Formularium Wiskunde

Ian Claesen

23 oktober 2025

Inhoudsopgave

1 Algebra

1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal a wordt genoteerd als $|a|$ en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

2 Machten en wortels

2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a.a. \dots .a}_{n\ factoren}$ $\forall a \in \mathbb{R} :\ a^1 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}_0 :\ a^0 = 1$ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} :\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

2.2 Vierkantswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert \implies \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$

2.3 N-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$n\ even \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$ $n\ oneven \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}. \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

2.4 $\frac{m}{n}$-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m.a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m.n}$ $(a.b)^m = a^m.b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm : $ax^2 + bx + c = 0$, *met* $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + ... - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$

3.3 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ delen door de eerstegraadsveelterm $x + 2$ met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 & x + 2 \\
\hline
-2x^3 - 4x^2 + 0x + 0 & 2x^2 \\
\hline
-1x^2 - 4x + 5 & \\
+1x^2 + 2x + 0 & -x \\
\hline
-2x + 5 & \\
2x + 4 & -2 \\
\hline
9 &
\end{array}$$

We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 9, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler $x + 2$.

3.4 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 5)}{(x - 2)}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 3 & -5 & +10 & -5 \\
\color{red}{2} & & +6 & +2 & +24 \\
\hline
 & 3 & +1 & +12 & \multicolumn{1}{|c}{+19}
\end{array}$$

4 Complexe getallen

4.1 Rechthoekige coordinaten

Bewerking	**Formule**
Optelling/Aftrekking	$(a+j.b) \pm (c+j.d) = (a+c) \pm j(b+d)$
Vermenigvuldiging	$(a+j.b) \cdot (c+j.d) = (ac-bd) + j(ad+bc)$
Deling	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b)\cdot(c-j.d)}{(c+j.d)\cdot(c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
Toegevoegde van	$\overline{(a+j.b)} = (a-j.b)$ $\overline{Z_1+Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
Inverse	$z = a+bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
Wortel	$\sqrt{a} \ \wedge \ a<0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a+bi} = x+yi \iff (x+yi)^2 = a+bi$
Macht	$(a+bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a+bi)^n = (a+bi)\cdot(a+bi)\cdots(a+bi)$
Machten of i	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

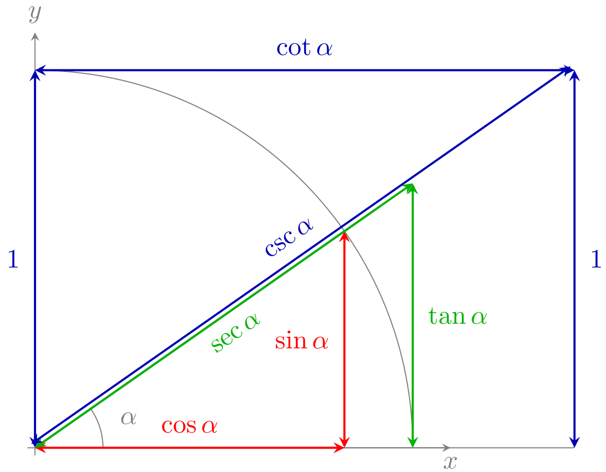
4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r\left(\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)\right) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}$$

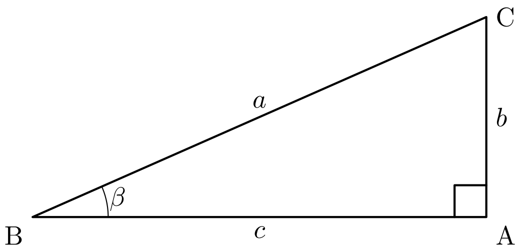
Bewerking	**Formule**
Vermenigvuldiging	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
Deling	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\angle\varphi_1}{r_2\angle\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\varphi_1 - \varphi_2$
Inverse	$z^{-1} = \frac{1}{r}\angle - \varphi$
Macht	$z^n = r^n\left[\cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)\right] \quad n \in \mathbb{N}$
Wortel	$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$
$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}\right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$	

5 Goniometrie

5.1 De Goniometrische Cirkel



5.2 formules uit de goniometrie

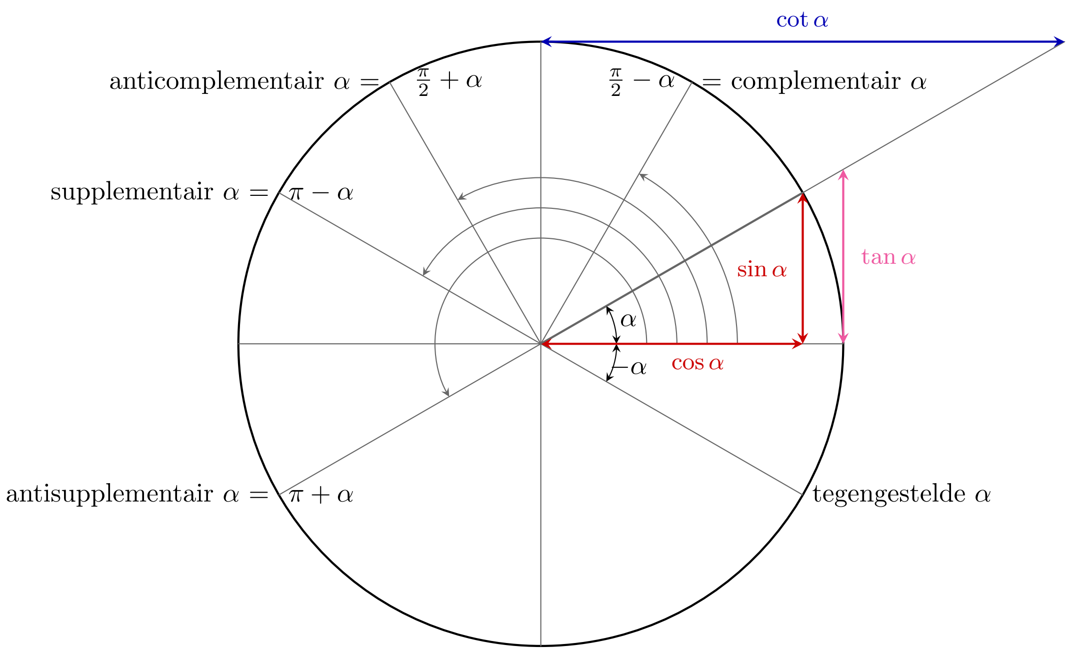


$\csc\beta$	$sec\beta$	$\cot\beta$	
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
os	as	oa	waarin: $\begin{cases} o: & \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s: & \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a: & \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
$\sin\beta$	$\cos\beta$	$\tan\beta$	

$\sin\beta = \frac{b}{a}$	$\cos\beta = \frac{c}{a}$	$\tan\beta = \frac{b}{c}$
$\csc\beta = \frac{a}{b}$	$\sec\beta = \frac{a}{c}$	$\cot\beta = \frac{c}{b}$
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$	

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ $\boxed{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$ $\boxed{1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha}$

5.3 Verwante hoeken

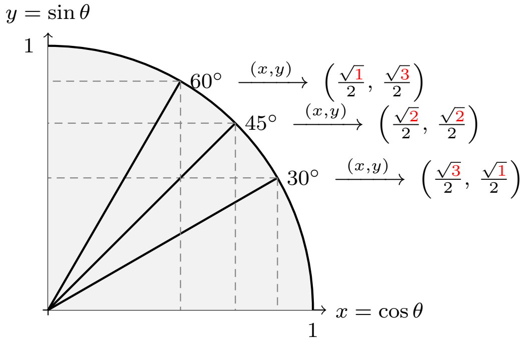


gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot\alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$
$\sec(\alpha + k2\pi) = \sec\alpha$	$\sec(\pi - \alpha) = -\sec\alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc\alpha$
$\csc(\alpha + k2\pi) = \csc\alpha$	$\csc(\pi - \alpha) = \csc\alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\alpha$

tegengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan\alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc\alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = -\csc\alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec\alpha$

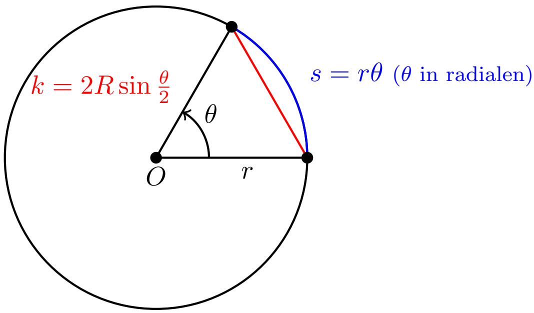
5.4 Belangrijke goniometrische waarden

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
60°	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

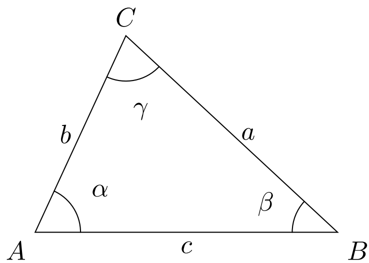
5.5 Radiaal



5.6 Goniometrische formules

Sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Cosinusregel: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$



$Som -\ en\ verschilformules$	$Verdubbelingsformules$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $(hetero's)$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ $(homo's)$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $= 1 - 2\sin^2\alpha$ $(*)$ $= 2\cos^2\alpha - 1$ $(**)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $(*)$	Verdubbelingsformules $f(\tan\alpha)$	$t - formules,\quad \tan\dfrac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ $(**)$	$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$	$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
$Halveringsformules$	$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$	$\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	$\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$
$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$		

	Omgekeerde formules van Simpson
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

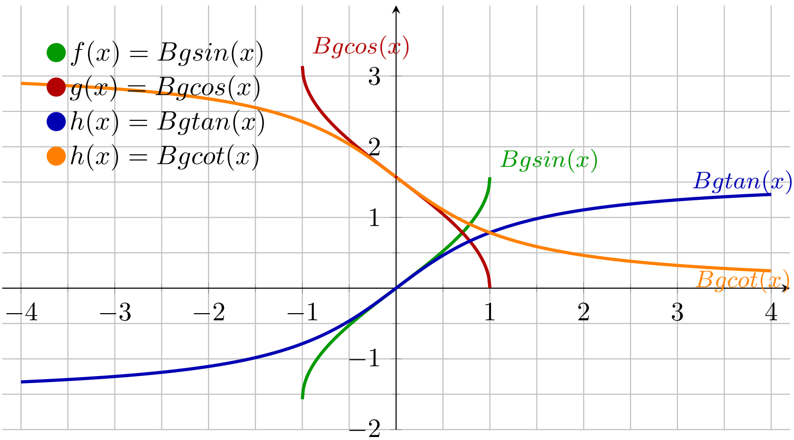
Formules van Simpson	
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$

5.7 Cyclometrische formules

$$y = Bgsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad \text{met } y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \ x \in [-1,1]$$
$$y = Bgcos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad \text{met } y \in [0,\pi], \ x \in [-1,1]$$
$$y = Bgtan x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad \text{met } y \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \ x \in \mathbb{R}$$
$$y = Bgcot x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad \text{met } y \in \left]0,\pi\right[, \ x \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \quad Bgcot(a) = Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : \quad Bgcot(a) = \pi + Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$



$\sin\big(Bgsin(x)\big) = x, \ x \in [-1,1]$ $\cos\big(Bgcos(x)\big) = x, \ x \in [-1,1]$ $\tan\big(Bgtan(x)\big) = x, \ x \in \mathbb{R}$ $\cot\big(Bgcot(x)\big) = x, \ x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(\sin(x)) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $Bgcos(\cos(x)) = x, 0 \leq x \leq \pi$ $Bgtan(\tan(x)) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $Bgcot(\cot(x)) = x, 0 < x < \pi$
$\cos(bgsin(x)) = \sqrt{1-x^2}, \ x \in [-1,1]$ $\sin(bgcos(x)) = \sqrt{1-x^2}, \ x \in [-1,1]$ $\cot(bgtan(x)) = \frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\tan(bgcot(x)) = \frac{1}{x}, \ \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\cos\big(Bgtan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R}$ $\sin\big(Bgtan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \ x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(-x) = -Bgsin(x), \ x \in [-1,1]$ $Bgcos(-x) = \pi - Bgcos(x), \ x \in [-1,1]$ $Bgsin(x) + Bgcos(x) = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1,1]$ $Bgcot(x) + Bgtan(x) = \frac{\pi}{2}, \ x \in \mathbb{R}$

6 Exponentiële en logaritmische functies

$${}^a\log x = y \Leftrightarrow x = a^y, \ (x > 0, a > 0, a \neq 1\ )$$

$${}^a\log a^y = y \ \Leftrightarrow x = a^{{}^a\log x}$$

$${}^a\log(x_1 x_2) = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2$$

$${}^a\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2$$

$${}^a\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\,{}^a\log x$$

$${}^a\log(x^n) = n\,{}^a\log x$$

$${}^b\log x = \frac{{}^a\log x}{{}^a\log b}$$

$${}^b\log a = \frac{1}{{}^a\log b}$$

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

$$e \approx 2{,}718\ldots$$

$$\text{(L'Hôpital)}\ \left(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$$

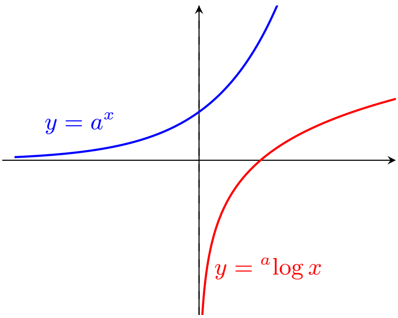
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18++\frac{\cdots}{\cdots}}}}}}$$

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+}}}}}}}}}$$

$a > 1$



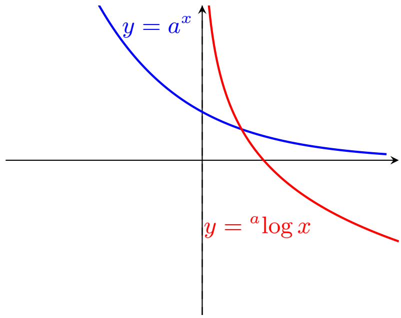
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} {}^a\log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} {}^a\log x = +\infty$$

$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} {}^a\log x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} {}^a\log x = -\infty$$

7 Matrices

7.1 Symbolen

A	matrix A
a_{ij}	het element op rij i en in kolom j
A_{ij}	cofactor van het element op rij i en in kolom j
I	de eenheidsmatrix
A^{-1}	de inverse matrix
A^T	de getransponeerde matrix
$\det A$	determinant van de vierkante matrix A

7.2 Rekenregels

Opgelet: onderstaande regels gelden enkel onder de juiste voorwaarden.

$A + B = B + A$	commutativiteit van de optelling
$A + (B + C) = (A + B) + C$	associativiteit van de optelling
$A \cdot I = A = I \cdot A$	eenheidsmatrix
$A(BC) = (AB)C$	associativiteit van de vermenigvuldiging
$A(B + C) = AB + AC$	linker distributiviteit
$(B + C)A = BA + CA$	rechter distributiviteit
$AB \neq BA$	niet-commutatief in het algemeen
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(cA)^T = cA^T$	
$(AC)^T = C^T A^T$	
$(A^T)^T = A$	
$I^T = I$	
$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$	
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	
$B = C \;\Rightarrow\; AB = AC \text{ en } BA = CA$	A regulier

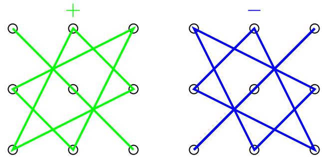
7.3 Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

8 Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}}$$



9 Stelsels oplossen

9.1 Rang van een matrix

$\text{rang}(A) =$ het aantal lineair onafhankelijke rijen van A

1. Breng de matrix in **gereduceerde rij-echelonvorm** **(RREF=Reduced Row-Echelon Form).**

2. Het aantal niet-nulrijen in deze trapvorm is de rang van A.

9.2 n vergelijkingen met n onbekenden, $|A| \neq 0$ (Cramer)

Voor $AX = B$ met $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en $\det(A) \neq 0$ geldt

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

waar A_j ontstaat uit A door de j-de kolom te vervangen door de vector B.

9.3 Homogene 2×3-stelsels

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned}$$

Indien $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$, dan is de oplossingenverzameling

$$V = \{\, \lambda \cdot (\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix},\ -\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix},\ \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}.$$

9.4 $n + 1$ vergelijkingen met n onbekenden

Een stelsel van de vorm

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

heeft één oplossing $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

10 Meetkunde

Afstand 2 punten	$\lvert P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\lvert P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)\rvert =$ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
Midden v/e lijnstuk	$co(M)=(\frac{(x_1+x_2)}{2},\frac{(y_1+y_2)}{2})$
Zwaartepunt v/e driehoek	$co(Z)=(\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3},\frac{(y_1+y_2+y_3)}{3})$

Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y-y_1=m(x-x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr snijpunt met x-as (r,0) en y-as (0,s)	$\frac{x}{r}+\frac{y}{s}=1$
Hoek tussen twee rechten a,b met rico m1,m2	$\cos(\widehat{ab})=\frac{\lvert 1+m_1m_2\rvert}{\sqrt{1+m_1{}^2}\sqrt{1+m_2{}^2}}$
Afstand tussen rechte a ↔ ux+vy+w=0 en P(x1,y1)	$d(P,a)=\frac{\lvert ux_1+vy_1+w\rvert}{\sqrt{u^2+v^2}}$

10.1 De cirkel

Cartesiaanse vergelijking	$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$
Algemene vergelijking	$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad \wedge \quad a^2+b^2-c\geq 0$
Parameter vergelijking	$\begin{cases} x = x_M + r.\cos t \\ y = y_M + r.\sin t \end{cases} \qquad met\ t \in [0,2\pi[$

10.2 De parabool

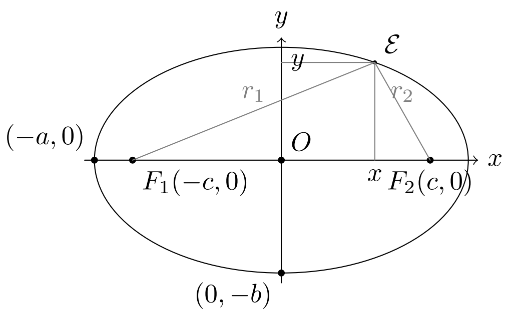
Top vergelijking	$y^2=2px$
Parameter vergelijking	$x=2p\lambda^2 \qquad met\ \lambda\in\mathbb{R}$ $y=2p\lambda$

10.3 De ellips

$Cartesiaansevgl.:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b^2}^2=1$

$Parametervgl.:$

$$\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\sin t \end{cases} \qquad met\ t\in[0,2\pi[$$

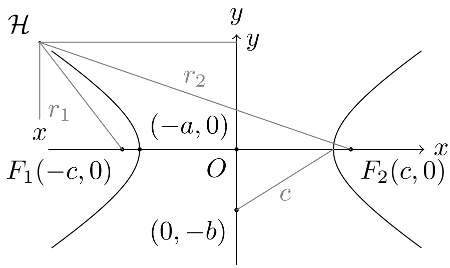


10.4 De hyperbool

$Cartesiaansevgl. : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2}^2 = 1$

$Parametervgl. :$

$$\begin{cases} x = a.\sec t \\ y = b.\tan t \end{cases} \quad met\ t \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$



10.5 Oppervlakte Formules

Vorm	**Formule**	**Variabelen**
Vierkant	$A = s^2$	s: zijlengte
Rechthoek	$A = l.w$	l: lengte, w: breedte
Driehoek	$A = \frac{1}{2}b.h$	b: basis, h: hoogte
Cirkel	$A = \pi r^2$	r: straal
Parallellogram	$A = b.h$	b: basis, h: hoogte
Trapezium	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$	b_1, b_2: bases, h: hoogte
Ellips	$A = \pi a.b$	a, b: halve grote en halve kleine as
Regelmatig Veelhoek	$A = \frac{1}{2}P.a$	P: omtrek, a: apothema

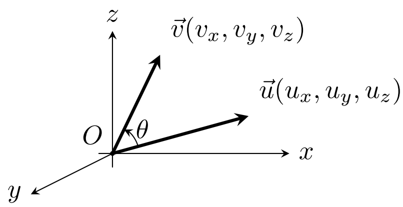
10.6 Volume Formules

Vorm	**Formule**	**Variabelen**
Kubus	$V = s^3$	s: zijlengte
Rechthoekig Prisma	$V = l \times w \times h$	l: lengte, w: breedte, h: hoogte
Bol	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	r: straal
Cilinder	$V = \pi r^2 h$	r: straal, h: hoogte
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	r: straal, h: hoogte
Piramide	$V = \frac{1}{3}B \times h$	B: basisoppervlakte, h: hoogte
Ellipsoïde	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	a, b, c: halve hoofdaslengtes
Prisma	$V = B \times h$	B: basisoppervlakte, h: hoogte

11 Ruimte meetkunde

11.1 Vectoren

11.1.1 Inwendige product (inproduct,scalaire product)



$$\vec{u} \cdot \vec{v} \;=\; \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta \;=\; u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

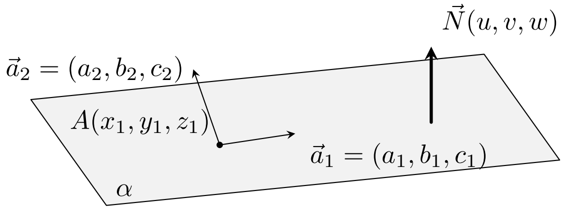
11.1.2 Vectorieel product van vectoren (kruisproduct)

$$\vec{u}\times\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \left(u_y v_z - u_z v_y,\; u_z v_x - u_x v_z,\; u_x v_y - u_y v_x\right) = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

11.2 Rechte

$e \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	$e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

11.3 Vlak



$\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$	$normaal \leftrightarrow \vec{N}(u,v,w)$

11.3.1 Snijlijn 2 vlakken

$\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$	$d \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases}$

11.3.2 Vlakkenwaaier van 2 vlakken

$$\boxed{k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + m(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0 \quad (k, m \in \mathbb{R})}$$

11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte

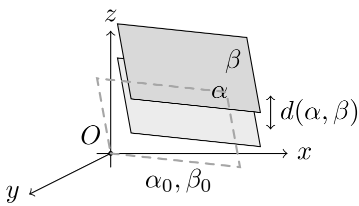
$e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w}$	$\alpha \leftrightarrow a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

11.3.4 Relatie tussen twee vlakken α, β in $\mathbb{R}^3$

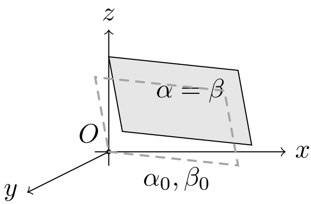
$$\alpha:\ u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \qquad \beta:\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$$

$$\alpha_0:\ u_1x + v_1y + w_1z = 0 \qquad \beta_0:\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \qquad \text{(vlakken door } O\text{)}$$

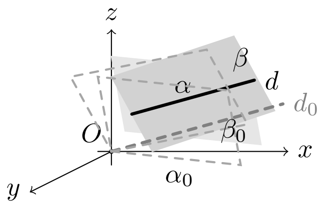
Evenwijdig, niet samenvallend



Samenvallend



Snijdend (lijn)



$$\alpha_0 \cap \beta_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|c} u_1 & v_1 & w_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & \vdots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{array} \end{array}$$

$$\alpha \cap \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc|c} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 & \vdots \end{array}\right] & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \end{array}$$

RREF($\alpha_0 \cap \beta_0$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u_0 & v_0 & w_0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

RREF($\alpha_0 \cap \beta_0$)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u' & v' & w' & \vdots \\ 0 & v" & w" & \vdots \end{array}\right] \Rightarrow \alpha_0 \cap \beta_0 = d_0$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{array}\right] \Rightarrow \alpha = \beta$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t'' & \vdots \end{array}\right] \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & t'' & \vdots \end{array}\right] \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$

11.4 Bol

Bol met middelpunt $M(x_M, y_M, z_M)$ *en straal* $= r$

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$
$$\wedge \quad a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\text{M}(-a, -b, -c) \quad \text{en} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

11.5 Basis reële functies

Functie	**Definitie**
Identiteitsfunctie	$f(x) = x$
Constante functie	$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$
Lineaire functie	$f(x) = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$
Kwadratische functie	$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
Cubische functie	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
Polynoomfunctie	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$
Rationale functie	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ P(x), Q(x)$ zijn polynomen, $Q(x) \neq 0$
Exponentiële functie	$f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$
Logaritmische functie	$f(x) = \log_a(x),\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
Absolute-waarde functie	$f(x) = \|x\| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Goniometrische functies	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Inverse goniometrische functies	$f(x) = \arcsin(x),\ x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arccos(x),\ x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$
Hyperbolische functies	$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},\ x \in \mathbb{R}$
Stukjesfunctie	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

12 Analyse

12.1 Limieten van rijen)

$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0\right) = \lim\limits_{n\to\pm\infty} a_m n^m$
$\lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{\left(a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0\right)}{\left(b_q n^p + b_{q-1}n^{p-1} + ... + b_1 n + b_0\right)} = \lim\limits_{n\to\pm\infty}\frac{a_m n^m}{b_q n^p}$

12.2 Limieten van functies

$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) . g(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n \qquad (n \in {}_0)$
$\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

12.3 Limieten van goniometrische functies

$\lim\limits_{x\to a}\sin(x) = \sin(a)$ $\lim\limits_{x\to a}\cos(x) = \cos(a)$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$

12.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies

Veeltermfunctie : $\lim_{x\to a} f(x)$ = Eindige a limiet = functiewaarde
Oneindige a limiet = limiet van de hoogstegraadsterm

Gebroken rationale functie :
Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
geval $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
geval $\frac{0}{0}$	deel teller en noemer door $(x-a)$, bereken de limiet van de bekomen functie

Oneindige a

limiet = limiet van quotiënt hoogste graadstermen

Irrationale functie :
Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{0}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm, deel teller en noemer door $(x-a)$, bereken de limiet van de bekomen functie
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Oneindige a

$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ en $f(\pm\infty)$ is te berekenen	limiet = resultaat berekening
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\frac{\infty}{\infty}$	zet in de teller en de noemer de hoogste macht van x voorop, vereenvoudig en bereken de limiet van de bekomen functie
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\infty - \infty$	herleid tot het vorige geval door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Regel l'Hôptal:

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \;\vee\; \pm\infty$ $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Bewerkingen met oneindig en onbepaalde vormen:

Bewerkingen	**Geen betekenis**
$x + (-\infty) = -\infty + x = (-\infty) + x$	$(+\infty) + (-\infty)$
$x + (+\infty) = +\infty + x = (+\infty) + x$	$(-\infty) + (+\infty)$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ als $x > 0$	$0 \cdot (+\infty), (+\infty) \cdot 0$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$ als $x < 0$	$0 \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot 0$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ als $x > 0$	$\frac{1}{0}$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ als $x < 0$	$1^{+\infty}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	0^0
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	
$(+\infty)^n = +\infty$ als n even is	
$(-\infty)^n = -\infty$ als n oneven is	
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$	
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	
$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ als n oneven is	

12.5 Afgeleiden

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$$

$$g(x) = u, \qquad D_x[f(g(x))] = D_x[f(u)] = \frac{d[f(u)]}{dx} = \frac{d[f(u)]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = D_u[f(u)] \cdot D_x[u]$$

12.5.1 Afgeleiden - differentialen

$Dc = 0,\ D(cf) = cDf$	$df = 0$
$D(f \pm g) = Df \pm Dg$	$d(f \pm g) = df \pm dg$
$D(fg) = fDg + gDf$	$d(fg) = f\,dg + g\,df$
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$	$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
$D(x^n) = nx^{n-1}$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$
$D(\sin x) = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x\,dx$
$D(\cos x) = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x\,dx$
$D(\tan x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \sec^2 x\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$D(\cot x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x\,dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$
$D(\sinh x) = \cosh x$	$d(\sinh x) = \cosh x\,dx$
$D(\cosh x) = \sinh x$	$d(\cosh x) = \sinh x\,dx$
$D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$d(\tanh x) = \frac{dx}{\cosh^2 x}$
$D(e^x) = e^x,\ D(a^x) = a^x \ln a$	$d(e^x) = e^x\,dx,\ d(a^x) = a^x \ln a\,dx$
$D(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad D(\ln\lvert x\rvert) = \frac{1}{x}$	$d(\ln\lvert x\rvert) = \frac{dx}{x}$
$D({}^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$	$d({}^a\log x) = \frac{dx}{x \ln a}$
$D\left(\ln\lvert x + \sqrt{x^2+k}\rvert\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$d\left(\ln\lvert x + \sqrt{x^2+k}\rvert\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$
$D(u^v) = vu^{v-1}Du + u^v \ln u\,Dv$	$d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u\,dv$

12.6 Afgeleiden - fundamentele integralen

Bg = arc

Afgeleiden	**Integraal**
$D[c] = 0$	$\int dx = x + C$
$D[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$D[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$D[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$D[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
$D[\cot x] = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$D[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$D[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \|x\| + C$
$D\left[\ln \left\|x + \sqrt{x^2+k}\right\|\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left\|x + \sqrt{x^2+k}\right\| + C$
$D^a \log x = \frac{1}{x \ln a}$	*

12.7 Partiële integratie

$$\int f(x)\, d(g(x)) = f(x).g(x) - \int g(x)\, d(f(x))$$

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

12.8 Integralen

12.8.1 Formules voor goniometrische integralen

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

<table>
<tr><td rowspan="2">m ∨ n oneven
substitutie
$t = \sin x \ \vee \ \cos x$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$</td><td colspan="2">$m \ \wedge \ n$ even</td></tr>
<tr><td>$m \ \wedge \ n$ positief
$\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$
$\cos^2 \alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$</td><td>$m \ \vee \ n$ negatief
$\dfrac{dx}{\cos x} = d(\tan x) \quad \vee \quad \dfrac{dx}{\sin x} = -\, d(\cot x)$
eventueel
$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \ 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$</td></tr>
</table>

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x} \qquad \wedge \ \sin x = t \qquad \int \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \xrightarrow{P.I} \cdots \xrightarrow{\text{terugkeer v/d integrand}} \cdots$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c \quad , \quad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \tan^n x \, dx \ , \ \int \cot^n x \, dx \quad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha \ , \qquad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\sin\big(mx - nx\big) + \sin\big(mx + nx\big)\big]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\cos\big(mx - nx\big) + \cos\big(mx + nx\big)\big]$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \tfrac{1}{2}\big[\cos\big(mx - nx\big) - \cos\big(mx + nx\big)\big]$$

Integralen van rationale functies van cosinus en sinus

$$t = \tan\frac{x}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x}{2} = \operatorname{Bgtan} t \ \Rightarrow \ x = 2 \ \operatorname{Bgtan} t \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1 + t^2}}$$

$$\text{Stel: } 2\alpha = x \text{ en } \tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} \\[2ex] \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \\[2ex] \cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \tan x = \dfrac{2t}{1 - t^2}, \\[2ex] \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2}, \\[2ex] \cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{cases}}$$

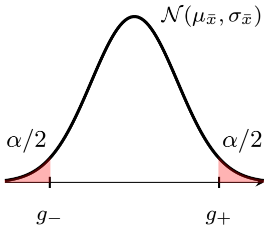
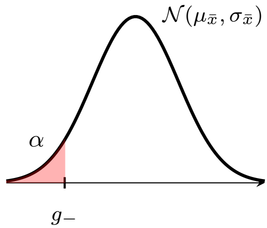
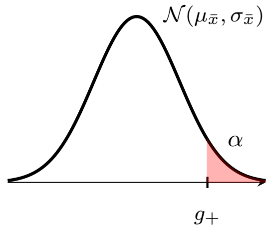
Integralen van een rationale functie $f(\tan x)$ omvormen naar $f(t)$

$$t = \tan x \ \Rightarrow \ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)\, dx \ \Rightarrow \ dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

13 Statistiek

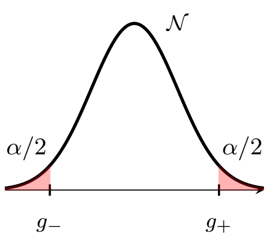
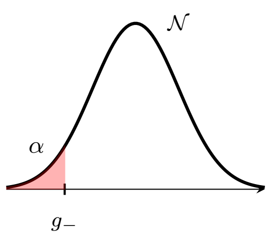
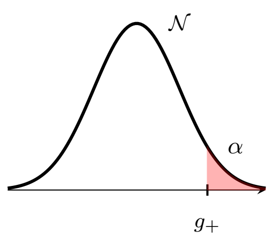
13.1 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling

Dit is een test van een steekproefgemiddelde $\bar{x}$ volgens steekproefgemiddeldeverdeling $X \approx \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ in de populatie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Gebruikmakend van significantieniveau α.

Twee-zijdige test	**Links-zijdige test**	**Rechts-zijdige test**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
		
$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_- \;\vee\; \bar{x} \geq g_+$	$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_-$	$H_A : z_{\bar{x}} \geq g_+$

13.2 Test van een hypothese over een populatieproportie

Dit is een test op een populatieproportie $\hat{p}$ volgens een binomiaalverdeling $X \approx \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{n}.\sqrt{p(1-p)})$. Gebruikmakend van significantieniveau α.

Twee-zijdige test	**Links-zijdige test**	**Rechts-zijdige test**
$H_0 : p = p_0$ $H_A : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p > p_0$
		
$H_A : \hat{p} \leq g_- \;\vee\; \hat{p} \geq g_+$	$H_A : \hat{p} \leq g_-$	$H_A : \hat{p} \geq g_+$

13.3 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde

Twee-zijdige toets	**Links éénzijdige toets**	**Rechts éénzijdige toets**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
Als $\bar{x} < \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \bar{x})$ Als $\bar{x} > \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \bar{x})$	$P = P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \geq \bar{x})$
$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$

13.4 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde

Twee-zijdige toets	**Linkszijdige toets**	**Rechtszijdige toets**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
Als $\hat{p} < p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \hat{p})$ Als $\hat{p} > p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \hat{p})$	$P = P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \geq \hat{p})$
Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$

14 Diversen

14.1 Wiskundige Symbolen (ISO 31/XI)

$x \in A$	is een element van de verzameling
$x \notin A$	is geen element van de verzameling
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	de verzameling door opsomming
$\{x \in A \mid p(x)\}$	de verzameling waar de elementen voldoen aan de eigenschap $p(x)$
$\emptyset$	de lege verzameling
$\mathbb{N}$	de natuurlijke getallen $(0, 1, 2, \dots)$
$\mathbb{Z}$	de gehele getallen $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
$\mathbb{Q}$	de rationale getallen (breuken van $\mathbb{Z}$)
$\mathbb{R}$	de reële getallen
$\mathbb{C}$	de complexe getallen
$B \subseteq A$	B behoort tot A (kan er mee samenvallen)
$B \subset A$	B behoort strikt tot A
$A \cup B$	samenvoeging van A en B (unie)
$A \cap B$	doorsnede van A en B (de gemeenschappelijke elementen)
$A \setminus B$	A verschilt B, wat tot A behoort en niet tot B
$\mathcal{C}_U A$	het complement van A in het universum U
(a, b)	het geordend paar
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	een geordend n-tal
$A \times B$	de productverzameling van A en B
$\#$	rangnummer of aantal

14.2 Logische symbolen

$p \wedge q$	conjunctie, de beweringen p en q zijn geldig
$p \vee q$	disjunctie, de bewering p of q is geldig
$\neg p$	negatie, de bewering p is niet geldig
$p \Rightarrow q$	implicatie, als p dan q
$p \Leftrightarrow q$	equivalentie, de beweringen p en q zijn gelijkwaardig
$\forall x$	universele kwantor, voor alle elementen geldt
$\exists x$	existentiële kwantor, er zijn elementen die voldoen aan

15 Griekse alfabet

$\mathbf{A}$	α	alfa	Δ	δ	delta	Θ	θ	thèta	Λ	λ	lambda
$\mathbf{B}$	β	bèta	$\mathbf{E}$	ε	epsilon	$\mathbf{I}$	ι	iota	$\mathbf{M}$	μ	mu
Γ	γ	gamma	$\mathbf{Z}$	ζ	zèta	$\mathbf{K}$	κ	kappa	$\mathbf{N}$	ν	nu
$\mathbf{O}$	o	omikron	Ξ	ξ	xi	Π	π	pi	$\mathbf{P}$	ρ	rho
Σ	σ	sigma	$\mathbf{T}$	τ	tau	Υ	υ	ypsilon	Φ	ϕ	phi
$\mathbf{X}$	χ	chi	Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega	$\mathbf{H}$	η	èta

16 Het aanpakken van problemen

- Maak een tekening, een schets of een schematische voorstelling.
- Probeer met een **getallenvoorbeeld** / trial and error.
- Werk omgekeerd — werk van achter naar voor.
- Gebruik alle gegevens.
- Splits het probleem op in deelproblemen.
- Stel het probleem voor als opgelost.
- Los een (verwant) eenvoudiger probleem op.
- Zoek een patroon.
- Teken een hulplijn.
- Laat tijdelijk één van de voorwaarden vallen.
- Maak een blikwissel.