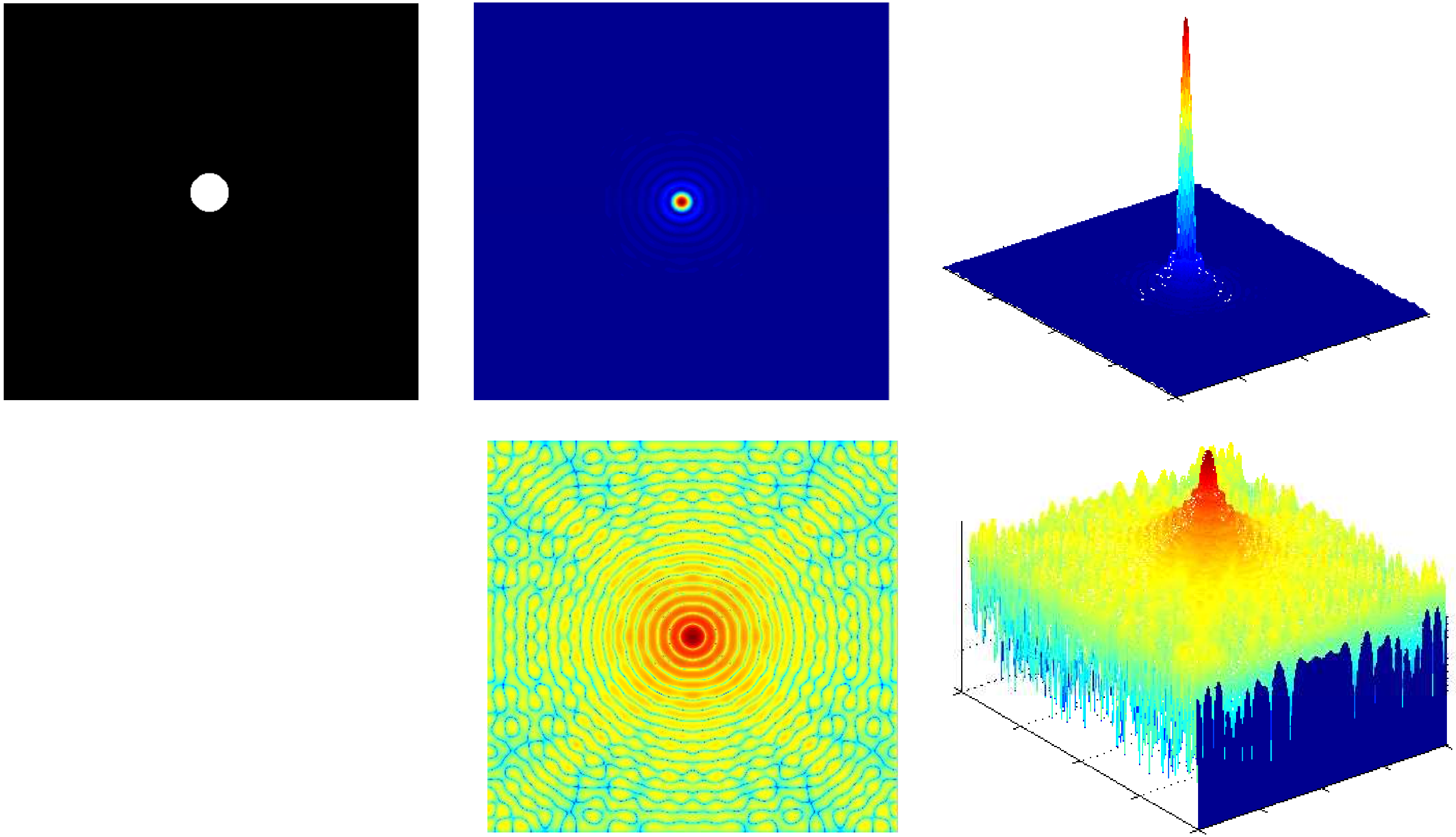
$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= f(x,y) * h(x,y) \\
g(x,y) &\Leftrightarrow G(u,v)
\end{aligned}
$$

$$
G(u,v) = F(u,v)H(u,v)
$$

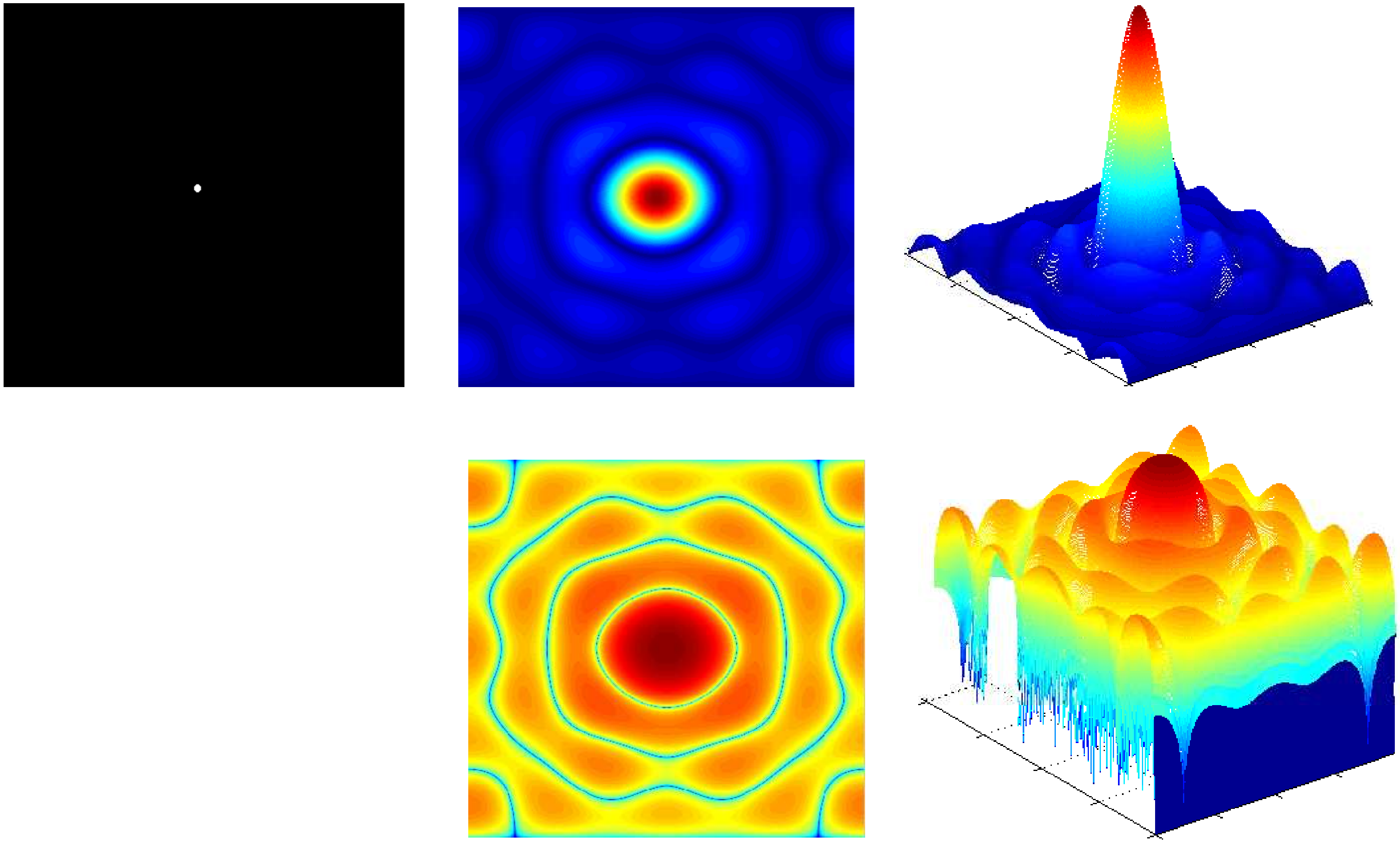
$$
f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)
$$

La TF de la salida de un sistema es igual a la multiplicación de la TF de la entrada al sistema por la TF de la respuesta del sistema al impulso unitario.

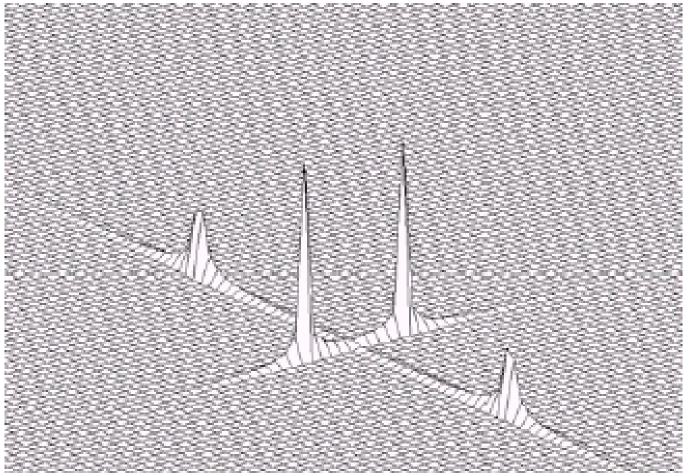
Representación gráfica de la TF



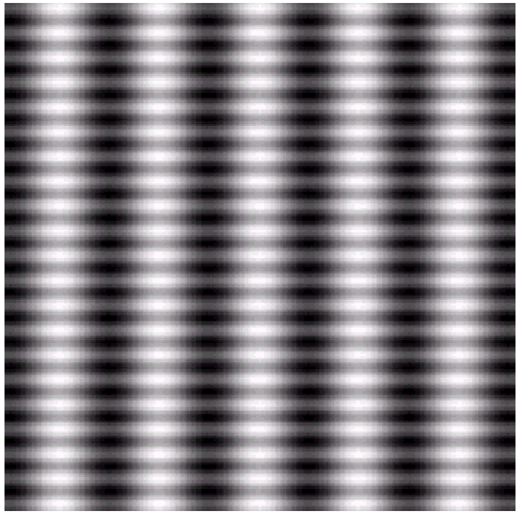
Representación gráfica de la TF

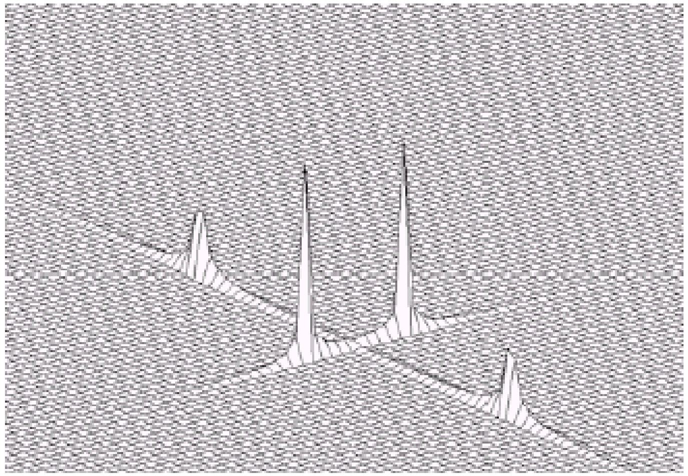


Representación gráfica de la TF

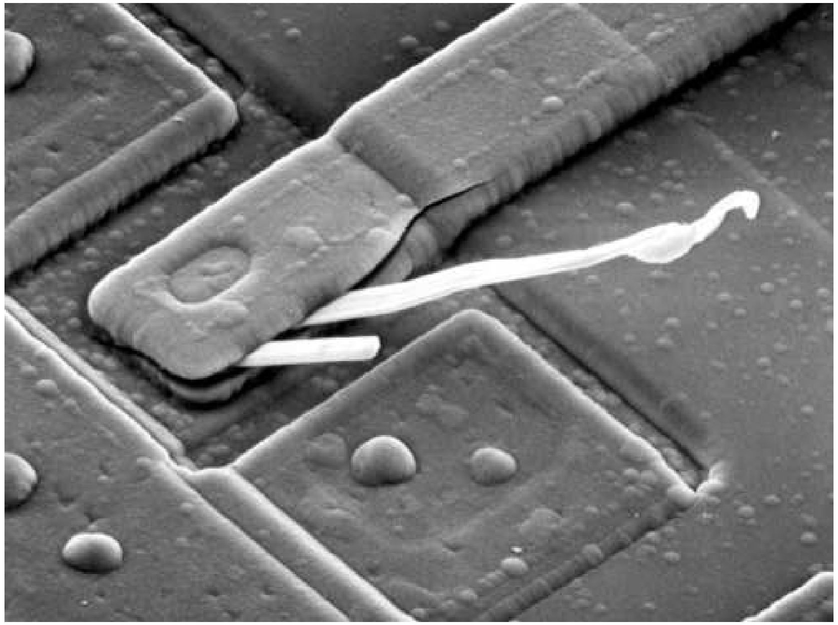


Representación gráfica de la TF

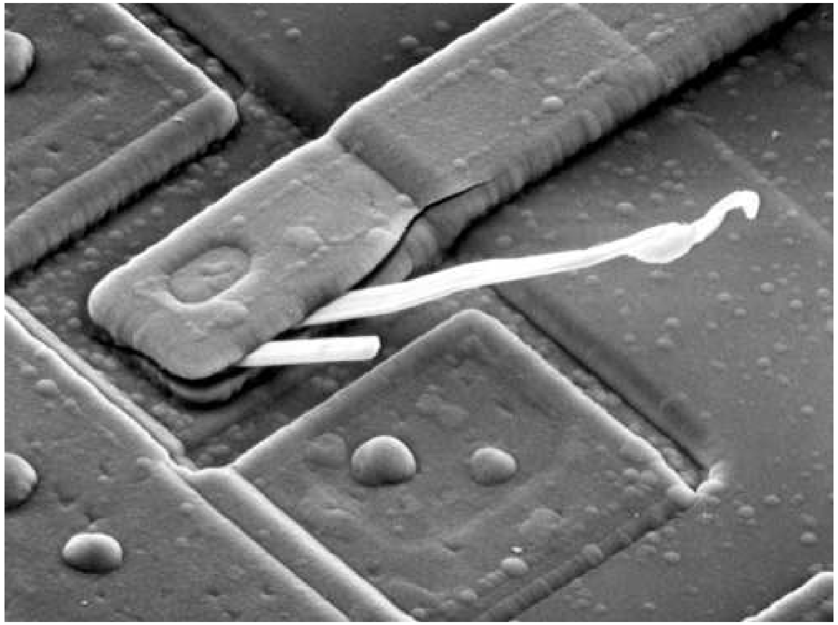


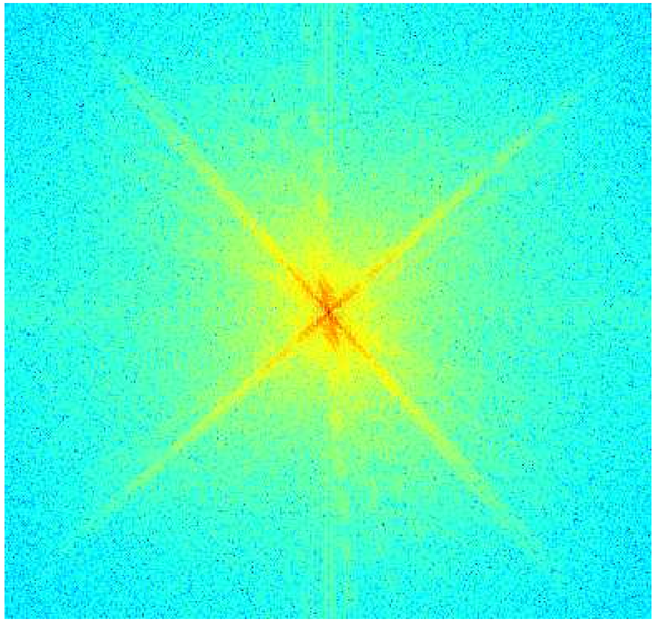


Representación gráfica de la TF



Representación gráfica de la TF





Importancia de la fase

- Consecuencias del análisis de Fourier:
  - La mayoría de las características más importantes de una señal se preservan sólo si la información de la fase se mantiene.
  - Cuando una señal es de longitud finita, la información de la fase es suficiente para reconstruir una señal (podemos ver la imagen a grandes rasgos).
- Imagen de sólo módulo: la TF tiene como módulo el de la imagen original, y fase nula.
- Imagen de sólo fase: la TF tiene módulo unidad (o promediado) y fase igual a la de la imagen original.
- Las características de la imagen original son identificables en una imagen de sólo fase, ya que la inteligibilidad está asociada a los detalles (puntos, bordes, etc.)

Importancia de la fase

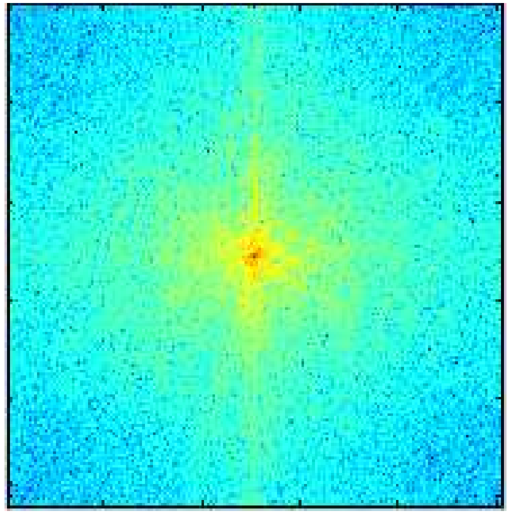
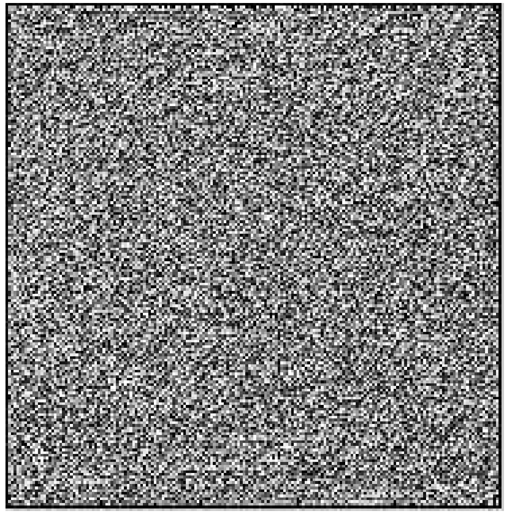
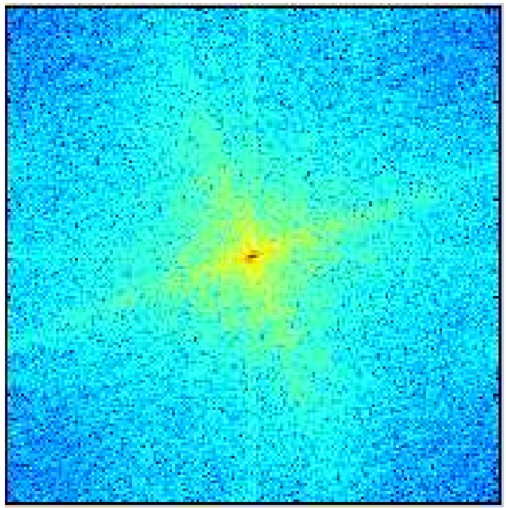
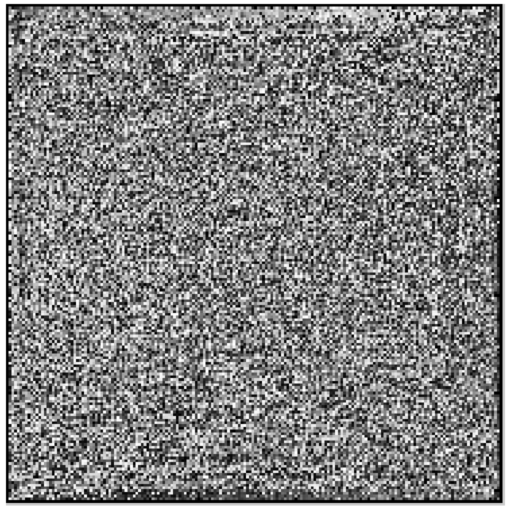



Imagen Módulo Fase

Importancia de la fase

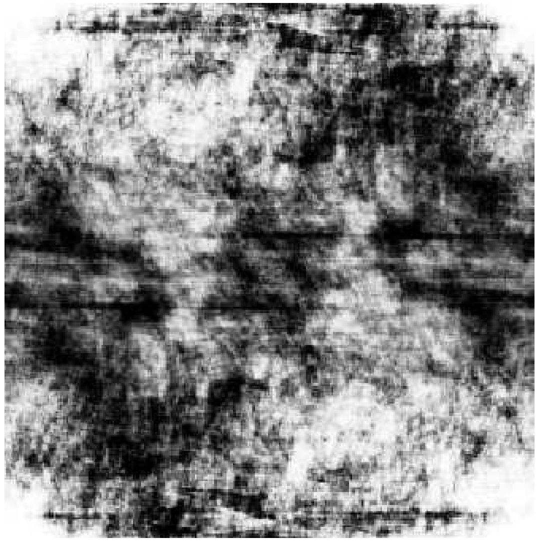
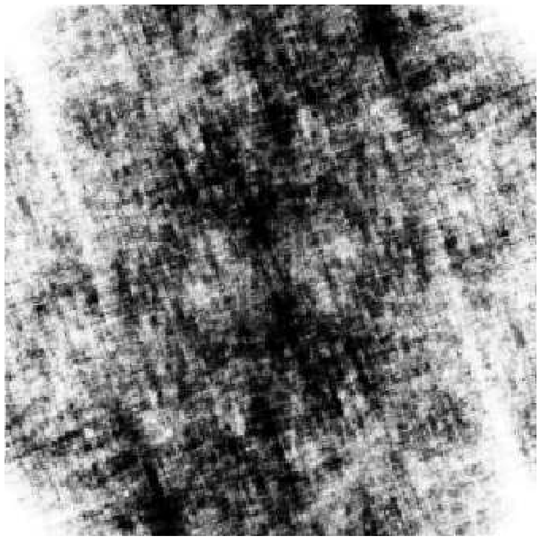
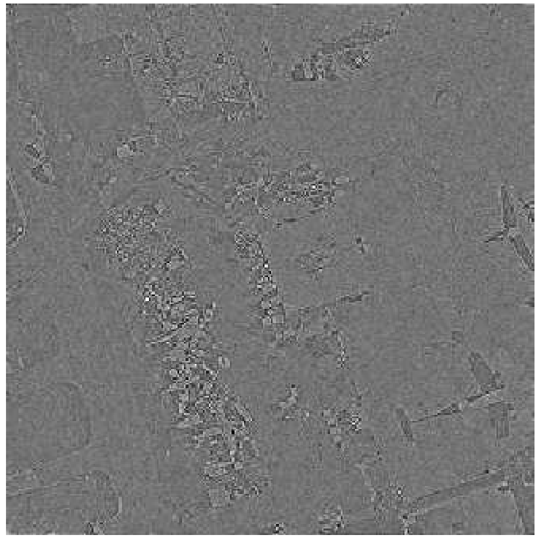




Imagen | Sólo módulo | Sólo fase

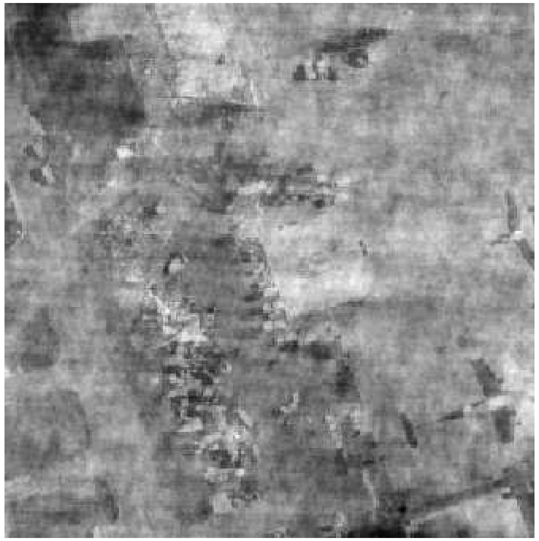




Importancia de la fase

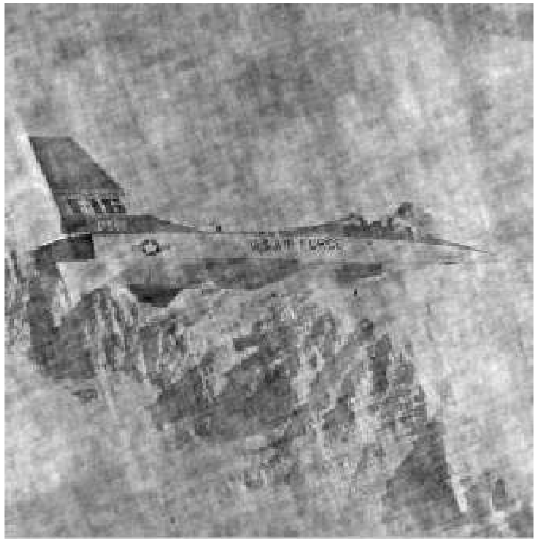
Experimento de Oppenheim

$f(x,y)$

$g(x,y)$



$F^{-1}\Big[\,|F(u,v)| * exp\big(i\angle G(u,v)\big)\Big]$



$F^{-1}\Big[\,|G(u,v)| * exp\big(i\angle F(u,v)\big)\Big]$

Filtrado frecuencial

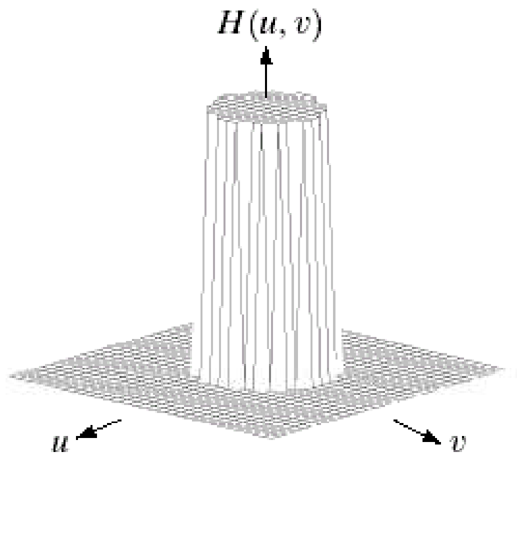
- En el dominio espacial: la convolución puede se computacionalmente ineficiente cuando aumenta la talla del filtro.
- Filtrado en frecuencia: utilización de la propiedad de correspondencia entre convolución espacial y producto de TF
- Proceso:
  1. Generar una función $H(u, v)$ (función de transferencia del filtro)
  2. Calcular la TF $F(u, v)$ de la imagen
  3. Multiplicar elemento a elemento las funciones
  4. Calcular la TF inversa
  5. Obtener la parte real

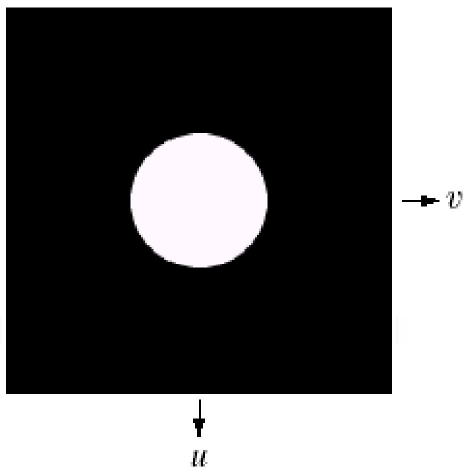
Filtros de suavizado

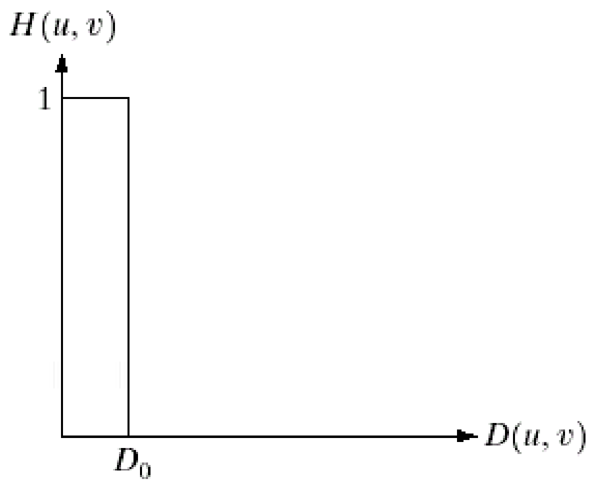
- Filtro pasa-bajos ideal:

$$H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

donde: D_0 es la frecuencia de corte, y $D(u,v)$ es la distancia euclídea desde el punto (u,v) hasta el origen del plano de frecuencia.

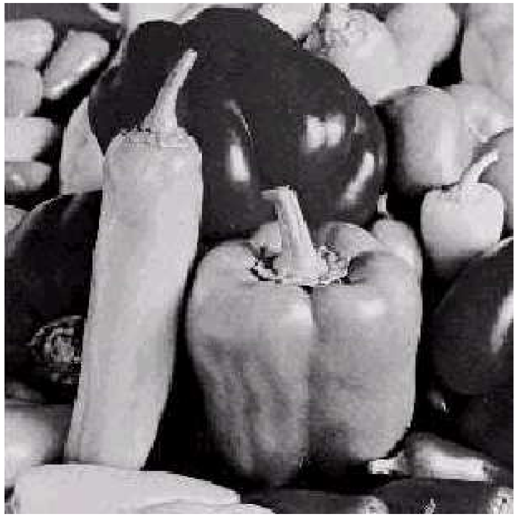




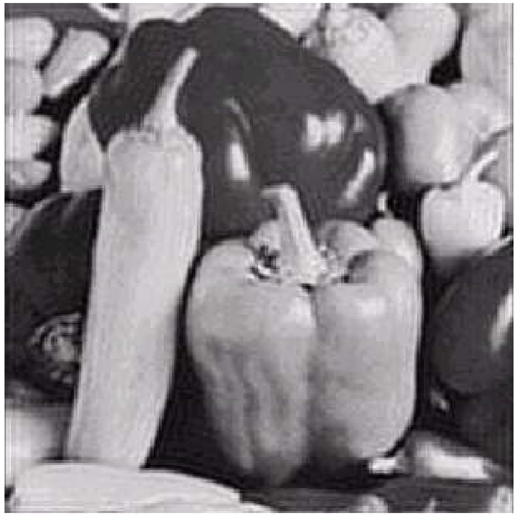


Filtros de suavizado

- Ejemplos de PB ideal:



Original



$D_0 = 57$

$D_0 = 26$

- Efecto de sobredisparo característico de los filtros ideales por la discontinuidad de la función de transferencia: fenómeno de Gibbs.

Filtros de suavizado

- Fenómeno de Gibbs: oscilaciones presentes en la imagen filtrada originadas en el cálculo de la TF inversa.
- La aparición de oscilaciones se explica claramente en el dominio espacial:

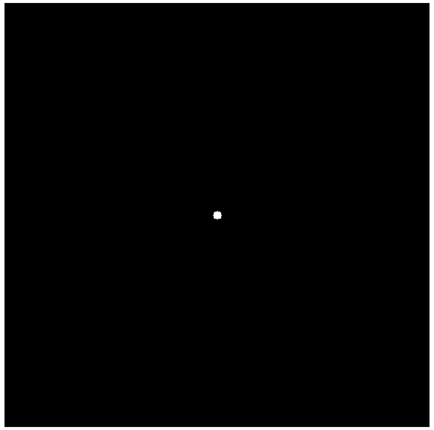
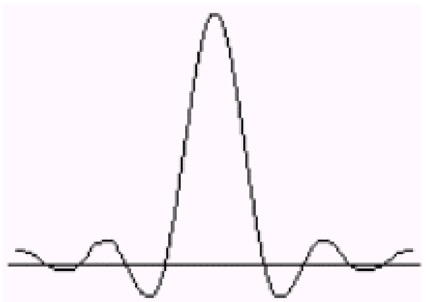


Imagen de $H(u, v)$



$h(x, y)$

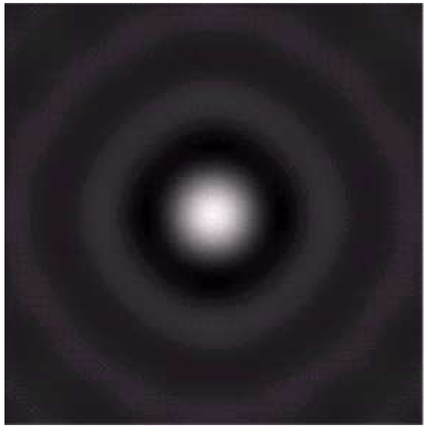


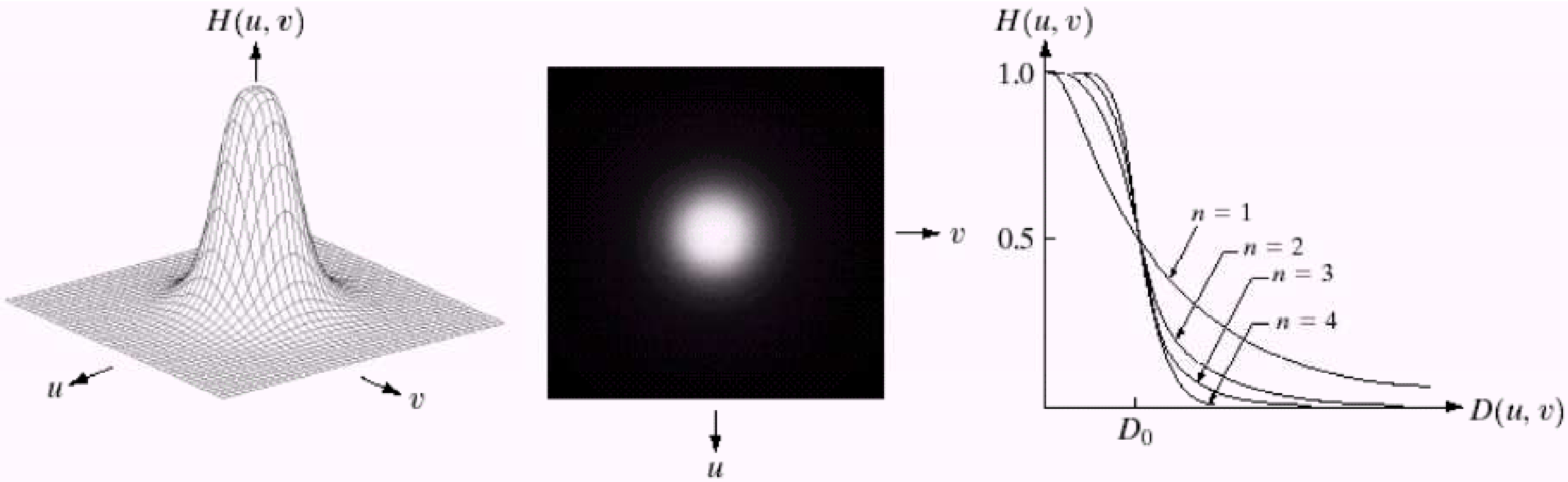
Imagen de $h(x, y)$

- Solución: multiplicación del filtro ideal por una ventana suavizante (Hamming, Kaiser, etc.), o generar una función $H(u, v)$ con caída suave.

Filtros de suavizado

- Filtro pasa-bajos Butterworth de orden n:

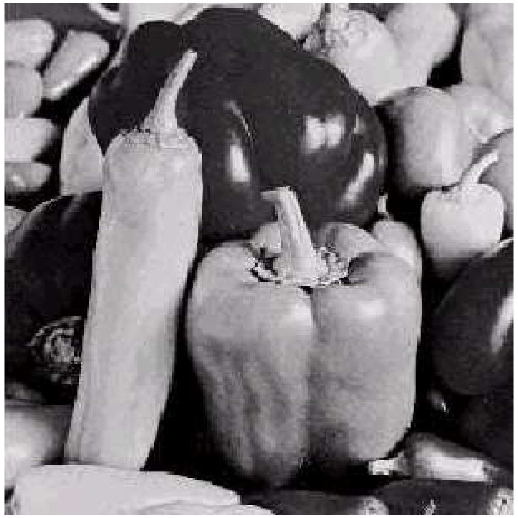
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)}{D_0}\right]^{2n}}$$



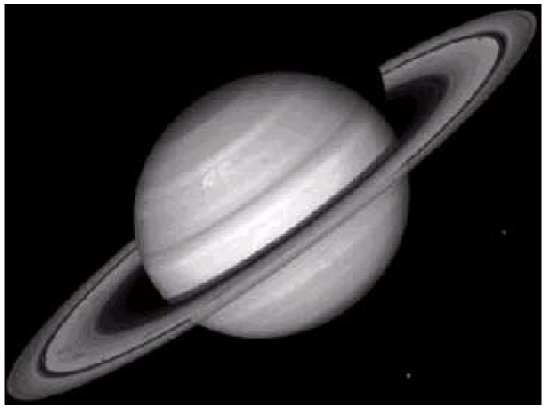
- Transición de corte suave, no introduce sobredisparo.

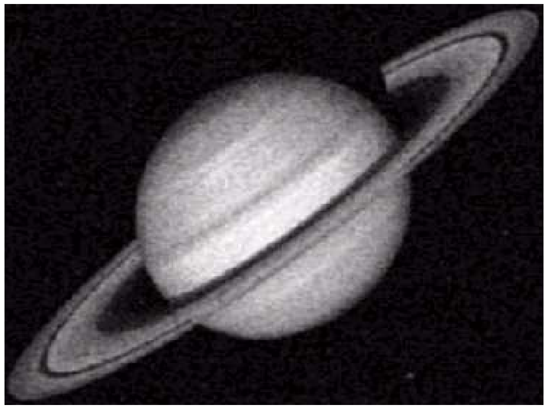
Filtros de suavizado

- Ejemplo de filtrado sin sobredisparo:




- Ejemplo de reducción de ruido:

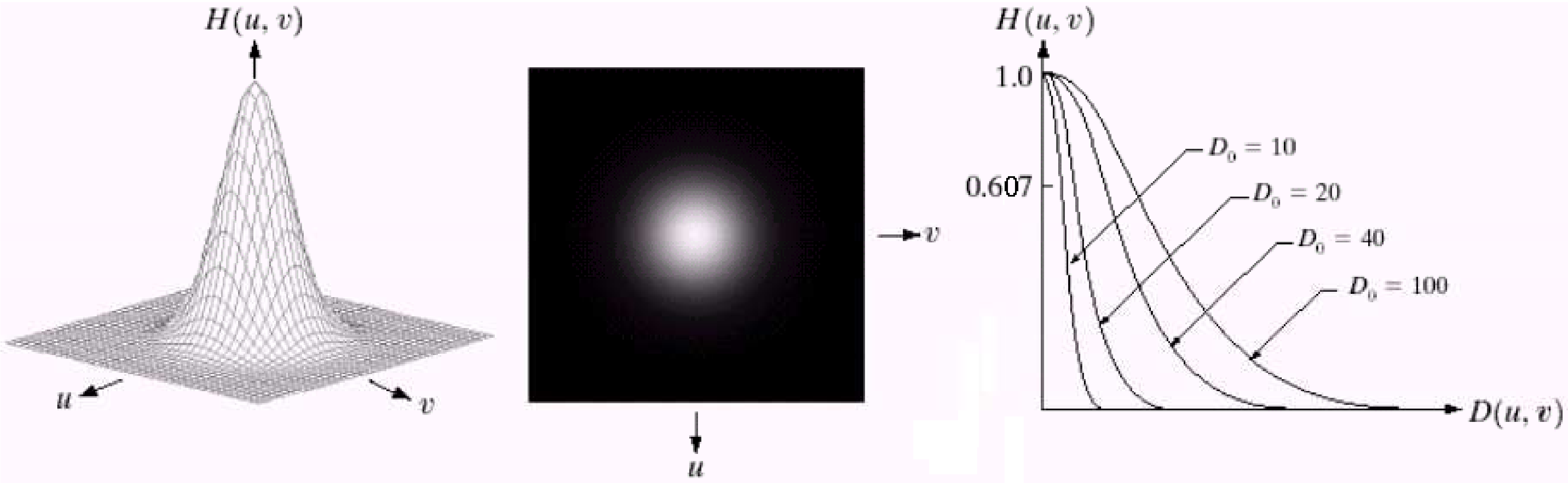




Filtros de suavizado

- Filtro pasa-bajos gaussiano:

$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$



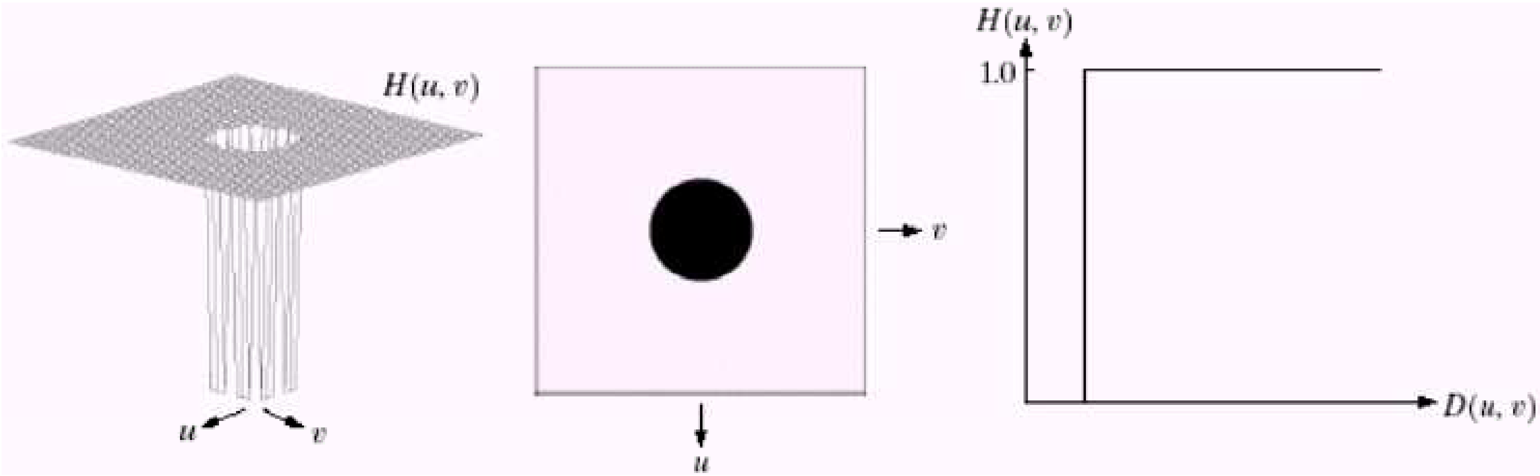
- σ: medida de la dispersión de la curva gaussiana. Cuando $D(u,v) = \sigma$, la función de transferencia está a 0.607 de su valor máximo.
- Propiedad: la TF inversa de un filtro gaussiano también es gaussiana. Ventaja: no tiene sobredisparo.

Filtros de acentuado

- Filtro pasa-altos ideal:

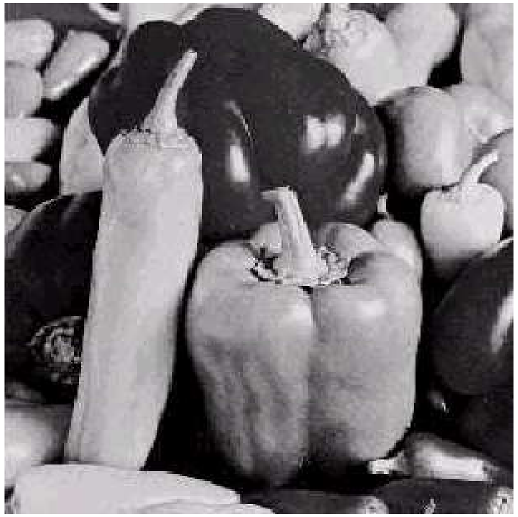
$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u,v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u,v) > D_0 \end{cases}$$

donde: D_0 es la frecuencia de corte, y $D(u,v)$ es la distancia euclídea desde el punto (u,v) hasta el origen del plano de frecuencia.

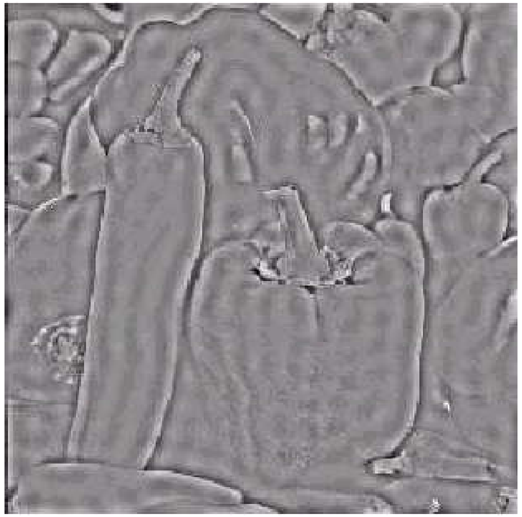


Filtros de acentuado

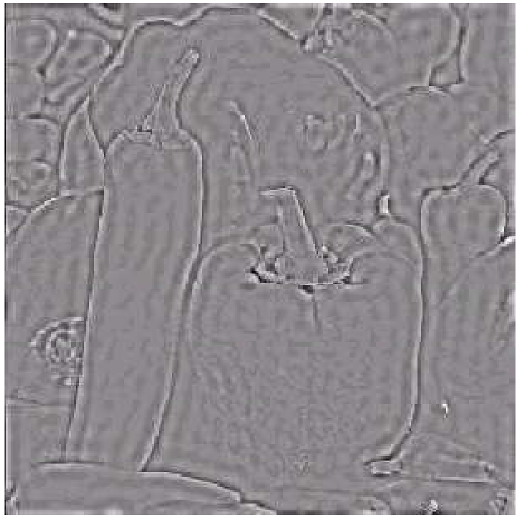
- Ejemplos de PA ideal:



Original



$D_0 = 18$



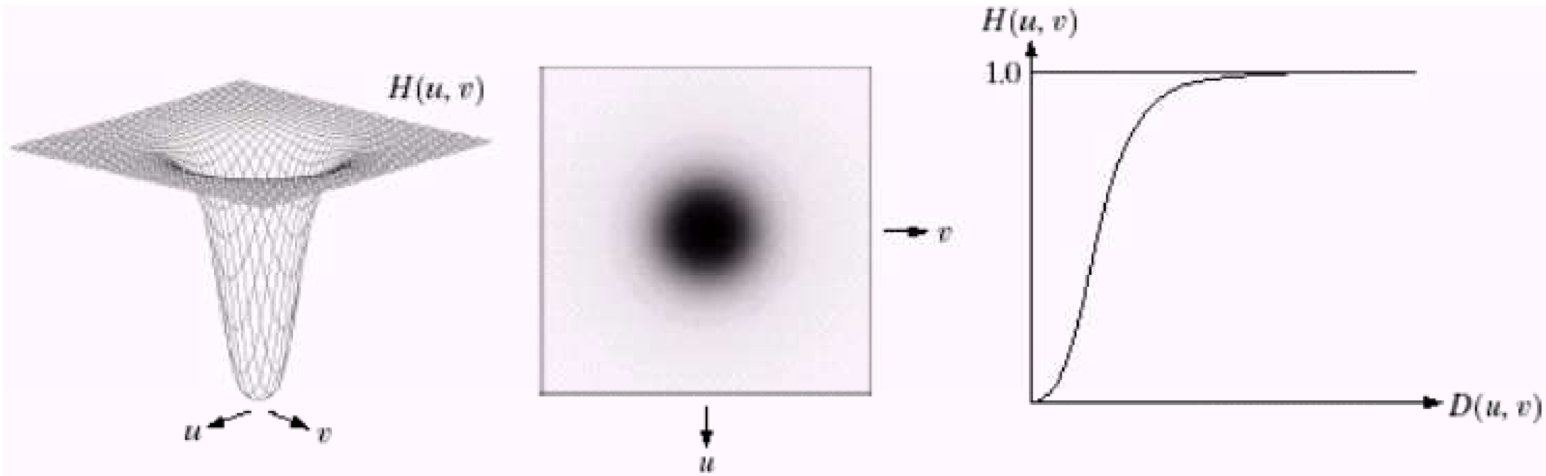
$D_0 = 26$

- Al igual que en el filtro pasa-bajos, se observa la aparición del fenómeno de Gibbs.

Filtros de suavizado

- Filtro pasa-altos Butterworth de orden n:

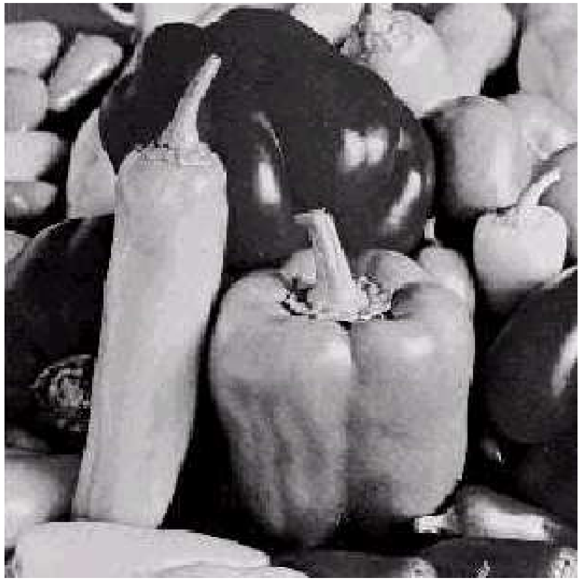
$$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u,v)}\right]^{2n}}$$



- Al igual que el filtro PB, para orden bajo no introduce sobredisparo ($n < 20$).

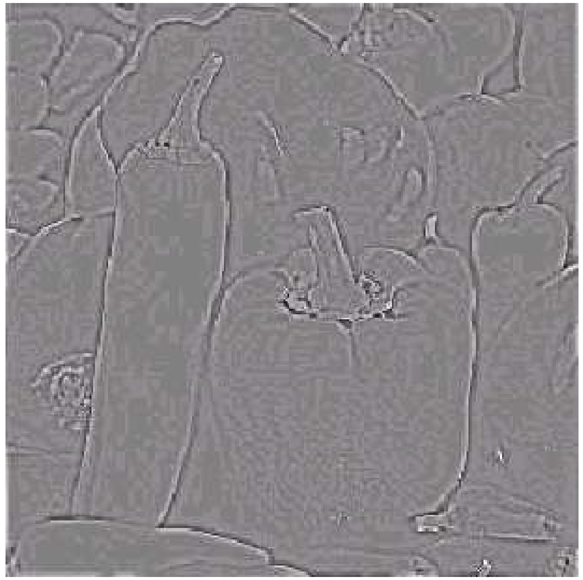
Filtros de acentuado

- Comparación con filtro PA ideal:



Original

Ideal



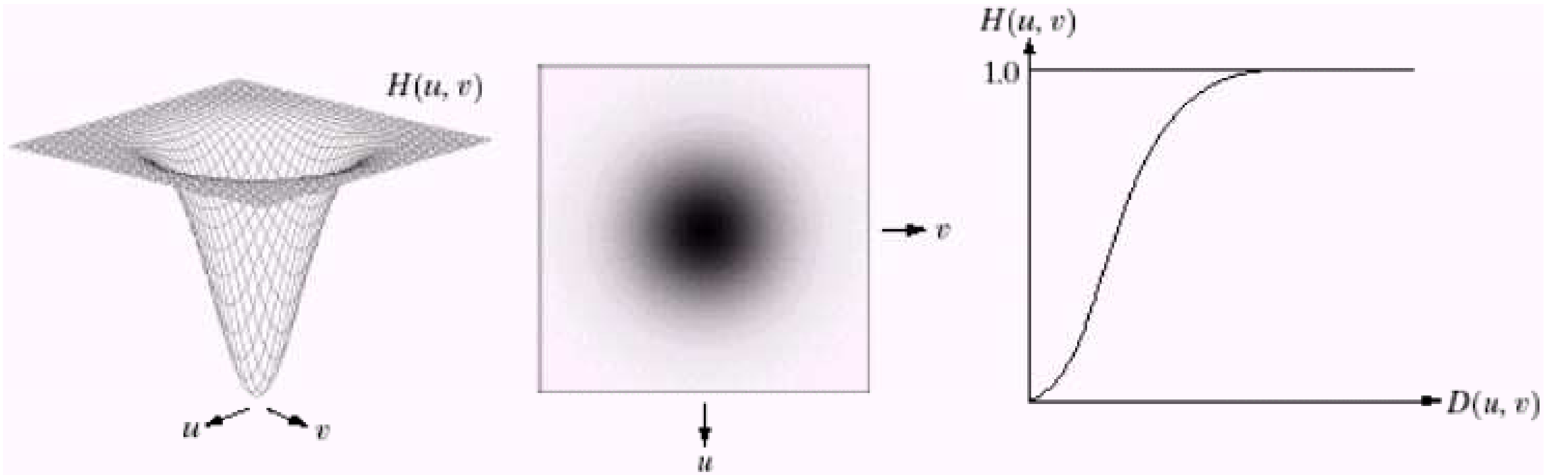
Butterworth

Filtros de acentuado

- Filtro pasa-altos gaussiano:

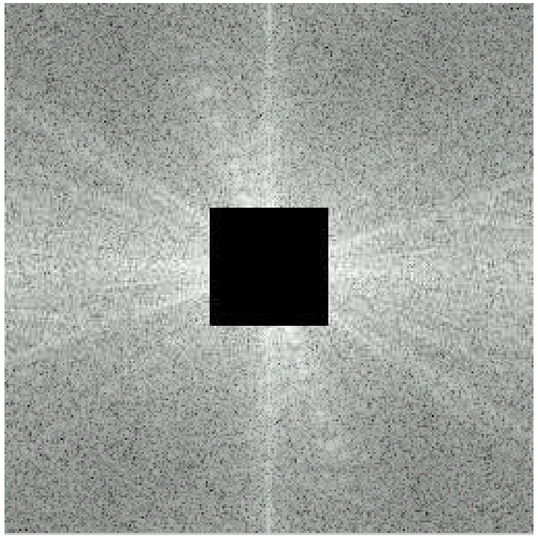
$$H(u,v) = 1 - e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

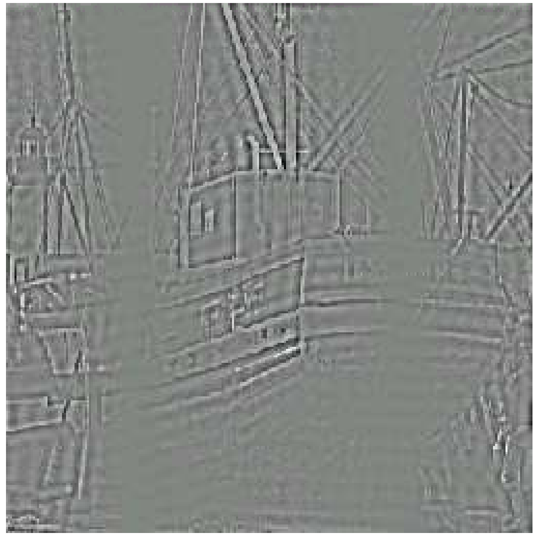
con σ^2: varianza de la curva gaussiana ($\sigma = D_0$).



Resultados anteriores

- En el filtrado pasa-altos, el brillo medio era anulado:





Original $\qquad$ $\log(|F.*H|)$ $\qquad$ max=142, min=-155

- El resultado "visualmente" no es óptimo.
- Solución: trabajar sobre la imagen original, agregando componentes de alta frecuencia.

Filtrado de máscara difusa

- Operación:

$$
\begin{aligned}
\text{en el dominio espacial: } f_{PA}(x,y) &= f(x,y) - f_{PB}(x,y) \\
\text{en el dominio frecuencial: } F_{PA}(u,v) &= F(u,v) - F_{PB}(u,v) \\
\text{al ser: } F_{PB}(u,v) &= H_{PB}(u,v)\ F(u,v) \\
\text{entonces: } F_{PA}(u,v) &= F(u,v) - H_{PB}(u,v)F(u,v) \\
\text{despejando: } &= F(u,v)\ (1 - H_{PB}(u,v)) \\
\text{el filtro es: } H_{PA}(u,v) &= 1 - H_{PB}(u,v)
\end{aligned}
$$

- Resultado: visualmente similar al filtro pasa-altos.
- Solución: amplificar el aporte de la imagen original.

Filtrado de alta potencia (high-boost)

- Generalización de la máscara difusa ($A \geq 1$):

$$f_{AP}(x,y) = A\, f(x,y) - f_{PB}(x,y)$$

vimos que puede ser reescrita como:

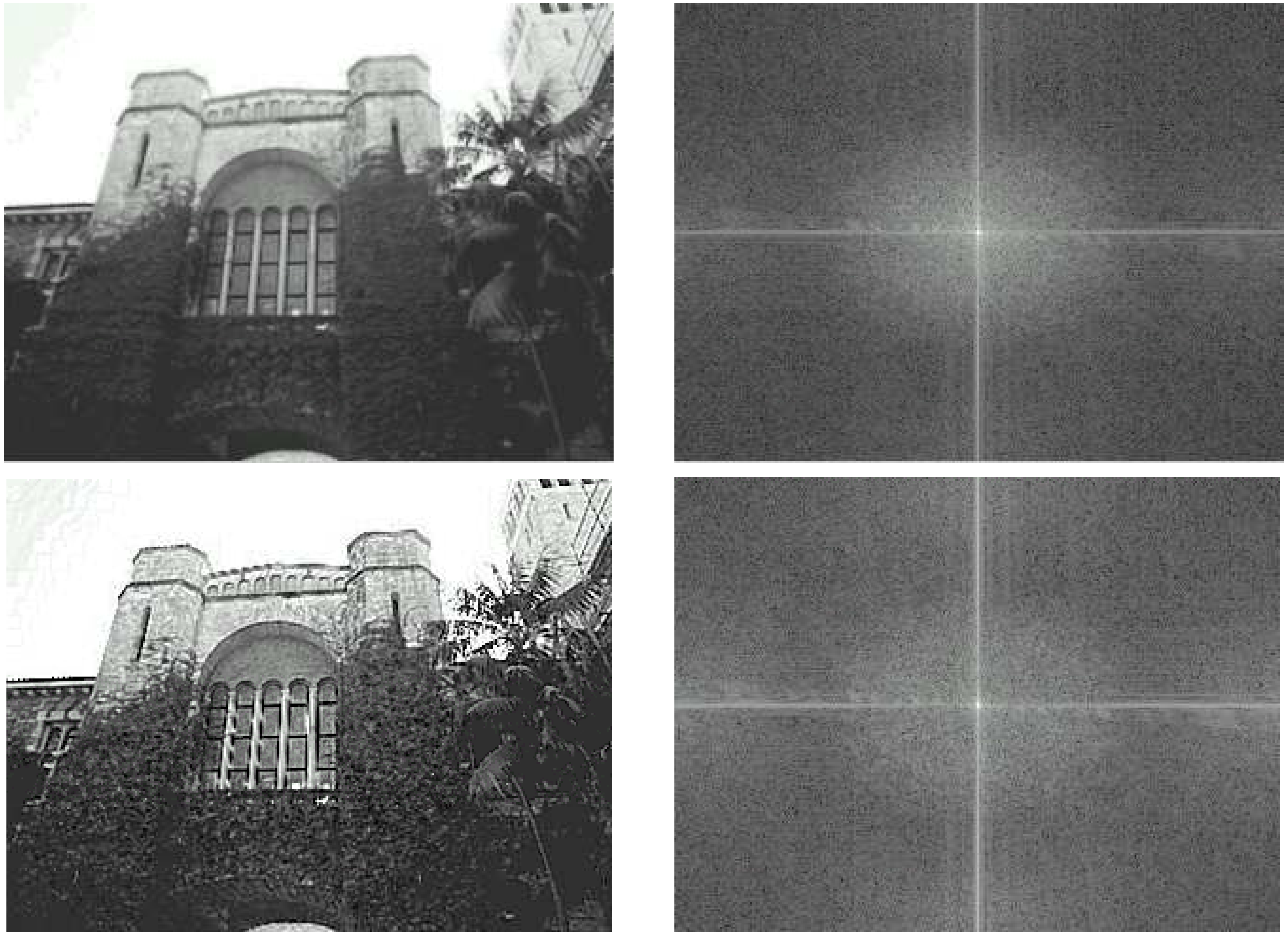
$$f_{AP}(x,y) = (A-1)\, f(x,y) + f_{PA}(x,y)$$

en el dominio frecuencial:

$$H_{AP}(u,v) = (A-1) + H_{PA}(u,v)$$

Filtrado de alta potencia (high-boost)

- Ejemplo:



Filtrado de énfasis de alta frecuencia

- Para aumentar el aporte de los componentes de alta frecuencia a la imagen, se multiplica por una constante al filtro PA y se modifica el offset para no eliminar el brillo medio:

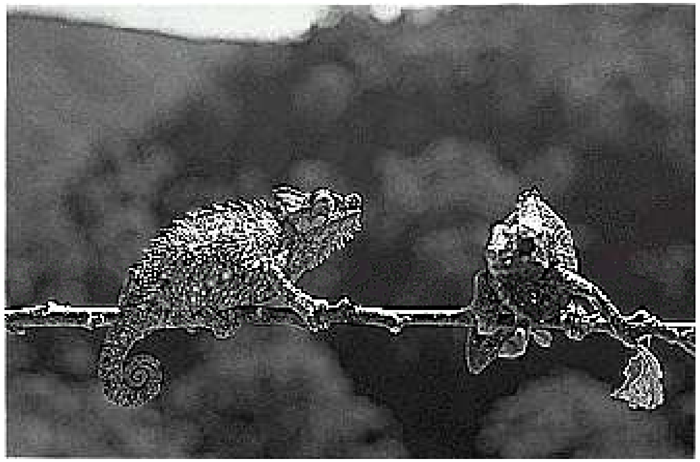
$$H_{EAF}(u,v) = a + b\,H_{PA}(u,v)$$

con $a \geq 0$ y $b > a$.

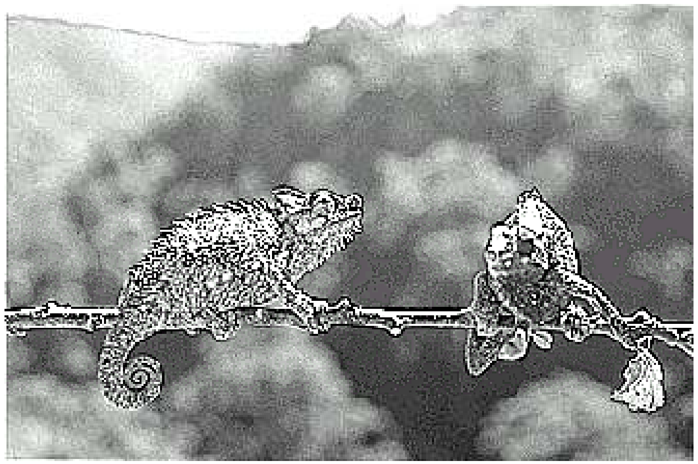
- Casos particulares:
  - Si $a = (A - 1)$ y $b = 1$: $H_{EAF} = H_{AP}$
  - Si $a = 0$ y $b = 1$: $H_{EAF} = H_{PA}$

Filtrado de énfasis de alta frecuencia

Original



Alta Potencia



Enfasis de AF

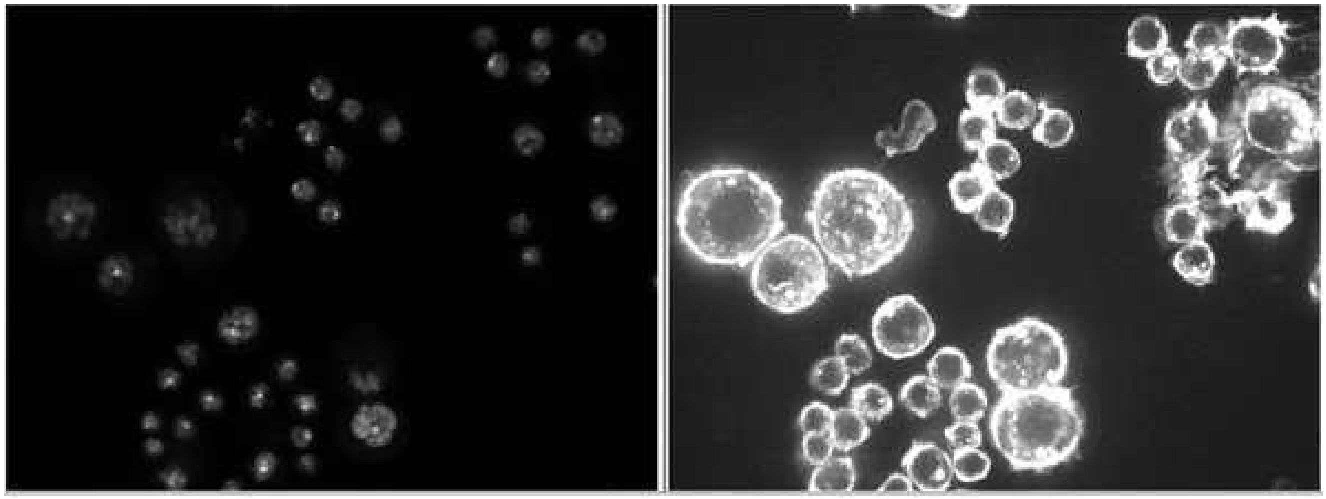
Filtrado homomórfico

- Las imágenes digitales que procesamos normalmente se crean a partir de imágenes ópticas, las cuales constan de dos componentes:
  - Iluminación $i(x, y)$: condiciones de luz (cambiante).
  - Reflectancia $r(x, y)$: propiedad intrínseca de los objetos (fija).

- En muchas aplicaciones interesa realzar la componente de reflectancia mientras se reduce la componente de iluminación.
- El filtrado PA y PB por sí solos no logran ambos cometidos a la vez, por lo que generalmente se utilizan con un procesamiento posterior.

- El filtrado homomórfico es un proceso que:
  - comprime el rango dinámico a partir de las condiciones de iluminación, y
  - realza el contraste a partir de las propiedades de reflectancia de los objetos.

Filtrado homomórfico



Filtrado homomórfico

- Recordar que una imagen puede expresarse como:

$$f(x, y) = i(x, y)\, r(x, y)$$

- La ecuación anterior no se puede usar directamente porque la transformada de Fourier de un producto de funciones no es separable:

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{i(x, y)\}\ \mathfrak{F}\{r(x, y)\}$$

Haciendo:

$$z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$$

entonces

$$\mathfrak{F}\{z(x, y)\} = \mathfrak{F}\{\ln f(x, y)\} = \mathfrak{F}\{\ln i(x, y)\} + \mathfrak{F}\{\ln r(x, y)\}$$

o bien:

$$Z(u, v) = I(u, v) + R(u, v)$$

Filtrado homomórfico

- Al procesar con un filtro a $Z(u,v)$ se tiene:

$$S(u,v) = H(u,v)\ Z(u,v) = H(u,v)I(u,v) + H(u,v)R(u,v)$$

En el dominio espacial:

$$\begin{aligned} s(x,y) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{S(u,v)\right\} &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{H(u,v)I(u,v)\right\} + \mathfrak{F}^{-1}\left\{H(u,v)R(u,v)\right\} \\ &= i'(x,y) + r'(x,y) \end{aligned}$$

La imagen resultante es:

$$\begin{aligned} g(x,y) &= e^{s(x,y)} \\ &= e^{i'(x,y)}\ e^{r'(x,y)} \\ &= i_0(x,y)\ r_0(x,y) \end{aligned}$$

Filtrado homomórfico

- La secuencia de operaciones es:

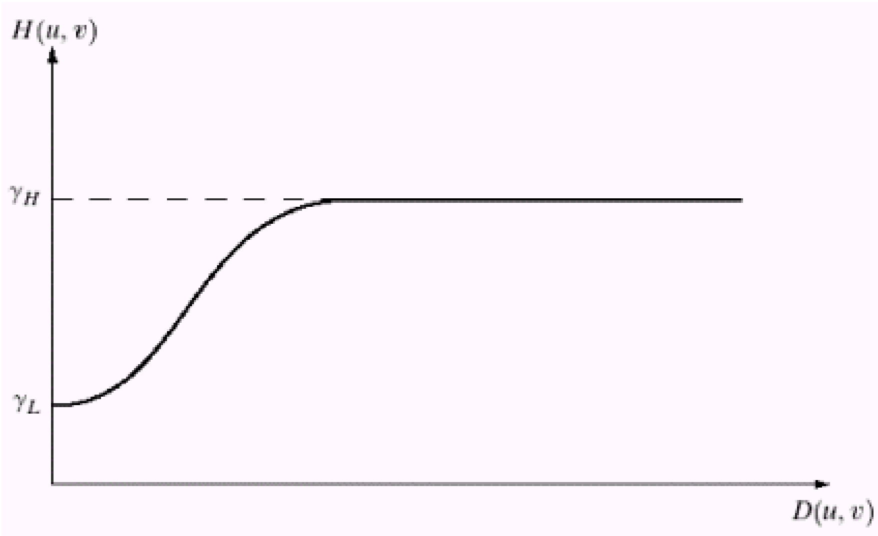
$$f(x,y) \to \langle \ln \rangle \to \langle \mathfrak{F} \rangle \to \langle H(u,v) \rangle \to \left\langle \mathfrak{F}^{-1} \right\rangle \to \langle \exp \rangle \to g(x,y)$$

- Clave: definir un filtro homomórfico $H(u,v)$ que actúe sobre las componentes de iluminación y reflectancia de forma separada.
- Conceptos:
  - La iluminación se caracteriza por variaciones espaciales pequeñas $\to$ bajas frecuencias de la TF del logaritmo de la imagen.
  - La reflectancia tiende a variar abruptamente en los bordes $\to$ altas frecuencias de la TF del logaritmo de la imagen.

El filtro homomórfico $H(u,v)$, entonces, debe afectar de manera diferente a las bajas y altas frecuencias.

Filtrado homomórfico

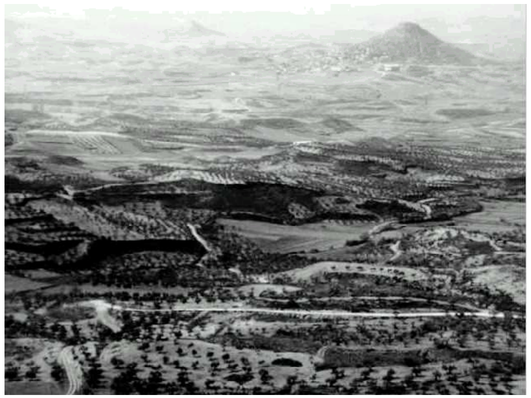
- Especificación de $H(u,v)$:



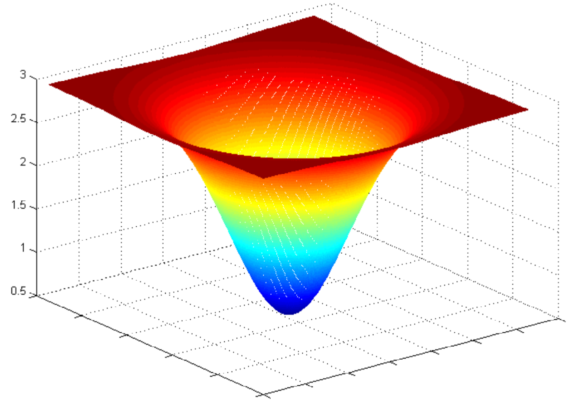
- Elección de parámetros:
  - $\gamma_L < 1$: decrementa el brillo
  - $\gamma_H > 1$: amplifica las altas frecuencias

Filtrado homomórfico

Original

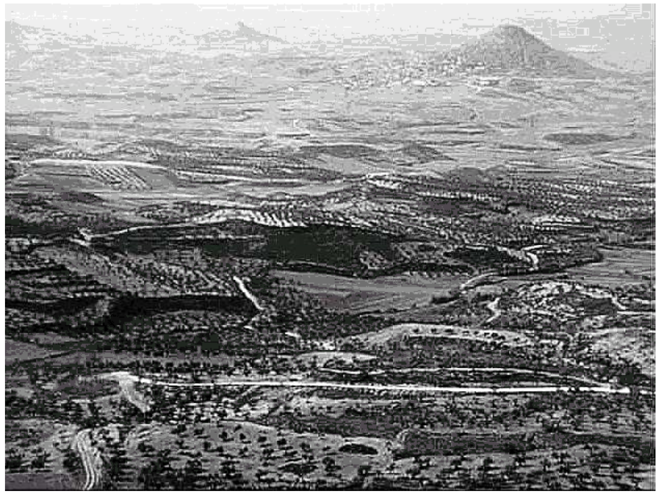


Ecualizada



Filtro H

Filtrada



Ecualizada de filtrada

Fin de teoría

- Próxima teoría: Unidad IV - Restauración de imágenes.