Práctica 1 – Números reales y sucesiones

1 A partir de los axiomas de cuerpo, demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

(a) $0 \cdot a = 0$.
(b) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.
(c) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.
(d) $(-1) \cdot a = -a$.
(e) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$, y $(-a) \cdot (-b) = ab$.

2 A partir de los axiomas de cuerpo ordenado, demostrar que las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

(a) Si $a \leq b$ y $c \leq d$ entonces $a + c \leq b + d$.
(b) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
(c) Si $a < b$, entonces $-b < -a$.
(d) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
(e) $ab > 0$ si y sólo si a y b son ambos positivos o ambos negativos.
(f) Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$.
(g) Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces $a = b = 0$.

3 Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

(a) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 3| < 1\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} : |x + 4| \geq 1\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} : |x| = |x + 4|\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} : |x| > |x + 4|\}$

4 (a) Determinar condiciones necesarias y suficientes sobre a y b en $\mathbb{R}$ para que se verifiquen cada una de las siguientes igualdades:

i) $|a + b| = |a| + |b|$
ii) $|a - b| = |a| + |b|$

(b) Probar que para todos a y b en $\mathbb{R}$ vale $||a| - |b|| \leq |a - b|$ y determinar todos los valores de a y b para los cuales vale la igualdad.

5 Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, y sea s una cota superior de A. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) Si $t \in \mathbb{R}$ es tal que para todo $a \in A$ se cumple que $a \leq t$, entonces $s \leq t$.
(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $a_\varepsilon \in A$ tal que $a_\varepsilon > s - \varepsilon$.

6 Sean A y B dos subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \subseteq B$. Supongamos que B es acotado.

(a) Demostrar que A es acotado.
(b) Determinar (y demostrar) las relaciones de orden entre los cuatro números

$$\sup(A), \qquad \inf(A), \qquad \sup(B), \qquad \inf(B).$$

¿Qué sucede si B no está acotado superior o inferiormente?

7 Hallar, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

(a) $A_1 = (a, b]$.

(b) $A_2 = \left\{ \dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) $A_3 = A_2 \cup \{0\}$.

(d) $A_4 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$.

(e) $A_5 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in (2, 4]\}$.

8 Dados A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, definimos $c \cdot A := \{ca : a \in A\}$. Además definimos $-A := (-1) \cdot A$.

(a) Demostrar que si A está acotado superiormente y $c > 0$, entonces $c \cdot A$ también está acotado superiormente, y se cumple que $\sup(c \cdot A) = c \cdot \sup(A)$.

(b) Demostrar que si A está acotado superiormente, entonces $-A$ está acotado inferiormente, y se cumple que $\operatorname{ínf}(-A) = -\sup(A)$.

(c) Enunciar y demostrar un resultado similar al de (a) para $c < 0$.

(d) Enunciar y demostrar un resultado similar al de (a) para $\operatorname{ínf}(c \cdot A)$.

9 Dados A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, definimos

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Demostrar que si A y B están acotados superiormente, entonces $A + B$ también lo está, y se cumple que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

10 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

(a) Demostrar que si $r > \ell$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$.

(b) Demostrar que si $r < \ell$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > r$ para todo $n \geq n_0$.

(c) ¿Es cierto que si $r \geq \ell$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq r$ para todo $n \geq n_0$?

(d) Si se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < r$ para todo $n \geq n_0$, ¿qué puede decirse sobre ℓ?

11 Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente y s una cota superior de A. Demostrar que $s = \sup(A)$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = s$.

12 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell > 0$.

(a) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\ell}$.

(b) Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

13 Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que existe una sucesión $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números **racionales**, estrictamente decreciente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = x$.

14 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por

$$\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Para que esta sucesión esté *bien definida* hay que verificar un detalle. ¿Cuál es?

(b) Demostrar que la sucesión es creciente y está acotada superiormente.

(c) Hallar el límite de la sucesión.

15 Sean a y b números reales positivos con $a < b$. Definimos dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_1 = a, & y_1 = b, \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, & y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Demostrar que $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Demostrar que las dos sucesiones son convergentes y tienen el mismo límite.
Sugerencia. Probar que $0 < y_n - x_n \leq \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

16 Para cada una de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hallar todos sus puntos límite y calcular $\limsup a_n$ y $\liminf a_n$:

(a) $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

(b) $a_n = \cos(\dfrac{n\pi}{2})$

(c) $a_n = (-1)^n \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$

(d) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, \dots$

17 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea ℓ un número real. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\limsup a_n = \ell$.

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existen infinitos n tales que $a_n > \ell - \varepsilon$ y existen sólo finitos n tales que $a_n > \ell + \varepsilon$.

18 Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones acotadas de números reales. Determinar (y demostrar) las relaciones de orden entre los cuatro números

$$\limsup(a_n+b_n), \quad \liminf(a_n+b_n), \quad \limsup(a_n)+\limsup(b_n), \quad \liminf(a_n)+\liminf(b_n).$$

19 (a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, con $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \theta < 1.$$

Demostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Usar el resultado anterior para demostrar que:

i) Si $\alpha > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\alpha^n}{n!}\right) = 0$.

ii) Si $0 < \alpha < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \alpha^n = 0$.

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n!}{n^n}\right) = 0$.

20 Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales positivos. Demostrar que:

$$\liminf \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq \liminf\left(\sqrt[n]{a_n}\right) \leq \limsup\left(\sqrt[n]{a_n}\right) \leq \limsup\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

21 Estudiar la convergencia de la sucesión $a_n = n^{1/n}$.