

# Vademecum-Formularium Wiskunde

Ian Claesen

21 november 2025

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>3</b>
1.1	Volgorde van Bewerking . . . . .	3
1.2	Absolute Waarde . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Machten en wortels</b>	<b>3</b>
2.1	Machten met Gehele Exponenten . . . . .	3
2.2	Vierkantswortel in $\mathbb{R}$ . . . . .	3
2.3	N-de machtswortel in $\mathbb{R}$ . . . . .	3
2.4	$\frac{m}{n}$ -de machtswortel in $\mathbb{R}$ . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Veeltermen</b>	<b>4</b>
3.1	Vierkantsvergelijking . . . . .	4
3.2	Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren . . . . .	4
3.3	Deelbaarheid in $\mathbb{R}[x]$ . . . . .	4
3.4	Euclidische Deling . . . . .	5
3.5	Schema van Horner . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>6</b>
4.1	Rechthoekige coördinaten . . . . .	6
4.2	Poolcoördinaten . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Goniometrie</b>	<b>7</b>
5.1	De Goniometrische Cirkel . . . . .	7
5.2	formules uit de goniometrie . . . . .	7
5.3	Verwante hoeken . . . . .	8
5.4	Belangrijke goniometrische waarden . . . . .	9
5.5	Radiaal . . . . .	9
5.6	Goniometrische formules . . . . .	10
5.7	Cyclometrische formules . . . . .	11
<b>6</b>	<b>Exponentiële en logaritmische functies</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Matrices</b>	<b>13</b>
7.1	Symbolen . . . . .	13
7.2	Rekenregels . . . . .	13
7.3	Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$ . . . . .	13
<b>8</b>	<b>Determinanten</b>	<b>14</b>
<b>9</b>	<b>Stelsels oplossen</b>	<b>15</b>
9.1	Rang van een matrix . . . . .	15
9.2	$n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden, $ A  \neq 0$ (Cramer) . . . . .	15
9.3	Homogene $2 \times 3$ -stelsels . . . . .	15
9.4	$n+1$ vergelijkingen met $n$ onbekenden . . . . .	15
<b>10</b>	<b>Meetkunde</b>	<b>16</b>
10.1	De cirkel . . . . .	16
10.2	De parabool . . . . .	16
10.3	De ellips . . . . .	16
10.4	De hyperbool . . . . .	17
10.5	Oppervlakte Formules . . . . .	17
10.6	Volume Formules . . . . .	17

<b>11 Ruimte meetkunde</b>	<b>18</b>
11.1 Vectoren . . . . .	18
11.1.1 Inwendige product (inproduct,scalaire product) . . . . .	18
11.1.2 Vectoriel product van vectoren (kruisproduct) . . . . .	18
11.2 Rechte . . . . .	19
11.3 Vlak . . . . .	19
11.3.1 Snijlijn 2 vlakken . . . . .	19
11.3.2 Vlakkenwaaier van 2 vlakken . . . . .	19
11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte . . . . .	19
11.3.4 Relatie tussen twee vlakken $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	20
11.4 Bol . . . . .	21
11.5 Basis reële functies . . . . .	22
<b>12 Analyse</b>	<b>23</b>
12.1 Limieten van rijen) . . . . .	23
12.2 Limieten van functies . . . . .	23
12.3 Limieten van goniometrische functies . . . . .	23
12.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies . . . . .	24
12.5 Afgeleiden . . . . .	25
12.5.1 Differentiaal . . . . .	25
12.5.2 Partiële afgeleiden en totale differentiaal . . . . .	25
12.5.3 Afgeleiden - differentiaalen . . . . .	26
12.6 Afgeleiden - fundamentele integralen . . . . .	27
12.7 Partiële integratie . . . . .	27
12.8 Integralen . . . . .	28
12.8.1 Integralen van rationale functies . . . . .	28
12.8.2 Formules voor goniometrische integralen . . . . .	29
12.8.3 Integralen van irrationale functies . . . . .	30
12.8.4 Integralen: inhoud en lengte . . . . .	31
<b>13 Rijen - Reeksen</b>	<b>32</b>
13.1 Maclaurinreeksen, hyperbolische functies . . . . .	32
<b>14 Combinatieleer</b>	<b>33</b>
14.1 Keuzes zonder herhaling . . . . .	33
14.2 Keuzes met herhaling . . . . .	33
<b>15 Statistiek</b>	<b>34</b>
15.1 Standaardnormale verdeling . . . . .	35
15.2 Schatters, betrouwbaarheidsintervallen . . . . .	36
15.3 Regressie . . . . .	36
15.4 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling . . . . .	36
15.5 Test van een hypothese over een populatieproportie . . . . .	36
15.6 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde . . . . .	37
15.7 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde . . . . .	37
<b>16 Kans</b>	<b>38</b>
<b>17 Diversen</b>	<b>39</b>
17.1 Wiskundige symbolen (ISO 80000-2) . . . . .	39
17.1.1 Verzamelingen . . . . .	39
17.1.2 Logische symbolen . . . . .	39
17.1.3 Diverse symbolen . . . . .	39
17.1.4 Bewerkingen . . . . .	40
17.1.5 Functies & analyse . . . . .	40
17.1.6 Exponentiële en logaritmische functies . . . . .	41
17.1.7 Goniometrische en hyperbolische functies . . . . .	41
17.1.8 Complexe getallen . . . . .	41
17.2 Griekse alfabet . . . . .	41
17.3 Eenheden en hun veelvouden . . . . .	42
17.4 Het aanpakken van problemen . . . . .	42

# 1 Algebra

## 1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

## 1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal  $a$  wordt genoteerd als  $|a|$  en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

# 2 Machten en wortels

## 2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

## 2.2 Vierkantswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} =  a  \implies \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$
$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	

## 2.3 N-de machtwortel in $\mathbb{R}$

$n \text{ even} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} =  a  \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
$n \text{ oneven} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	

## 2.4 $\frac{m}{n}$ -de machtswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
--	--

## 3 Veeltermen

### 3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm :  $ax^2 + bx + c = 0$ , met  $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2, S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

### 3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^2b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$$

### 3.3 Deelbaarheid in $\mathbb{R}[x]$

$$V(x), D(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{R}[x] : \frac{V(x)}{D(x)} = Q(x) + R(x)$$

$$\text{Reststelling} : \frac{V(x)}{x - a} \Rightarrow R(x) = V(a)$$

### 3.4 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm  $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$  delen door de eerstegraadsveelterm  $x + 2$  met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2$
$-(2x^3 + 4x^2 + 0x + 0)$	$2x^2$
$-1x^2 - 4x + 5$	
$-(-1x^2 - 2x + 0)$	$-x$
$-2x + 5$	
$-(-2x - 4)$	$-2$
	$9$

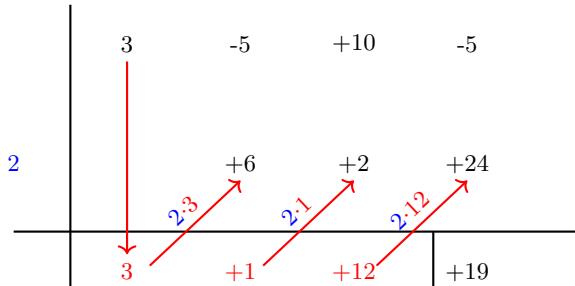
We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 9, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler  $x + 2$ .

### 3.5 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 5)}{(x - 2)} = 3x^2 + 1x + 12 + \frac{19}{(x - 2)}$$



# 4 Complexe getallen

## 4.1 Rechthoekige coordinaten

Bewerking	Formule
Optelling/Aftrekking	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
Vermenigvuldiging	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
Deling	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b) \cdot (c-j.d)}{(c+j.d) \cdot (c-j.d)} = \left( \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \right) + j \left( \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$
Toegevoegde van	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
Inverse	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
Wortel	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a+bi} = x + yi \iff (x+yi)^2 = a+bi$
Macht	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
Machten of $i$	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

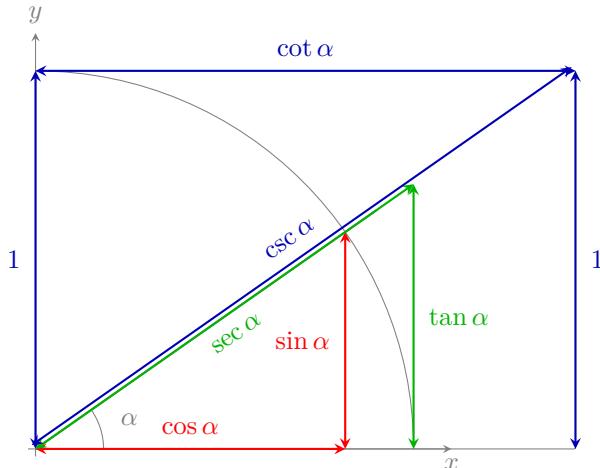
## 4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r(\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

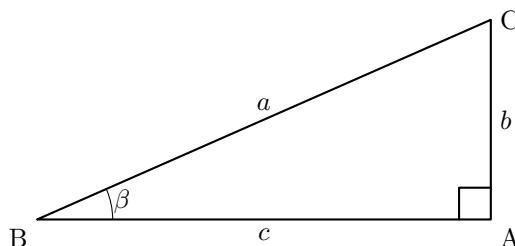
Bewerking	Formule
Vermenigvuldiging	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
Deling	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$
Inverse	$z^{-1} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$
Macht	$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)] \quad n \in \mathbb{N}$
Wortel	$\sqrt[r]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \pm \sqrt[r]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$
$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$	$\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} \right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

# 5 Goniometrie

## 5.1 De Goniometrische Cirkel



## 5.2 formules uit de goniometrie



$\csc \beta$	$\sec \beta$	$\cot \beta$	waarin: $\begin{cases} o : \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s : \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a : \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$os$	$as$	$oa$	
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	

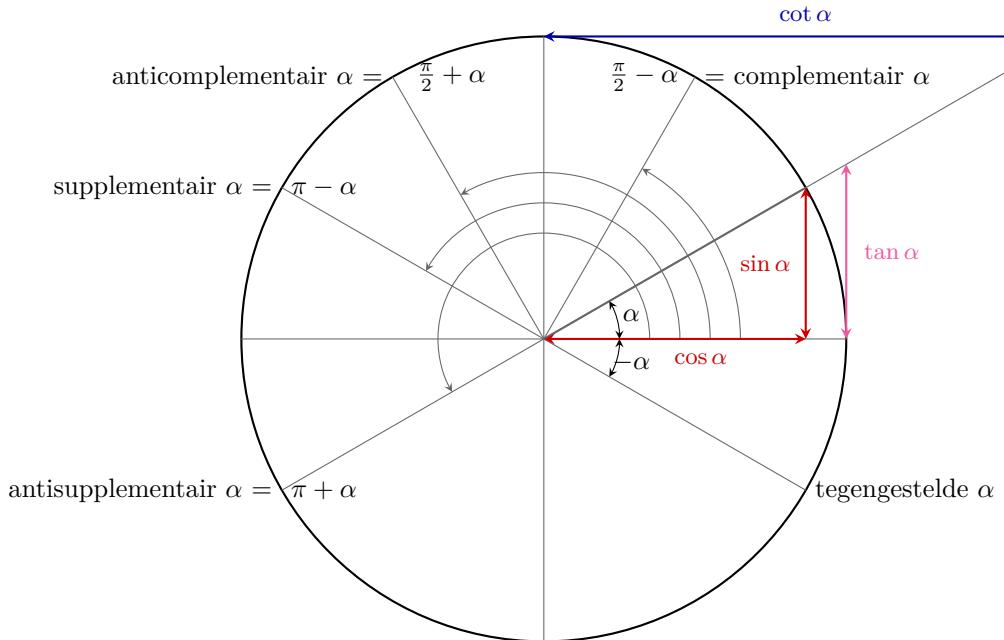
$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$
$\csc \beta = \frac{a}{b}$	$\sec \beta = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$	$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$	

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

### 5.3 Verwante hoeken



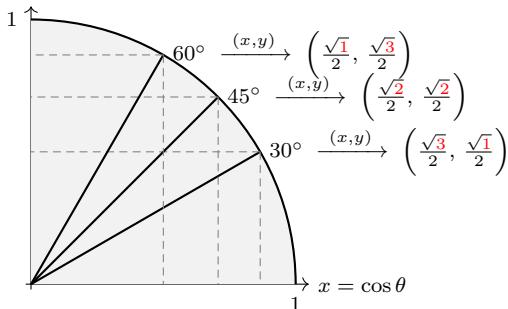
gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sec(\alpha + k2\pi) = \sec \alpha$	$\sec(\pi - \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$
$\csc(\alpha + k2\pi) = \csc \alpha$	$\csc(\pi - \alpha) = \csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$

tegengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec \alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = -\csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec \alpha$

## 5.4 Belangrijke goniometrische waarden

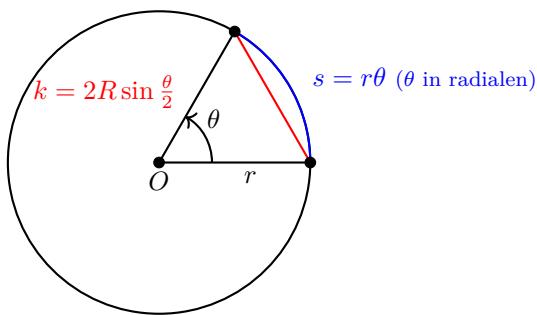
Angle	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0

$$y = \sin \theta$$



$\theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

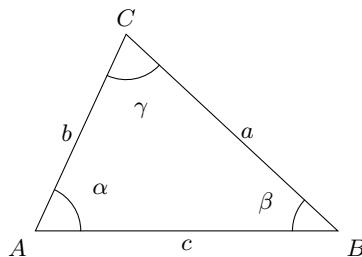
## 5.5 Radiaal



## 5.6 Goniometrische formules

Sinusregel:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$

Cosinusregel: 
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$



*Som- en verschilformules*

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad (\text{hetero's})$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{homo's})$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

*Verdubbelingsformules*

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (*)$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (**)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (*)$	Verdubbelingsformules $f(\tan \alpha)$	$t-formules, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (**)$	$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$
<i>Halveringsformules</i>	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$
$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$		

	Omgekeerde formules van Simpson
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

Formules van Simpson

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \end{aligned}$$

## 5.7 Cyclometrische formules

$$y = Bgsinx \Leftrightarrow x = \sin y, \quad \text{met } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in [-1, 1]$$

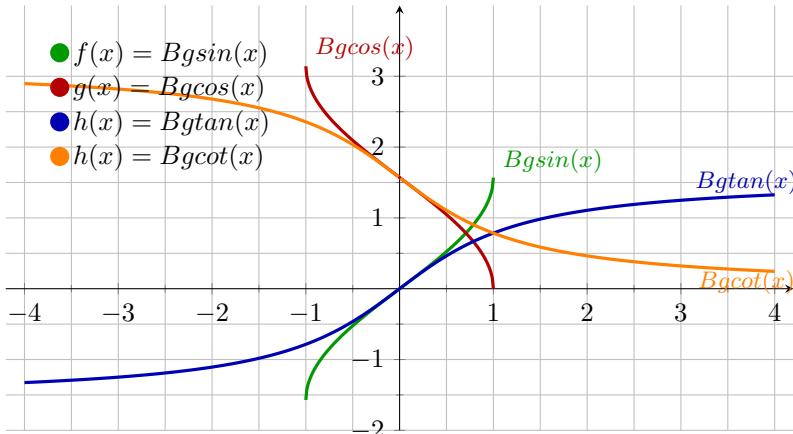
$$y = Bgcosx \Leftrightarrow x = \cos y, \quad \text{met } y \in [0, \pi], \quad x \in [-1, 1]$$

$$y = Bgtanx \Leftrightarrow x = \tan y, \quad \text{met } y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = Bgcotx \Leftrightarrow x = \cot y, \quad \text{met } y \in ]0, \pi[, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \quad Bgcot(a) = Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : \quad Bgcot(a) = \pi + Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$



$\sin(Bgsin(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$ $\cos(Bgcos(x)) = x, \quad x \in [-1, 1]$ $\tan(Bgtan(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$ $\cot(Bgcot(x)) = x, \quad x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(\sin(x)) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $Bgcos(\cos(x)) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$ $Bgtan(\tan(x)) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $Bgcot(\cot(x)) = x, \quad 0 < x < \pi$
$\cos(bgsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$ $\sin(bgcos(x)) = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$ $\cot(bgtan(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\tan(bgcot(x)) = \frac{1}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\cos(Bgtan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$ $\sin(Bgtan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(-x) = -Bgsin(x), \quad x \in [-1, 1]$ $Bgcos(-x) = \pi - Bgcos(x), \quad x \in [-1, 1]$ $Bgsin(x) + Bgcos(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in [-1, 1]$ $Bgcot(x) + Bgtan(x) = \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$

## 6 Exponentiële en logaritmische functies

$${}^a \log x = y \Leftrightarrow x = a^y, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$${}^a \log a^y = y \Leftrightarrow x = {}^a \log x$$

$${}^a \log(x_1 x_2) = {}^a \log x_1 + {}^a \log x_2$$

$${}^a \log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = {}^a \log x_1 - {}^a \log x_2$$

$${}^a \log\left(\frac{1}{x}\right) = - {}^a \log x$$

$${}^a \log(x^n) = n {}^a \log x$$

$${}^b \log x = \frac{{}^a \log x}{{}^a \log b}$$

$${}^b \log a = \frac{1}{{}^a \log b}$$

$$e = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h}$$

$$e \approx 2,718\dots$$

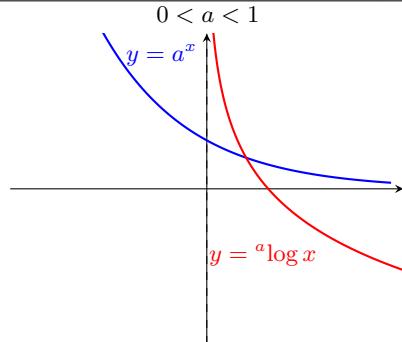
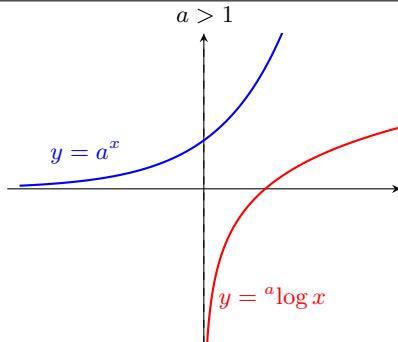
$$(\text{L'Hôpital}) \quad \left( \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}$$

$$e-1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a \log x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} {}^a \log x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} {}^a \log x = -\infty$$

# 7 Matrices

## 7.1 Symbolen

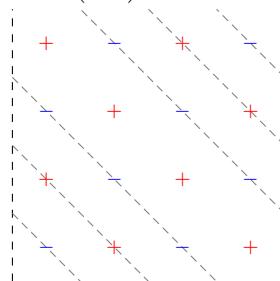
$A$	matrix $A$
$a_{ij}$	het element op rij $i$ en in kolom $j$
$A_{ij}$	cofactor van het element op rij $i$ en in kolom $j$
$I$	de eenheidsmatrix
$A^{-1}$	de inverse matrix
$A^T$	de getransponeerde matrix
$\det A$	determinant van de vierkante matrix $A$

## 7.2 Rekenregels

**Opgelet:** onderstaande regels gelden enkel onder de juiste voorwaarden.

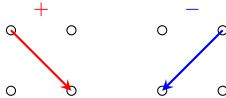
$A + B = B + A$	commutativiteit van de optelling
$A + (B + C) = (A + B) + C$	associativiteit van de optelling
$A \cdot I = A = I \cdot A$	eenheidsmatrix
$A(BC) = (AB)C$	associativiteit van de vermenigvuldiging
$A(B + C) = AB + AC$	linker distributiviteit
$(B + C)A = BA + CA$	rechter distributiviteit
$AB \neq BA$	niet-commutatief in het algemeen
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(cA)^T = cA^T$	
$(AC)^T = C^T A^T$	
$(A^T)^T = A$	
$I^T = I$	
$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$	
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	
$B = C \Rightarrow AB = AC \text{ en } BA = CA \quad A \text{ regulier}$	

## 7.3 Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$

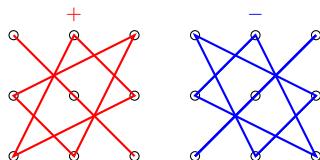


## 8 Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$



$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \rightarrow \text{cofactor } a_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \underbrace{\begin{vmatrix} \dots & \times & \dots \\ \times & \times & \times \\ \dots & \times & \dots \end{vmatrix}}_{\times \not\in |\cdot|} \rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & A_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}^T$$

$$\text{laplace} : \det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{rj} \cdot A_{rj} \quad A \in {}^{nxn}$$

Rekenregels determinanten

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ ka & kb \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ka \\ b & kb \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cdot \\ 0 & \cdot \\ \cdot & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & j \\ b & e & k \\ c & f & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g+j \\ b & e & h+k \\ c & f & i+l \end{vmatrix} \quad \text{idem vr. rijen} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{vmatrix}$$

## 9 Stelsels oplossen

### 9.1 Rang van een matrix

$\text{rang}(A)$  = het aantal lineair onafhankelijke rijen van  $A$

1. Breng de matrix in **gereduceerde rij-echelonvorm** (RREF=Reduced Row-Echelon Form).
2. Het aantal niet-nulrijen in deze trapvorm is de rang van  $A$ .

### 9.2 $n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden, $|A| \neq 0$ (Cramer)

Voor  $AX = B$  met  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en  $\det(A) \neq 0$  geldt

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad (j = 1, \dots, n),$$

waar  $A_j$  ontstaat uit  $A$  door de  $j$ -de kolom te vervangen door de vector  $B$ .

### 9.3 Homogene $2 \times 3$ -stelsels

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned}$$

Indien  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , dan is de oplossingenverzameling

$$V = \{ \lambda \cdot (\det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

### 9.4 $n+1$ vergelijkingen met $n$ onbekenden

Een stelsel van de vorm

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned}$$

heeft één oplossing  $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

# 10 Meetkunde

Afstand 2 punten	$ P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
	$ P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Midden v/e lijnstuk	$co(M) = \left( \frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2} \right)$
Zwaartepunt v/e driehoek	$co(Z) = \left( \frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(y_1+y_2+y_3)}{3} \right)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr snijpunt met x-as (r,0) en y-as (0,s)	$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$
Hoek tussen twee rechten a,b met rico m1,m2	$\cos(\hat{ab}) = \frac{ 1+m_1m_2 }{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$
Afstand tussen rechte a $\leftrightarrow ux+vy+w=0$ en P(x1,y1)	$d(P, a) = \frac{ ux_1+vy_1+w }{\sqrt{u^2+v^2}}$

## 10.1 De cirkel

Cartesiaanse vergelijking	$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$
Algemene vergelijking	$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad \wedge \quad a^2 + b^2 - c \geq 0$
Parameter vergelijking	$\begin{cases} x = x_M + r \cdot \cos t \\ y = y_M + r \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$

## 10.2 De parabool

Top vergelijking	$y^2 = 2px$
Parameter vergelijking	$\begin{aligned} x &= 2p\lambda^2 && \text{met } \lambda \in \mathbb{R} \\ y &= 2p\lambda \end{aligned}$

## 10.3 De ellips

$\text{Cartesiaanse vgl. : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\text{Parameter vgl. : } \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$	
--	--

## 10.4 De hyperbool

<p>Cartesiaanse vgl.: <math>\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1</math></p> <p>Parameter vgl.:</p> $\begin{cases} x = a \cdot \sec t \\ y = b \cdot \tan t \end{cases} \quad \text{met } t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$	
---	--

## 10.5 Oppervlakte Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Vierkant	$A = s^2$	$s$ : zij lengte
Rechthoek	$A = l \cdot w$	$l$ : lengte, $w$ : breedte
Driehoek	$A = \frac{1}{2}b \cdot h$	$b$ : basis, $h$ : hoogte
Cirkel	$A = \pi r^2$	$r$ : straal
Parallellogram	$A = b \cdot h$	$b$ : basis, $h$ : hoogte
Trapezium	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \cdot h$	$b_1, b_2$ : bases, $h$ : hoogte
Ellips	$A = \pi a \cdot b$	$a, b$ : halve grote en halve kleine as
Regelmatig Veelhoek	$A = \frac{1}{2}P \cdot a$	$P$ : omtrek, $a$ : apothema

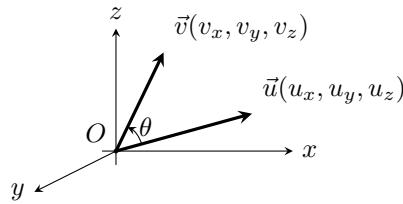
## 10.6 Volume Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Kubus	$V = s^3$	$s$ : zij lengte
Rechthoekig Prisma	$V = l \times w \times h$	$l$ : lengte, $w$ : breedte, $h$ : hoogte
Bol	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$r$ : straal
Cilinder	$V = \pi r^2 h$	$r$ : straal, $h$ : hoogte
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r$ : straal, $h$ : hoogte
Piramide	$V = \frac{1}{3}B \times h$	$B$ : basis oppervlakte, $h$ : hoogte
Ellipsoïde	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	$a, b, c$ : halve hoofdas lengtes
Prisma	$V = B \times h$	$B$ : basis oppervlakte, $h$ : hoogte

# 11 Ruimte meetkunde

## 11.1 Vectoren

### 11.1.1 Inwendige product (inproduct, scalaire product)



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

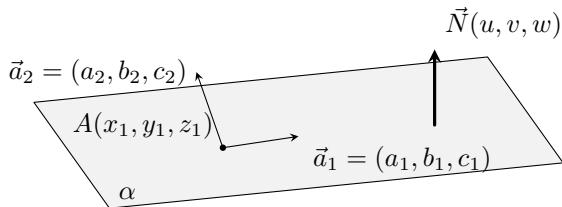
### 11.1.2 Vectorieel product van vectoren (kruisproduct)

$$\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x) = \left( \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

## 11.2 Rechte

$$e \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

## 11.3 Vlak



$\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$	normaal $\leftrightarrow \vec{N}(u, v, w)$

### 11.3.1 Snijlijn 2 vlakken

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ \beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{array} \right\} d \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases}$$

### 11.3.2 Vlakkenwaaijer van 2 vlakken

$$k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + m(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0 \quad (k, m \in \mathbb{R})$$

### 11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte

$$\left. \begin{array}{l} e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w} \\ \alpha \leftrightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \end{array} \right\}$$

### 11.3.4 Relatie tussen twee vlakken $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}^3$

$$\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$$

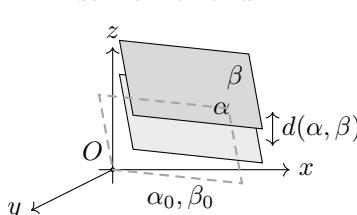
$$\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$$

$$\alpha_0 : u_1x + v_1y + w_1z = 0$$

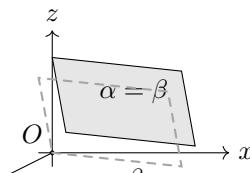
$$\beta_0 : u_2x + v_2y + w_2z = 0$$

(vlakken door  $O$ )

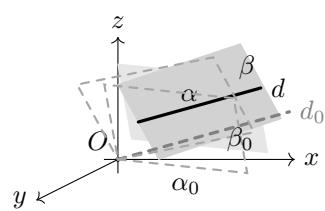
**Evenwijdig, niet samenvallend**



**Samenvallend**



**Snijdend (lijn)**



$$\alpha_0 \cap \beta_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{matrix}$$

$$\alpha \cap \beta \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

RREF( $\alpha_0 \cap \beta_0$ )

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

RREF( $\alpha_0 \cap \beta_0$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 \cap \beta_0 = d_0$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$

## 11.4 Bol

Bol met middelpunt  $M(x_M, y_M, z_M)$  en straal  $= r$

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$

$$\wedge \quad a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$$

↓

$$M(-a, -b, -c) \quad \text{en} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

## 11.5 Basis reële functies

Functie	Definitie
Identiteitsfunctie	$f(x) = x$
Constante functie	$f(x) = c, c \in \mathbb{R}$
Lineaire functie	$f(x) = mx + b, m, b \in \mathbb{R}$
Kwadratische functie	$f(x) = ax^2 + bx + c, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Cubische functie	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$
Polynoomfunctie	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$
Rationale functie	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x)$ zijn polynomen, $Q(x) \neq 0$
Exponentiële functie	$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$
Logaritmische functie	$f(x) = \log_a(x), a > 0, a \neq 1, x > 0$
Absolute-waarde functie	$f(x) =  x  = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Goniometrische functies	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x) x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Inverse goniometrische functies	$f(x) = \arcsin(x), x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arccos(x), x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arctan(x), x \in \mathbb{R}$
Hyperbolische functies	$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, x \in \mathbb{R}$
Stukjesfunctie	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

## 12 Analyse

### 12.1 Limieten van rijen)

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_m n^m$$

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)}{(b_q n^p + b_{q-1} n^{p-1} + \dots + b_1 n + b_0)} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m n^m}{b_q n^p}$$

### 12.2 Limieten van functies

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

### 12.3 Limieten van goniometrische functies

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

## 12.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies

Veeltermfunctie :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$  Eindige a limiet = functiewaarde

Oneindige a limiet = limiet van de hoogstegraadsterm

Gebroken rationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
geval $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn $\infty$ ; teken afleiden uit het teken van $r$ en de noemer
geval $\frac{0}{0}$	deel teller en noemer door $(x - a)$ , bereken de limiet van de bekomen functie

Oneindige a

limiet = limiet van quotiënt hoogste graadstermen

Irrationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn $\infty$ ; teken afleiden uit het teken van $r$ en de noemer
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{0}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm, deel teller en noemer door $(x - a)$ , bereken de limiet van de bekomen functie
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Oneindige a

$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ en $f(\pm\infty)$ is te berekenen	limiet = resultaat berekening
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\frac{\infty}{\infty}$	zet in de teller en de noemer de hoogste macht van $x$ voorop, vereenvoudig en bereken de limiet van de bekomen functie
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\infty - \infty$	herleid tot het vorige geval door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Regel l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \vee \quad \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

## Bewerkingen met oneindig en onbepaalde vormen:

Bewerkingen	Geen betekenis
$x + (-\infty) = -\infty + x = (-\infty) + x$	$(+\infty) + (-\infty)$
$x + (+\infty) = +\infty + x = (+\infty) + x$	$(-\infty) + (+\infty)$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ als $x > 0$	$0 \cdot (+\infty), (+\infty) \cdot 0$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$ als $x < 0$	$0 \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot 0$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ als $x > 0$	$\frac{1}{0}$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ als $x < 0$	$1^{+\infty}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$0^0$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	
$(+\infty)^n = +\infty$ als $n$ even is	
$(-\infty)^n = -\infty$ als $n$ oneven is	
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$	
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	
$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ als $n$ oneven is	

## 12.5 Afgeleiden

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \left( \frac{df}{dx} \right)_{x=a}$$

$$g(x) = u, \quad D_x[f(g(x))] = D_x[f(u)] = \frac{d[f(u)]}{dx} = \frac{d[f(u)]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = D_u[f(u)] \cdot D_x[u]$$

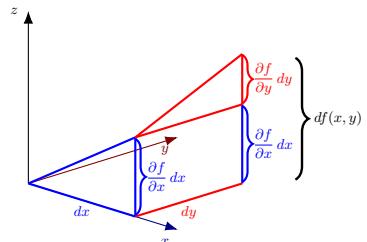
### 12.5.1 Differentiaal

$$df(x) = Df(x) \cdot dx$$

### 12.5.2 Partiële afgeleiden en totale differentiaal

$$z = f(x, y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \end{cases}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



### 12.5.3 Afgeleiden - differentiaLEN

$Dc = 0, D(cf) = cDf$	$df = 0$	12. ANALYSE
$D(f \pm g) = Df \pm Dg$	$d(f \pm g) = df \pm dg$	
$D(fg) = fDg + gDf$	$d(fg) = f dg + g df$	
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$	$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$	
$D(x^n) = nx^{n-1}$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$	
$D(\sin x) = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$	
$D(\cos x) = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$	
$D(\tan x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \sec^2 x dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$	
$D(\cot x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$	
$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$	
$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$	
$D(\sinh x) = \cosh x$	$d(\sinh x) = \cosh x dx$	
$D(\cosh x) = \sinh x$	$d(\cosh x) = \sinh x dx$	
$D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$d(\tanh x) = \frac{dx}{\cosh^2 x}$	
$D(e^x) = e^x, D(a^x) = a^x \ln a$	$d(e^x) = e^x dx, d(a^x) = a^x \ln a dx$	
$D(\ln x) = \frac{1}{x}, D(\ln x ) = \frac{1}{x}$	$d(\ln x ) = \frac{dx}{x}$	
$D(^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$	$d(^a\log x) = \frac{dx}{x \ln a}$	
$D(\ln x + \sqrt{x^2 + k} ) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$d(\ln x + \sqrt{x^2 + k} ) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$	
$D(u^v) = vu^{v-1}Du + u^v \ln u Dv$	$d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u dv$	

## 12.6 Afgeleiden - fundamentele integralen

Bg = arc

Afgeleiden	Integraal
$D[c] = 0$	$\int dx = x + C$
$D[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$D[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$D[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$D[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
$D[\cot x] = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$D[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$D[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$
$D[\ln x + \sqrt{x^2 + k} ] = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln x + \sqrt{x^2 + k}  + C$
$D^a \log x = \frac{1}{x \ln a}$	*

## 12.7 Partiële integratie

$$\int f(x) d(g(x)) = f(x).g(x) - \int g(x) d(f(x))$$

$$\int u dv = u.v - \int v du$$

## 12.8 Integralen

### 12.8.1 Integralen van rationale functies

*Stelling van d'Alembert :*   $V(x) = \prod_{i=0}^u (a_i x + b_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=0}^v (a'_i x^2 + b'_i x + c'_i)^{m'_i} \rightarrow$

$$\wedge \begin{cases} u = (\# a_i x + b_i \text{ factoren van } V(x)), \\ v = (\# a'_i x^2 + b'_i x + c'_i \text{ factoren van } V(x)) \end{cases} \quad \text{met} \quad \begin{cases} b'^2 - 4a'_i c'_i < 0, \\ a'_i \neq 0 \end{cases}$$

$$1) \int \frac{T(x)}{N(x)} dx \text{ als } \deg(T) \geq \deg(N) \xrightarrow{\text{euclidische deling}} \frac{T(x)}{N(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{N(x)} \Rightarrow \deg(r) < \deg(N)$$

2) **Stelling van Jacobi (opspitsen in partiële breuken):**

$$\frac{r(x)}{N(x)} = \sum_{i=1}^u \left( \frac{c_i}{\underset{(a)}{a_i x + b_i}} + \cdots + \frac{c_{n_i}}{\underset{(b)}{(a_i x + b_i)^{n_i}}} \right) + \sum_{i=1}^v \left( \frac{p_i x + q_i}{\underset{(d)}{a'_i x^2 + b'_i x + c'_i}} + \cdots + \frac{p_{n_i} x + q_{n_i}}{\underset{(e)}{(a'_i x^2 + b'_i x + c'_i)^{n_i}}} \right)$$

$\wedge \begin{cases} u = (\# \neq ax + b \text{ factoren van } N(x)) \\ v = (\# \neq a'x + b'x + c' \text{ factoren van } N(x)) \end{cases}$

$\wedge \begin{cases} \text{met } n \text{ de macht } v/d \text{ u, v factoren} \end{cases}$

$$\int \frac{c}{(ax+b)} dx = \frac{c}{a} \int \frac{1}{(ax+b)} d(ax+b) \quad (a)$$

$$\int \frac{c}{(ax+b)^n} dx = \frac{c}{a} \int (ax+b)^{-n} d(ax+b) \quad (b)$$

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} \quad (d)$$

$D > 0$  zie (a),  $D = 0$  zie (b)

$D < 0$

$$p = 0 \rightarrow \int \frac{q}{ax^2+bx+c} dx = \int \underbrace{\frac{q}{(ax^2+bx+c')}}_{D=0} \underbrace{\frac{-c'+c''}{c''}}_{c''} dx = q \int \frac{1}{u^2+c''} dx \quad (c)$$

$p \neq 0$

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{A.(D(ax^2+bx+c)) + B}{ax^2+bx+c} dx$$

$$\begin{cases} p = A2a \\ q = Ab + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dots \\ B = \dots \end{cases}$$

$$= \int \frac{A(2ax+b)}{ax^2+bx+c} dx + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx = A \int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c} + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx$$

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n} \text{ met ICT-software}$$

## 12.8.2 Formules voor goniometrische integralen

$\int \sin^m x \cos^n x dx \quad m, n \in \mathbb{Z}$		
$m \vee n$ oneven substitutie $t = \sin x \vee \cos x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$m \wedge n$ even	
	$m \wedge n$ positief $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$m \vee n$ negatief $\frac{dx}{\cos x} = d(\tan x) \vee \frac{dx}{\sin x} = -d(\cot x)$ eventueel $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\cos x dx}{\cos x} \quad \wedge \quad \sin x = t \quad \int \sec^2 x dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x dx = \int \sec x d(\tan x) \xrightarrow{P.I.} \dots \xrightarrow{\text{terugkeer v/d integrand}} \dots$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c, \quad \int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \tan^n x dx, \quad \int \cot^n x dx \quad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(mx - nx) + \sin(mx + nx)]$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx)]$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = \frac{1}{2} [\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)]$$

Integralen van rationale functies van cosinus en sinus

$$t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \text{Bgtan } t \Rightarrow x = 2 \text{ Bgtan } t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\text{Stel: } 2\alpha = x \text{ en } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \\ \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \end{cases}$$

Integralen van een rationale functie  $f(\tan x)$  omvormen naar  $f(t)$

$$t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

### 12.8.3 Integralen van irrationale functies

Integrand	Substitutie
$\sqrt[n]{ax+b}$	$ax+b = t^n, \quad t \geq 0$
$f(\sqrt[n]{y}, \sqrt[n]{y}, \dots, \sqrt[n]{y}), \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m, \quad m = \text{k. g. v.}(n_1, \dots, n_i)$
$\sqrt{a^2 - u^2}, \quad a > 0$	$u = a \sin t, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{u^2 - a^2}, \quad a > 0$	$u = a \sec t, \quad t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{u^2 + a^2}, \quad a > 0$	$u = a \tan t, \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

## 12.8.4 Integralen: inhoud en lengte

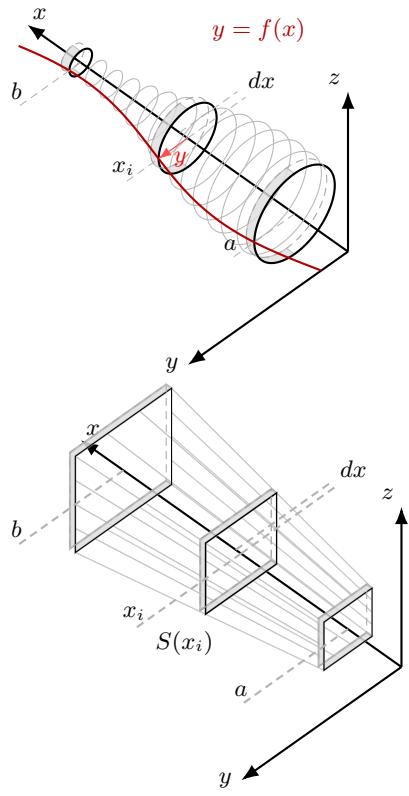
### Omwenteling rond de x-as

Voor  $y = f(x) \geq 0$  op  $[a, b]$  is het volume van het omwentelingslichaam (washers-methode):

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx.$$

De manteloppervlakte :

$$2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



### Inhoud bepaald door $S(x)$

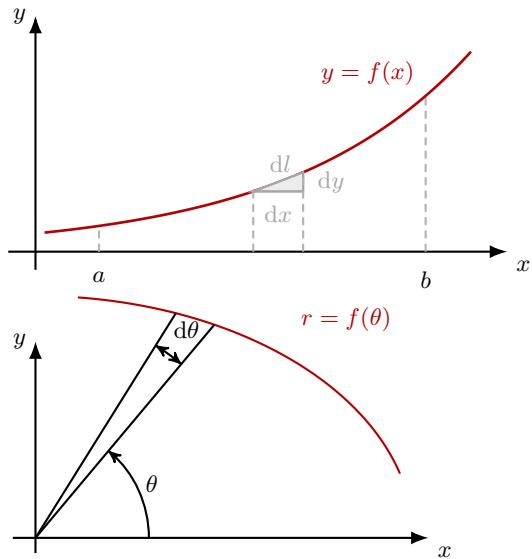
Als de doorsnede loodrecht op de  $x$ -as op positie  $x$  oppervlakte  $S(x)$  heeft, dan:

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

### Lengte van een kromme

Voor  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , geldt de booglengte:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



### Polaire booglengte

Voor een kromme  $r = r(\theta)$ ,  $\theta \in [\alpha, \beta]$ :

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

# 13 Rijen - Reeksen

## 13.1 Maclaurinreeksen, hyperbolische functies

**Maclaurinreeksen:**

$$T_n(\sin x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \dots,$$

$$T_n(\cos x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \dots,$$

$$T_n(e^x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

**Complexe exponentiële functie:**

$$T_n(e^{ix}) = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

$$= 1 + i \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right).$$

$$\Rightarrow e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (1) \Rightarrow e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{-ix} = \cos x - i \sin x \quad (2)$$

$\frac{(1)+(2)}{2} \Rightarrow \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$	$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
---	---------------------------------------

$\frac{(1)-(2)}{2} \Rightarrow \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x$	$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
---	--

**Hyperbolische functies:**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

# 14 Combinatieleer

## 14.1 Keuzes zonder herhaling

Variaties	Permutaties	Combinaties
<b>geordende keuze</b> (volgorde van belang) van $p$ verschillende elementen uit $n$ elementen	<b>Rangschikken</b> (volgorde van belang) van $n$ verschillende elementen	<b>ongeordende keuze</b> (volgorde van geen belang) van $p$ verschillende elementen uit $n$ elementen
$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$	$C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
Internationale notatie: $V_n^p = {}_nP_p = P(n, p)$	Internationale notatie: $P_n = {}_nP_n = P(n) = n!$	Internationale notatie: $C_n^p = C(n, p) = \binom{n}{p}$

## 14.2 Keuzes met herhaling

Variaties met herhaling	Permutaties met herhaling	Combinaties met herhaling
<b>geordende keuze</b> (volgorde van belang) van $p$ elementen uit $n$ elementen (herhaling toegestaan)	<b>rangschikken van <math>n</math> elementen</b> waarvan sommige identiek zijn	<b>ongeordende keuze</b> (volgorde van geen belang) van $p$ elementen uit $n$ soorten elementen (herhaling toegestaan)
$\bar{V}_n^p = n^p$	$\bar{P}_n^{m_1, m_2, \dots, m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}$ met $m_1 + \cdots + m_k = n$	$\bar{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)! p!}$
Internationale notatie: $\bar{V}_n^p = n^p$	Internationale notatie:	Internationale notatie: $\bar{C}_n^p = {}_nH_p = \binom{n+p-1}{p}$

# 15 Statistiek

Discrete data: slechts een eindig of telbaar aantal waarden is mogelijk.

Continue data: variabele die tussen twee waarden oneindig # waarden kan aannemen.

Steekproef	Populatie	Normaalverdeling
$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$	$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$	$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2$	$N(\mu, \sigma)$

Discrete	Continue
$E[X] = \mu_X = \sum_{i=1}^n X_i \cdot p_i$ $\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2 \cdot p_i$ $= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i \right) - \mu_X^2$	$E[X] = \mu_X = \int_a^b x \cdot f(x) dx$ $\sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu_X)^2 \cdot f(x) dx$ $= \int_a^b x^2 \cdot f(x) dx - \mu_X^2$

## Rekenregels

$T = X + a$	$T = aX$	$T = aX + bY$
$\mu_T = \mu_X + a$	$\mu_T = a \cdot \mu_X$	$\mu_T = a\mu_X + b\mu_Y$
$\sigma_T = \sigma_X$	$\sigma_T =  a  \cdot \sigma_X$	$\sigma_T = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2}$

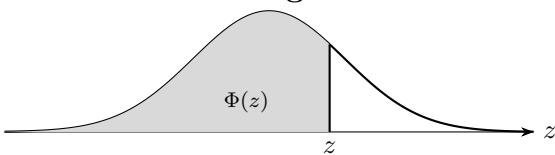
## Rekenregels

$S = X_1 + \dots + X_n$	$\overline{X} = \frac{(X_1 + \dots + X_n)}{n}, \quad \mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n} n \mu_X$	$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{1}{n^2} n \sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sigma_X^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$
$\mu_S = E(S) = n\mu_X$		$\text{CLT} \rightarrow \overline{X} \approx N(\mu_{\overline{X}}, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$

Uniforme continue	Uniforme discrete
$\mu = \frac{a+b}{2}$ $\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$ $= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2) - \mu^2$

Bernoulli	Binomiaal
$\mu = p$ $\sigma = \sqrt{p \cdot q}$	$P(X = i) = C_i^n \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$ $\begin{cases} n \geq 20, \\ np \geq 5 \wedge nq \geq 5 \end{cases} \Rightarrow B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

## 15.1 Standaardnormale verdeling



$$\Phi(z) = \Pr(Z \leq z) \quad \text{voor} \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

De rij geeft het eerste decimaal, de kolomkop het tweede decimaal.

## Z-tabel

## 15.2 Schatters, betrouwbaarheidsintervallen

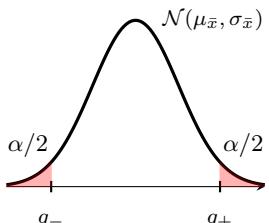
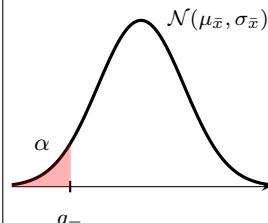
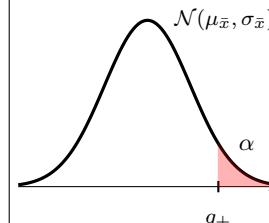
Puntschatting	Populatieparameter	Schatter uit de steekproef
	$p$ (proportie) $\mu$ (gemiddelde) $\sigma$ (standaardafwijking)	$\hat{p}$ $\bar{x}$ of $\hat{\mu}$ $s$ of $\hat{\sigma}$
$\alpha\%$ - betrouwbaarheidsinterval	Betrouwbaarheid $\alpha$	$\begin{array}{cccccc} 80\% & 90\% & 95\% & 98\% & 99\% \\ z_\alpha & 1,28 & 1,65 & 1,96 & 2,33 & 2,58 \end{array}$
Intervalschatting proportie	$\mu_{\hat{p}} = p, \quad \sigma_{\hat{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{pq}$	Betrouwbaarheidsinterval: $\hat{p} \pm z_\alpha \cdot \sigma_{\hat{p}}$
Intervalschatting normaalverdeling		Betrouwbaarheidsinterval: $\bar{x} \pm z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

## 15.3 Regressie

Regressielijn	$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad y - \bar{y} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}(x - \bar{x})$
Covariantie	$\text{cov}(X, Y) = S_{XY}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Correlatiecoëfficiënt	$r = \frac{S_{XY}^2}{S_X S_Y}$

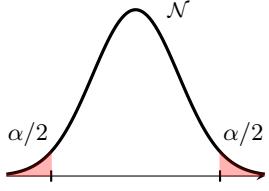
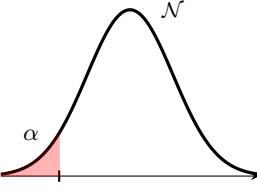
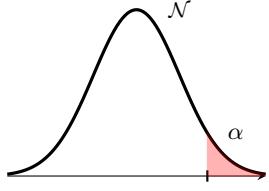
## 15.4 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling

Dit is een test van een steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  volgens steekproefgemiddeldeverdeling  $X \approx \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  in de populatie  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Gebruikmakend van significantieniveau  $\alpha$ .

Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
 $\mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$ $\alpha/2$ $g_-$ $g_+$ $H_A : z_{\bar{x}} \leq g_- \vee \bar{x} \geq g_+$	 $\mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$ $\alpha$ $g_-$ $H_A : z_{\bar{x}} \leq g_-$	 $\mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}})$ $\alpha$ $g_+$ $H_A : z_{\bar{x}} \geq g_+$

## 15.5 Test van een hypothese over een populatieproportie

Dit is een test op een populatieproportie  $\hat{p}$  volgens een binomiaalverdeling  $X \approx \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ . Gebruikmakend van significantieniveau  $\alpha$ .

Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : p = p_0$ $H_A : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p > p_0$
		
$H_A : \hat{p} \leq g_- \vee \hat{p} \geq g_+$	$H_A : \hat{p} \leq g_-$	$H_A : \hat{p} \geq g_+$

## 15.6 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde

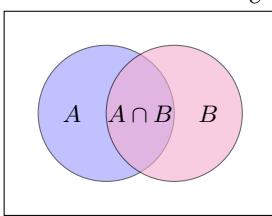
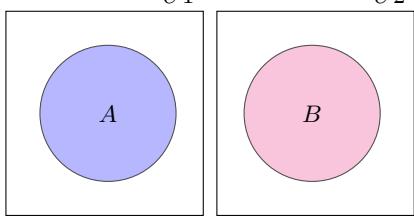
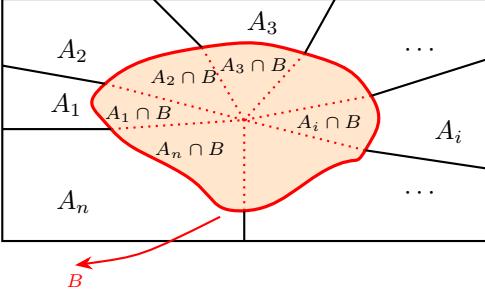
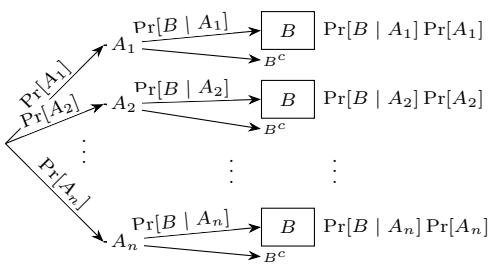
Twee-zijdige toets	Links éénzijdige toets	Rechts éénzijdige toets
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
Als $\bar{x} < \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \geq \bar{x})$
Als $\bar{x} > \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \bar{x})$		
$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$

## 15.7 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde

Twee-zijdige toets	Linkszijdige toets	Rechtszijdige toets
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
Als $\hat{p} < p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \geq \hat{p})$
Als $\hat{p} > p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \hat{p})$		
Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$

# 16 Kans

## Willekeurige en onafhankelijke gebeurtenissen

Willekeurig	Onafhankelijk
 <p> <math>P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)</math>,  <math>P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)</math> </p>	 <p> <math>P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)</math> </p>
<b>Voorwaardelijke kans</b>	
$P(B   A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$	$P(B   A) = \frac{P(B \wedge A)}{P(A)}$
<b>Productwet</b>	
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B   A)$	$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B   A)$
<b>Wet van de totale kans</b>	
Willekeurig	Onafhankelijk
 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B   A_i)$	<p>First event      Second event</p> 
<b>Regel van Bayes</b>	
$P(A_i   B) = \frac{P(A_i \wedge B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B   A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B   A_i)}$	

# 17 Diversen

## 17.1 Wiskundige symbolen (ISO 80000-2)

### 17.1.1 Verzamelingen

$\in$	is een element van de verzameling
$\notin$	is geen element van de verzameling
$\{a, b, c, \dots\}$	verzameling door opsomming
$\{x \mid p(x)\}$	verzameling van $x$ met eigenschap $p(x)$
$\emptyset$	de lege verzameling
$\mathbb{N}$	natuurlijke getallen ( $0, 1, 2, \dots$ )
$\mathbb{Z}$	gehele getallen ( $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ )
$\mathbb{Q}$	rationale getallen (breuken van gehele getallen)
$\mathbb{R}$	reële getallen
$\mathbb{C}$	complexe getallen
$B \subseteq A$	$B$ is deelverzameling van $A$ (mag samenvallen)
$B \subset A$	$B$ is strikte deelverzameling van $A$
$A \cup B$	unie van $A$ en $B$
$A \cap B$	doorsnede van $A$ en $B$
$A \setminus B$	verschil $A - B$ (in $A$ maar niet in $B$ )
$A^c$ of $\overline{A}$	complement van $A$ in universum $U$
$(a, b)$	geordend paar
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	geordend $n$ -tal
$A \times B$	cartesisch product van $A$ en $B$
$\#A$	aantal elementen (cardinaliteit) van $A$

### 17.1.2 Logische symbolen

$p \wedge q$	conjunctie: $p$ en $q$ zijn beide waar
$p \vee q$	disjunctie: $p$ of $q$ is waar (of beide)
$\neg p$	negatie: $p$ is niet waar
$p \Rightarrow q$	implicatie: als $p$ , dan $q$
$p \Leftrightarrow q$	equivalentie: $p$ en $q$ gelijkwaardig
$\forall x$	universele kwantor: voor alle $x$
$\exists x$	existentiële kwantor: er bestaat (minstens één) $x$

### 17.1.3 Diverse symbolen

$a = b$	$a$ is gelijk aan $b$
$a \neq b$	$a$ is niet gelijk aan $b$
$a := b$	$a$ is per definitie gelijk aan $b$
$a \approx b$	$a$ is bij benadering gelijk aan $b$
$a < b$	$a$ is strikt kleiner dan $b$
$a > b$	$a$ is strikt groter dan $b$
$a \leq b$	$a$ is kleiner of gelijk aan $b$
$a \geq b$	$a$ is groter of gelijk aan $b$
$\infty$	oneindig

### 17.1.4 Bewerkingen

$a + b$	optelling
$a - b$	aftrekking
$a \cdot b, a \times b, a * b$	vermenigvuldiging
$\frac{a}{b}, a/b$	deling
$a^p$	$a$ tot de macht $p$
$\sqrt{a}, a^{\frac{1}{2}}$	vierkantwortel uit $a$
$\sqrt[p]{a}, a^{\frac{1}{p}}$	$p$ -de machtwortel uit $a$
$ a $	absolute waarde van $a$
$\operatorname{sgn}(a)$	signum van $a$ : (1 als $a > 0$ , 0 als $a = 0$ , -1 als $a < 0$ )
$\bar{a}$	gemiddelde/verwachting (contextafhankelijk)
$n!$	$n$ -faculteit; $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$
$\binom{n}{k}$	binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\lfloor a \rfloor_n$	grootste geheel getal $\leq a$ (vloer)
$\sum_{i=1}^n a_i$	som: $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\prod_{i=1}^n a_i$	product: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$

### 17.1.5 Functies & analyse

$f$	functie $f$
$f(x)$	functiewaarde
$[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$	verschil gebruikt bij integralen
$g \circ f$	samengestelde functie: $g(f(x))$
$x \rightarrow a$	$x$ streeft naar $a$
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	limiet van $f(x)$ voor $x \rightarrow a$
$\Delta x$	toename van $x$
$Df, f', \frac{df}{dx}$	afgeleide van $f$ naar $x$
$Df(a), f'(a), \left. \frac{df}{dx} \right _{x=a}$	waarde van de afgeleide bij $x = a$
$\frac{d^n f}{dx^n}, f^{(n)}, D^n f$	$n$ -de afgeleide van $f$
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partiële afgeleide van $f$ naar $x$
$df$	differentiaal van $f$ : $df = f'(x) dx$
$\int f(x) dx$	onbepaalde integraal (primitieven)
$\int_a^b f(x) dx$	bepaalde integraal over $[a, b]$

### 17.1.6 Exponentiële en logaritmische functies

$e$	basis van de natuurlijke logaritmen
$e^x$	exponentiële functie met grondtal $e$
$a^x$	exponentiële functie met grondtal $a > 0$ , $a \neq 1$
$\log_a x$	logaritme met grondtal $a$
$\ln x$	natuurlijke logaritme van $x$
$\log_{10}, \log, \lg x$	decimale (Briggs) logaritme (grondtal 10)

### 17.1.7 Goniometrische en hyperbolische functies

$\pi$	verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel
$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$	sinus, cosinus, tangens, cotangens
$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$	secans, cosecans
$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \text{arccot } x$	inverse goniometrische functies
$\text{arcsec } x, \text{arccsc } x$	inverse secans en cosecans
$\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x$	hyperbolische functies
$\text{sech } x, \text{csch } x$	hyperbolische secans, cosecans

### 17.1.8 Complexe getallen

$i, j$	imaginaire eenheid ( $i^2 = -1$ ; $j$ in elektronica)
$z = a + bi$	complex getal $z$
$\Re z, \Im z$	reëel respectievelijk imaginair deel van $z$
$ z $	modulus van $z$
$\arg z$	argument van $z$
$z^*$	geconjugeerd: $a - bi$

### 17.2 Griekse alfabet

<b>A</b>	$\alpha$	alfa	<b>D</b>	$\delta$	delta	<b>Theta</b>	$\theta$	thèta	<b>L</b>	$\lambda$	lambda
<b>B</b>	$\beta$	bèta	<b>E</b>	$\varepsilon$	epsilon	<b>I</b>	$\iota$	iota	<b>M</b>	$\mu$	mu
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	<b>Z</b>	$\zeta$	zèta	<b>K</b>	$\kappa$	kappa	<b>N</b>	$\nu$	nu
<b>O</b>	$\circ$	omikron	<b>Xi</b>	$\xi$	xi	<b>Pi</b>	$\pi$	pi	<b>P</b>	$\rho$	rho
$\Sigma$	$\sigma$	sigma	<b>Tau</b>	$\tau$	tau	<b>Upsilon</b>	$\upsilon$	upsilon	<b>Phi</b>	$\phi$	phi
<b>X</b>	$\chi$	chi	<b>Psi</b>	$\psi$	psi	<b>Omega</b>	$\omega$	omega	<b>H</b>	$\eta$	èta

## 17.3 Eenheden en hun veelvouden

$10^n$	Prefix	Symbool	Naam	Decimaal equivalent
$10^{24}$	yotta	Y	quadriljoen	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{21}$	zetta	Z	triljard	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{18}$	exa	E	triljoen	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{15}$	peta	P	biljard	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^{12}$	tera	T	biljoen	1 000 000 000 000 000 000 000 000
$10^9$	giga	G	miljard	1 000 000 000 000
$10^6$	mega	M	miljoen	1 000 000
$10^3$	kilo	k	duizend	1 000
$10^2$	hecto	h	honderd	100
$10^1$	deca	da	tien	10
$10^{-1}$	deci	d	een tiende	0,1
$10^{-2}$	centi	c	een honderste	0,01
$10^{-3}$	milli	m	een duizendste	0,001
$10^{-6}$	micro	$\mu$	een miljoenste	0,000 001
$10^{-9}$	nano	n	een miljardste	0,000 000 001
$10^{-12}$	pico	p	een biljoenste	0,000 000 000 001
$10^{-15}$	femto	f	een biljardste	0,000 000 000 000 001
$10^{-18}$	atto	a	een triljoenste	0,000 000 000 000 000 001
$10^{-21}$	zepto	z	een triljardste	0,000 000 000 000 000 000 001
$10^{-24}$	yocto	y	een quadriljoenste	0,000 000 000 000 000 000 000 001

De taalkundige regels zijn als volgt. Voluit geschreven prefixen beginnen altijd met een kleine letter: *pico farad, milligram, centimeter, kilovolt, megabyte, gigawatt*.

De afgekorte prefixen hebben een kleine letter tot en met kilo en daarboven een hoofdletter: *pF, mg, cm, kV, Mb, GW*.

Hier moet goed op gelet worden want het kan grote verschillen in betekenis veroorzaken: de notatie **mW** betekent *milliwatt* en **MW** *Megawatt*.

Voor de eenheden en grootheden is de regel dat wanneer deze van een persoonsnaam afstammen, zowel voluit geschreven als afgekort een hoofdletter wordt gebruikt, en anders een kleine letter: *Farad, gram, meter, Volt, byte, Watt*.

## 17.4 Het aanpakken van problemen

- Maak een tekening, een schets of een schematische voorstelling.
- Probeer met een **getallen voorbeeld** / trial and error.
- Werk omgekeerd — werk van achter naar voor.
- Gebruik alle gegevens.
- Splits het probleem op in deelproblemen.
- Stel het probleem voor als opgelost.
- Los een (verwant) eenvoudiger probleem op.
- Zoek een patroon.
- Teken een hulplijn.
- Laat tijdelijk één van de voorwaarden vallen.
- Maak een blikwissel.