

# Formularium Wiskunde

Ian Claesen

15 september 2025

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Algebra</b>	<b>3</b>
1.1	Volgorde van Bewerking	3
1.2	Absolute Waarde	3
<b>2</b>	<b>Machten en wortels</b>	<b>3</b>
2.1	Machten met Gehele Exponenten	3
2.2	Vierkantswortel in $\mathbb{R}$	3
2.3	N-de machtswortel in $\mathbb{R}$	3
2.4	$\frac{m}{n}$ -de machtswortel in $\mathbb{R}$	4
<b>3</b>	<b>Veeltermen</b>	<b>4</b>
3.1	Vierkantsvergelijking	4
3.2	Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren	4
3.3	Euclidische Deling	5
3.4	Schema van Horner	5
<b>4</b>	<b>Complexe getallen</b>	<b>6</b>
4.1	Rechthoekige coördinaten	6
4.2	Poolcoördinaten	6
<b>5</b>	<b>Goniometrie</b>	<b>7</b>
5.1	De Goniometrische Cirkel	7
5.2	formules uit de goniometrie	7
5.3	Verwante hoeken	8
5.4	Belangrijke goniometrische waarden	9
5.5	Radiaal	9
5.6	Goniometrische formules	10
5.7	Omgekeerde formules van Simpson	10
5.8	Formules van Simpson	10
5.9	Cyclometrische formules	11
<b>6</b>	<b>Matrices</b>	<b>12</b>
6.1	Symbolen	12
6.2	Rekenregels	12
6.3	Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$	12
<b>7</b>	<b>Determinanten</b>	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Stelsels oplossen</b>	<b>15</b>
8.1	$n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden, $ A  \neq 0$ (Cramer)	15
8.2	Homogene $2 \times 3$ -stelsels	15
8.3	$n + 1$ vergelijkingen met $n$ onbekenden	15
8.4	$n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden	15
<b>9</b>	<b>Meetkunde</b>	<b>16</b>
9.1	De cirkel	16
9.2	De parabool	16
9.3	De ellips	16
9.4	De hyperbool	17
9.5	Oppervlakte Formules	17
9.6	Volume Formules	17

<b>10 Ruimte meetkunde</b>	<b>18</b>
10.1 Relatie tussen twee vlakken $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}^3$	18
10.2 Basis reële functies	19
<b>11 Analyse</b>	<b>20</b>
11.1 Limieten van rijen)	20
11.2 Limieten van functies	20
11.3 Limieten van goniometrische	20
11.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies	21
11.5 Afgeleiden - differentiaal	23
11.6 Afgeleiden - fundamentele integralen	24
11.7 Partiële integratie	24
<b>12 Statistiek</b>	<b>25</b>
12.1 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling	25
12.2 Test van een hypothese over een populatieproportie	25
12.3 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde	26
12.4 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde	26
<b>13 Diversen</b>	<b>27</b>
13.1 Wiskundige Symbolen (ISO 31/XI)	27
13.2 Logische symbolen	27

# 1 Algebra

## 1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

## 1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal  $a$  wordt genoteerd als  $|a|$  en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

# 2 Machten en wortels

## 2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factoren}}$ $\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$ $\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
---	--

## 2.2 Vierkantswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} =  a  \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$
---	--

## 2.3 N-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$n \text{ even} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} =  a  \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$ $n \text{ oneven} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
--	--

2.4  $\frac{m}{n}$ -de machtswortel in  $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
--	--

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm :  $ax^2 + bx + c = 0$  , met  $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ , $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a^2b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$

### 3.3 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm  $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$  delen door de eerstegraadsveelterm  $x + 2$  met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2$
$-2x^3 - 4x^2 + 0x + 0$	$2x^2$
$-1x^2 - 4x + 5$	
$+1x^2 + 2x + 0$	$-x$
$-2x + 5$	
$2x + 4$	$-2$
$9$	

We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 9, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler  $x + 2$ .

### 3.4 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 5)}{(x - 2)}$$



# 4 Complexe getallen

## 4.1 Rechthoekige coördinaten

Bewerking	Formule
<i>Optelling/Aftrekking</i>	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
<i>Vermenigvuldiging</i>	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
<i>Deling</i>	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b) \cdot (c-j.d)}{(c+j.d) \cdot (c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
<i>Toegevoegde van</i>	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
<i>Inverse</i>	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a + bi} = x + yi \iff (x + yi)^2 = a + bi$
<i>Macht</i>	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
<i>Machten of i</i>	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

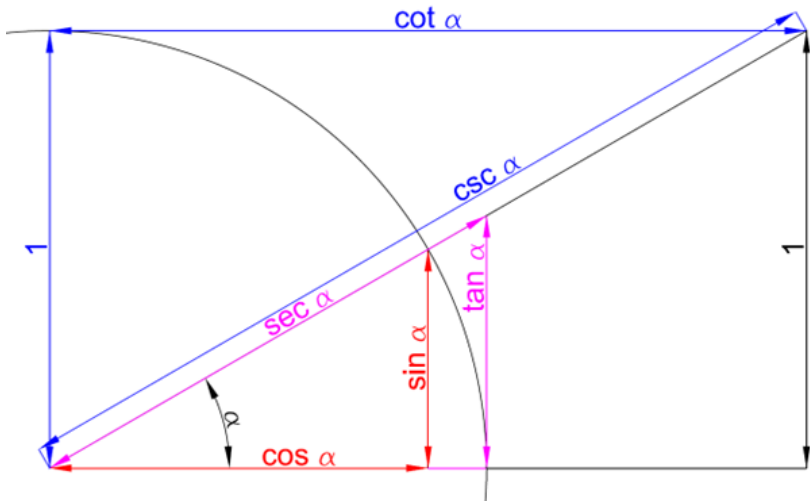
## 4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r(\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

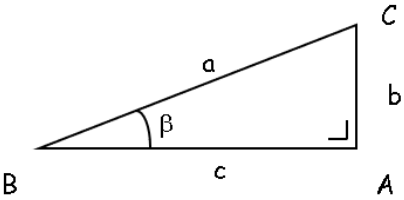
Bewerking	Formule
<i>Vermenigvuldiging</i>	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
<i>Deling</i>	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$
<i>Inverse</i>	$z^{-1} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$
<i>Macht</i>	$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)] \quad n \in \mathbb{N}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \pm \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$
$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \dots, n - 1$	

# 5 Goniometrie

## 5.1 De Goniometrische Cirkel



## 5.2 formules uit de goniometrie



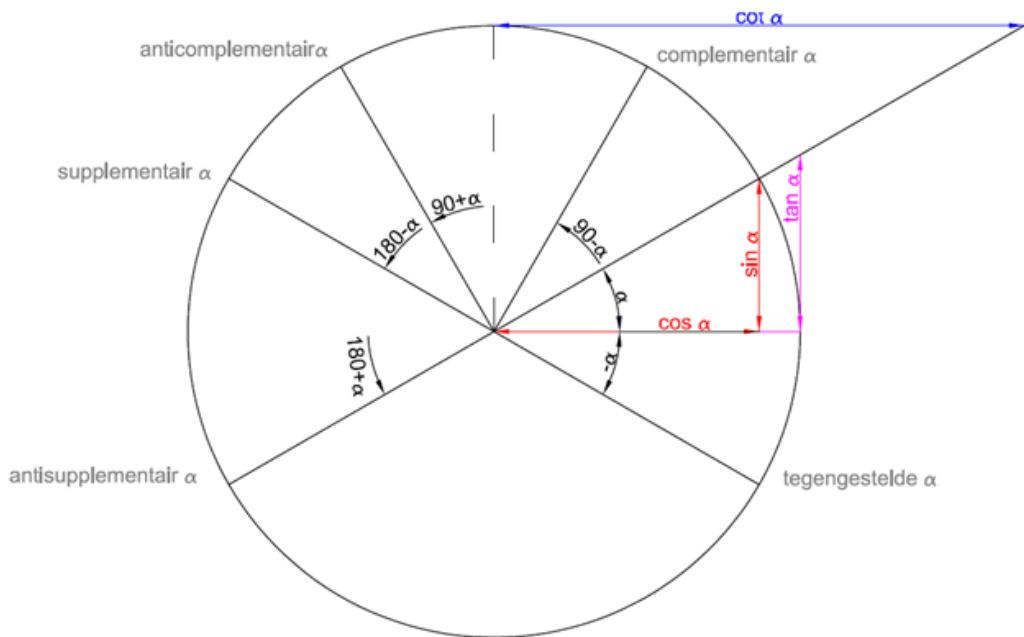
$\csc \beta$	$\sec \beta$	$\cot \beta$	waarin: $\begin{cases} o : \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s : \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a : \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$
$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	
$os$	$as$	$oa$	
$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$	
$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$	

$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$
$\csc \beta = \frac{a}{b}$	$\sec \beta = \frac{a}{c}$	$\cot \beta = \frac{c}{b}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$	$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$	

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$



### 5.3 Verwante hoeken

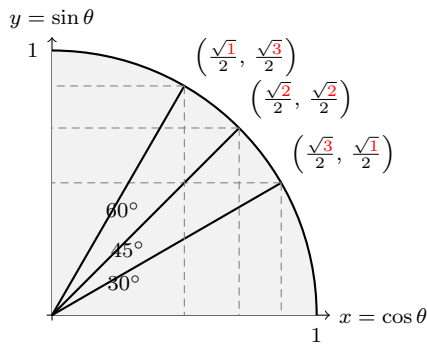
gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sec(\alpha + k2\pi) = \sec \alpha$	$\sec(\pi - \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$
$\csc(\alpha + k2\pi) = \csc \alpha$	$\csc(\pi - \alpha) = \csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$

teggengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec \alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = -\csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec \alpha$



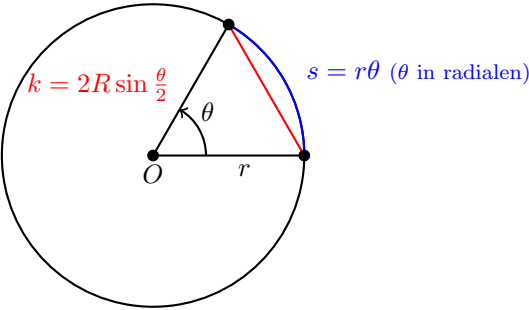
5.4 Belangrijke goniometrische waarden

Angle	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



$\theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
30°	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

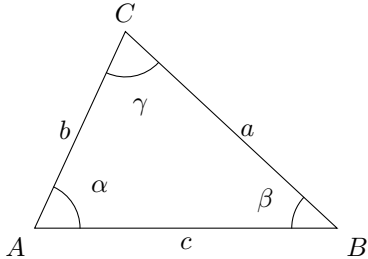
5.5 Radiaal



5.6 Goniometrische formules

Sinusregel:  $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$

Cosinusregel: 
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A} \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{C} \end{cases}$$



A triangle with vertices A, B, and C. Side BC is labeled 'a', side AC is labeled 'b', and side AB is labeled 'c'. Angle A is labeled 'alpha', angle B is labeled 'beta', and angle C is labeled 'gamma'.

<i>Som – en verschil formules</i>	<i>Verdubbelings formules</i>
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ( <i>hetero's</i> )	$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ ( <i>homo's</i> )	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$ (*) $= 2 \cos^2 \alpha - 1$ (**)
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ (*)	Verdubbelingsformules $f(\tan \alpha)$	$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \tan \frac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ (**)	$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
<i>Halverings formules</i>	$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$	$\tan \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$
$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$		

5.7 Omgekeerde formules van Simpson

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$

5.8 Formules van Simpson

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right)$

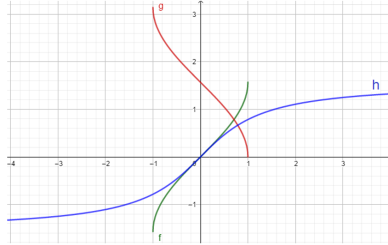
## 5.9 Cyclometrische formules

$$y = \text{Bgsin} x \Leftrightarrow (x = \sin y \wedge y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], x \in [-1, 1])$$

$$y = \text{Bgcos} x \Leftrightarrow (x = \cos y \wedge y \in [0, \pi], x \in [-1, 1])$$

$$y = \text{Bgtan} x \Leftrightarrow (x = \tan y \wedge y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ , x \in \mathbb{R})$$

<span style="color: green;">●</span>	$f(x) = \text{asin}(x)$
<span style="color: red;">●</span>	$g(x) = \text{acos}(x)$
<span style="color: blue;">●</span>	$h(x) = \text{atan}(x)$



$$\sin(\text{Bgsin} x) = x \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\cos(\text{Bgcos} x) = x \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\text{tg}(\text{Bgtan} x) = x \wedge \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{cotg}(\text{Bgcot} x) = x \wedge \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(\text{Bgsin} x) = \sqrt{1 - x^2} \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\sin(\text{Bgcos} x) = \sqrt{1 - x^2} \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\text{Bgsin}(-x) = -\text{Bgsin} x \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\cos(\text{Bgtan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(\text{Bgtan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Bgsin} x + \text{Bgcos} x = \frac{\pi}{2} \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

$$\text{Bgcot} x + \text{Bgtan} x = \frac{\pi}{2} \wedge \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Bgtan}(-x) = -\text{Bgtan} x \wedge \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Bgcot}(-x) = -\text{Bgcot} x \wedge \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Bgcos}(-x) = \pi - \text{Bgcos} x \wedge \forall x \in [-1, 1]$$

## 6 Matrices

### 6.1 Symbolen

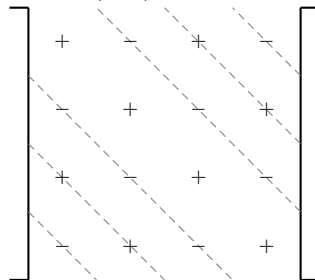
$A$	matrix $A$
$a_{ij}$	het element op rij $i$ en in kolom $j$
$A_{ij}$	cofactor van het element op rij $i$ en in kolom $j$
$I$	de eenheidsmatrix
$A^{-1}$	de inverse matrix
$A^T$	de getransponeerde matrix
$\det A$	determinant van de vierkante matrix $A$

### 6.2 Rekenregels

**Opgelet:** onderstaande regels gelden enkel onder de juiste voorwaarden.

$A + B = B + A$	commutativiteit van de optelling
$A + (B + C) = (A + B) + C$	associativiteit van de optelling
$A \cdot I = A = I \cdot A$	eenheidsmatrix
$A(BC) = (AB)C$	associativiteit van de vermenigvuldiging
$A(B + C) = AB + AC$	linker distributiviteit
$(B + C)A = BA + CA$	rechter distributiviteit
$AB \neq BA$	niet-commutatief in het algemeen
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(cA)^T = cA^T$	
$(AC)^T = C^T A^T$	
$(A^T)^T = A$	
$I^T = I$	
$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$	
$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$	
$B = C \Rightarrow AB = AC \text{ en } BA = CA$	$A$ regulier

### 6.3 Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$



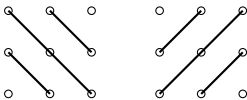
7 Determinanten

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \rightarrow$

sarrus

+ −



$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$

cofactor  $a_{ij} = A_{ij} =$

minor  $a_{ij}$  ( $\times$  weglaten)

$\begin{vmatrix} \times & \times & \times \\ \times & a_{ij} & \times \\ \times & \times & \times \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} \end{vmatrix}$

adj  $A =$

laplace:

$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{rj} A_{rj}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

Dat wil zeggen: som van de producten van de drie “dalende” diagonalen *minus* de som van de producten van de drie “stijgende” diagonalen.

**Minor en cofactor.** Laat  $M_{ij}$  de minor van  $a_{ij}$  zijn (rij  $i$  en kolom  $j$  weggelaten). De cofactor is

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad \text{adj } A = (A_{ij})^T.$

**Laplace-expansie.** Voor  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en om het even welke vaste rij  $i$  of kolom  $j$ :

$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{r=1}^n a_{rj} A_{rj}.$

**Rekenregels voor determinanten.**

$\det(I_n) = 1,$

$\det(A^T) =$

Rij-/kolombewerkingen (analoog voor kolommen):

- (i) vermenigvuldig rij  $i$  met  $k \Rightarrow$  det vermenigvuldigt met  $k$ ,
- (ii) wissel twee rijen  $\Rightarrow$  det verandert van teken,
- (iii) voeg een veelvoud van een rij bij een andere  $\Rightarrow$  det blijft gelijk,
- (iv) een gelijke of nulrij  $\Rightarrow$  det = 0.

**Adjugaatrelatie.**

$$A \operatorname{adj} A = \operatorname{adj} A A = \det(A) I.$$

**Invertibiliteit.**  $\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$  is inverteerbaar en

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A.$$

## 8 Stelsels oplossen

### 8.1 $n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden, $|A| \neq 0$ (Cramer)

Voor  $AX = B$  met  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en  $\det(A) \neq 0$  geldt

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \quad (j = 1, \dots, n),$$

waar  $A_j$  ontstaat uit  $A$  door de  $j$ -de kolom te vervangen door de vector  $B$ .

### 8.2 Homogene $2 \times 3$ -stelsels

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0.$$

Indien  $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$ , dan is de oplossingsruimte

$$V = \left\{ \lambda \cdot \left( \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

### 8.3 $n + 1$ vergelijkingen met $n$ onbekenden

Een stelsel van de vorm

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

heeft een oplossing  $\Leftrightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

### 8.4 $n$ vergelijkingen met $n$ onbekenden

Meer in het algemeen geldt:  $AX = B$  met  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  heeft een oplossing als en slechts als  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$  (Stelling van Kronecker-Capelli).

## 9 Meetkunde

Afstand 2 punten	$ P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $ P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Midden v/e lijnstuk	$co(M) = (\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2})$
Zwaartepunt v/e driehoek	$co(Z) = (\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(y_1+y_2+y_3)}{3})$

Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr snijpunt met x-as (r,0) en y-as (0,s)	$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$
Hoek tussen twee rechten a,b met rico m1,m2	$\cos(\widehat{ab}) = \frac{ 1+m_1m_2 }{\sqrt{1+m_1^2}\sqrt{1+m_2^2}}$
Afstand tussen rechte a- $ux+vy+w=0$ en P(x1,y1)	$d(P, a) = \frac{ ux_1+vy_1+w }{\sqrt{u^2+v^2}}$

### 9.1 De cirkel

Cartesiaanse vergelijking	$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$
Algemene vergelijking	$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad \wedge \quad a^2 + b^2 - c \geq 0$
Parameter vergelijking	$\begin{cases} x = x_M + r \cdot \cos t \\ y = y_M + r \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$

### 9.2 De parabool

Top vergelijking	$y^2 = 2px$
Parameter vergelijking	$\begin{aligned} x &= 2p\lambda^2 && \text{met } \lambda \in \mathbb{R} \\ y &= 2p\lambda \end{aligned}$

### 9.3 De ellips

<p><i>Cartesiaanse vgl.</i> : <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math></p> <p><i>Parameter vgl.</i> :</p> $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad \text{met } t \in [0, 2\pi[$	
--	--



9.4 De hyperbool

*Cartesiaanse vgl.* :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

*Parameter vgl.* :

$$\begin{cases} x = a \cdot \sec t \\ y = b \cdot \tan t \end{cases} \quad \text{met } t \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

9.5 Oppervlakte Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Vierkant	$A = s^2$	$s$ : zijlengte
Rechthoek	$A = l.w$	$l$ : lengte, $w$ : breedte
Driehoek	$A = \frac{1}{2}b.h$	$b$ : basis, $h$ : hoogte
Cirkel	$A = \pi r^2$	$r$ : straal
Parallelogram	$A = b.h$	$b$ : basis, $h$ : hoogte
Trapezium	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$	$b_1, b_2$ : bases, $h$ : hoogte
Ellips	$A = \pi a.b$	$a, b$ : halve grote en halve kleine as
Regelmatig Veelhoek	$A = \frac{1}{2}P.a$	$P$ : omtrek, $a$ : apothema

9.6 Volume Formules

Vorm	Formule	Variabelen
Kubus	$V = s^3$	$s$ : zijlengte
Rechthoekig Prisma	$V = l \times w \times h$	$l$ : lengte, $w$ : breedte, $h$ : hoogte
Bol	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$r$ : straal
Cilinder	$V = \pi r^2 h$	$r$ : straal, $h$ : hoogte
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	$r$ : straal, $h$ : hoogte
Piramide	$V = \frac{1}{3}B \times h$	$B$ : basisoppervlakte, $h$ : hoogte
Ellipsoïde	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	$a, b, c$ : halve hoofdaslengtes
Prisma	$V = B \times h$	$B$ : basisoppervlakte, $h$ : hoogte

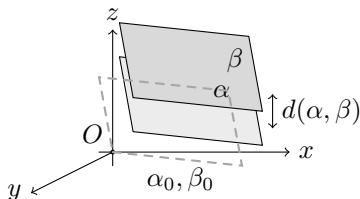
# 10 Ruimte meetkunde

## 10.1 Relatie tussen twee vlakken $\alpha, \beta$ in $\mathbb{R}^3$

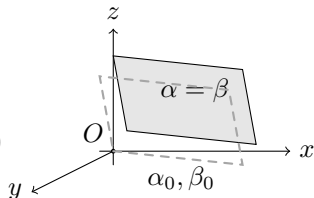
$$\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \quad \beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$$

$$\alpha_0 : u_1x + v_1y + w_1z = 0 \quad \beta_0 : u_2x + v_2y + w_2z = 0 \quad (\text{vlakken door } O)$$

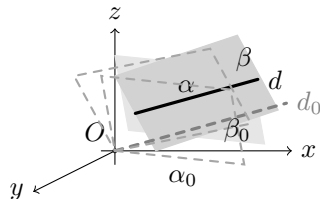
**Evenwijdig, niet  
samenvallend**



**Samenvallend**



**Snijdend (lijn)**



$$\alpha_0 \cap \beta_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{matrix}$$

RREF( $\alpha_0 \cap \beta_0$ )

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha \cap \beta \Rightarrow \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 & \vdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$$

RREF( $\alpha_0 \cap \beta_0$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 \cap \beta_0 = d_0$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

RREF( $\alpha \cap \beta$ )

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$

10.2 Basis reële functies

Functie	Definitie
Identiteitsfunctie	$f(x) = x$
Constante functie	$f(x) = c, \, c \in \mathbb{R}$
Lineaire functie	$f(x) = mx + b, \, m, b \in \mathbb{R}$
Kwadratische functie	$f(x) = ax^2 + bx + c, \, a, b, c \in \mathbb{R}, \, a \neq 0$
Cubische functie	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \, a, b, c, d \in \mathbb{R}, \, a \neq 0$
Polynoomfunctie	$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \, a_i \in \mathbb{R}, \, a_n \neq 0$
Rationale functie	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \, P(x), Q(x) \text{ zijn polynomen}, \, Q(x) \neq 0$
Exponentiële functie	$f(x) = a^x, \, a > 0, \, a \neq 1$
Logaritmische functie	$f(x) = \log_a(x), \, a > 0, \, a \neq 1, \, x > 0$
Absolute-waarde functie	$f(x) =  x  = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Goniometrische functies	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x) \, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \, k \in \mathbb{Z}$
Inverse goniometrische functies	$f(x) = \arcsin(x), \, x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arccos(x), \, x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arctan(x), \, x \in \mathbb{R}$
Hyperbolische functies	$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}, \, x \in \mathbb{R}$
Stukjesfunctie	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

# 11 Analyse

## 11.1 Limieten van rijen)

$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_m n^m$
$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0)}{(b_q n^p + b_{q-1} n^{p-1} + \dots + b_1 n + b_0)} = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{a_m n^m}{b_q n^p}$

## 11.2 Limieten van functies

$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n \quad (n \in \mathbb{Q})$
$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

## 11.3 Limieten van goniometrische

$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
$\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

# 11.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies

Veeltermfunctie :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  = Eindige a limiet = functiewaarde

Oneindige a limiet = limiet van de hoogstegraadsterm

Gebroken rationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
<b>geval</b> $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn $\infty$ ; teken afleiden uit het teken van $r$ en de noemer
<b>geval</b> $\frac{0}{0}$	deel teller en noemer door $(x - a)$ , bereken de limiet van de bekomen functie

Oneindige a

limiet = limiet van quotiënt hoogste graadstermen
---

Irrationale functie :

Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn $\infty$ ; teken afleiden uit het teken van $r$ en de noemer
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\frac{0}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm, deel teller en noemer door $(x - a)$ , bereken de limiet van de bekomen functie
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Oneindige a

$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ en $f(\pm\infty)$ is te berekenen	limiet = resultaat berekening
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\frac{\infty}{\infty}$	zet in de teller en de noemer de hoogste macht van $x$ voorop, vereenvoudig en bereken de limiet van de bekomen functie
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\infty - \infty$	herleid tot het vorige geval door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Regel l'Hôpital:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \vee \quad \pm\infty$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
---

Bewerkingen met oneindig en onbepaalde vormen:

Bewerkingen	Geen betekenis
$x + (-\infty) = -\infty + x = (-\infty) + x$	$(+\infty) + (-\infty)$
$x + (+\infty) = +\infty + x = (+\infty) + x$	$(-\infty) + (+\infty)$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ als $x > 0$	$0 \cdot (+\infty), (+\infty) \cdot 0$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$ als $x < 0$	$0 \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot 0$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ als $x > 0$	$\frac{1}{0}$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ als $x < 0$	$1^{+\infty}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$0^0$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	
$(+\infty)^n = +\infty$ als $n$ even is	
$(-\infty)^n = -\infty$ als $n$ oneven is	
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$	
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	
$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ als $n$ oneven is	

## 11.5 Afgeleiden - differentiaal

$$Dc = 0$$

$$D(c.f) = c.Df$$

$$D(f \pm g) = Df \pm Dg$$

$$D(f.g) = fDg + gDf$$

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$$

$$Dx^n = nx^{n-1}$$

$$Dx^{-1} = -1.x^{-2}$$

$$D \sin x = \cos x$$

$$D \cos x = -\sin x$$

$$D \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$D \cot x = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$DBg \sin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$DBg \cos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$DBg \tan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$Dshx = chx$$

$$Dchx = shx$$

$$Dthx = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$De^x = e^x$$

$$Da^x = a^x \ln a$$

$$D \ln x = \frac{1}{x} \quad D \ln |x| = \frac{1}{x}$$

$$Da \log x = \frac{1}{x \ln a}$$

$$D \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + k}}$$

$$Du^v = vu^{v-1}Du + u^v \ln u Dv$$

$$dc = 0$$

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

$$dx^{-1} = -1.x^{-2}dx$$

$$d \sin x = \cos x dx$$

$$d \cos x = -\sin x dx$$

$$d \tan x = \sec^2 x dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$d \cot x = -\csc^2 x dx = \frac{-1}{\sin^2 x} dx$$

$$dBg \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dBg \cos x = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$dBg \tan x = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dshx = chx dx$$

$$dchx = shx dx$$

$$dthx = \frac{dx}{ch^2 x}$$

$$da \log x = \frac{dx}{x \ln a}$$

$$d \ln |x| = \frac{dx}{x}$$

$$da^x = a^x \ln a dx$$

$$de^x = e^x dx$$

$$d \ln \left| x + \sqrt{x^2 + k} \right| = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}}$$

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(f.g) = f dg + g df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

11.6 Afgeleiden - fundamentele integralen

Bg = arc

Afgeleiden	Integraal
$D[c] = 0$	$\int dx = x + C$
$D[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$D[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$D[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$D[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
$D[\cot x] = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$D[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$D[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$
$D\left[\ln \left x + \sqrt{x^2 + k}\right \right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 + k}\right  + C$
$D^a \log x = \frac{1}{x \ln a}$	*

11.7 Partiële integratie

$$\int f(x) \, d(g(x)) = f(x).g(x) - \int g(x) \, d(f(x))$$

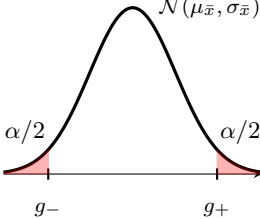
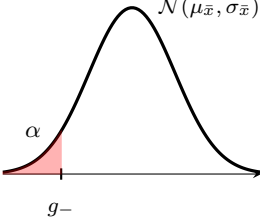
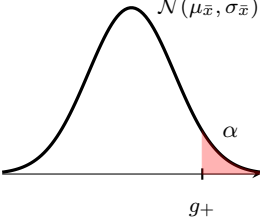
$$\int u \, dv = u.v - \int v \, du$$



# 12 Statistiek

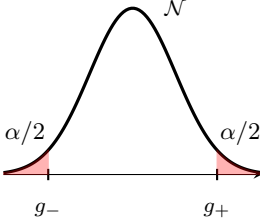
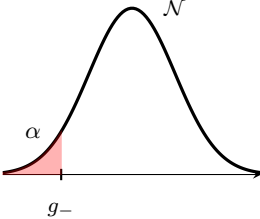
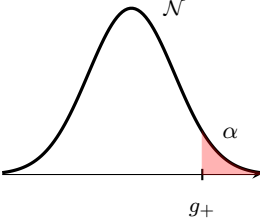
## 12.1 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling

Dit is een test van een steekproefgemiddelde  $\bar{x}$  volgens steekproefgemiddeldeverdeling  $X \approx \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  in de populatie  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ . Gebruikmakend van significantieniveau  $\alpha$ .

Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
		
$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_- \vee \bar{x} \geq g_+$	$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_-$	$H_A : z_{\bar{x}} \geq g_+$

## 12.2 Test van een hypothese over een populatieproportie

Dit is een test op een populatieproportie  $\hat{p}$  volgens een binomiaalverdeling  $X \approx \mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np \cdot \sqrt{p(1-p)}})$ . Gebruikmakend van significantieniveau  $\alpha$ .

Twee-zijdige test	Links-zijdige test	Rechts-zijdige test
$H_0 : p = p_0$ $H_A : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p > p_0$
		
$H_A : \hat{p} \leq g_- \vee \hat{p} \geq g_+$	$H_A : \hat{p} \leq g_-$	$H_A : \hat{p} \geq g_+$

12.3 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde

Twee-zijdige toets	Links éénzijdige toets	Rechts éénzijdige toets
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
Als $\bar{x} < \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \bar{x})$ Als $\bar{x} > \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \bar{x})$	$P = P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \geq \bar{x})$
$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$

12.4 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde

Twee-zijdige toets	Linkszijdige toets	Rechtszijdige toets
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
Als $\hat{p} < p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \hat{p})$ Als $\hat{p} > p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \hat{p})$	$P = P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \geq \hat{p})$
Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$

# 13 Diversen

## 13.1 Wiskundige Symbolen (ISO 31/XI)

$x \in A$	is een element van de verzameling
$x \notin A$	is geen element van de verzameling
$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$	de verzameling door opsomming
$\{x \in A \mid p(x)\}$	de verzameling waar de elementen voldoen aan de eigenschap $p(x)$
$\emptyset$	de lege verzameling
$\mathbb{N}$	de natuurlijke getallen $(0, 1, 2, \dots)$
$\mathbb{Z}$	de gehele getallen $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
$\mathbb{Q}$	de rationale getallen (breuken van $\mathbb{Z}$ )
$\mathbb{R}$	de reële getallen
$\mathbb{C}$	de complexe getallen
$B \subseteq A$	$B$ behoort tot $A$ (kan er mee samenvallen)
$B \subset A$	$B$ behoort strikt tot $A$
$A \cup B$	samenvoeging van $A$ en $B$ (unie)
$A \cap B$	doorsnede van $A$ en $B$ (de gemeenschappelijke elementen)
$A \setminus B$	$A$ verschilt $B$ , wat tot $A$ behoort en niet tot $B$
$\mathcal{C}_U A$	het complement van $A$ in het universum $U$
$(a, b)$	het geordend paar
$(a_1, a_2, \dots, a_n)$	een geordend $n$ -tal
$A \times B$	de productverzameling van $A$ en $B$
$\#$	rangnummer of aantal

## 13.2 Logische symbolen

$p \wedge q$	conjunctie, de beweringen $p$ en $q$ zijn geldig
$p \vee q$	disjunctie, de bewering $p$ of $q$ is geldig
$\neg p$	negatie, de bewering $p$ is niet geldig
$p \Rightarrow q$	implicatie, als $p$ dan $q$
$p \Leftrightarrow q$	equivalentie, de beweringen $p$ en $q$ zijn gelijkwaardig
$\forall x$	universele kwantor, voor alle elementen geldt
$\exists x$	existentiële kwantor, er zijn elementen die voldoen aan