Guía 2

1. Función de correlación en 1D

a)

b)

2. Integración numérica

a)

b)

c)

d)

e)

f)

3. Reducción y Prefix-Scan: suma de series

a)

b)

c)

4. Una transformación iterada y caótica: mapeo logístico

a)

b)

c)

d)

5. Otra transformación iterada y caótica: Ecuaciones de Lorenz

a)

b)

Definiendo a $X_i(t) = \eta(x = idx, t)$, $m = \mu dx$, $kdx = K$ es posible reescribir al Lagrangiano como:

$$L = \sum_{n=0}^{N} \left[\frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\eta(x,t)}{dt} \right)^2 + \mu g \eta(x,t) - \frac{1}{2} K \left(\frac{\eta(x,t) - \eta(x+dx,t)}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Por lo que en el limite cuando $dx \to 0$, $(N, k) \to \infty$, $kdx = K = cte$, podemos escribir a L como una integral:

$$L = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\mu \left(\frac{d\eta(x,t)}{dt} \right)^2 + \mu g \eta(x,t) - \frac{1}{2} K \left(\frac{d\eta(x,t)}{dx} \right)^2 \right] dx = \int_0^l \delta L dx \tag{1}$$

Esta ecuación determina una densidad Lagrangiana δL, lo que nos da la ecuación diferencial que tiene que cumplir el desplazamiento $\eta(x,t)$ (ver Apéndice).

$$g = \frac{d^2\eta(x,t)}{dt^2} - \frac{K}{\mu}\frac{d^2\eta(x,t)}{dx^2} \tag{2}$$

Solución del movimiento

La solución de la ecuación diferencial 2 tiene forma de suma entre una solución particular y una homogénea, que de forma general consiste de la superposición de dos ondas propagándose en sentidos opuestos.

$$\eta(x,t) = \eta_{hom}(x,t) + \eta_p(x,t) \tag{3}$$

$$\eta_{hom}(x,t) = f_+(x - \sqrt{\frac{K}{\mu}}t) + f_-(x + \sqrt{\frac{K}{\mu}}t) \tag{4}$$

$$\eta_p(x,t) = \frac{1}{2}gt^2 \tag{5}$$

Realizando el mismo procedimiento que para L en la ecuacion **??**, podemos obtener el paso al continuo de $X_i(0)$, el mismo nos dará la condición inicial del sistema.

$$\eta(x,0) = \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) \frac{gM}{K} \tag{6}$$

Ya que sabemos que $\eta(l,0) = l$ podemos encontrar una igualdad entre las constantes g, M y K. Y reescribir la velocidad de propagación en x.

$$K = \frac{1}{2}gM \tag{7}$$

$$V_x = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{gl}{2}} \tag{8}$$

Utilizando la condición inicial del sistema (6) y la igualdad anterior obtenemos:

$$f_+(x) = f_-(x) = \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) \tag{9}$$

Por lo que el desplazamiento $\eta(x,t)$ queda expresado como:

$$\eta(x,t) = \left(x - \sqrt{\frac{gl}{2}}t - \frac{(x - \sqrt{\frac{gl}{2}}t)^2}{2l} \right) + \left(x + \sqrt{\frac{gl}{2}}t - \frac{(x + \sqrt{\frac{gl}{2}}t)^2}{2l} \right) + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (10)$$

Sin mucho esfuerzo se puede ver que:

$$\eta(x,t) = \eta(x,0)$$

Esto quiere decir que la solución en la que el slinky se queda colgando en equilibrio sin moverse para todo tiempo (nunca se lo suelta), es la superposición de 2 ondas que se propagan en sentido contrario con cada diferencial de desplazamiento $d\eta$ acelerando por acción gravitatoria.

Al momento de soltar el slinky, se elimina la onda $f(x - V_x t)$ que se propaga hacia x positivos. Esto comienza en el extremo superior, y esta perturbación viaja en x con velocidad V_x. Por lo que para $x > V_x t$ el slinky se mantendrá quieto con la solución que es superposición de ambas ondas.

Al mismo tiempo para $x < V_x t$ tenemos que la expresión del desplazamiento $\eta(x,t)$ será la combinación de la onda que se propaga a x negativos, con el término dado por la acción gravitatoria, y otro término que depende de la velocidad del slinky.

Dado que $\eta(x,t)$ en $x < V_x t$ también tiene que cumplir 2, se puede encontrar una solucion para este intervalo, considerando que no existe la onda que se propaga a x positivos:

$$\eta_-(x,t') = 2\left(x + \sqrt{\frac{gl}{2}}t' - \frac{(x + \sqrt{\frac{gl}{2}}t')^2}{2l} \right) + \frac{1}{2}gt'^2 + V_{CM}t' = \eta(x,0) + 2V_x t' \qquad (11)$$

Donde $t' = t - \frac{x}{V_x} > 0$, tiempo medido desde el momento en el que la posición $\eta(x,0)$ pasó de estar quieta a empezar a moverse (cambio de solución), y V_{CM} velocidad del CM a tiempo $\frac{x}{V_x}$

Por lo que la solución general del movimiento queda escrita como:

$$\eta(x,t) = \begin{cases} 2\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) + 2\sqrt{\frac{gl}{2}}(t - \frac{x}{\sqrt{\frac{gl}{2}}}) & si \quad x \leq t\sqrt{\frac{gl}{2}} \\ \\ 2\left(x - \frac{x^2}{2l}\right) & si \quad x > t\sqrt{\frac{gl}{2}} \end{cases} \qquad (12)$$

Para x : $[0, l]$, t : $[0, \sqrt{\frac{2l}{g}}]$

Luego es posible encontrar la posición del centro de masa en función del tiempo según la expresión:

$$CM(t) = \int_0^l \eta(x,t)\frac{\mu}{M}\,dx = \int_0^{t\sqrt{\frac{gl}{2}}} \left[\eta(x,0) + 2\sqrt{\frac{gl}{2}}(t - \frac{x}{\sqrt{\frac{gl}{2}}})\right]\frac{\mu}{M}dx + \int_{t\sqrt{\frac{gl}{2}}}^{l} \eta(x,0)\frac{\mu}{M}\,dx$$

$$CM(t) = \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}gt^2$$

Apéndice

Densidad Lagrangiana

La acción S ahora está escrita como la integral doble temporal/espacial de la densidad Lagrangiana, pero se tiene que seguir cumpliendo que $\delta S = 0$ para el camino que la minimiza.

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \delta L\left(\eta(x,t), \frac{d\eta(x,t)}{dx}, \frac{d\eta(x,t)}{dt}, x, t\right) dxdt = 0 \tag{13}$$

Haciendo pequeñas variaciones en el camino por medio de una perturbación $\xi(x,t)$ que cumple las condiciones de borde:

$$\eta(x,t,\alpha) = \eta(x,t,0) + \alpha\xi(x,t) \tag{14}$$

$$\xi(x_1,t) = \xi(x_2,t) = \xi(x,t_1) = \xi(x,t_2) = 0 \tag{15}$$

Se puede diferenciar el integrando y encontrar una expresión para $\frac{dS}{d\alpha}$:

$$\frac{dS}{d\alpha} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d\delta L}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} + \frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dt})}\frac{d(\frac{d\eta}{dt})}{d\alpha} + \frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dx})}\frac{d(\frac{d\eta}{dx})}{d\alpha}\right] dxdt = 0 \tag{16}$$

Luego, utilizando 15 se puede reescribir la integral como:

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d\delta L}{d\eta}\frac{d\eta}{d\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dt})}\right)\frac{d\eta}{d\alpha} - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dx})}\right)\frac{d\eta}{d\alpha}\right] dxdt = 0 \tag{17}$$

Ya que $\frac{d\eta}{d\alpha}$ es arbitrario, se puede sacar de factor común y la condición que se tiene que cumplir queda escrita como:

$$\frac{d\delta L}{d\eta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dt})}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\delta L}{d(\frac{d\eta}{dx})}\right) = 0 \tag{18}$$