

Vademecum-Formularium Wiskunde

Ian Claesen

23 november 2025

Inhoudsopgave

1	Algebra	3
1.1	Volgorde van Bewerking	3
1.2	Absolute Waarde	3
2	Machten en wortels	3
2.1	Machten met Gehele Exponenten	3
2.2	Vierkantswortel in \mathbb{R}	3
2.3	N-de machtswortel in \mathbb{R}	3
2.4	$\frac{m}{n}$ -de machtswortel in \mathbb{R}	4
3	Veeltermen	4
3.1	Vierkantsvergelijking	4
3.2	Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren	4
3.3	Euclidische Deling	5
3.4	Schema van Horner	5
3.5	Deelbaarheid in $\mathbb{R}[x]$	5
4	Complexe getallen	6
4.1	Rechthoekige coördinaten	6
4.2	Poolcoördinaten	6
5	Goniometrie	7
5.1	De Goniometrische Cirkel	7
5.2	formules uit de goniometrie	7
5.3	Verwante hoeken	8
5.4	Belangrijke goniometrische waarden	9
5.5	Radiaal	9
5.6	Goniometrische formules	10
5.7	Cyclometrische formules	11
6	Exponentiële en logaritmische functies	12
7	Matrices	13
7.1	Symbolen	13
7.2	Rekenregels	13
8	Determinanten	14
9	Stelsels oplossen	15
9.1	Rang van een matrix	15
9.2	n vergelijkingen met n onbekenden, $ A \neq 0$ (Cramer)	15
9.3	Homogene 2×3 -stelsels	15
9.4	$n + 1$ vergelijkingen met n onbekenden	15
10	Meetkunde	16
10.1	De cirkel	16
10.2	De parabool	16
10.3	De ellips	16
10.4	De hyperbool	17
10.5	Oppervlakte Formules	17
10.6	Volume Formules	17

11 Ruimte meetkunde	18
11.1 Vectoren	18
11.1.1 Inwendige product (inproduct, scalaire product)	18
11.1.2 Vectorieel product van vectoren (kruisproduct)	18
11.2 Rechte	19
11.3 Vlak	19
11.3.1 Snijlijn 2 vlakken	19
11.3.2 Vlakkenwaaier van 2 vlakken	19
11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte	19
11.3.4 Relatie tussen twee vlakken α, β in \mathbb{R}^3	20
11.4 Bol	21
11.5 Basis reële functies	22
12 Analyse	23
12.1 Limieten	23
12.1.1 Limieten van rijen)	23
12.1.2 Limieten van functies	23
12.1.3 Limieten van goniometrische functies	23
12.1.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies	24
12.2 Afgeleiden	25
12.2.1 Differentiaal	25
12.2.2 Partiële afgeleiden en totale differentiaal	25
12.2.3 Afgeleiden - differentialen	26
12.3 Integralen	27
12.3.1 Afgeleiden - fundamentele integralen	27
12.3.2 Substitutie	27
12.3.3 Partiële integratie	27
12.3.4 Integralen van rationale functies	28
12.3.5 Integralen van irrationale functies	28
12.3.6 Formules voor goniometrische integralen	29
12.3.7 Integralen: inhoud en lengte	30
13 Rijen - Reeksen	31
13.1 Maclaurinreeksen, hyperbolische functies	31
14 Combinatieleer	32
14.1 Keuzes zonder herhaling	32
14.2 Keuzes met herhaling	32
15 Statistiek	33
15.1 Standaardnormale verdeling	34
15.2 Schatters, betrouwbaarheidsintervallen	35
15.3 Regressie	35
15.4 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling	35
15.5 Test van een hypothese over een populatieproportie	35
15.6 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde	36
15.7 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde	36
16 Kans	37
17 Diversen	38
17.1 Wiskundige symbolen (ISO 80000-2)	38
17.1.1 Verzamelingen	38
17.1.2 Logische symbolen	38
17.1.3 Diverse symbolen	38
17.1.4 Bewerkingen	39
17.1.5 Functies & analyse	39
17.1.6 Exponentiële en logaritmische functies	40
17.1.7 Goniometrische en hyperbolische functies	40
17.1.8 Complexe getallen	40
17.2 Griekse alfabet	40
17.3 Eenheden en hun veelvouden	41
17.4 Het aanpakken van problemen	41

1 Algebra

1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal a wordt genoteerd als $|a|$ en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

2 Machten en wortels

2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$ $\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
---	--

2.2 Vierkantswortel in \mathbb{R}

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} = a \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$
---	--

2.3 N-de machtswortel in \mathbb{R}

$n \text{ even} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$ $n \text{ oneven} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
--	--

2.4 $\frac{m}{n}$ -de machtswortel in \mathbb{R}

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
--	--

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm : $ax^2 + bx + c = 0$, met $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^2b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

3.3 Euclidische Deling

$$\frac{V(x)}{D(x)}$$

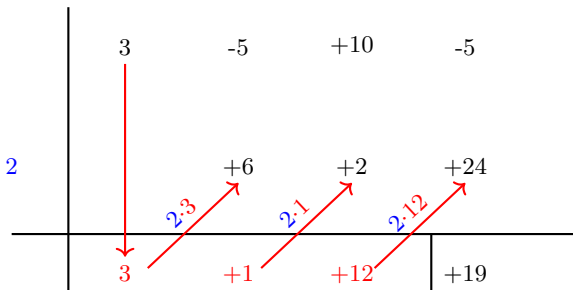
$V(x) \leftarrow 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2 \rightarrow D(x)$
$-(2x^3 + 4x^2 + 0x + 0)$	$2x^2 - \textcolor{red}{x} - \textcolor{blue}{2} \rightarrow Q(x)$
$\textcolor{red}{-1x^2 - 4x + 5}$	
$\textcolor{red}{-(-1x^2 - 2x + 0)}$	$\textcolor{red}{-x}$
$\textcolor{blue}{-2x + 5}$	
$\textcolor{blue}{-(-2x - 4)}$	$\textcolor{blue}{-2}$
$R(x) \leftarrow \textcolor{red}{9}$	

$$\underbrace{2x^3 + 3x^2 - 4x + 5}_{\text{deeltal}} = \underbrace{(2x^2 - x - 2)}_{\text{quotiënt}} \cdot \underbrace{(x + 2)}_{\text{deler}} + \underbrace{9}_{\text{rest}}$$

$$V(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \Rightarrow \deg R(x) < \deg D(x) \quad \deg = \text{graad}$$

3.4 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 5)}{(x - 2)} = 3x^2 + 1x + 12 + \frac{19}{(x - 2)}$$



3.5 Deelbaarheid in $\mathbb{R}[x]$

$V(x), D(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x] : \frac{V(x)}{D(x)} \xrightarrow{\text{Euclid}} (Q(x), R(x))$
$\rightarrow V(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \rightarrow \frac{V(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$
$(x - a) V(x) \Rightarrow V(x) = Q(x) \cdot D(x) \Leftrightarrow R(x) = 0$
$\frac{V(x)}{(x - a)} \Rightarrow V(a) = R(x)$
$x - a \mid a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \Rightarrow a \mid a_0$

4 Complexe getallen

4.1 Rechthoekige coördinaten

Bewerking	Formule
<i>Optelling/Aftrekking</i>	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
<i>Vermenigvuldiging</i>	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
<i>Deling</i>	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b) \cdot (c-j.d)}{(c+j.d) \cdot (c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right) + j \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$
<i>Toegevoegde van</i>	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
<i>Inverse</i>	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a + bi} = x + yi \iff (x + yi)^2 = a + bi$
<i>Macht</i>	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
<i>Machten of i</i>	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

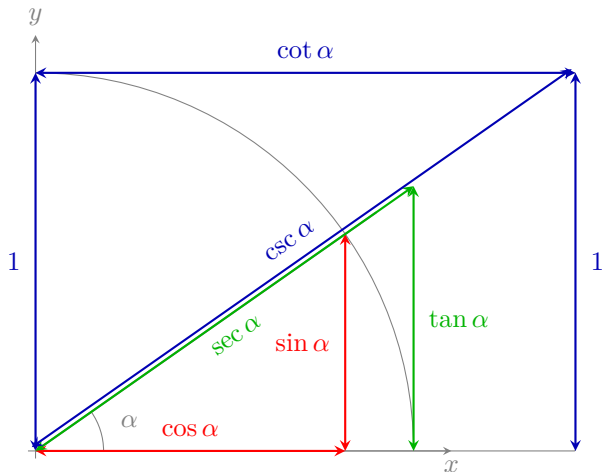
4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r(\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

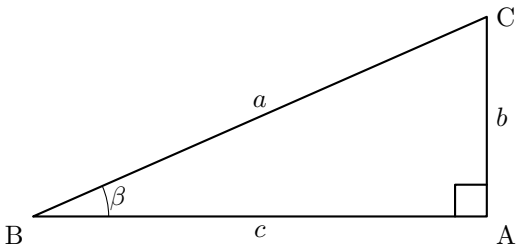
Bewerking	Formule
<i>Vermenigvuldiging</i>	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
<i>Deling</i>	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$
<i>Inverse</i>	$z^{-1} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$
<i>Macht</i>	$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)] \quad n \in \mathbb{N}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \pm \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$
$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \dots, n-1$	

5 Goniometrie

5.1 De Goniometrische Cirkel



5.2 formules uit de goniometrie



$\csc \beta$	$\sec \beta$	$\cot \beta$	waarin: $\begin{cases} o : \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s : \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a : \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$
\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow	
os	as	oa	
\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow	
$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	

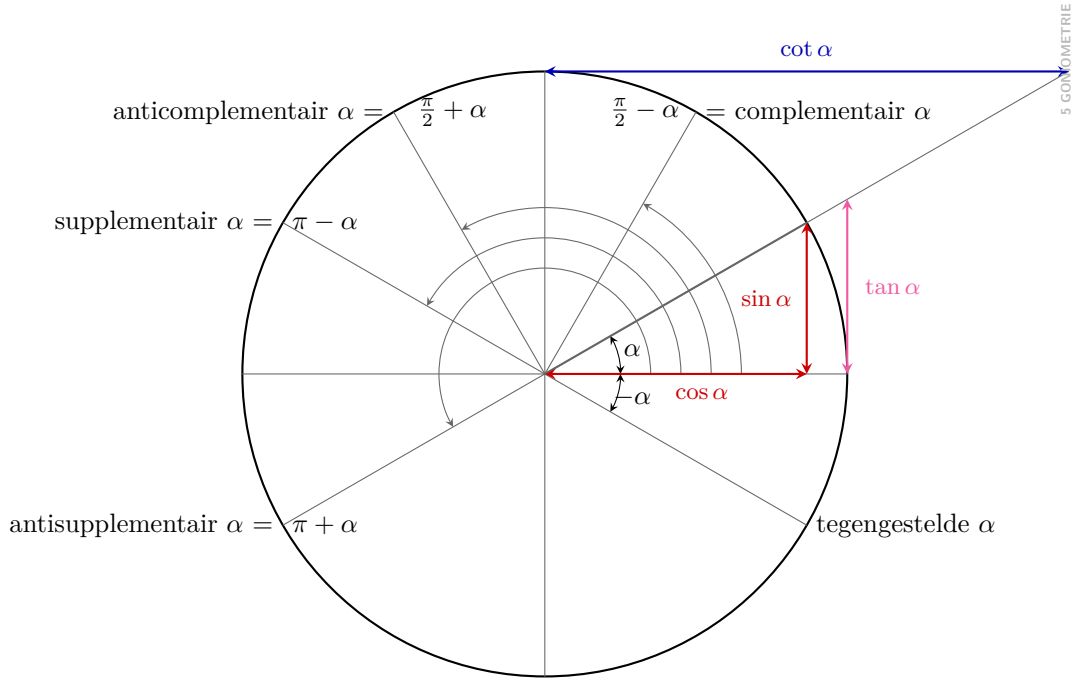
$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$
$\csc \beta = \frac{a}{b}$	$\sec \beta = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$	$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$	

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

5.3 Verwante hoeken

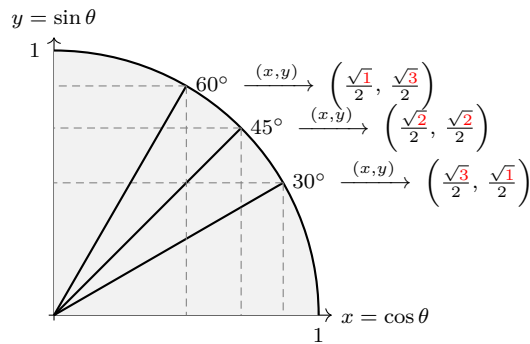


gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin (\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$	$\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos (\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$	$\cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan (\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$	$\tan (\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot (\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$	$\cot (\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sec (\alpha + k2\pi) = \sec \alpha$	$\sec (\pi - \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$
$\csc (\alpha + k2\pi) = \csc \alpha$	$\csc (\pi - \alpha) = \csc \alpha$	$\csc \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$

tegengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin (-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos (-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan (-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan (\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot (-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot (\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\sec (-\alpha) = \sec \alpha$	$\sec (\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$
$\csc (-\alpha) = -\csc \alpha$	$\csc (\pi + \alpha) = -\csc \alpha$	$\csc \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec \alpha$

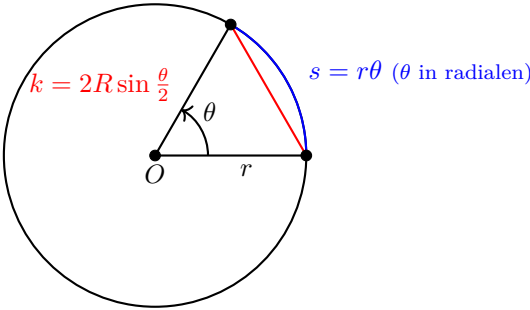
5.4 Belangrijke goniometrische waarden

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



θ	$\cos \theta$	$\sin \theta$
60°	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

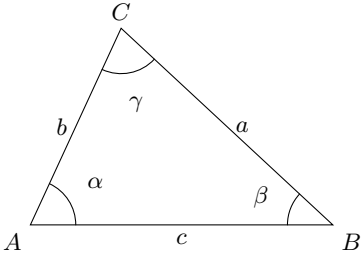
5.5 Radiaal



5.6 Goniometrische formules

Sinusregel: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Cosinusregel: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$



A triangle with vertices A, B, and C. Side BC is labeled 'a', side AC is labeled 'b', and side AB is labeled 'c'. Angle A is labeled 'alpha', angle B is labeled 'beta', and angle C is labeled 'gamma'.

Som – en verschilformules	Verdubbelingsformules
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ (hetero's)	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ (homo's)	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$ (*) $= 2 \cos^2 \alpha - 1$ (**)
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ (*)	Verdubbelingsformules $f(\tan \alpha)$	$t - \text{formules}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ (**)	$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$
Halveringsformules	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$
$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$		

	Omgekeerde formules van Simpson
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

Formules van Simpson	
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

5.7 Cyclometrische formules

$$y = Bgsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad \text{met } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in [-1, 1]$$

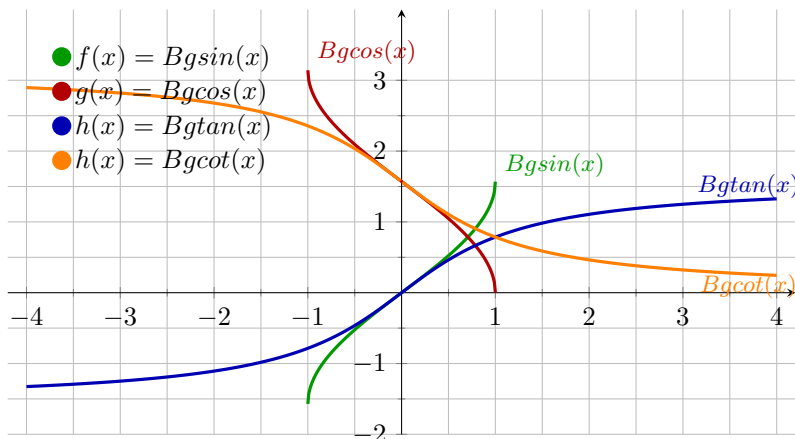
$$y = Bgcos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad \text{met } y \in [0, \pi], \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = Bgtan x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad \text{met } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = Bgcot x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad \text{met } y \in]0, \pi[, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \quad Bgcot(a) = Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : \quad Bgcot(a) = \pi + Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$



$\sin(Bgsin(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$ $\cos(Bgcos(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$ $\tan(Bgtan(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$ $\cot(Bgcot(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(\sin(x)) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $Bgcos(\cos(x)) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$ $Bgtan(\tan(x)) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $Bgcot(\cot(x)) = x, \quad 0 < x < \pi$
$\cos(bgsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$ $\sin(bgcos(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$ $\cot(bgtan(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\tan(bgcot(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\cos(Bgtan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$ $\sin(Bgtan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(-x) = -Bgsin(x), \quad x \in [-1, 1]$ $Bgcos(-x) = \pi - Bgcos(x), \quad x \in [-1, 1]$ $Bgsin(x) + Bgcos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$ $Bgcot(x) + Bgtan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$

6 Exponentiële en logaritmische functies

$${}^a\log x = y \Leftrightarrow x = a^y, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$${}^a\log a^y = y \Leftrightarrow x = a^{{}^a\log x}$$

$${}^a\log(x_1 x_2) = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2$$

$${}^a\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = {}^a\log x_1 - {}^a\log x_2$$

$${}^a\log\left(\frac{1}{x}\right) = -{}^a\log x$$

$${}^a\log(x^n) = n {}^a\log x$$

$${}_b\log x = \frac{{}^a\log x}{{}^a\log b}$$

$${}_b\log a = \frac{1}{{}^a\log b}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$$

$$e \approx 2,718\dots$$

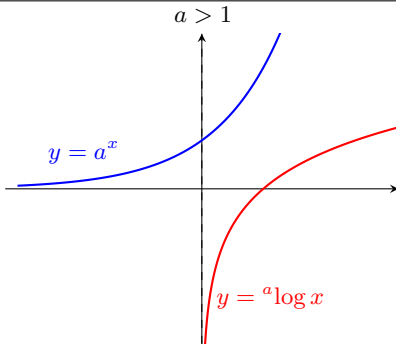
$$(L'Hôpital) \left(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}$$

$$e-1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}}$$

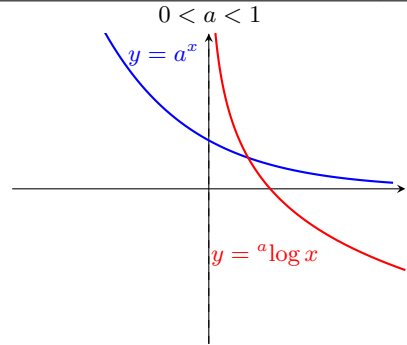


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a\log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a\log x = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a\log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a\log x = -\infty$$

7 Matrices

7.1 Symbolen

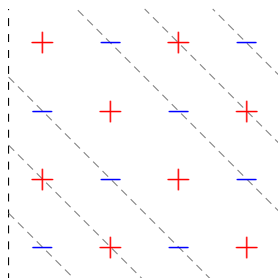
A	matrix A
a_{ij}	het element op rij i en in kolom j
A_{ij}	cofactor van het element op rij i en in kolom j
I	de eenheidsmatrix
A^{-1}	de inverse matrix
A^T	de getransponeerde matrix
$\det A$	determinant van de vierkante matrix A

7.2 Rekenregels

Opgelet: onderstaande regels gelden enkel onder de juiste voorwaarden.

$A + B = B + A$	commutativiteit van de optelling
$A + (B + C) = (A + B) + C$	associativiteit van de optelling
$A \cdot I = A = I \cdot A$	eenheidsmatrix
$A(BC) = (AB)C$	associativiteit van de vermenigvuldiging
$A(B + C) = AB + AC$	linker distributiviteit
$(B + C)A = BA + CA$	rechter distributiviteit
$AB \neq BA$	niet-commutatief in het algemeen
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(cA)^T = cA^T$	
$(AC)^T = C^T A^T$	
$(A^T)^T = A$	
$I^T = I$	
$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$	
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	
$B = C \Rightarrow AB = AC$ en $BA = CA$	A regulier

$(-1)^{i+j} \rightarrow$ **patroon**



$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \rightarrow \text{cofactor } a_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{bmatrix} \dots & \times & \dots \\ \times & a_{ij} & \times \\ \dots & \times & \dots \end{bmatrix}}_{\times \notin |\cdot|}$$

$$\rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

8 Determinanten

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ <div><div><div>+</div><div></div></div><div><div>-</div><div></div></div></div>	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ <div><div><div>+</div><div></div></div><div><div>-</div><div></div></div></div>
--	---

$$laplace : \det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{rj} \cdot A_{rj} \quad A \in {}^{n \times n}$$

Rekenregels determinanten

$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & a_{12} \\ k \cdot a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ k \cdot a & k \cdot b \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & k \cdot a \\ b & k \cdot b \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & j \\ b & e & k \\ c & f & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g+j \\ b & e & h+k \\ c & f & i+l \end{vmatrix} \quad idem \text{ vr. rijen}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+k \cdot a & d+k \cdot b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+k \cdot a \\ c & d+k \cdot c \end{vmatrix}$$

$\det(I_n) = 1$	$\det(A) = \det(A^T)$
-----------------	-----------------------

$\det(A.B) = \det(A) \cdot \det(B)$	$A \cdot \text{adj } A = \text{adj } A \cdot A = \det(A) \, I$
-------------------------------------	--

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \wedge A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . adj A$$

9 Stelsels oplossen

9.1 Rang van een matrix

1. $\text{RREF}(A)$, (RREF=Reduced Row-Echelon Form).
2. Het aantal niet-nulrijen in deze trapvorm is de rang van A .

9.2 n vergelijkingen met n onbekenden, $|A| \neq 0$ (Cramer)

$$A \cdot X = B \implies \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ x_i \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ b_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{\det(A) \neq 0} V = \left\{ \left(\dots, \frac{|A_j|}{|A|}, \dots \right) \right\}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} \dots & (\text{---} \times \text{---} \rightarrow b_{\dots}) & \dots \\ \dots & (\text{---} \times \text{---} \rightarrow b_i) & \dots \\ \dots & (\text{---} \times \text{---} \rightarrow b_{\dots}) & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{vervang de } j\text{-de kolom})$$

9.3 Homogene 2×3 -stelsels

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \wedge \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow V = \left\{ \left(\lambda \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\lambda \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

9.4 $n + 1$ vergelijkingen met n onbekenden

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases} \wedge \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0 \wedge \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow V = \{(x_1, y_1)\}$$

10 Meetkunde

Afstand 2 punten	$ P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $ P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Midden v/e lijnstuk	$co(M) = (\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2})$
Zwaartepunt v/e driehoek	$co(Z) = (\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(y_1+y_2+y_3)}{3})$

Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr snijpunt met x-as (r,0) en y-as (0,s)	$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$
Hoek tussen twee rechten a,b met rico m1,m2	$\cos(\widehat{ab}) = \frac{ 1+m_1m_2 }{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$
Afstand tussen rechte a ↔ ux+vy+w=0 en P(x1,y1)	$d(P, a) = \frac{ ux_1+vy_1+w }{\sqrt{u^2+v^2}}$

10.1 De cirkel

Cartesiaanse vergelijking	$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$
Algemene vergelijking	$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad \wedge \quad a^2 + b^2 - c \geq 0$
Parameter vergelijking	$\begin{cases} x = x_M + r \cdot \cos t \\ y = y_M + r \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$

10.2 De parabool

Top vergelijking	$y^2 = 2px$
Parameter vergelijking	$\begin{matrix} x = 2p\lambda^2 & \text{met } \lambda \in \mathbb{R} \\ y = 2p\lambda \end{matrix}$

10.3 De ellips

Cartesiaansevgl. : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Parametervgl. :
 $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$

10.4 De hyperbool

Cartesiaanse vgl. : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Parametervgl. :

$$\begin{cases} x = a \cdot \sec t \\ y = b \cdot \tan t \end{cases} \quad \text{met } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

10.5 Oppervlakte Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Vierkant	$A = s^2$	s : zijlengte
Rechthoek	$A = l.w$	l : lengte, w : breedte
Driehoek	$A = \frac{1}{2}b.h$	b : basis, h : hoogte
Cirkel	$A = \pi r^2$	r : straal
Parallellogram	$A = b.h$	b : basis, h : hoogte
Trapezium	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$	b_1, b_2 : bases, h : hoogte
Ellips	$A = \pi a.b$	a, b : halve grote en halve kleine as
Regelmatig Veelhoek	$A = \frac{1}{2}P.a$	P : omtrek, a : apothema

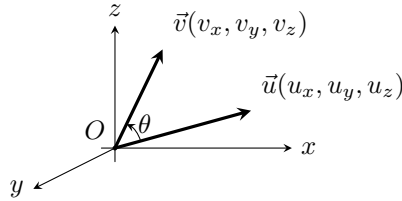
10.6 Volume Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Kubus	$V = s^3$	s : zijlengte
Rechthoekig Prisma	$V = l \times w \times h$	l : lengte, w : breedte, h : hoogte
Bol	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	r : straal
Cilinder	$V = \pi r^2 h$	r : straal, h : hoogte
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	r : straal, h : hoogte
Piramide	$V = \frac{1}{3}B \times h$	B : basisoppervlakte, h : hoogte
Ellipsoïde	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	a, b, c : halve hoofdaslengtes
Prisma	$V = B \times h$	B : basisoppervlakte, h : hoogte

11 Ruimte meetkunde

11.1 Vectoren

11.1.1 Inwendige product (inproduct, scalaire product)



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

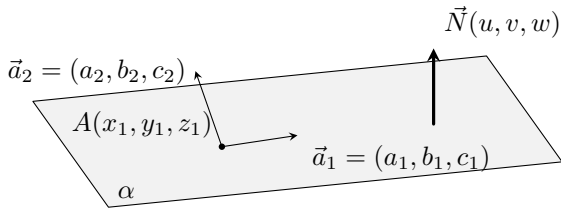
11.1.2 Vectorieel product van vectoren (kruisproduct)

$$\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x) = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

11.2 Rechte

$$e \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

11.3 Vlak



$\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$	$normaal \leftrightarrow \vec{N}(u, v, w)$

11.3.1 Snijlijn 2 vlakken

$$\begin{array}{l|l} \alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 & d \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases} \\ \beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 & \end{array}$$

11.3.2 Vlakkenwaaier van 2 vlakken

$$k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + m(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0 \quad (k, m \in \mathbb{R})$$

11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte

$$e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w} \quad \alpha \leftrightarrow a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$$

11.3.4 Relatie tussen twee vlakken α, β in \mathbb{R}^3

$$\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$$

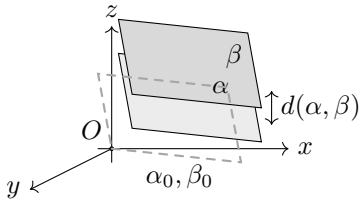
$$\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$$

$$\alpha_0 : u_1x + v_1y + w_1z = 0$$

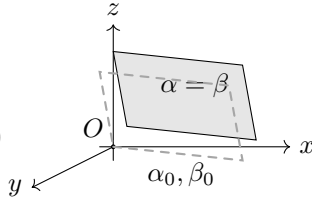
$$\beta_0 : u_2x + v_2y + w_2z = 0$$

(vlakken door O)

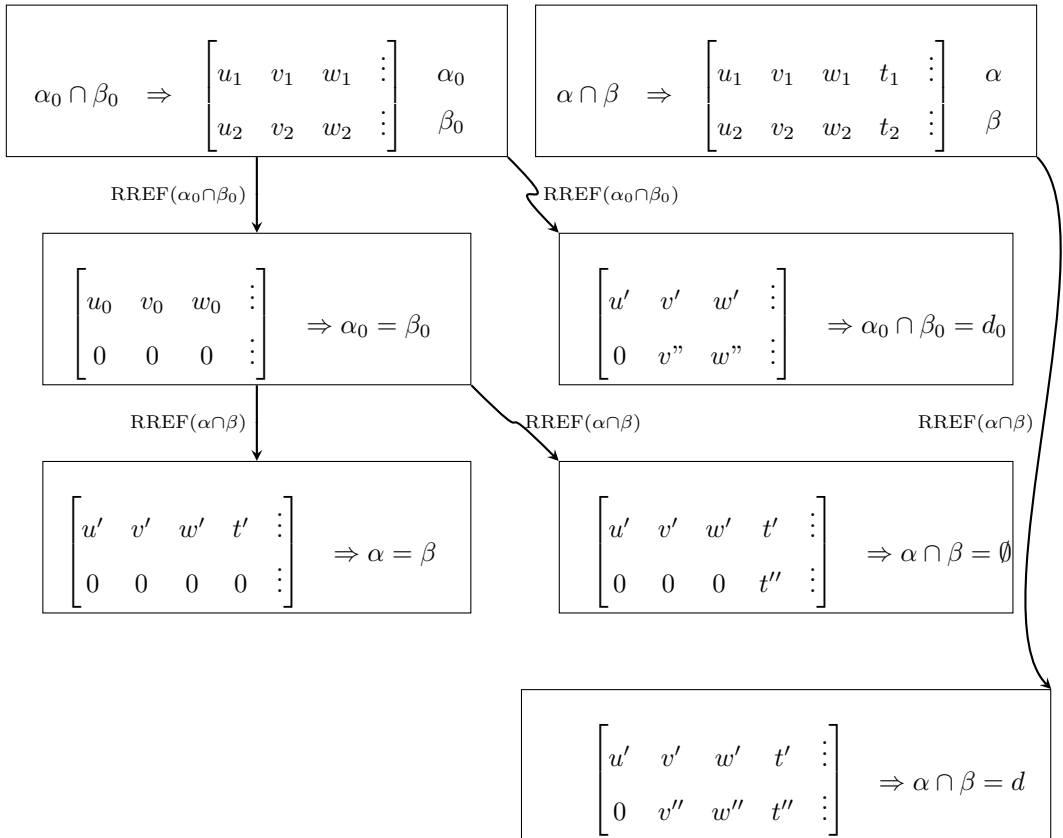
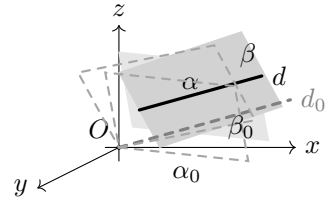
**Evenwijdig, niet
samenvallend**



Samenvallend



Snijdend (lijn)



11.4 Bol

Bol met middelpunt $M(x_M, y_M, z_M)$ en straal $= r$

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

$$\wedge \quad a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$M(-a, -b, -c) \quad \text{en} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

11.5 Basis reële functies

Functie	Definitie
Identiteitsfunctie	$f(x) = x$
Constante functie	$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
Lineaire functie	$f(x) = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$
Kwadratische functie	$f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Cubische functie	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Polynoomfunctie	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$
Rationale functie	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$ zijn polynomen, $Q(x) \neq 0$
Exponentiële functie	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
Logaritmische functie	$f(x) = \log_a(x), a > 0, a \neq 1, x > 0$
Absolute-waarde functie	$f(x) = x = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Goniometrische functies	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x) \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Inverse goniometrische functies	$f(x) = \arcsin(x), x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arccos(x), x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$
Hyperbolische functies	$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, x \in \mathbb{R}$
Stukjesfunctie	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

12 Analyse

12.1 Limieten

12.1.1 Limieten van rijen)

$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_m n^m$
$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)}{(b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0)} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m n^m}{b_q n^q}$

12.1.2 Limieten van functies

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

12.1.3 Limieten van goniometrische functies

$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

12.1.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies

Veeltermfunctie : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ Eindige a limiet = functiewaarde

Oneindige a limiet = limiet van de hoogstegraadsterm

Gebroken rationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
geval $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞ ; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
geval $\frac{0}{0}$	deel teller en noemer door $(x - a)$, bereken de limiet van de bekomen functie

Oneindige a

limiet = limiet van quotiënt hoogste graadstermen

Irrationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞ ; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{0}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm, deel teller en noemer door $(x - a)$, bereken de limiet van de bekomen functie
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Oneindige a

$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ en $f(\pm\infty)$ is te berekenen	limiet = resultaat berekening
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\frac{\infty}{\infty}$	zet in de teller en de noemer de hoogste macht van x voorop, vereenvoudig en bereken de limiet van de bekomen functie
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\infty - \infty$	herleid tot het vorige geval door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Regel l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \vee \quad \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bewerkingen met oneindig en onbepaalde vormen:

Bewerkingen	Geen betekenis
$x + (-\infty) = -\infty + x = (-\infty) + x$	$(+\infty) + (-\infty)$
$x + (+\infty) = +\infty + x = (+\infty) + x$	$(-\infty) + (+\infty)$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ als $x > 0$	$0 \cdot (+\infty), (+\infty) \cdot 0$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$ als $x < 0$	$0 \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot 0$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ als $x > 0$	$\frac{1}{0}$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ als $x < 0$	$1^{+\infty}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	0^0
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	
$(+\infty)^n = +\infty$ als n even is	
$(-\infty)^n = -\infty$ als n oneven is	
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$	
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	
$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ als n oneven is	

12.2 Afgeleiden

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=a}$$

$$g(x) = u, \quad D_x[f(g(x))] = D_x[f(u)] = \frac{d[f(u)]}{dx} = \frac{d[f(u)]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = D_u[f(u)] \cdot D_x[u]$$

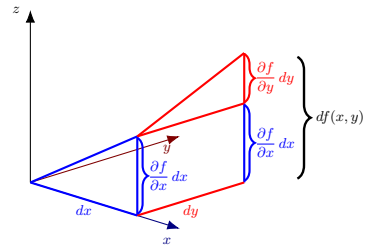
12.2.1 Differentiaal

$$df(x) = Df(x) \cdot dx$$

12.2.2 Partiële afgeleiden en totale differentiaal

$$z = f(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \end{cases}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



$Dc = 0, D(cf) = cDf$	$df = 0$
$D(f \pm g) = Df \pm Dg$	$d(f \pm g) = df \pm dg$
$D(fg) = fDg + gDf$	$d(fg) = f dg + g df$
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$	$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$
$D(x^n) = nx^{n-1}$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$
$D(\sin x) = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
$D(\cos x) = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
$D(\tan x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$D(\cot x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$
$D(\sinh x) = \cosh x$	$d(\sinh x) = \cosh x dx$
$D(\cosh x) = \sinh x$	$d(\cosh x) = \sinh x dx$
$D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$d(\tanh x) = \frac{dx}{\cosh^2 x}$
$D(e^x) = e^x, D(a^x) = a^x \ln a$	$d(e^x) = e^x dx, d(a^x) = a^x \ln a dx$
$D(\ln x) = \frac{1}{x}, D(\ln x) = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$
$D({}^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$	$d({}^a\log x) = \frac{dx}{x \ln a}$
$D(\ln x + \sqrt{x^2 + k}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$	$d(\ln x + \sqrt{x^2 + k}) = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$
$D(u^v) = vu^{v-1}Du + u^v \ln u Dv$	$d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv$

12.3 Integralen

12.3.1 Afgeleiden - fundamentele integralen

Bg = arc

Afgeleiden	Integraal
$D[c] = 0$	$\int dx = x + C$
$D[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$D[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$D[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$D[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$D[\cot x] = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$D[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$D[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$D \left[\ln x + \sqrt{x^2 + k} \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln x + \sqrt{x^2 + k} + C$
$D^a \log x = \frac{1}{x \ln a}$	*

12.3.2 Substitutie

$$u = g(x) \Rightarrow du = g'(x) dx. \quad \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du.$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

12.3.3 Partiële integratie

$$\int f(x) d(g(x)) = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) d(f(x))$$

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

12.3.4 Integralen van rationale functies

<i>Stelling van d'Alembert</i> : $V(x) = \prod_{i=0}^u (a_i x + b_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=0}^v (a'_i x^2 + b'_i x + c'_i)^{n'_i} \rightarrow$ $\wedge \begin{cases} u = (\# a_i x + b_i \text{ factoren van } V(x)), \\ v = (\# a'_i x^2 + b'_i x + c'_i \text{ factoren van } V(x)) \end{cases} \quad \text{met} \quad \begin{cases} b_i'^2 - 4a'_i c'_i < 0, \\ a'_i \neq 0 \end{cases}$	
1) $\int \frac{T(x)}{N(x)} dx$ als $\deg(T) \geq \deg(N) \xrightarrow{\text{euclidische deling}} \frac{T(x)}{N(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{N(x)} \Rightarrow \deg(r) < \deg(N)$	
2) Stelling van Jacobi (opspitsen in partiële breuken): $\frac{r(x)}{N(x)} = \sum_{i=1}^u \left(\frac{c_i}{\underset{(a)}{a_i x + b_i}} + \dots + \frac{c_{n_i}}{\underset{(b)}{(a_i x + b_i)^{n_i}}} \right) + \sum_{i=1}^v \left(\frac{p_i x + q_i}{\underset{(d)}{a'_i x^2 + b'_i x + c'_i}} + \dots + \frac{p_{n_i} x + q_{n_i}}{\underset{(e)}{(a'_i x^2 + b'_i x + c'_i)^{n_i}}} \right)$ $\wedge \begin{cases} u = (\# \neq ax + b \text{ factoren van } N(x)) \\ v = (\# \neq a'x + b'x + c' \text{ factoren van } N(x)) \end{cases} \quad \wedge \text{ met } n \text{ de macht } v/d \text{ u, v factoren}$	
$\int \frac{c}{(ax+b)} dx = \frac{c}{a} \int \frac{1}{(ax+b)} d(ax+b) \quad (a)$	
$\int \frac{c}{(ax+b)^n} dx = \frac{c}{a} \int (ax+b)^{-n} d(ax+b) \quad (b)$	
$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \quad (d)$ $D > 0$ zie (a), $D = 0$ zie (b)	
$D < 0$	
$p = 0 \rightarrow \int \frac{q}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{q}{\underbrace{(ax^2+bx+c')}_{D=0} - \underbrace{c'}_{c''}} dx = q \int \frac{1}{u^2 + c''} dx \quad (c)$	
$p \neq 0$ $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A \cdot (D(ax^2+bx+c)) + B}{ax^2+bx+c} dx$ $\begin{cases} p = A2a \\ q = Ab + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases}$ $= \int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx = A \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx$ <i>zie (c)</i>	
$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ met ICT - software}$	

12.3.5 Integralen van irrationale functies

$\sqrt[n]{ax+b}$ $f(\sqrt[n]{y}, \sqrt[n]{y}, \dots, \sqrt[n]{y}), y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\sqrt{a^2 - u^2}, a > 0$ $\sqrt{u^2 - a^2}, a > 0$ $\sqrt{u^2 + a^2}, a > 0$	$ax+b = t^n, \quad t \geq 0$ $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad m = \text{k.g.v.}(n_1, \dots, n_i)$ $u = a \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $u = a \sec t, \quad t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $u = a \tan t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
---	---

12.3.6 Formules voor goniometrische integralen

$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad m, n \in \mathbb{Z}$		
$m \vee n$ oneven <i>substitutie</i> $t = \sin x \vee \cos x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$m \wedge n$ even	
	$m \wedge n$ positief $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$m \vee n$ negatief $\frac{dx}{\cos x} = d(\tan x) \vee \frac{dx}{\sin x} = -d(\cot x)$ <i>eventueel</i> $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$
$\int \sec x dx = \int \frac{\cos x dx}{\cos x} \quad \wedge \quad \sin x = t \quad \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ $\int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x dx = \int \sec x d(\tan x) \xrightarrow{P.I} \dots \xrightarrow{\text{terugkeer v/d integrand}} \dots$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + c, \quad \int \cot x dx = \ln \sin x + c$ $\int \tan^n x dx, \quad \int \cot^n x dx \quad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$		
$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)]$ $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)]$ $\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)]$		
<i>Integralen van rationale functies van cosinus en sinus</i>		
$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \text{Bgtan } t \Rightarrow x = 2 \text{ Bgtan } t \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$		
$\text{Stel: } 2\alpha = x \text{ en } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \end{array} \right.}$		
Integralen van een rationale functie $f(\tan x)$ omvormen naar $f(t)$		
$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$		

12.3.7 Integralen: inhoud en lengte

Omwenteling rond de x-as

Voor $y = f(x) \geq 0$ op $[a, b]$ is het volume van het omwentelingslichaam (washers-methode):

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

De manteloppervlakte :

$$2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Inhoud bepaald door $S(x)$

Als de doorsnede loodrecht op de x -as op positie x oppervlakte $S(x)$ heeft, dan:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

Lengte van een kromme

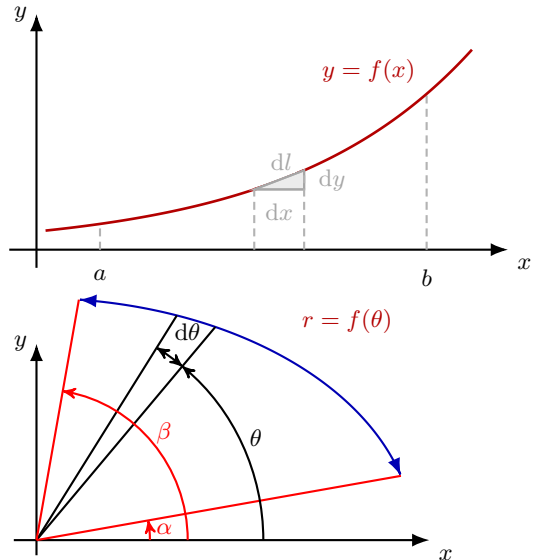
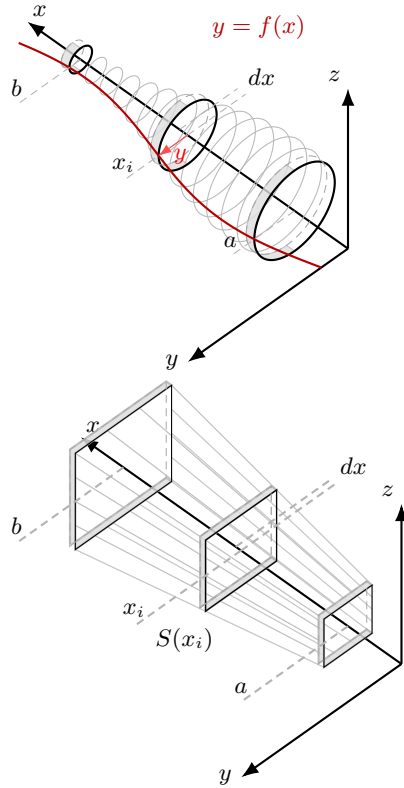
Voor $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, geldt de booglengte:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Polaire booglengte

Voor een kromme $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$



13 Rijen - Reeksen

13.1 Maclaurinreeksen, hyperbolische functies

Maclaurinreeksen:
$$T_n(\sin x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots,$$
$$T_n(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \dots,$$
$$T_n(e^x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

Complexe exponentiële functie:
$$T_n(e^{ix}) = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$
$$= 1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right).$$
$$\Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1) \Rightarrow e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (2)$$

$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$	$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} = i \sin x$	$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Hyperbolische functies:
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

14 Combinatieleer

14.1 Keuzes zonder herhaling

Variaties	Permutaties	Combinaties
geordende keuze (<i>volgorde van belang</i>) van p verschillende elementen uit n elementen	Rangschikken (<i>volgorde van belang</i>) van n verschillende elementen	ongeordende keuze (<i>volgorde van geen belang</i>) van p verschillende elementen uit n elementen
$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$	$C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
<i>Internationale notatie:</i> $V_n^p = {}_n P_p = P(n, p)$	<i>Internationale notatie:</i> $P_n = {}_n P_n = P(n) = n!$	<i>Internationale notatie:</i> $C_n^p = C(n, p) = \binom{n}{p}$

14.2 Keuzes met herhaling

Variaties met herhaling	Permutaties met herhaling	Combinaties met herhaling
geordende keuze (<i>volgorde van belang</i>) van p elementen uit n elementen (<i>herhaling toegestaan</i>)	rangschikken van n elementen waarvan sommige <i>identiek</i> zijn	ongeordende keuze (<i>volgorde van geen belang</i>) van p elementen uit n soorten elementen (<i>herhaling toegestaan</i>)
$\overline{V}_n^p = n^p$	$\overline{P}_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$ met $m_1 + \dots + m_k = n$	$\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! p!}$
<i>Internationale notatie:</i> $\overline{V}_n^p = n^p$	<i>Internationale notatie:</i>	<i>Internationale notatie:</i> $\overline{C}_n^p = {}_n H_p = \binom{n+p-1}{p}$

15 Statistiek

Discrete data: slechts een eindig of telbaar aantal waarden is mogelijk.

Continue data: variabele die tussen twee waarden oneindig # waarden kan aannemen.

Steekproef	Populatie	Normaalverdeling
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$	$N(\mu, \sigma)$

Discrete	Continue
$E[X] = \mu_X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot p_i$ $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_i$ $= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i \right) - \mu_X^2$	$E[X] = \mu_X = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ $\sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu_X)^2 \cdot f(x) dx$ $= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - \mu_X^2$

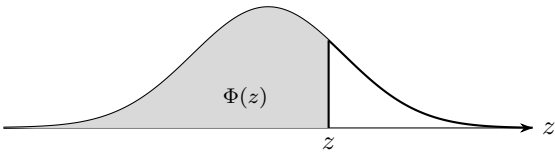
Rekenregels		
$T = X + a$	$T = aX$	$T = aX + bY$
$\mu_T = \mu_X + a$	$\mu_T = a \cdot \mu_X$	$\mu_T = a\mu_X + b\mu_Y$
$\sigma_T = \sigma_X$	$\sigma_T = a \cdot \sigma_X$	$\sigma_T = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2}$

Rekenregels	
$S = X_1 + \dots + X_n$ $\mu_S = E(S) = n\mu_X$ $\sigma_S^2 = n\sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$	$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n}, & \mu_{\bar{X}} &= \frac{1}{n} n\mu_X \\ \sigma_{\bar{X}}^2 &= \frac{1}{n^2} n\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \end{aligned} \right\} CLT \rightarrow \bar{X} \approx N(\mu_{\bar{X}}, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$

Uniforme continue	Uniforme discrete
$\mu = \frac{a+b}{2}$ $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \mu^2$

Bernoulli	Binomiaal
$\mu = p$ $\sigma = \sqrt{p \cdot q}$	$P(X = i) = C_i^n \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ $\left\{ \begin{aligned} n &\geq 20, \\ np &\geq 5 \wedge nq \geq 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

15.1 Standaardnormale verdeling



$\Phi(z) = \Pr(Z \leq z) \quad \text{voor} \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$

De rij geeft het eerste decimaal, de kolomkop het tweede decimaal.

Z-tabel

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

15.2 Schatters, betrouwbaarheidsintervallen

puntschatting	Populatieparameter	Schatter uit de steekproef																
	p (proportie) μ (gemiddelde) σ (standaardafwijking)	\hat{p} \bar{x} of $\hat{\mu}$ s of $\hat{\sigma}$																
$\alpha\%$ - betrouw- baarheids- interval	<table><tr><td>Betrouwbaarheid α</td><td>80%</td><td>90%</td><td>95%</td><td>98%</td><td>99%</td></tr><tr><td>Kritieke waarde z_α</td><td>1,28</td><td>1,65</td><td>1,96</td><td>2,33</td><td>2,58</td></tr></table>						Betrouwbaarheid α	80%	90%	95%	98%	99%	Kritieke waarde z_α	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58
Betrouwbaarheid α	80%	90%	95%	98%	99%													
Kritieke waarde z_α	1,28	1,65	1,96	2,33	2,58													
Intervalschatting proportie	$\mu_{\hat{p}} = p, \quad \sigma_{\hat{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{pq}$		Betrouwbaarheidsinterval: $\hat{p} \pm z_\alpha \cdot \sigma_{\hat{p}}$															
Intervalschatting normaalverde- ling			Betrouwbaarheidsinterval: $\bar{x} \pm z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$															

15.3 Regressie

Regressielijn	$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad y - \bar{y} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}(x - \bar{x})$
Covariantie	$\text{cov}(X, Y) = S_{XY}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Correlatiecoëfficiënt	$r = \frac{S_{XY}^2}{S_X S_Y}$

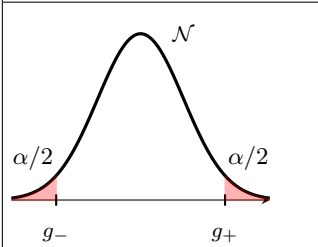
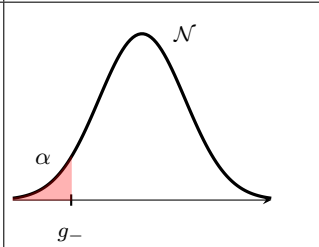
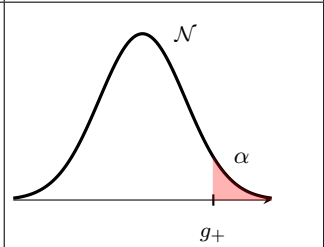
15.4 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling

Dit is een test van een steekproefgemiddelde \bar{x} volgens steekproefgemiddeldeverdeling $X \approx \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ in de populatie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Gebruikmakend van significantieniveau α .

Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_- \vee \bar{x} \geq g_+$	$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_-$	$H_A : z_{\bar{x}} \geq g_+$

15.5 Test van een hypothese over een populatieproportie

Dit is een test op een populatieproportie \hat{p} volgens een binomiaalverdeling $X \approx \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Gebruikmakend van significantieniveau α .

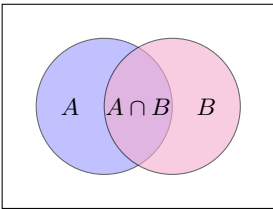
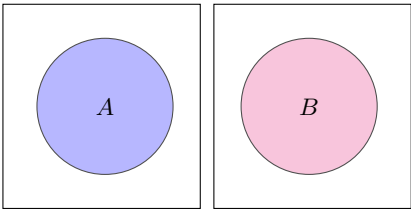
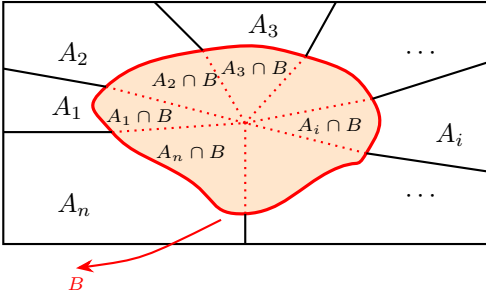
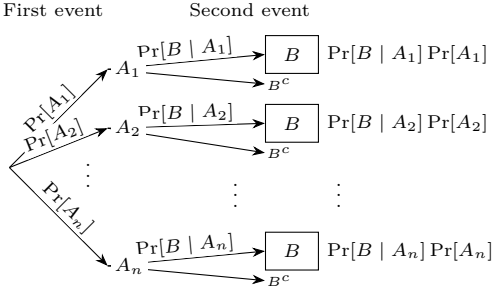
Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : p = p_0$ $H_A : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p > p_0$
		
$H_A : \hat{p} \leq g_- \vee \hat{p} \geq g_+$	$H_A : \hat{p} \leq g_-$	$H_A : \hat{p} \geq g_+$

15.6 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaal-verdeling via de P-waarde

Twee-zijdige toets	Links éénzijdige toets	Rechts éénzijdige toets
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
Als $\bar{x} < \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \bar{x})$ Als $\bar{x} > \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \bar{x})$	$P = P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \geq \bar{x})$
$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$

15.7 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde

Twee-zijdige toets	Linkszijdige toets	Rechtszijdige toets
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
Als $\hat{p} < p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \hat{p})$ Als $\hat{p} > p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \hat{p})$	$P = P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \geq \hat{p})$
Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$

Willekeurige en onafhankelijke gebeurtenissen	
Willekeurig	Onafhankelijk
<div></div> <div>$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B),$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$</div>	<div></div> <div>$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$</div>
Voorwaardelijke kans	
$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$	$P(B \mid A) = \frac{P(B \wedge A)}{P(A)}$
Productwet	
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
Wet van de totale kans	
<div></div>	<div></div>
$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$	
Regel van Bayes	
$P(A_i B) = \frac{P(A_i \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B A_i)}$	

17 Diversen

17.1 Wiskundige symbolen (ISO 80000-2)

17.1.1 Verzamelingen

\in	is een element van de verzameling
\notin	is geen element van de verzameling
$\{a, b, c, \dots\}$	verzameling door opsomming
$\{x \mid p(x)\}$	verzameling van x met eigenschap $p(x)$
\emptyset	de lege verzameling
\mathbb{N}	natuurlijke getallen $(0, 1, 2, \dots)$
\mathbb{Z}	gehele getallen $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
\mathbb{Q}	rationale getallen (breuken van gehele getallen)
\mathbb{R}	reële getallen
\mathbb{C}	complexe getallen
$B \subseteq A$	B is deelverzameling van A (mag samenvallen)
$B \subset A$	B is strikte deelverzameling van A
$A \cup B$	unie van A en B
$A \cap B$	doorsnede van A en B
$A \setminus B$	verschil $A - B$ (in A maar niet in B)
A^c of \bar{A}	complement van A in universum U
(a, b)	geordend paar
(a_1, a_2, \dots, a_n)	geordend n -tal
$A \times B$	cartesisch product van A en B
$\#A$	aantal elementen (cardinaliteit) van A

17.1.2 Logische symbolen

$p \wedge q$	conjunctie: p en q zijn beide waar
$p \vee q$	disjunctie: p of q is waar (of beide)
$\neg p$	negatie: p is niet waar
$p \Rightarrow q$	implicatie: als p , dan q
$p \Leftrightarrow q$	equivalentie: p en q gelijkwaardig
$\forall x$	universele kwantor: voor alle x
$\exists x$	existentiële kwantor: er bestaat (minstens één) x

17.1.3 Diverse symbolen

$a = b$	a is gelijk aan b
$a \neq b$	a is niet gelijk aan b
$a := b$	a is per definitie gelijk aan b
$a \approx b$	a is bij benadering gelijk aan b
$a < b$	a is strikt kleiner dan b
$a > b$	a is strikt groter dan b
$a \leq b$	a is kleiner of gelijk aan b
$a \geq b$	a is groter of gelijk aan b
∞	oneindig

17.1.4 Bewerkingen

$a + b$	optelling
$a - b$	aftrekking
$a \cdot b$, $a \times b$, $a * b$	vermenigvuldiging
$\frac{a}{b}$, a/b	deling
a^p	a tot de macht p
\sqrt{a} , $a^{\frac{1}{2}}$	vierkantswortel uit a
$\sqrt[p]{a}$, $a^{\frac{1}{p}}$	p -de machtswortel uit a
$ a $	absolute waarde van a
$\text{sgn}(a)$	signum van a : (1 als $a > 0$, 0 als $a = 0$, -1 als $a < 0$)
\bar{a}	gemiddelde/verwachting (contextafhankelijk)
$n!$	n -faculteit; $n! = n(n-1) \dots 2 \cdot 1$
$\binom{n}{k}$	binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\lfloor \frac{a}{n} \rfloor$	grootste geheel getal $\leq a$ (vloer)
$\sum_{i=1}^n a_i$	som: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	product: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

17.1.5 Functies & analyse

f	functie f
$f(x)$	functiewaarde
$[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$	verschil gebruikt bij integralen
$g \circ f$	samengestelde functie: $g(f(x))$
$x \rightarrow a$	x streeft naar a
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limiet van $f(x)$ voor $x \rightarrow a$
Δx	toename van x
Df , f' , $\frac{df}{dx}$	afgeleide van f naar x
$Df(a)$, $f'(a)$, $\left. \frac{df}{dx} \right _{x=a}$	waarde van de afgeleide bij $x = a$
$\frac{d^n f}{dx^n}$, $f^{(n)}$, $D^n f$	n -de afgeleide van f
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partiële afgeleide van f naar x
$\frac{df}{dx}$	differentiaal van f : $df = f'(x) dx$
$\int f(x) dx$	onbepaalde integraal (primitieven)
$\int_a^b f(x) dx$	bepaalde integraal over $[a, b]$

17.1.6 Exponentiële en logaritmische functies

e	basis van de natuurlijke logaritmen
e^x	exponentiële functie met grondtal e
a^x	exponentiële functie met grondtal $a > 0, a \neq 1$
$\log_a x$	logaritme met grondtal a
$\ln x$	natuurlijke logaritme van x
$\log_{10}, \log, \lg x$	decimale (Briggs) logaritme (grondtal 10)

17.1.7 Goniometrische en hyperbolische functies

π	verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel
$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$	sinus, cosinus, tangens, cotangens
$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$	secans, cosecans
$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$	inverse goniometrische functies
$\operatorname{arcsec} x, \operatorname{arccsc} x$	inverse secans en cosecans
$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x$	hyperbolische functies
$\operatorname{sech} x, \operatorname{csch} x$	hyperbolische secans, cosecans

17.1.8 Complexe getallen

i, j	imaginaire eenheid ($i^2 = -1$; j in elektronica)
$z = a + bi$	complex getal z
$\Re z, \Im z$	reëel respectievelijk imaginair deel van z
$ z $	modulus van z
$\arg z$	argument van z
z^*	geconjugeerd: $a - bi$

17.2 Griekse alfabet

A α alfa	Δ δ delta	Θ θ thèta	Λ λ lambda
B β bèta	E ε epsilon	I ι iota	M μ mu
Γ γ gamma	Z ζ zèta	K κ kappa	N ν nu
O o omikron	Ξ ξ xi	Π π pi	P ρ rho
Σ σ sigma	T τ tau	Υ υ ypsilon	Φ ϕ phi
X χ chi	Ψ ψ psi	Ω ω omega	H η èta

17.3 Eenheden en hun veelvoud

10^n	Prefix	Symbool	Naam	Decimaal equivalent
10^{24}	yotta	Y	quadriljoen	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	triljard	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	triljoen	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	biljard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	biljoen	1 000 000 000 000
10^9	giga	G	miljard	1 000 000 000
10^6	mega	M	miljoen	1 000 000
10^3	kilo	k	duizend	1 000
10^2	hecto	h	honderd	100
10^1	deca	da	tien	10
10^{-1}	deci	d	een tiende	0,1
10^{-2}	centi	c	een honderste	0,01
10^{-3}	milli	m	een duizendste	0,001
10^{-6}	micro	μ	een miljoenste	0,000 001
10^{-9}	nano	n	een miljardste	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	een biljoenste	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	een biljardste	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	een triljoenste	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	een triljardste	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	een quadriljoenste	0,000 000 000 000 000 000 000 001

De taalkundige regels zijn als volgt. Voluit geschreven prefixen beginnen altijd met een kleine letter: *picofarad*, *milligram*, *centimeter*, *kilovolt*, *megabyte*, *gigawatt*.

De afgekorte prefixen hebben een kleine letter tot en met kilo en daarboven een hoofdletter: *pF*, *mg*, *cm*, *kV*, *Mb*, *GW*.

Hier moet goed op gelet worden want het kan grote verschillen in betekenis veroorzaken: de notatie **mW** betekent *milliwatt* en **MW** *Megawatt*.

Voor de eenheden en grootheden is de regel dat wanneer deze van een persoonsnaam afstammen, zowel voluit geschreven als afgekort een hoofdletter wordt gebruikt, en anders een kleine letter: *Farad*, *gram*, *meter*, *Volt*, *byte*, *Watt*.

17.4 Het aanpakken van problemen

- Maak een tekening, een schets of een schematische voorstelling.
- Probeer met een **getallenvoorbeeld** / trial and error.
- Werk omgekeerd — werk van achter naar voor.
- Gebruik alle gegevens.
- Splits het probleem op in deelproblemen.
- Stel het probleem voor als opgelost.
- Los een (verwant) eenvoudiger probleem op.
- Zoek een patroon.
- Teken een hulplijn.
- Laat tijdelijk één van de voorwaarden vallen.
- Maak een blikwissel.