Vademecum-Formularium Wiskunde

Ian Claesen

14 november 2025

Inhoudsopgave

1 Algebra

1.1 Volgorde van Bewerking

Haakjes wegwerken, machtsverheffen, worteltrekken, vermenigvuldigen en delen, optellen en aftrekken.

1.2 Absolute Waarde

De absolute waarde van een getal a wordt genoteerd als $|a|$ en is altijd positief.

$$|a| = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases}$$

2 Machten en wortels

2.1 Machten met Gehele Exponenten

$\forall a \in, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^n = \underbrace{a.a.\ \ldots\ .a}_{n\ factoren}$ $\forall a \in \mathbb{R} :\ a^1 =\ a$ $\forall a \in \mathbb{R}_0 :\ a^0 =\ 1$ $\forall a \in \mathbb{R}_0, \forall n \in \mathbb{N} :\ a^{-n} =\ \frac{1}{a^n}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0, \forall m, n \in \mathbb{Z} : a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(a.b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

2.2 Vierkantswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R} :$ $b = \sqrt{a} \Leftrightarrow b^2 = a \wedge (b \geq 0)$ $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ :$ $\sqrt{a^2} = a$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \wedge b \neq 0$	$\forall a \in \mathbb{R} :$ $\sqrt{a^2} = \|a\| \implies \begin{cases} \sqrt{a^2} = a & \text{als } a \geq 0, \\ \sqrt{a^2} = -a & \text{als } a \leq 0. \end{cases}$

2.3 N-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$n\ even \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = \|a\| \rightarrow \begin{cases} \sqrt[n]{a^n} = a & \wedge\, a \geq 0 \\ \sqrt[n]{a^n} = -a & \wedge\, a \leq 0 \end{cases}$ $n\ oneven \Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{N}_0 :$ $\sqrt[n]{a^n} = a$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

2.4 $\frac{m}{n}$-de machtswortel in $\mathbb{R}$

$\forall a \in \mathbb{R}_0^+, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0 : a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\forall a, b \in \mathbb{R}_0^+, \forall m, n \in \mathbb{Q}:$ $a^m.a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m.n}$ $(a.b)^m = a^m.b^m$ $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

3 Veeltermen

3.1 Vierkantsvergelijking

Een vierkantsvergelijking is van de vorm : $ax^2 + bx + c = 0$ *, met* $D = b^2 - 4ac$

$x \in \mathbb{R}$	$x \in \mathbb{C}$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}$
$P = \frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2 \,,\ S = -\frac{b}{a} = x_1 + x_2$	
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - Sx + P)$	

3.2 Merkwaardige Producten en Ontbinding in Factoren

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1} a^2 b^{n-1} + b^n \quad \wedge \quad C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$
$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\left(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - a^{2n-3}b^3 + ... - ab^{2n-1} + b^{2n}\right)$

3.3 Deelbaarheid in $\mathbb{R}[x]$

$$V(x),\ D(x),\ Q(x),\ R(x)\ \in \mathbb{R}[x] : \frac{V(x)}{D(x)} = Q(x) + R(x)$$

$$\textit{Reststelling} \ : \ \frac{V(x)}{x - a} \Rightarrow R(x) = V(a)$$

3.4 Euclidische Deling

We gaan de derdegraadsveelterm $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$ delen door de eerstegraadsveelterm $x + 2$ met behulp van de praktische werkwijze van lange deling.

$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$	$x + 2$
$-(2x^3 + 4x^2 + 0x + 0)$	$2x^2$
$-1x^2 - 4x + 5$	
$-(-1x^2 - 2x + 0)$	$-x$
$-2x + 5$	
$-(-2x - 4)$	-2
9	

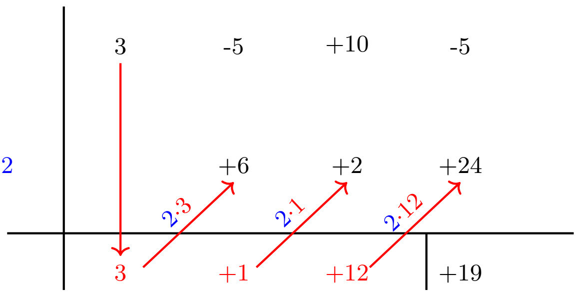
We kunnen de deling als volgt uitdrukken:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = (x + 2)(2x^2 - x - 2) + 9$$

De rest is 9, wat een graad heeft die kleiner is dan de graad van de deler $x + 2$.

3.5 Schema van Horner

$$\frac{(3x^3 - 5x^2 + 10x - 5)}{(x - 2)} = 3x^2 + 1x + 12 + \frac{19}{(x - 2)}$$



4 Complexe getallen

4.1 Rechthoekige coordinaten

Bewerking	**Formule**
$Optelling/Aftrekking$	$(a + j.b) \pm (c + j.d) = (a + c) \pm j(b + d)$
$Vermenigvuldiging$	$(a + j.b) \cdot (c + j.d) = (ac - bd) + j(ad + bc)$
$Deling$	$\frac{(a+j.b)}{(c+j.d)} = \frac{(a+j.b)\cdot(c-j.d)}{(c+j.d)\cdot(c-j.d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$
$Toegevoegde\ van$	$\overline{(a + j.b)} = (a - j.b)$ $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}, \quad \overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$
$Inverse$	$z = a + bi \implies z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$
$Wortel$	$\sqrt{a} \wedge a < 0 \implies \sqrt{a} = \pm i\sqrt{-a}$ $\sqrt{a + bi} = x + yi \iff (x + yi)^2 = a + bi$
$Macht$	$(a + bi)^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 :$ $(a + bi)^n = (a + bi) \cdot (a + bi) \cdots (a + bi)$
$Machten\ of\ i$	$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$

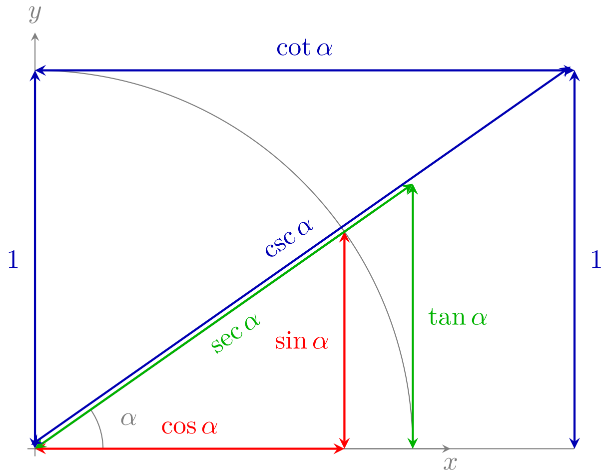
4.2 Poolcoördinaten

$$z = a + i.b = r\left(\cos(\varphi) + i.\sin(\varphi)\right) = r\angle\varphi, \quad \tan(\varphi) = \frac{b}{a}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

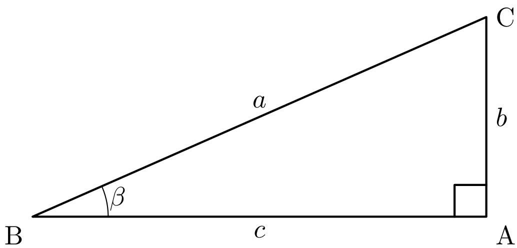
Bewerking	**Formule**
$Vermenigvuldiging$	$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\angle\varphi_1 + \varphi_2$
$Deling$	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\angle\varphi_1}{r_2\angle\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle\varphi_1 - \varphi_2$
$Inverse$	$z^{-1} = \frac{1}{r}\angle - \varphi$
$Macht$	$z^n = r^n\left[\cos(n \cdot \varphi) + i\sin(n \cdot \varphi)\right] \quad n \in \mathbb{N}$
$Wortel$	$\sqrt{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$
$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+k\cdot2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+k\cdot2\pi}{n}\right) \quad \wedge \quad k = 0, 1, \cdots, n-1$	

5 Goniometrie

5.1 De Goniometrische Cirkel



5.2 formules uit de goniometrie

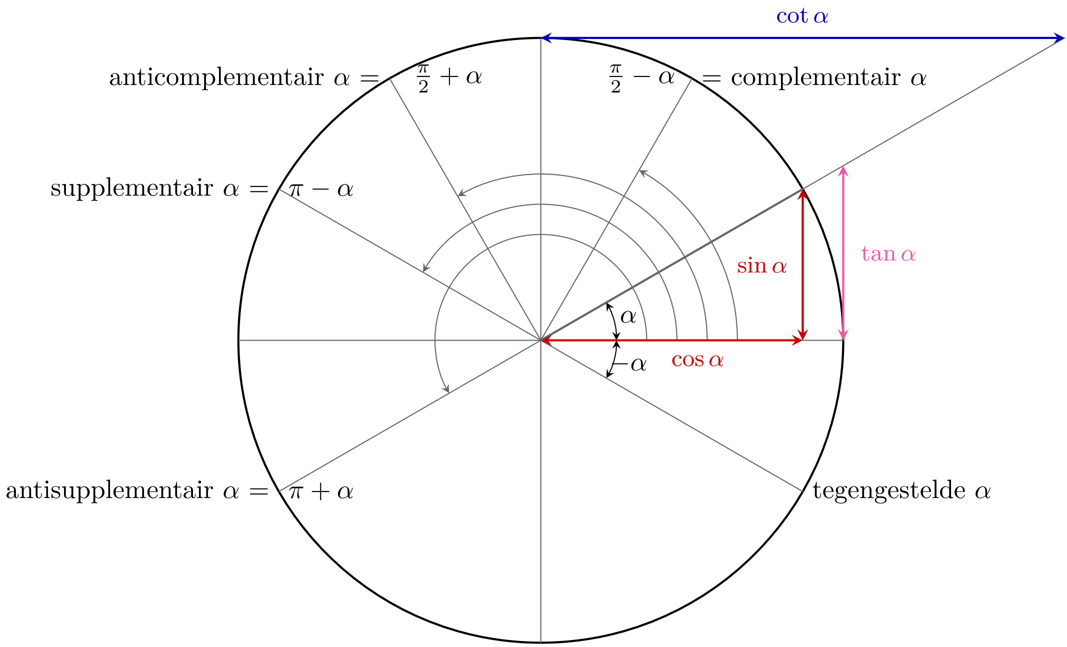


$\begin{array}{ccc} \csc\beta & sec\beta & \cot\beta \\ \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow \\ os & as & oa \\ \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ \sin\beta & \cos\beta & \tan\beta \end{array}$	waarin: $\begin{cases} o: & \text{overstaande rechthoekszijde} \\ s: & \text{schuine zijde (hypotenusa)} \\ a: & \text{aanliggende rechthoekszijde} \end{cases}$

$\sin\beta = \frac{b}{a}$	$\cos\beta = \frac{c}{a}$	$\tan\beta = \frac{b}{c}$
$\csc\beta = \frac{a}{b}$	$\sec\beta = \frac{a}{c}$	$\cot\beta = \frac{c}{b}$
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$
$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$	

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ $\boxed{\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha}$ $\boxed{1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha}$

5.3 Verwante hoeken

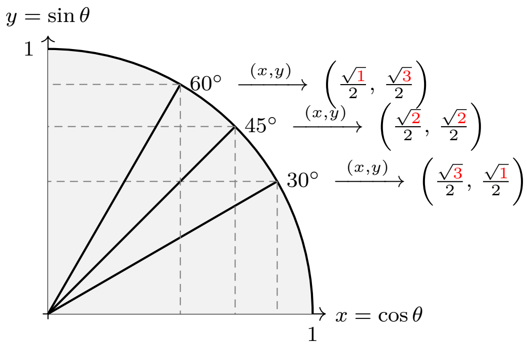


gelijkehoeken	supplementairehoeken	complementairehoeken
$\sin(\alpha+k2\pi)=\sin\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\alpha+k2\pi)=\cos\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(\alpha+k2\pi)=\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(\alpha+k2\pi)=\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$
$\sec(\alpha+k2\pi)=\sec\alpha$	$\sec(\pi-\alpha)=-\sec\alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\csc\alpha$
$\csc(\alpha+k2\pi)=\csc\alpha$	$\csc(\pi-\alpha)=\csc\alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\alpha$

tegengesteldehoeken	antisupplementairehoeken	anticomplementairehoeken
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$
$\sec(-\alpha)=\sec\alpha$	$\sec(\pi+\alpha)=-\sec\alpha$	$\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\csc\alpha$
$\csc(-\alpha)=-\csc\alpha$	$\csc(\pi+\alpha)=-\csc\alpha$	$\csc\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sec\alpha$

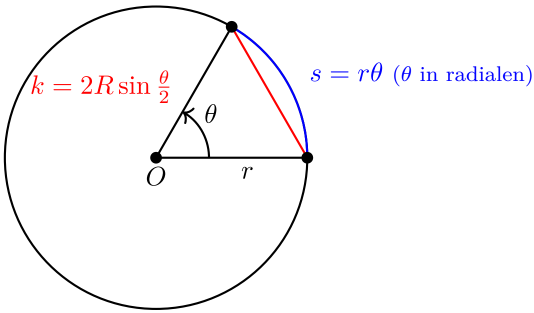
5.4 Belangrijke goniometrische waarden

Angle	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	/	0	/	0



θ	$\cos\theta$	$\sin\theta$
$60°$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$

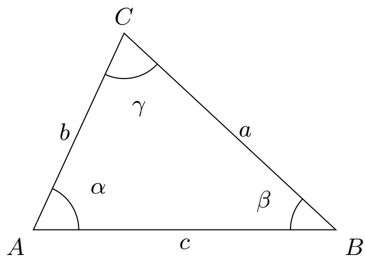
5.5 Radiaal



5.6 Goniometrische formules

Sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

Cosinusregel: $\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$



$Som-\ en\ verschilformules$	$Verdubbelingsformules$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $(hetero's)$	$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ $(homo's)$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $= 1 - 2\sin^2\alpha \quad (*)$ $= 2\cos^2\alpha - 1 \quad (**)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad (*)$	Verdubbelingsformules $f(\tan\alpha)$	$t-formules,\quad \tan\dfrac{\alpha}{2} = t$
$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad (**)$	$\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$	$\sin\alpha = \dfrac{2t}{1 + t^2}$
$Halveringsformules$	$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$	$\cos\alpha = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$	$\tan\alpha = \dfrac{2t}{1 - t^2}$
$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$		

	Omgekeerde formules van Simpson
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ $\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

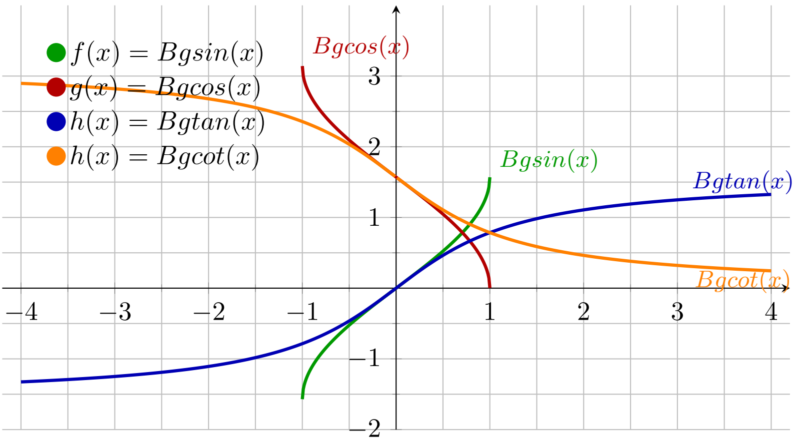
Formules van Simpson	
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

5.7 Cyclometrische formules

$$
\begin{aligned}
y = Bgsin x &\Leftrightarrow x = \sin y, \quad \text{met } y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \ x \in [-1,1] \\
y = Bgcos x &\Leftrightarrow x = \cos y, \quad \text{met } y \in [0,\pi], \ x \in [-1,1] \\
y = Bgtan x &\Leftrightarrow x = \tan y, \quad \text{met } y \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[, \ x \in \mathbb{R} \\
y = Bgcot x &\Leftrightarrow x = \cot y, \quad \text{met } y \in \left]0,\pi\right[, \ x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^+ : \quad Bgcot(a) = Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_0^- : \quad Bgcot(a) = \pi + Bgtan\left(\frac{1}{a}\right)$$



$\sin\big(Bgsin(x)\big) = x,\ x \in [-1,1]$ $\cos\big(Bgcos(x)\big) = x,\ x \in [-1,1]$ $\tan\big(Bgtan(x)\big) = x,\ x \in \mathbb{R}$ $\cot\big(Bgcot(x)\big) = x,\ x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(\sin(x)) = x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $Bgcos(\cos(x)) = x, 0 \le x \le \pi$ $Bgtan(\tan(x)) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $Bgcot(\cot(x)) = x, 0 < x < \pi$
$\cos(bgsin(x)) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$ $\sin(bgcos(x)) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$ $\cot(bgtan(x)) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\tan(bgcot(x)) = \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_0$ $\cos\big(Bgtan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R}$ $\sin\big(Bgtan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ x \in \mathbb{R}$	$Bgsin(-x) = -Bgsin(x),\ x \in [-1,1]$ $Bgcos(-x) = \pi - Bgcos(x),\ x \in [-1,1]$ $Bgsin(x) + Bgcos(x) = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1,1]$ $Bgcot(x) + Bgtan(x) = \frac{\pi}{2},\ x \in \mathbb{R}$

6 Exponentiële en logaritmische functies

$${}^{a}\log x = y \Leftrightarrow x = a^{y}, (x > 0, a > 0, a \neq 1)$$

$${}^{a}\log a^{y} = y \quad \Leftrightarrow x = a^{{}^{a}\log x}$$

$${}^{a}\log(x_1 x_2) = {}^{a}\log x_1 + {}^{a}\log x_2$$

$${}^{a}\log\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = {}^{a}\log x_1 - {}^{a}\log x_2$$

$${}^{a}\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\,{}^{a}\log x$$

$${}^{a}\log(x^{n}) = n\,{}^{a}\log x$$

$${}^{b}\log x = \frac{{}^{a}\log x}{{}^{a}\log b}$$

$${}^{b}\log a = \frac{1}{{}^{a}\log b}$$

$$e = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$$

$$e \approx 2{,}718\ldots$$

$$\text{(L'Hôpital)} \ \left(\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$$

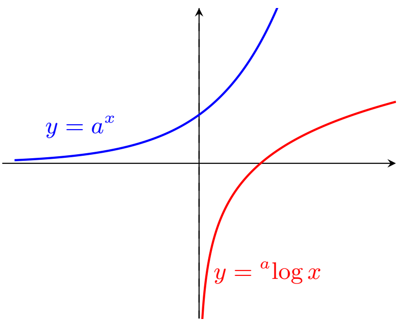
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cdots}}}}}$$

$$e - 1 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+}}}}}}}}}$$

$a > 1$



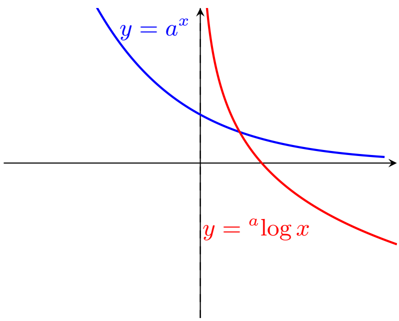
$$\lim_{x\to-\infty} a^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} {}^{a}\log x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} {}^{a}\log x = +\infty$$

$0 < a < 1$



$$\lim_{x\to-\infty} a^{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^{+}} {}^{a}\log x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} {}^{a}\log x = -\infty$$

7 Matrices

7.1 Symbolen

A	matrix A
a_{ij}	het element op rij i en in kolom j
A_{ij}	cofactor van het element op rij i en in kolom j
I	de eenheidsmatrix
A^{-1}	de inverse matrix
A^T	de getransponeerde matrix
$\det A$	determinant van de vierkante matrix A

7.2 Rekenregels

Opgelet: onderstaande regels gelden enkel onder de juiste voorwaarden.

$A + B = B + A$	commutativiteit van de optelling
$A + (B + C) = (A + B) + C$	associativiteit van de optelling
$A \cdot I = A = I \cdot A$	eenheidsmatrix
$A(BC) = (AB)C$	associativiteit van de vermenigvuldiging
$A(B + C) = AB + AC$	linker distributiviteit
$(B + C)A = BA + CA$	rechter distributiviteit
$AB \neq BA$	niet-commutatief in het algemeen
$(A + B)^T = A^T + B^T$	
$(cA)^T = cA^T$	
$(AC)^T = C^T A^T$	
$(A^T)^T = A$	
$I^T = I$	
$A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$	
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$	
$B = C \;\Rightarrow\; AB = AC$ en $BA = CA$	A regulier

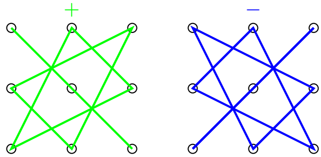
7.3 Cofactor-tekenpatroon $(-1)^{i+j}$

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

8 Determinanten

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{Sarrus}}$$



9 Stelsels oplossen

9.1 Rang van een matrix

rang(A) = het aantal lineair onafhankelijke rijen van A

1. Breng de matrix in **gereduceerde rij-echelonvorm (RREF=Reduced Row-Echelon Form).**

2. Het aantal niet-nulrijen in deze trapvorm is de rang van A.

9.2 n vergelijkingen met n onbekenden, $|A| \neq 0$ (Cramer)

Voor $AX = B$ met $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en $\det(A) \neq 0$ geldt

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

waar A_j ontstaat uit A door de j-de kolom te vervangen door de vector B.

9.3 Homogene 2×3-stelsels

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \end{aligned}$$

Indien $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$, dan is de oplossingenverzameling

$$V = \{\, \lambda \cdot (\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix},\ -\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix},\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}) \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}.$$

9.4 $n+1$ vergelijkingen met n onbekenden

Een stelsel van de vorm

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

heeft één oplossing $\Leftrightarrow$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

10 Meetkunde

Afstand 2 punten	$\lvert P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\rvert = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ $\lvert P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2)\rvert =$ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$
Midden v/e lijnstuk	$co(M) = (\frac{(x_1+x_2)}{2}, \frac{(y_1+y_2)}{2})$
Zwaartepunt v/e driehoek	$co(Z) = (\frac{(x_1+x_2+x_3)}{3}, \frac{(y_1+y_2+y_3)}{3})$

Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = m(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr punt met rico m	$y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$
Vergelijking v/e rechte dr snijpunt met x-as (r,0) en y-as (0,s)	$\frac{x}{r} + \frac{y}{s} = 1$
Hoek tussen twee rechten a,b met rico m1,m2	$\cos(\widehat{ab}) = \frac{\lvert 1+m_1m_2\rvert}{\sqrt{1+{m_1}^2}\sqrt{1+{m_2}^2}}$
Afstand tussen rechte a ↔ ux+vy+w=0 en P(x1,y1)	$d(P,a) = \frac{\lvert ux_1+vy_1+w\rvert}{\sqrt{u^2+v^2}}$

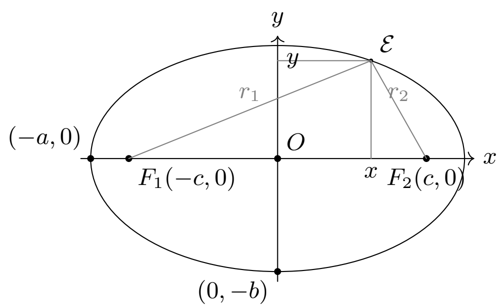
10.1 De cirkel

Cartesiaanse vergelijking	$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = r^2$
Algemene vergelijking	$x^2+y^2+2ax+2by+c=0 \quad \wedge \quad a^2+b^2-c \geq 0$
Parameter vergelijking	$\begin{cases} x = x_M + r.\cos t \\ y = y_M + r.\sin t \end{cases} \quad met\ t \in [0,2\pi[$

10.2 De parabool

Top vergelijking	$y^2 = 2px$
Parameter vergelijking	$x = 2p\lambda^2 \qquad met\ \lambda \in \mathbb{R}$ $y = 2p\lambda$

10.3 De ellips

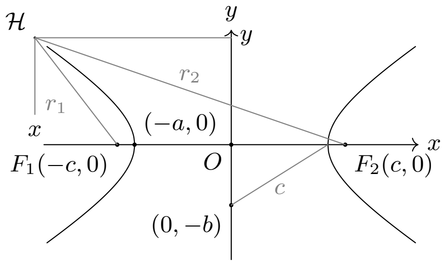
$Cartesiaansevgl.: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2}^2 = 1$ $Parametervgl.:$ $\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = b.\sin t \end{cases} \quad met\ t \in [0,2\pi[$	

10.4 De hyperbool

$$Cartesiaansevgl.: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2}^2 = 1$$

$$Parametervgl.:$$

$$\begin{cases} x = a.\sec t \\ y = b.\tan t \end{cases} \qquad met\ t \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$



10.5 Oppervlakte Formules

Vorm	**Formule**	**Variabelen**
Vierkant	$A = s^2$	s: zijlengte
Rechthoek	$A = l.w$	l: lengte, w: breedte
Driehoek	$A = \frac{1}{2}b.h$	b: basis, h: hoogte
Cirkel	$A = \pi r^2$	r: straal
Parallellogram	$A = b.h$	b: basis, h: hoogte
Trapezium	$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2).h$	b_1, b_2: bases, h: hoogte
Ellips	$A = \pi a.b$	a, b: halve grote en halve kleine as
Regelmatig Veelhoek	$A = \frac{1}{2}P.a$	P: omtrek, a: apothema

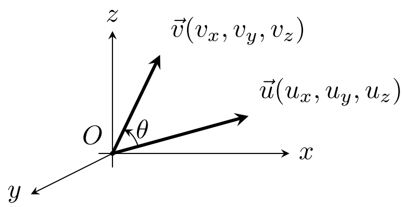
10.6 Volume Formules

Vorm	**Formule**	**Variabelen**
Kubus	$V = s^3$	s: zijlengte
Rechthoekig Prisma	$V = l \times w \times h$	l: lengte, w: breedte, h: hoogte
Bol	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	r: straal
Cilinder	$V = \pi r^2 h$	r: straal, h: hoogte
Kegel	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	r: straal, h: hoogte
Piramide	$V = \frac{1}{3}B \times h$	B: basisoppervlakte, h: hoogte
Ellipsoïde	$V = \frac{4}{3}\pi abc$	a, b, c: halve hoofdaslengtes
Prisma	$V = B \times h$	B: basisoppervlakte, h: hoogte

11 Ruimte meetkunde

11.1 Vectoren

11.1.1 Inwendige product (inproduct,scalaire product)



$$\vec{u} \cdot \vec{v} \;=\; \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta \;=\; u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$$

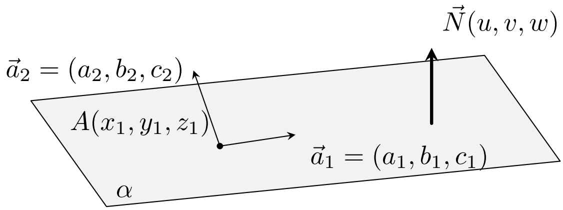
11.1.2 Vectorieel product van vectoren (kruisproduct)

$$\vec{u}\times\vec{v} \overset{\text{def}}{=} \big(u_y v_z - u_z v_y,\; u_z v_x - u_x v_z,\; u_x v_y - u_y v_x\big) = \left(\begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_z & u_x \\ v_z & v_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3$$

11.2 Rechte

$e \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + k \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$	$e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$

11.3 Vlak



$\alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + r \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$	$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$\alpha \leftrightarrow ux + vy + wz + t = 0$	$normaal \leftrightarrow \vec{N}(u,v,w)$

11.3.1 Snijlijn 2 vlakken

$\alpha \leftrightarrow u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ $\beta \leftrightarrow u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$	$d \leftrightarrow \begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0 \end{cases}$

11.3.2 Vlakkenwaaier van 2 vlakken

$$\boxed{k(u_1x + v_1y + w_1z + t_1) + m(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0 \quad (k, m \in \mathbb{R})}$$

11.3.3 Loodlijn op een vlak / loodvlak op een rechte

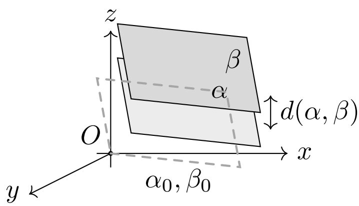
$e \leftrightarrow \frac{x-x_1}{u} = \frac{y-y_1}{v} = \frac{z-z_1}{w}$	$\alpha \leftrightarrow a(x-x_1) + b(y-y_1) + c(z-z_1) = 0$

11.3.4 Relatie tussen twee vlakken α, β in $\mathbb{R}^3$

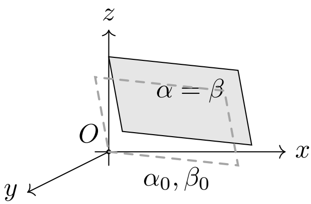
$$\alpha:\ u_1x+v_1y+w_1z+t_1=0 \qquad \beta:\ u_2x+v_2y+w_2z+t_2=0$$

$$\alpha_0:\ u_1x+v_1y+w_1z=0 \qquad \beta_0:\ u_2x+v_2y+w_2z=0 \qquad \text{(vlakken door } O\text{)}$$

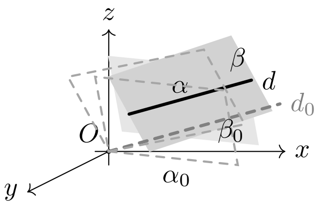
Evenwijdig, niet samenvallend



Samenvallend



Snijdend (lijn)



$$\alpha_0 \cap \beta_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & \vdots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{array} \end{array}$$

$$\alpha \cap \beta \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & t_1 & \vdots \\ u_2 & v_2 & w_2 & t_2 & \vdots \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \end{array}$$

RREF($\alpha_0 \cap \beta_0$)

$$\begin{bmatrix} u_0 & v_0 & w_0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 = \beta_0$$

RREF($\alpha_0 \cap \beta_0$)

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_0 \cap \beta_0 = d_0$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

RREF($\alpha \cap \beta$)

$$\begin{bmatrix} u' & v' & w' & t' & \vdots \\ 0 & v'' & w'' & t'' & \vdots \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = d$$

11.4 Bol

Bol met middelpunt $M(x_M, y_M, z_M)$ *en straal* $= r$

$$\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$$
$$\wedge \quad a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\mathrm{M}(-a, -b, -c) \quad \text{en} \quad r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$$

11.5 Basis reële functies

Functie	**Definitie**
Identiteitsfunctie	$f(x) = x$
Constante functie	$f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$
Lineaire functie	$f(x) = mx + b,\ m, b \in \mathbb{R}$
Kwadratische functie	$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
Cubische functie	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
Polynoomfunctie	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{R}$ $a_n \neq 0$
Rationale functie	$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ P(x), Q(x)$ zijn polynomen, $Q(x) \neq 0$
Exponentiële functie	$f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$
Logaritmische functie	$f(x) = \log_a(x),\ a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0$
Absolute-waarde functie	$f(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$
Goniometrische functies	$f(x) = \sin(x)$ $f(x) = \cos(x)$ $f(x) = \tan(x)\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Inverse goniometrische functies	$f(x) = \arcsin(x),\ x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arccos(x),\ x \in [-1, 1]$ $f(x) = \arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$
Hyperbolische functies	$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)},\ x \in \mathbb{R}$
Stukjesfunctie	$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$

12 Analyse

12.1 Limieten van rijen)

$\lim\limits_{n\to\pm\infty} (a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0) = \lim\limits_{n\to\pm\infty} a_m n^m$
$\lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{\left(a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0\right)}{(b_q n^p + b_{q-1} n^{p-1} + ... + b_1 n + b_0)} = \lim\limits_{n\to\pm\infty} \frac{a_m n^m}{b_q n^p}$

12.2 Limieten van functies

$\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x) . g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) . \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n \qquad (n \in {}_0)$
$\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$

12.3 Limieten van goniometrische functies

$\lim\limits_{x\to a} \sin(x) = \sin(a)$ $\lim\limits_{x\to a} \cos(x) = \cos(a)$	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

12.4 Methodes bij het berekenen van limieten van functies

Veeltermfunctie : $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$ Eindige a limiet = functiewaarde
Oneindige a limiet = limiet van de hoogstegraadsterm

Gebroken rationale functie :
Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
geval $\frac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
geval $\frac{0}{0}$	deel teller en noemer door $(x - a)$, bereken de limiet van de bekomen functie

Oneindige a

limiet = limiet van quotiënt hoogste graadstermen

Irrationale functie :
Eindige a

$a \in \text{dom } f(x)$	limiet = functiewaarde
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\dfrac{r}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	linker- en rechterlimiet zijn ∞; teken afleiden uit het teken van r en de noemer
$a \in \text{adh dom } f(x)$ $\dfrac{0}{0} \wedge r \in \mathbb{R}$	vermenigvuldig teller en noemer met de toegevoegde wortelvorm, deel teller en noemer door $(x - a)$, bereken de limiet van de bekomen functie
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Oneindige a

$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ en $f(\pm\infty)$ is te berekenen	limiet = resultaat berekening
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\dfrac{\infty}{\infty}$	zet in de teller en de noemer de hoogste macht van x voorop, vereenvoudig en bereken de limiet van de bekomen functie
$\pm\infty \in \text{adh dom } f(x)$ geval $\infty - \infty$	herleid tot het vorige geval door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegde wortelvorm
$a \notin \text{adh dom } f(x)$	geen limiet

Regel l'Hôptal:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \vee \quad \pm\infty$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bewerkingen met oneindig en onbepaalde vormen:

Bewerkingen	**Geen betekenis**
$x + (-\infty) = -\infty + x = (-\infty) + x$	$(+\infty) + (-\infty)$
$x + (+\infty) = +\infty + x = (+\infty) + x$	$(-\infty) + (+\infty)$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty$ als $x > 0$	$0 \cdot (+\infty), (+\infty) \cdot 0$
$x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty$ als $x < 0$	$0 \cdot (-\infty), (-\infty) \cdot 0$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty$ als $x > 0$	$\frac{1}{0}$
$x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty$ als $x < 0$	$1^{+\infty}$
$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	0^0
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(+\infty)^0$
$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	
$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$	
$(+\infty)^n = +\infty$ als n even is	
$(-\infty)^n = -\infty$ als n oneven is	
$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$	
$\sqrt[n]{+\infty} = +\infty$	
$\sqrt[n]{-\infty} = -\infty$ als n oneven is	

12.5 Afgeleiden

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$$

$$g(x) = u, \qquad D_x[f(g(x))] = D_x[f(u)] = \frac{d[f(u)]}{dx} = \frac{d[f(u)]}{du} \cdot \frac{du}{dx} = D_u[f(u)] \cdot D_x[u]$$

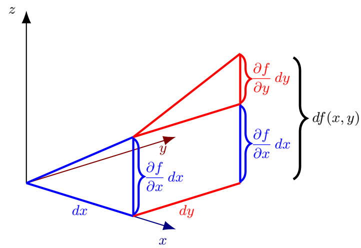
12.5.1 Differentiaal

$$df(x) = Df(x) \cdot dx$$

12.5.2 Partiële afgeleiden en totale differentiaal

$$z = f(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \end{cases}$$

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$



12.5.3 Afgeleiden - differentialen

$Dc = 0,\ D(cf) = cDf$	$df = 0$
$D(f \pm g) = Df \pm Dg$	$d(f \pm g) = df \pm dg$
$D(fg) = fDg + gDf$	$d(fg) = f\,dg + g\,df$
$D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gDf - fDg}{g^2}$	$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$
$D(x^n) = nx^{n-1}$	$d(x^n) = nx^{n-1}dx$
$D(\sin x) = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x\,dx$
$D(\cos x) = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x\,dx$
$D(\tan x) = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\tan x) = \sec^2 x\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x}$
$D(\cot x) = -\csc^2 x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\cot x) = -\csc^2 x\,dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$
$D(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\arctan x) = \frac{dx}{1+x^2}$
$D(\sinh x) = \cosh x$	$d(\sinh x) = \cosh x\,dx$
$D(\cosh x) = \sinh x$	$d(\cosh x) = \sinh x\,dx$
$D(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$d(\tanh x) = \frac{dx}{\cosh^2 x}$
$D(e^x) = e^x,\ D(a^x) = a^x \ln a$	$d(e^x) = e^x\,dx,\ d(a^x) = a^x \ln a\,dx$
$D(\ln x) = \frac{1}{x}, \quad D(\ln \lvert x\rvert) = \frac{1}{x}$	$d(\ln \lvert x\rvert) = \frac{dx}{x}$
$D({}^a\log x) = \frac{1}{x \ln a}$	$d({}^a\log x) = \frac{dx}{x \ln a}$
$D\left(\ln \lvert x + \sqrt{x^2+k}\rvert\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$d\left(\ln \lvert x + \sqrt{x^2+k}\rvert\right) = \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}}$
$D(u^v) = vu^{v-1}Du + u^v \ln u\,Dv$	$d(u^v) = vu^{v-1}du + u^v \ln u\,dv$

12.6 Afgeleiden - fundamentele integralen

Bg = arc

Afgeleiden	**Integraal**
$D[c] = 0$	$\int dx = x + C$
$D[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$D[\sin x] = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$D[\cos x] = -\sin x$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
$D[\tan x] = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$
$D[\cot x] = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$
$D[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$D[\arccos x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C$
$D[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$D[e^x] = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$D[a^x] = a^x \ln a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$D[\ln x] = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$
$D\left[\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + k} \right\rvert\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2+k}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 + k} \right\rvert + C$
$D^a \log x = \frac{1}{x \ln a}$	$*$

12.7 Partiële integratie

$$\int f(x) \; d(g(x)) = f(x).g(x) - \int g(x) \; d(f(x))$$

$$\int u \; dv = u.v - \int v \; du$$

12.8 Integralen

12.8.1 Formules voor goniometrische integralen

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

$m \vee n$ *oneven*	$m \wedge n$ even	
substitutie	$m \wedge n$ positief	$m \vee n$ negatief
$t = \sin x \ \vee \ \cos x$	$\sin^2 \alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$	$\dfrac{dx}{\cos x} = d(\tan x) \quad \vee \quad \dfrac{dx}{\sin x} = -\,d(\cot x)$
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$	*eventueel* $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha,\ 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x} \qquad \wedge \ \sin x = t \qquad \int \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \xrightarrow{P.I} \cdots \xrightarrow{\text{terugkeer v/d integrand}} \cdots$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c \quad , \quad \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \tan^n x \, dx \ , \ \int \cot^n x \, dx \quad n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \ , \qquad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

$$\sin(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\Big[\sin\big(mx - nx\big) + \sin\big(mx + nx\big)\Big]$$

$$\cos(mx)\cos(nx) = \tfrac{1}{2}\Big[\cos\big(mx - nx\big) + \cos\big(mx + nx\big)\Big]$$

$$\sin(mx)\sin(nx) = \tfrac{1}{2}\Big[\cos\big(mx - nx\big) - \cos\big(mx + nx\big)\Big]$$

Integralen van rationale functies van cosinus en sinus

$$t = \tan\frac{x}{2} \ \Rightarrow \ \frac{x}{2} = \operatorname{Bgtan} t \ \Rightarrow \ x = 2\ \operatorname{Bgtan} t \Rightarrow \boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

$$\text{Stel: } 2\alpha = x \text{ en } \tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \begin{cases} \tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\[2ex] \sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} \\[2ex] \cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}, \\[2ex] \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\[2ex] \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}}$$

Integralen van een rationale functie $f(\tan x)$ omvormen naar $f(t)$

$$t = \tan x \ \Rightarrow \ dt = \frac{dx}{\cos^2 x} = (1 + \tan^2 x)\, dx \ \Rightarrow \ dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

12.8.2 Integralen van irrationale functies

Integrand	Substitutie
$\sqrt[n]{ax+b}$	$ax+b=t^n, \quad t \geq 0$
$f\left(\sqrt[n_1]{y},\ \sqrt[n_2]{y}, \ldots,\ \sqrt[n_i]{y}\right),\ y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}=t^m, \quad m = \text{k. g. v.}(n_1, \ldots, n_i)$
$\sqrt{a^2-u^2},\ a>0$	$u=a\sin t, \quad t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{u^2-a^2},\ a>0$	$u=a\sec t, \quad t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
$\sqrt{u^2+a^2},\ a>0$	$u=a\tan t, \quad t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

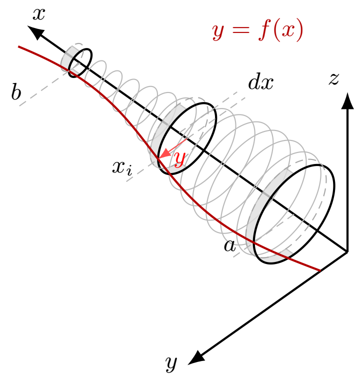
12.8.3 Integralen: inhoud en lengte

Omwenteling rond de x-as
Voor $y = f(x) \geq 0$ op $[a,b]$ is het volume van het omwentelingslichaam (washers-methode):

$$V = \int_a^b \pi\, y^2\, dx.$$

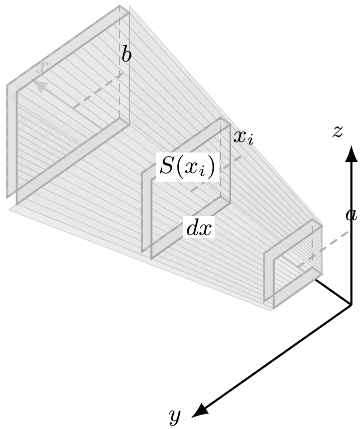
De manteloppervlakte :

$$2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



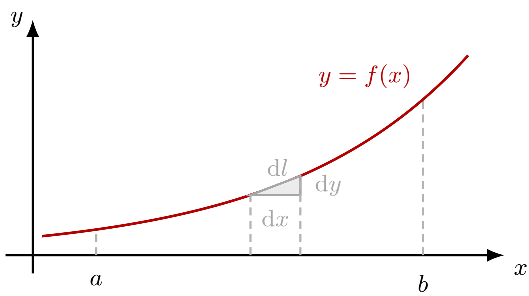
Inhoud bepaald door $S(x)$
Als de doorsnede loodrecht op de x-as op positie x oppervlakte $S(x)$ heeft, dan:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx.$$



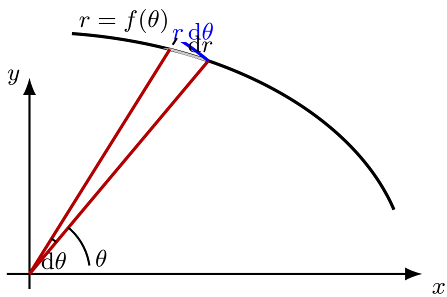
Lengte van een kromme
Voor $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, geldt de booglengte:

$$\int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$



Polaire booglengte
Voor een kromme $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$



13 Combinatieleer

13.1 Keuzes zonder herhaling

Variaties	Permutaties	Combinaties
geordende keuze (*volgorde van belang*) van p verschillende elementen uit n elementen	**Rangschikken** (*volgorde van belang*) van n verschillende elementen	**ongeordende keuze** (*volgorde van geen belang*) van p verschillende elementen uit n elementen
$V_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$	$C_n^p = \frac{V_n^p}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
Internationale notatie: $V_n^p = {}_nP_p = P(n,p)$	*Internationale notatie:* $P_n = {}_nP_n = P(n) = n!$	*Internationale notatie:* $C_n^p = C(n,p) = \binom{n}{p}$

13.2 Keuzes met herhaling

Variaties met herhaling	Permutaties met herhaling	Combinaties met herhaling
geordende keuze (*volgorde van belang*) van p elementen uit n elementen *(herhaling toegestaan)*	**rangschikken van n elementen** waarvan sommige *identiek* zijn	**ongeordende keuze** (*volgorde van geen belang*) van p elementen uit n soorten elementen *(herhaling toegestaan)*
$\overline{V}_n^p = n^p$	$\overline{P}_n^{m_1, m_2, \cdots m_k} = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_k!}$ met $m_1 + \cdots + m_k = n$	$\overline{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\, p!}$
Internationale notatie: $\overline{V}_n^p = n^p$	*Internationale notatie:*	*Internationale notatie:* $\overline{C}_n^p = {}_nH_p = \binom{n+p-1}{p}$

14 Statistiek

Discrete data: slechts een eindig of telbaar aantal waarden is mogelijk.

Continue data: variabele die tussen twee waarden oneindig # waarden kan aannemen.

Steekproef	Populatie	Normaalverdeling
$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$	$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2$	$N(\mu, \sigma)$

Discrete	Continue
$E[X] = \mu_X = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot p_i$	$E[X] = \mu_X = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$
$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_X)^2 \cdot p_i$	$\sigma_X^2 = \int_a^b (x - \mu_X)^2 \cdot f(x)\, dx$
$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i\right) - \mu_X^2$	$= \int_a^b x^2 \cdot f(x)\, dx - \mu_X^2$

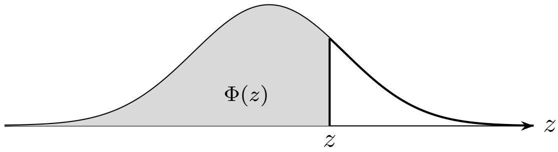
Rekenregels		
$T = X + a$	$T = aX$	$T = aX + bY$
$\mu_T = \mu_X + a$	$\mu_T = a \cdot \mu_X$	$\mu_T = a\mu_X + b\mu_Y$
$\sigma_T = \sigma_X$	$\sigma_T = \lvert a\rvert \cdot \sigma_X$	$\sigma_T = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_X^2 + b^2 \cdot \sigma_Y^2}$

Rekenregels	
$S = X_1 + \cdots + X_n$	$\left.\begin{array}{l} \overline{X} = \frac{(X_1 + \ldots + X_n)}{n}, \quad \mu_{\overline{X}} = \frac{1}{n} n\mu_X \\ \sigma_{\overline{X}}{}^2 = \frac{1}{n^2} n\sigma_X{}^2 = \frac{1}{n}\sigma_X{}^2 \Rightarrow \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \end{array}\right\} CLT \rightarrow \overline{X} \approx N(\mu_{\overline{X}}, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$
$\mu_S = E(S) = n\mu_X$	
$\sigma_S^2 = n\sigma_X^2 \;\Rightarrow\; \sigma_S = \sqrt{n} \cdot \sigma_X$	

Uniforme continue	Uniforme discrete
$\mu = \frac{a+b}{2}$	$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
$\sigma = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$
	$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2) - \mu^2$

Bernoulli	Binomiaal
$\mu = p$	$P(X = i) = C_i^n \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$
$\sigma = \sqrt{p \cdot q}$	$\left\{\begin{array}{l} n \geq 20, \\ n\,p \geq 5 \;\wedge\; n\,q \geq 5 \end{array}\right. \Rightarrow B(n,p) \approx N(np, \sqrt{npq})$

14.1 Standaardnormale verdeling



$$\Phi(z) = \Pr(Z \leq z) \quad \text{voor} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

De rij geeft het eerste decimaal, de kolomkop het tweede decimaal.

Z-tabel

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

14.2 Schatters, betrouwbaarheidsintervallen

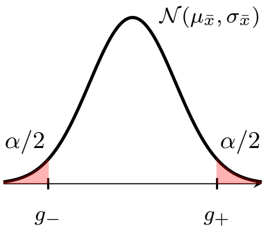
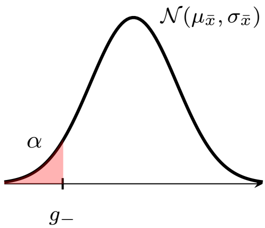
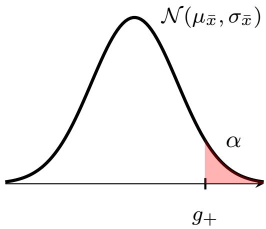
Puntschatting	**Populatieparameter**	**Schatter uit de steekproef**
	p (proportie) μ (gemiddelde) σ (standaardafwijking)	$\hat{p}$ $\bar{x}$ of $\hat{\mu}$ s of $\hat{\sigma}$
$\alpha\%$ - betrouwbaarheidsinterval	Betrouwbaarheid α	$\begin{array}{c\|ccccc} & 80\% & 90\% & 95\% & 98\% & 99\% \\ \hline z_\alpha & 1{,}28 & 1{,}65 & 1{,}96 & 2{,}33 & 2{,}58 \end{array}$
Intervalschatting proportie	$\mu_{\hat{p}} = p, \quad \sigma_{\hat{p}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{pq}$	Betrouwbaarheidsinterval: $\hat{p} \pm z_\alpha \cdot \sigma_{\hat{p}}$
Intervalschatting normaalverdeling		Betrouwbaarheidsinterval: $\bar{x} \pm z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

14.3 Regressie

Regressielijn	$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}, \quad y - \bar{y} = \frac{S_{XY}^2}{S_X^2}(x - \bar{x})$
Covariantie	$\text{cov}(X,Y) = S_{XY}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
Correlatiecoëfficiënt	$r = \frac{S_{XY}^2}{S_X S_Y}$

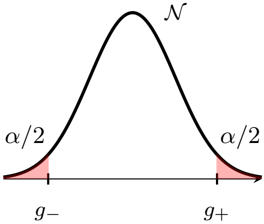
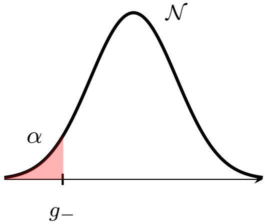
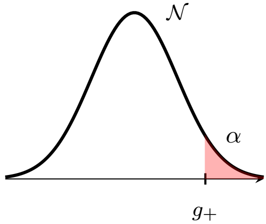
14.4 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling

Dit is een test van een steekproefgemiddelde $\bar{x}$ volgens steekproefgemiddeldeverdeling $X \approx \mathcal{N}(\mu_{\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}}) \approx \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ in de populatie $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Gebruikmakend van significantieniveau α.

Twee-zijdige test	**Links-zijdige test**	**Rechts-zijdige test**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_A : \mu > \mu_0$
		
$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_- \ \vee \ \bar{x} \geq g_+$	$H_A : z_{\bar{x}} \leq g_-$	$H_A : z_{\bar{x}} \geq g_+$

14.5 Test van een hypothese over een populatieproportie

Dit is een test op een populatieproportie $\hat{p}$ volgens een binomiaalverdeling $X \approx \mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{n}.\sqrt{p(1-p)})$. Gebruikmakend van significantieniveau α.

Twee-zijdige test	**Links-zijdige test**	**Rechts-zijdige test**
$H_0 : p = p_0$ $H_A : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_A : p > p_0$
		
$H_A : \hat{p} \leq g_- \;\vee\; \hat{p} \geq g_+$	$H_A : \hat{p} \leq g_-$	$H_A : \hat{p} \geq g_+$

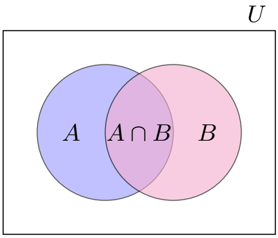
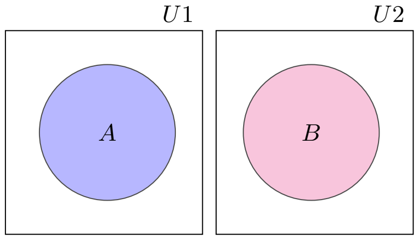
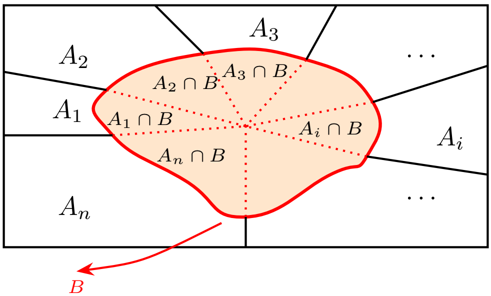
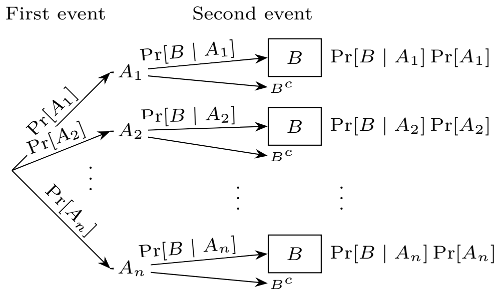
14.6 Test van een hypothese over het gemiddelde van een normaalverdeling via de P-waarde

Twee-zijdige toets	**Links éénzijdige toets**	**Rechts éénzijdige toets**
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$
Als $\bar{x} < \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \bar{x})$ Als $\bar{x} > \mu \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \bar{x})$	$P = P(X \leq \bar{x})$	$P = P(X \geq \bar{x})$
$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$	$P \leq \alpha$

14.7 Test van een hypothese over een populatieproportie via de P-waarde

Twee-zijdige toets	**Linkszijdige toets**	**Rechtszijdige toets**
$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p \neq p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p < p_0$	$H_0 : p = p_0$ $H_1 : p > p_0$
Als $\hat{p} < p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \leq \hat{p})$ Als $\hat{p} > p \rightarrow P = 2 \cdot P(X \geq \hat{p})$	$P = P(X \leq \hat{p})$	$P = P(X \geq \hat{p})$
Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$	Vergelijk: $P \leq \alpha$

15 Kans

Willekeurige en onafhankelijke gebeurtenissen	
Willekeurig	**Onafhankelijk**
 $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	 $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B)$
Voorwaardelijke kans	
$P(B \mid A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$	$P(B \mid A) = \dfrac{P(B \wedge A)}{P(A)}$
Productwet	
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	$P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$
Wet van de totale kans	
Willekeurig	**Onafhankelijk**
	
$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B \mid A_i)$	
Regel van Bayes	
$P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i \wedge B)}{P(B)} = \dfrac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B \mid A_i)}$	

16 Diversen

16.1 Wiskundige symbolen (ISO 80000-2)

16.1.1 Verzamelingen

$\in$	is een element van de verzameling
$\notin$	is geen element van de verzameling
$\{a, b, c, \ldots\}$	verzameling door opsomming
$\{x \mid p(x)\}$	verzameling van x met eigenschap $p(x)$
$\varnothing$	de lege verzameling
$\mathbb{N}$	natuurlijke getallen $(0, 1, 2, \ldots)$
$\mathbb{Z}$	gehele getallen $(\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$
$\mathbb{Q}$	rationale getallen (breuken van gehele getallen)
$\mathbb{R}$	reële getallen
$\mathbb{C}$	complexe getallen
$B \subseteq A$	B is deelverzameling van A (mag samenvallen)
$B \subset A$	B is strikte deelverzameling van A
$A \cup B$	unie van A en B
$A \cap B$	doorsnede van A en B
$A \setminus B$	verschil $A - B$ (in A maar niet in B)
A^c of $\overline{A}$	complement van A in universum U
(a, b)	geordend paar
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	geordend n-tal
$A \times B$	cartesisch product van A en B
$\#A$	aantal elementen (cardinaliteit) van A

16.1.2 Logische symbolen

$p \wedge q$	conjunctie: p en q zijn beide waar
$p \vee q$	disjunctie: p of q is waar (of beide)
$\neg p$	negatie: p is niet waar
$p \Rightarrow q$	implicatie: als p, dan q
$p \Leftrightarrow q$	equivalentie: p en q gelijkwaardig
$\forall x$	universele kwantor: voor alle x
$\exists x$	existentiële kwantor: er bestaat (minstens één) x

16.1.3 Diverse symbolen

$a = b$	a is gelijk aan b
$a \neq b$	a is niet gelijk aan b
$a \coloneqq b$	a is per definitie gelijk aan b
$a \approx b$	a is bij benadering gelijk aan b
$a < b$	a is strikt kleiner dan b
$a > b$	a is strikt groter dan b
$a \leq b$	a is kleiner of gelijk aan b
$a \geq b$	a is groter of gelijk aan b
∞	oneindig

16.1.4 Bewerkingen

$a + b$	optelling
$a - b$	aftrekking
$a \cdot b,\ a \times b,\ a * b$	vermenigvuldiging
$\frac{a}{b},\ a/b$	deling
a^p	a tot de macht p
$\sqrt{a}, a^{\frac{1}{2}}$	vierkantswortel uit a
$\sqrt[p]{a}, a^{\frac{1}{p}}$	p-de machtswortel uit a
$\lvert a\rvert$	absolute waarde van a
$\operatorname{sgn}(a)$	signum van a: (1 als $a > 0$, 0 als $a = 0$, -1 als $a < 0$)
$\overline{a}$	gemiddelde/verwachting (contextafhankelijk)
$n!$	n-faculteit; $n! = n(n-1)\ldots 2 \cdot 1$
$\binom{n}{k}$	binomiaalcoëfficiënt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
$\lfloor a \rfloor$	grootste geheel getal $\leq a$ (vloer)
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	som: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	product: $a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$

16.1.5 Functies & analyse

f	functie f
$f(x)$	functiewaarde
$[f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$	verschil gebruikt bij integralen
$g \circ f$	samengestelde functie: $g(f(x))$
$x \to a$	x streeft naar a
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	limiet van $f(x)$ voor $x \to a$
Δx	toename van x
$Df,\ f',\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	afgeleide van f naar x
$Df(a),\ f'(a),\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right\rvert_{x=a}$	waarde van de afgeleide bij $x = a$
$\frac{d^n f}{dx^n},\ f^{(n)},\ D^n f$	n-de afgeleide van f
$\frac{\partial f}{\partial x}$	partiële afgeleide van f naar x
$\mathrm{d}f$	differentiaal van f: $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$
$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	onbepaalde integraal (primitieven)
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	bepaalde integraal over $[a, b]$

16.1.6 Exponentiële en logaritmische functies

e	basis van de natuurlijke logaritmen
e^x	exponentiële functie met grondtal e
a^x	exponentiële functie met grondtal $a > 0,\ a \neq 1$
$\log_a x$	logaritme met grondtal a
$\ln x$	natuurlijke logaritme van x
$\log_{10}, \log, \lg x$	decimale (Briggs) logaritme (grondtal 10)

16.1.7 Goniometrische en hyperbolische functies

π	verhouding tussen omtrek en middellijn van een cirkel
$\sin x,\ \cos x,\ \tan x,\ \cot x$	sinus, cosinus, tangens, cotangens
$\sec x = \dfrac{1}{\cos x},\ \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$	secans, cosecans
$\arcsin x,\ \arccos x,\ \arctan x,\ \operatorname{arccot} x$	inverse goniometrische functies
$\operatorname{arcsec} x,\ \operatorname{arccsc} x$	inverse secans en cosecans
$\sinh x,\ \cosh x,\ \tanh x,\ \coth x$	hyperbolische functies
$\operatorname{sech} x,\ \operatorname{csch} x$	hyperbolische secans, cosecans

16.1.8 Complexe getallen

i, j	imaginaire eenheid ($\mathrm{i}^2 = -1$; j in elektronica)
$z = a + b\,\mathrm{i}$	complex getal z
$\Re z,\ \Im z$	reëel respectievelijk imaginair deel van z
$\lvert z \rvert$	modulus van z
$\arg z$	argument van z
z^*	geconjugeerd: $a - b\,\mathrm{i}$

16.2 Griekse alfabet

A	α	alfa	Δ	δ	delta	Θ	θ	thèta	Λ	λ	lambda
B	β	bèta	**E**	ε	epsilon	**I**	ι	iota	**M**	μ	mu
Γ	γ	gamma	**Z**	ζ	zèta	**K**	κ	kappa	**N**	ν	nu
O	o	omikron	Ξ	ξ	xi	Π	π	pi	**P**	ρ	rho
Σ	σ	sigma	**T**	τ	tau	Υ	υ	ypsilon	Φ	ϕ	phi
X	χ	chi	Ψ	ψ	psi	Ω	ω	omega	**H**	η	èta

16.3 Eenheden en hun veelvouden

10^n	Prefix	Symbool	Naam	Decimaal equivalent
10^{24}	yotta	Y	quadriljoen	1 000 000 000 000 000 000 000 000
10^{21}	zetta	Z	triljard	1 000 000 000 000 000 000 000
10^{18}	exa	E	triljoen	1 000 000 000 000 000 000
10^{15}	peta	P	biljard	1 000 000 000 000 000
10^{12}	tera	T	biljoen	1 000 000 000 000
10^{9}	giga	G	miljard	1 000 000 000
10^{6}	mega	M	miljoen	1 000 000
10^{3}	kilo	k	duizend	1 000
10^{2}	hecto	h	honderd	100
10^{1}	deca	da	tien	10
10^{-1}	deci	d	een tiende	0,1
10^{-2}	centi	c	een honderste	0,01
10^{-3}	milli	m	een duizendste	0,001
10^{-6}	micro	μ	een miljoenste	0,000 001
10^{-9}	nano	n	een miljardste	0,000 000 001
10^{-12}	pico	p	een biljoenste	0,000 000 000 001
10^{-15}	femto	f	een biljardste	0,000 000 000 000 001
10^{-18}	atto	a	een triljoenste	0,000 000 000 000 000 001
10^{-21}	zepto	z	een triljardste	0,000 000 000 000 000 000 001
10^{-24}	yocto	y	een quadriljoenste	0,000 000 000 000 000 000 000 001

De taalkundige regels zijn als volgt. Voluit geschreven prefixen beginnen altijd met een kleine letter: *picofarad, milligram, centimeter, kilovolt, megabyte, gigawatt.*

De afgekorte prefixen hebben een kleine letter tot en met kilo en daarboven een hoofdletter: *pF, mg, cm, kV, Mb, GW.*

Hier moet goed op gelet worden want het kan grote verschillen in betekenis veroorzaken: de notatie **mW** betekent *milliwatt* en **MW** *Megawatt.*

Voor de eenheden en grootheden is de regel dat wanneer deze van een persoonsnaam afstammen, zowel voluit geschreven als afgekort een hoofdletter wordt gebruikt, en anders een kleine letter: *Farad, gram, meter, Volt, byte, Watt.*

16.4 Het aanpakken van problemen

- Maak een tekening, een schets of een schematische voorstelling.
- Probeer met een **getallenvoorbeeld** / trial and error.
- Werk omgekeerd — werk van achter naar voor.
- Gebruik alle gegevens.
- Splits het probleem op in deelproblemen.
- Stel het probleem voor als opgelost.
- Los een (verwant) eenvoudiger probleem op.
- Zoek een patroon.
- Teken een hulplijn.
- Laat tijdelijk één van de voorwaarden vallen.
- Maak een blikwissel.