

# Formularium Wiskunde

Ian Claesen

7 december 2024

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>2</b>
1.1	Volgorde van Bewerking	2
1.2	Absolute Waarde	2
<b>2</b>	<b>Machten en wortels</b>	<b>2</b>
2.1	Machten met Gehele Exponenten	2
2.2	Vierkantswortel in $\mathbb{R}$	2
2.3	N-de machtswortel in $\mathbb{R}$	2
2.4	$\frac{m}{n}$ -de machtswortel in $\mathbb{R}$	3
<b>3</b>	<b>Veeltermen</b>	<b>3</b>
3.1	Vierkantsvergelijking	3
3.2	Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren	3
3.3	Euclidische Deling	4
3.4	Schema van Horner	4
<b>4</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>5</b>
4.1	Rechthoekige coördinaten	5
4.2	Poolcoördinaten	5
<b>5</b>	<b>Goniometrie</b>	<b>6</b>
5.1	De Goniometrische Cirkel	6
5.2	formules uit de goniometrie	6
5.3	Omgekeerde formules van Simpson	8
5.4	Formules van Simpson	8
5.5	Belangrijke goniometrische waarden	9
<b>6</b>	<b>Meetkunde</b>	<b>9</b>
6.1	De Cirkel	9
6.2	De Parabool	9
<b>7</b>	<b>Analyse</b>	<b>9</b>
7.1	Limieten van Functies	9
7.2	Afgeleiden	10
<b>8</b>	<b>Matrices</b>	<b>10</b>
8.1	Rekenregels	10
<b>9</b>	<b>Combinatieleer</b>	<b>10</b>
9.1	Keuzes zonder Herhaling	10
<b>10</b>	<b>Kansrekening</b>	<b>10</b>
10.1	Voorwaardelijke Kans	10
<b>11</b>	<b>Statistiek</b>	<b>10</b>
11.1	Normaalverdeling	10
<b>12</b>	<b>Diversen</b>	<b>10</b>
12.1	Wiskundige Symbolen	10

# 1 Algebra

## 1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

## 1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal  $a$  wordt genoteerd als  $|a|$  en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

# 2 Machten en wortels

## 2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

## 2.2 Vierkantswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} =  a  \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$
---	--

## 2.3 N-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$n \text{ even} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} =  a  \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$ $n \text{ oneven} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
--	--

2.4  $\frac{m}{n}$ -de machtswortel in  $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$
--	---

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm :  $ax^2 + bx + c = 0$  , met  $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ , $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} a^2b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$

### 3.3 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm  $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$  delen door de eerstegraadsveelterm  $x + 2$  met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2$
$-2x^3 - 4x^2 + 0x + 0$	$2x^2$
$-1x^2 - 4x + 5$	
$+1x^2 + 2x + 0$	$-x$
$-2x + 5$	
$2x + 4$	$-2$
$9$	

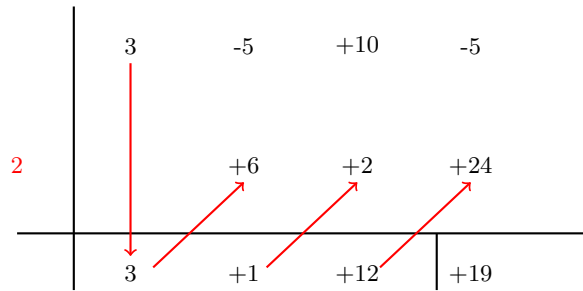
We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 25, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler  $x + 2$ .

### 3.4 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 52)}{(x - 2)}$$



# 4 Complexe getallen

## 4.1 Rechthoekige coördinaten

Bewerking	Formule
Optelling/Aftrekking	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
Vermenigvuldiging	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
Deling	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b) \cdot (c-j.d)}{(c+j.d) \cdot (c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
Toegevoegde van	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
Inverse	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
Wortel	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a + bi} = x + yi \iff (x + yi)^2 = a + bi$
Macht	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
Machten of i	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

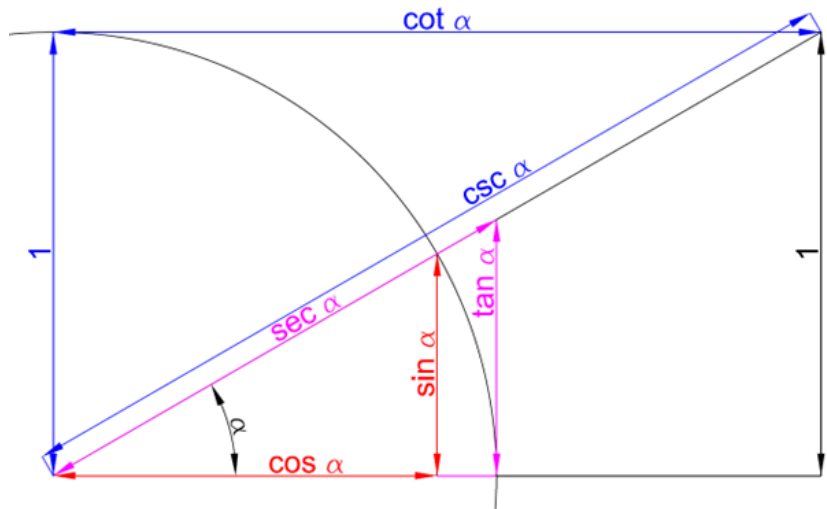
## 4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r (\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

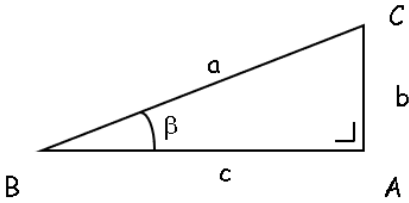
Bewerking	Formule
Vermenigvuldiging	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
Deling	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$
Inverse	$z^{-1} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$
Macht	$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)] \quad n \in \mathbb{N}$
Wortel	$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$
$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \dots, n-1$	

# 5 Goniometrie

## 5.1 De Goniometrische Cirkel



## 5.2 formules uit de goniometrie



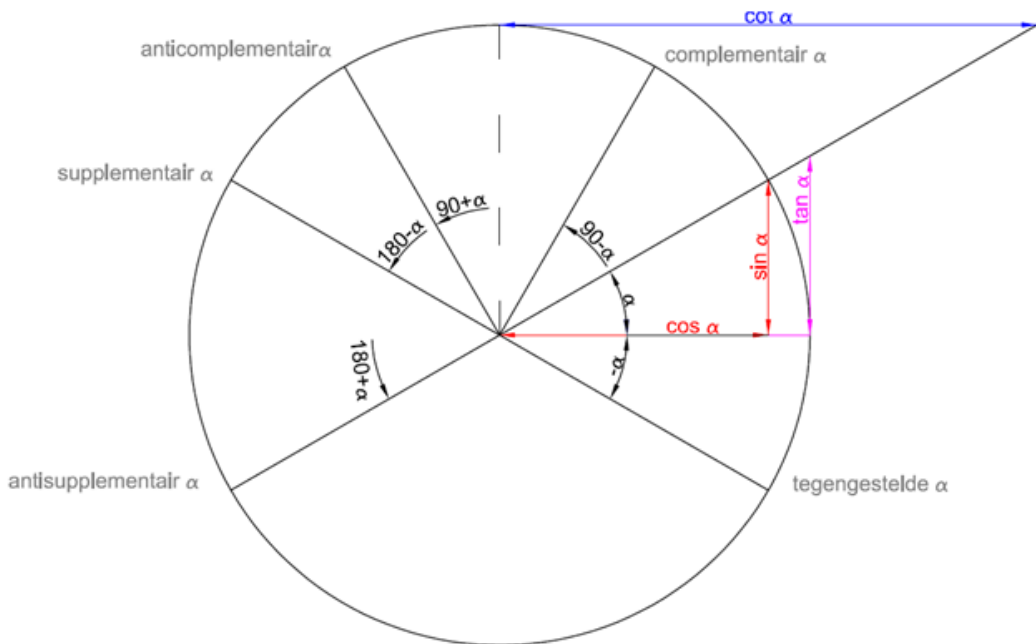
$\text{csc } \beta$	$\text{sec } \beta$	$\text{cot } \beta$	waarin: $\begin{cases} o : \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s : \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a : \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$os$	$as$	$oa$	
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	

$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$
$\text{csc } \beta = \frac{a}{b}$	$\text{sec } \beta = \frac{a}{c}$	$\text{cot } \beta = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$	$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$	

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$



gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sec(\alpha + k2\pi) = \sec \alpha$	$\sec(\pi - \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$
$\csc(\alpha + k2\pi) = \csc \alpha$	$\csc(\pi - \alpha) = \csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$

teggesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec \alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = -\csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec \alpha$

- De sinusregel:

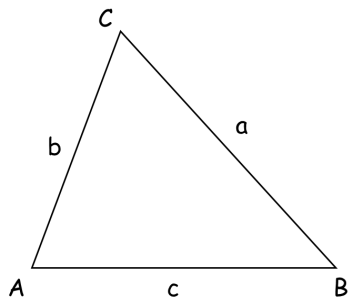
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

- De cosinusregel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $= 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (*)$ $= 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (**)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (*)$	$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2} \quad \wedge \quad \tan \frac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (**)$	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1-t^2}$
$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$		

### 5.3 Omgekeerde formules van Simpson

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

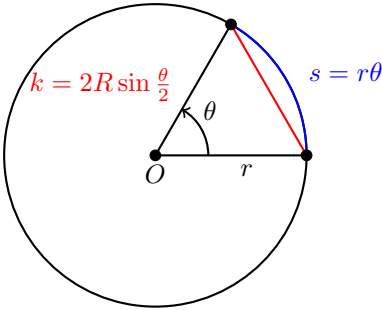
### 5.4 Formules van Simpson

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$



5.5 Belangrijke goniometrische waarden

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



6 Meetkunde

6.1 De Cirkel

De vergelijking van een cirkel met middelpunt  $(a,b)$  en straal  $r$  is:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

6.2 De Parabool

De standaardvergelijking van een parabool met top in de oorsprong is:

$$y = ax^2$$

7 Analyse

7.1 Limieten van Functies

De limiet van een functie  $f(x)$  als  $x$  nadert tot  $a$  wordt genoteerd als:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

7.2 Afgeleiden

De afgeleide van een functie  $f(x)$  wordt gegeven door:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

## 8 Matrices

### 8.1 Rekenregels

Voor matrices  $A$ ,  $B$  en  $C$  gelden de volgende eigenschappen:

- Commutativiteit van optelling:  $A + B = B + A$
- Associativiteit van optelling:  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiviteit:  $A(B + C) = AB + AC$

## 9 Combinatieleer

### 9.1 Keuzes zonder Herhaling

**Variaties:** Geordende keuze van  $p$  elementen uit  $n$  elementen.

**Permutaties:** Het rangschikken van  $n$  verschillende elementen.

## 10 Kansrekening

### 10.1 Voorwaardelijke Kans

De voorwaardelijke kans van  $A$  gegeven  $B$  is:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## 11 Statistiek

### 11.1 Normaalverdeling

De normaalverdeling wordt gegeven door de dichtheidsfunctie:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

## 12 Diversen

### 12.1 Wiskundige Symbolen

- $\in$ : is een element van
- $\forall$ : voor alle
- $\exists$ : er bestaat