

Formularium Wiskunde

Ian Claesen

Contents

1	Algebra	2
1.1	Volgorde van Bewerking	2
1.2	Absolute Waarde	2
2	Machten en wortels	3
2.1	Machten met Gehele Exponenten	3
2.2	Vierkantswortel in \mathbb{R}	3
2.3	N-de machtswortel in \mathbb{R}	3
2.4	$\frac{m}{n}$ -de machtswortel in \mathbb{R}	3
3	Veeltermen	4
3.1	Vierkantsvergelijking	4
3.2	Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren	4
3.3	Euclidische Deling	4
3.4	Schema van Horner	5
4	Complexe getallen	6
4.1	Rechthoekige coördinaten	6
4.2	Poolcoördinaten	6
5	Goniometrie	7
5.1	De Goniometrische Cirkel	7
5.2	formules uit de goniometrie	7
6	Meetkunde	9
6.1	De Cirkel	9
6.2	De Parabool	9
7	Analyse	9
7.1	Limieten van Functies	9
7.2	Afgeleiden	9
8	Matrices	9
8.1	Rekenregels	9
9	Combinatieleer	9
9.1	Keuzes zonder Herhaling	9

10 Kansrekening	9
10.1 Voorwaardelijke Kans	9
11 Statistiek	10
11.1 Normaalverdeling	10
12 Diversen	10
12.1 Wiskundige Symbolen	10

1 Algebra

1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken. Om deze volgorde te onthouden, gebruik de ezelsbrug:
Heel Mooie Witte Vaatwassers Doen Onze Afwas.

1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal a wordt genoteerd als $|a|$ en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

2 Machten en wortels

2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a.a. \dots a}_{n \text{ factoren}}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$\forall a \in \mathbb{R} : a^1 = a$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0 : a^0 = 1$	$(a^m)^n = a^{mn}$
$\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} : a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$(a.b)^n = a^n \cdot b^n$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

2.2 Vierkantswortel in \mathbb{R}

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $(\sqrt{a})^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} = a \implies \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$
---	---

2.3 N-de machtswortel in \mathbb{R}

$n \text{ even} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge a \leq 0 \end{cases}$ $n \text{ oneven} \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(\sqrt[n]{a})^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
--	--

2.4 $\frac{m}{n}$ -de machtswortel in \mathbb{R}

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q} :$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $(a.b)^m = a^m \cdot b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
--	--

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm : $ax^2 + bx + c = 0$, met $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i \sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$, $S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} a^2b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + ... - ab^{2n-1} + b^{2n})$

3.3 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ delen door de eerstegraadsveelterm $x + 2$ met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2$
$-2x^3 - 4x^2 + 0x + 0$	$2x^2$
$-1x^2 - 4x + 5$	
$+1x^2 + 2x + 0$	$-x$
$-2x + 5$	
$2x + 4$	-2
9	

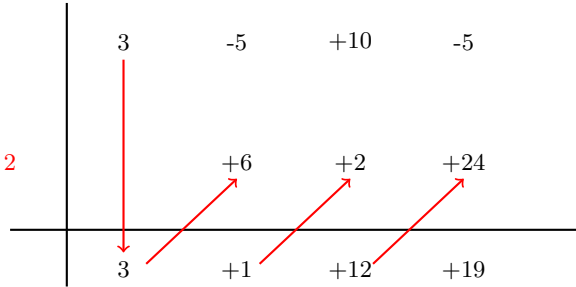
We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 25, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler $x + 2$.

3.4 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 52)}{(x - 2)}$$



4 Complexe getallen

4.1 Rechthoekige coördinaten

Bewerking	Formule
<i>Optelling/Aftrekking</i>	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
<i>Vermenigvuldiging</i>	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
<i>Deling</i>	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b) \cdot (c-j.d)}{(c+j.d) \cdot (c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
<i>Toegevoegde van</i>	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
<i>Inverse</i>	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a + bi} = x + yi \iff (x + yi)^2 = a + bi$
<i>Macht</i>	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
<i>Machten of i</i>	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

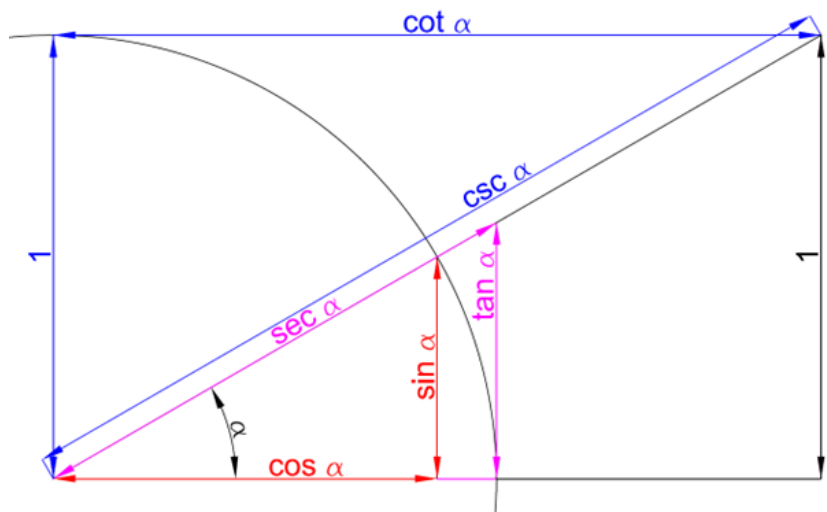
4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r (\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Bewerking	Formule
<i>Vermenigvuldiging</i>	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$
<i>Deling</i>	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$
<i>Inverse</i>	$z^{-1} = \frac{1}{r} \angle -\varphi$
<i>Macht</i>	$z^n = r^n [\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi)] \quad n \in \mathbb{N}$
<i>Wortel</i>	$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \pm \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}\right)$
	$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi+k \cdot 2\pi}{n}\right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

5 Goniometrie

5.1 De Goniometrische Cirkel



5.2 formules uit de goniometrie

$\csc \beta$	$\sec \beta$	$\cot \beta$
\leftarrow	\leftarrow	\leftarrow
os	as	oa
\rightarrow	\rightarrow	\rightarrow
$\sin \beta$	$\cos \beta$	$\tan \beta$

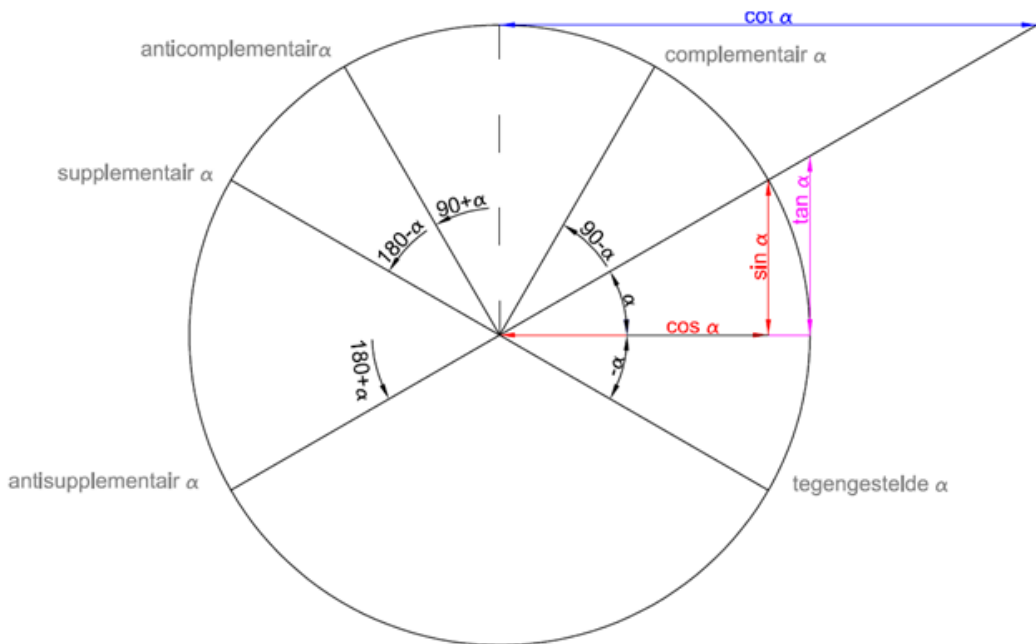
waarin: $\begin{cases} o : \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s : \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a : \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$

$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$	$\cot \beta = \frac{c}{b}$	$\sec \beta = \frac{a}{c}$	$\csc \beta = \frac{a}{b}$
$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$		$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$		
$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$		$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$			

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$



gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$
$\tan(\alpha + k2\pi) = \tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$
$\cot(\alpha + k2\pi) = \cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$
$\sec(\alpha + k2\pi) = \sec \alpha$	$\sec(\pi - \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \csc \alpha$
$\csc(\alpha + k2\pi) = \csc \alpha$	$\csc(\pi - \alpha) = \csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec \alpha$

tegengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec \alpha$	$\sec(\pi + \alpha) = -\sec \alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\csc \alpha$
$\csc(-\alpha) = -\csc \alpha$	$\csc(\pi + \alpha) = -\csc \alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sec \alpha$

6 Meetkunde

6.1 De Cirkel

De vergelijking van een cirkel met middelpunt (a, b) en straal r is:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

6.2 De Parabool

De standaardvergelijking van een parabool met top in de oorsprong is:

$$y = ax^2$$

7 Analyse

7.1 Limieten van Functies

De limiet van een functie $f(x)$ als x nadert tot a wordt genoteerd als:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

7.2 Afgeleiden

De afgeleide van een functie $f(x)$ wordt gegeven door:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

8 Matrices

8.1 Rekenregels

Voor matrices A , B en C gelden de volgende eigenschappen:

- Commutativiteit van optelling: $A + B = B + A$
- Associativiteit van optelling: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- Distributiviteit: $A(B + C) = AB + AC$

9 Combinatieleer

9.1 Keuzes zonder Herhaling

Variaties: Geordende keuze van p elementen uit n elementen.

Permutaties: Het rangschikken van n verschillende elementen.

10 Kansrekening

10.1 Voorwaardelijke Kans

De voorwaardelijke kans van A gegeven B is:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

11 Statistiek

11.1 Normaalverdeling

De normaalverdeling wordt gegeven door de dichtheidsfunctie:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

12 Diversen

12.1 Wiskundige Symbolen

- \in : is een element van
- \forall : voor alle
- \exists : er bestaat